MECCANICA ANALITICA

Joseph-Louis LAGRANGE

EDIZIONI
JACQUES GABAY

July 16, 2014

Traduzione del prof. Gianluigi Trivia

Questa ristampa dell'edizione originale della *Mécanique analytique* di Lagrange è stata realizzata da un'opera cortesemente prestata dall'Ecole Polytechnique, alla quale vanno tutti i nostri ringraziamenti.
Siamo particolarmente riconoscenti a M. Paul Germain, Segretario a vita dell'Accademia delle Scienze, per averci permesso di utilizzare il suo esemplare personale per la revisione delle bozze.

1989, Edizioni Jacques Gabay
25, rue du D' Roux 92330 Sceaux

ISBN 2-87647-051-9

MECCANICA ANALITICA

del M. *DE LA GRANGE, dell'Accademia delle Scienze di Parigi, di Berlino, di Pietroburgo, di Torino, ecc*

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

Avec Approbation et Privilege du Roi.

AVVERTENZA

Ci sono già parecchi Trattati di Meccanica, ma il progetto di questo è completamente nuovo. Mi sono proposto di ridurre la teoria di questa Scienza, e la capacità di risolvere i problemi relativi, alle formule generali, il cui semplice sviluppo offre tutte le equazioni necessarie alla risoluzione di ogni problema. Spero che il modo con cui ho cercato di raggiungere questo obiettivo, non lascerà nulla a desiderare.

Questa Opera avrà d'altronde un'altra utilità; riunirà e presenterà sotto uno stesso punto di vista, i diversi Principi scoperti sinora per facilitare la risoluzione dei problemi di Meccanica, e mostrerà il legame e la dipendenza reciproca, e consentirà di dare un giudizio della loro esattezza ed estensione.

L'ho divisa in due Parti: la Statica o la Teoria dell'Equilibrio, e la Dinamica o la Teoria del Movimento; e ognuna di tali Parti tratterà separatamente dei Corpi solidi e dei fluidi.

Non vi si troveranno affatto Figure. I metodi che espongo non richiedono né costruzioni, né ragionamenti geometrici o meccanici, ma solamente operazioni algebriche, soggette a un procedimento regolare e uniforme. Coloro che amano l'Analisi, vedranno con piacere la Meccanica divenire una nuova branca e mi saranno grati d'averne pure esteso il dominio.

Contents

Chapter 1

LA STATICA

1.1 Sui diversi Principi della Statica

La Statica è la scienza dell'equilibrio delle forze. Si intende in generale come *forza* o *potenza* la causa, qualunque essa sia, che imprime o tende ad imprimere movimento ai corpi ai quali la si suppone applicata; è anche mediante la quantità di movimento impresso, o pronto a essere impresso, che la forza o potenza deve essere valutata. Nello stato di equilibrio la forza non entra realmente in funzione; essa produce solo una semplice tendenza al movimento; ma bisogna sempre misurarla per l'effetto che essa produrrebbe se non fosse bloccata. Prendendo una forza qualunque, ovvero il suo effetto come unitario, l'espressione di tutte le altre forze non è che un rapporto, una quantità matematica che può essere rappresentata da numeri o linee; è sotto questo punto di vista che le forze vanno considerate nella Meccanica.

L'equilibrio risulta dalla distruzione di parecchie forze che si combattono e che annientano reciprocamente l'azione che esse esercitano le une sulle altre e lo scopo della Statica è di fornire le leggi secondo le quali questa distruzione si manifesta. Queste leggi sono fondate su principi generali che si possono ridurre a tre: quello dell'*equilibrio nelle leve*, quello della *composizione dei moti* e quello delle *velocità virtuali*.

Archimede, il solo tra gli antichi che ci ha lasciato qualche teoria sulla Meccanica, nei suoi due libri de *Aequipon-derantibus*, è l'autore del principio delle leve, che consiste, come tutto il mondo sa, nel fatto che se una leva diritta è caricata di due pesi comunque esposti da una parte e dall'altra dal punto di sostegno a distanza reciprocamente proporzionali agli stessi pesi, questa leva sarà in equilibrio e il suo sostegno sarà caricato della somma dei due pesi. Archimede prende questo principio, nel caso di pesi uguali posti a distanze uguali dal punto di sostegno, per un assioma della Meccanica evidente di per se stesso, o almeno per un principio d'esperienza e riconduce a questo caso semplice e primitivo quello dei pesi diseguali, immaginando questi pesi quando sono commensurabili, divisi in più parti tutte uguali tra loro e supponendo che le parti di ogni pesi siano separate e trasportate da una parte all'altra sulla stessa leva, a distanze uguali, in modo che tutta la leva si trovi caricata di numerosi piccoli pesi uguali e posti a distanze uguali attorno al punto di sostegno. In seguito si dimostra la verità dello stesso teorema per i pesi incommensurabili con l'aiuto del metodo si esaustione, facendo vedere che non ci potrebbe essere equilibrio tra questi pesi, a meno che non siano una ragione inversa delle loro distanze dal punto d'appoggio.

Qualche moderno, come Stevin nella sua Statica e Galileo nei suoi Dialoghi sul moto, hanno reso più semplice la dimostrazione di Archimede, supponendo che i pesi attaccati alla leva siano due parallelepipedi orizzontali appesi per il loro centro e con larghezza e altezza uguali, ma con lunghezze doppie dei bracci della leva che si corrispondono inversamente. In tale modo i due parallelepipedi sono in ragione inversa rispetto ai loro bracci della leva e nello stesso tempo si trovano posti alle estremità, in modo da formarne uno solo il cui punto di mezzo corrisponde precisamente al punto di sostegno della leva.

Altri al contrario hanno creduto di trovare dei difetti nella dimostrazione di Archimede e l'hanno affrontata in modi diversi per renderla più rigorosa. Ma se se eccettua Huyghens, non c'è stato nessuno che abbia meritato su questo punto la riconoscenza dei Geometri.

La dimostrazione di Huyghens è basata sulla considerazione di equilibrio di un piano soggetto a parecchi pesi uguali e appoggiato su una linea retta; ma questa dimostrazione, per quanto ingegnosa e esente dalle difficoltà a cui era soggetta quella di Archimede, non sembrerebbe ancora al riparo da tutte le obiezioni; vedere il primo volume delle *Opera varia* di Huyghens.

Una volta stabilito il principio della leva diritta e orizzontale, se ne possono dedurre le leggi dell'equilibrio delle altre macchine, e in generale in qualunque sistema di potenza. È ciò che molti autori hanno fatto, soprattutto la Hire nel Trattato di Meccanica, stampato nel IX° volume delle antiche Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi. Sembrerebbe tuttavia che non si sia conosciuto primo il modo di ridurre alla teoria delle leve quella di tutte le altre macchine e soprattutto quella del piano inclinato, poiché non soltanto lo si vede dai frammenti pervenutici dell'ottavo Libro di Pappo, che gli Antichi ignoravano il vero rapporto della forza peso nel piano inclinato, ma si sa che la determinazione di tale rapporto è stata per lungo tempo un problema tra i primi Matematici moderni, problema la cui prima soluzione esatta è dovuta al famoso Stevin, Matematico del Principe Maurice de Nassau; anche se l'ha trovato per mezzo di una considerazione indiretta e indipendente dalla teoria delle leve.

Stevin considera un triangolo solido posto sulla base orizzontale in modo che i suoi due lati formino due piani inclinati e immagina che una corona formata di parecchi pesi uguali, infilati a distanze uguali, o piuttosto una catena di uguale grandezza sia posta sui due lati di questo triangolo in modo che tutta la parte superiore si trovi applicata ai due lati del triangolo e che la parte interna penda liberamente al di sotto della base, come se fosse attaccata a due estremità di tale base.

Ora Stevin sottolinea che se supponiamo che la catena stessa possa scivolare liberamente sul triangolo, essa dovrà tuttavia restare a riposo, poiché se cominciasse a scivolare in un verso, dovrebbe continuare a farlo sempre, finché la stessa causa del moto sussistesse, la catena si troverà, a causa dell'uniformità delle parti, posta sempre nello stesso modo sul triangolo, per cui ne risulterebbe un moto perpetuo, la qual cosa è assurda.

Vi è pertanto necessariamente equilibrio tra tutte le parti della catena, o è evidente che la porzione pendente al di sotto della base, è già essa stesa in equilibrio, pertanto bisogna che la tensione di tutti i pesi appoggiati su uno dei lati, controbilanci quella dei pesi appoggiati sull'altro lato; ma la somma degli uni sta alla somma degli altri come il rapporto delle lunghezze dei lati sui quali sono appoggiati. Servirà quindi sempre la stessa forza per sostenere uno o più pesi posti su un piano inclinato, per cui il peso totale sarà proporzionale alla lunghezza del piano, a parità di altezza; ma quando il piano è verticale, la forza è uguale al peso; per cui in tutto il piano inclinato, la forza sta al peso come l'altezza del piano alla sua lunghezza.

Ho riferito questa dimostrazione di Stevin, perché è assai ingegnosa e poiché è d'altronde poco conosciuta. Del resto, Stevin deduce da questa teoria quella dell'equilibrio tra tre forze che agiscono su uno stesso punto, e fa vedere che questo equilibrio ha luogo finché le forze sono parallele e proporzionali ai tre lati di un triangolo rettilineo qualunque. Vedere gli Elementi di Statica e le Aggiunte alla Statica di questo Autore nei suoi *Hypomnemata Mathematica*.

Il secondo Principio fondamentale dell'equilibrio è quello che riguarda la composizione dei moti. È fondato su queste supposizioni, che se due forze agiscono su un corpo lungo direzioni diverse, queste forze equivalgono allora ad un'unica forza, in grado di imprimere al corpo lo stesso movimento prodotto dalle due forze che agiscono separatamente. Ora un corpo che si muove uniformemente, contemporaneamente secondo due direzioni diverse, percorre necessariamente la diagonale del parallelogramma, del quale aveva percorso separatamente i lati in virtù di ciascuno dei due moti. Da ciò segue che due forze qualsiasi che agiscono insieme su un medesimo corpo, saranno equivalenti ad una sola rappresentata dalla sua quantità e dalla sua direzione, lungo la diagonale del parallelogramma i cui lati rappresentano in particolare le quantità e le direzioni delle due forze date. In ciò consiste il Principio che si chiama *la composizione delle forze*.

Questo Principio è da solo sufficiente a determinare le leggi dell'equilibrio in tutti i casi; poiché componendo successivamente tutte le forze a due a due, si perviene ad un'unica forza, che sarà equivalente a tutte queste forze, e che di conseguenza dovrà essere nulla in caso di equilibrio, se non vi è nel sistema alcun punto fisso; ma se ve ne è uno, bisognerà che la direzione di questa forza unica passi per il punto fisso. Ciò si può vedere nel Libro di Statica, e in particolare nella nuova Meccanica del Varignon, dove la teoria delle macchine è dedotta unicamente dal Principio ora esposto.

È evidente che il teorema di Stevin sull'equilibrio di tre forze parallele e proporzionali ai tre lati di un triangolo qualsiasi, è una conseguenza immediata e necessaria del principio della composizione delle forze, o piuttosto è lo stesso presentato sotto un'altra forma. Ma questo ha il vantaggio di essere fondato su nozioni semplici e naturali, mentre il teorema di Stevin lo è solo su considerazioni indirette.

Quanto all'invenzione del Principio in esame, mi sembra che si debba attribuire a Galileo, che nella seconda proposizione della quarta giornata dei suoi Dialoghi, dimostra che un corpo che si muove con due velocità uniformi, una orizzontale e l'altra verticale, deve assumere una velocità rappresentata dall'ipotenusa del triangolo i cui lati rappresentano tali velocità; ma sembra che Galileo non ha riconosciuto tutta l'importanza di questo teorema nella teoria dell'equilibrio. Poiché nei terzo Dialogo dove si tratta il moto dei corpi pesanti su piani inclinati, invece di impiegare il Principio della composizione dei moti per determinare direttamente la gravità relativa di un corpo su un piano inclinato, la deduce piuttosto dalla teoria dell'equilibrio sui piani inclinati, secondo quanto stabilito in precedenza nel suo Trattato della *Scienza Meccanica*, nel quale associa il piano inclinato alla leva.

Si trova poi la teoria dei moti composti negli scritti di Descartes, di Roberval, di Mersenne, di Wallis, ecc: ma è a Varignon che si deve far risalire l'utilizzo di questa teoria nell'equilibrio delle macchine.

Il progetto di una nuova Meccanica che pubblicò nel 1687, ha come scopo quello di dimostrare le regole della Statica con la composizione dei moti o delle forze; e questo obiettivo è stato completato in seguito nella *nuova Meccanica* pubblicata solo dopo la sua morte, nel 1715; aveva anche già esposto nel 1685, nella Storia della Repubblica delle Lettere, una Memoria sulle carrucole, dove si spiegava la teoria di queste macchine, mediante quella dei moti composti.

Vengo infine al terzo Principio, quello delle velocità virtuali. Si deve intendere per *velocità virtuale*, quella che un corpo in equilibrio è disposto a ricevere, nel caso in cui l'equilibrio venga a mancare; cioè la velocità che questo corpo assumerebbe realmente nel primo istante del suo moto; e il Principio di cui si tratta consiste nel fatto che forze sono in equilibrio quando sono in ragione inversa alle loro velocità virtuali, valutate secondo le direzioni di queste forze.

Per poco che si esaminino le condizioni dell'equilibrio nella leva e nelle altre macchine, è facile riconoscere la verità di tale Principio; tuttavia non sembra che i Geometri che hanno preceduto Galileo, ne abbiano avuto conoscenza, e credo di poterne attribuire la scoperta a questo Autore, che nel suo Trattato *della Scienza Meccanica*, e nei suoi Dialoghi sul movimento, lo propose come una proprietà generale dell'equilibrio delle macchine. Si veda lo Scolio della seconda Proposizione del terzo Dialogo.

Galileo intendeva per *momento* di un peso o di una forza applicata ad una macchina, lo sforzo, l'azione, l'energia, l'*impeto* di questo forza per muovere la macchina, in modo che vi fosse equilibrio tra le due forze, quando i loro momenti per muovere la macchina in versi contrari sono uguali; e mostra che il momento è sempre proporzionale alla forza moltiplicata per la velocità virtuale, dipendente dal modo in cui agisce la forza.

Questa nozione dei momenti è stata pure adottata da Wallis nella Meccanica pubblicata nel 1669. L'Autore vi introduce il principio dell'uguaglianza dei momenti come fondamento della Statica, e ne deduce la teoria dell'equilibrio nelle principali macchine.

Oggi si intende più comunemente per *momento* il prodotto di una forza per la distanza tra la sua direzione e un punto o una linea, cioè per il braccio della leva con la quale agisce; ma mi sembra che la nozione di *momento* data da Galileo e da Wallis, è assai più naturale e più generale, e non vedo perché la si sia abbandonata per sostituirla con un'altra che esprime solo il valore del momento in certi casi, come la leva, ecc.

Descartes ha pure ridotto tutta la Statica a un unico Principio, che ricorda per il contenuto quello di Galileo, ma che è presentato in modo meno generale. Questo principio è, che per sollevare un peso ad una certa altezza serve una forza in grado di sollevare un peso più pesante ad un'altezza tanto minore, o un peso minore ad un'altezza tanto maggiore. (Vedere la Lettera 73 della prima Parte, e il Trattato di Meccanica stampato nelle Opere postume). Da ciò risulta che si avrà equilibrio tra due pesi, quando saranno disposti in modo che i cammini perpendicolari che possono percorrere assieme, stiano in ragione reciproca dei pesi. Ma nell'applicazione di questo Principio alle diverse macchine, bisogna considerare solo gli spazi percorsi nel primo istante del moto, che sono proporzionali alle velocità virtuali; altrimenti non si avrebbe la reale legge dell'equilibrio.

Del resto, sia che si consideri il Principio delle velocità virtuali come una proprietà generale dell'equilibrio, così come fece Galileo; sia che lo si voglia assumere con Descartes e Wallis come la vera causa dell'equilibrio, bisogna ammettere che ha tutta le semplicità che si può desiderare in un principio fondamentale; e vedremo in seguito quanto questo Principio è ancora raccomandabile per la sua generalità.

Torricelli, famoso discepolo di Galileo, è l'autore di un altro Principio, che si rifà tuttavia a quello di Galileo, o che ne è piuttosto una conseguenza; cioè quando due pesi sono talmente legati, che posti a piacere, il loro centro di gravità non si alza né si abbassa, sono in equilibrio in tutte queste situazioni. Torricelli lo applica solo al piano inclinato, ma è facile convincersi che vale anche per le altre macchine. Vedere il suo Trattato del moto accelerato, che è apparso nel 1644.

Il Principio di Torricelli ne fa nascere un altro, usato da alcuni autori per risolvere con maggiore facilità diversi problemi di Statica. Afferma che in un sistema di corpi pesanti in equilibrio, il centro di gravità è il più basso possibile. Infatti, si sa dalla teoria *dei massimi e minimi*, che il centro di gravità è il più basso quando quando il differenziale della sua discesa è nullo, o, allo stesso modo, quando questo centro non sale né scende, mentre il sistema subisce spostamenti infinitesimi.

Il Principio delle velocità virtuali può essere generalizzato in questo modo:

Se un sistema qualsiasi di tanti corpi o punti che si vuole tirare, ognuno con forze qualsiasi, è in equilibrio, e si dà a questo sistema un piccolo movimento qualsiasi, in virtù del quale ogni punto percorre uno spazio infinitamente piccolo, che esprimerà la velocità virtuale; la somma delle forze applicate, moltiplicate ognuna per lo spazio che il punto in cui è applicata, percorre lungo la direzione di questa stessa forza, sarà sempre uguale a zero, intendendo come positivi i piccoli spazi percorsi nel verso delle forze, e come negativi gli spazi percorsi nel verso opposto.

Jean Bernoulli è il primo che io sappia, che ha compreso questa grande generalità del Principio delle velocità virtuali, e la sua utilità nella risoluzione dei problemi di Statica. È quanto si può vedere in una delle sue Lettere a Varignon, datata 1717, che quest'ultimo ha posto all'inizio della sezione nona della sua nuova Meccanica, sezione impiegato completamente a mostrata con diverse applicazioni la validità e l'uso di tale Principio.

Questo stesso Principio ha dato luogo in seguito a quello che M. de Maupertuis ha proposto nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1740, sotto il nome di Legge di equilibrio, e che M. Euler ha ulteriormente sviluppato e reso più generale nelle Memorie dell'Accademia di Berlino nell'anno 1751. Infine è ancora lo stesso Principio che serve come base a quello che M. il Marchese di Courtivron ha introdotto nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi per il 1748 e 1749.

E in generale credo di poter dire che tutti i principi generali che si potrebbero forse ancora scoprire nella scienza dell'equilibrio, saranno lo stesso principio delle velocità virtuali, considerato in modo diverso, e dal quale differiranno solo nell'espressione.

Del resto, questo principio è non solo in se stesso molto semplice e generale, ma ha inoltre il vantaggio prezioso e unico di potersi tradurre in una formula generale che racchiude tutti i problemi proponibili sull'equilibrio dei corpi. Andiamo ad esporre tale formula in tutta la sua estensione; cercheremo anche di presentarla in un modo ancora più generale di quanto finora fatto, e di darne nuove applicazioni.

1.2 Formula generale per l'equilibrio di un sistema qualsiasi di forze mostrando l'uso di questa formula

1. La legge generale dell'equilibrio nelle macchine, è che le forze stiano tra loro reciprocamente con le velocità dei punti nei quali sono applicate, prese lungo la direzione di queste forze.

È in questa legge che consiste ciò è comunemente chiamato il *Principio delle velocità virtuali*, Principio riconosciuto dopo lungo tempo come il Principio fondamentale dell'equilibrio, così come mostrato nella sezione precedente, e che si può di conseguenza considerare come uno specie di assioma della Meccanica.

Per ridurre questo Principio in formula, supponiamo che le forze $P.Q, R$, ecc., dirette secondo le rette date, si facciano equilibrio. Immaginiamo che dai punti in cui sono applicate queste forze si conducano delle linee rette uguali a p, q, r, ecc., e poste nelle direzioni di queste forze; indichiamo in generale con dp, dq, dr, ecc., le variazioni. o differenze di queste rette, in quanto esse possono risultati da un cambiamento qualsiasi infinitamente piccolo nella posizione dei diversi corpi o punti del sistema.

È chiaro che queste differenze esprimeranno gli spazi percorsi in uno stesso istante dalle forze P, Q, R, ecc., cioè, le velocità di queste forze valutate lungo le loro direzioni.

Ciò posto, immaginiamo dapprima tre forze P, Q, R in equilibrio, è chiaro che sostituendo al posto di una qualsiasi di loro un sostegno fisso, capace di resistere allo sforzo comune delle altre due, l'equilibrio sussisterà ancora; comincerò quindi col cercare le leggi dell'equilibrio tra due forze P, Q, supponendo che il punto sul quale la terza forza agisce sia fisso, di modo che la linea r rimanga la stessa mentre le linee p, q divengono $p + dp$, $q + dq$, oppure $p - dp$, $q - dq$. Per il principio generale, sarà necessario che le forze P, Q siano tra loro in ragione inversa dei differenziali dp, dq; ma è facile pensare che non vi sarebbe equilibrio tra le due forze, a meno che non siano disposte in modo che quando una di esse si muove, lungo la sua direzione, l'altra non sia obbligata a muoversi nel verso contrario al suo; da ciò segue che i valori delle differenze dp, dq devono essere di segno contrario; siccome, quindi, i valori delle forze P, Q sono supposte tutte due positive, si avrà per l'equilibrio

$$\frac{P}{Q} = -\frac{dq}{dp}$$

oppure

$$Pdp + Qdq = 0$$

è la formula generale dell'equilibrio delle due forze.

Si troverà allo stesso modo, considerando la forza Q, come applicata a un punto fisso, l'equazione

$$Pdp + Rdr = 0$$

per le condizioni di equilibrio tra le forze P, R. Analogamente si avrà per l'equilibrio delle due forze Q, R l'equazione

$$Qdq + Rdr = 0$$

Si ha quindi per le tre forze $P.Q, R$ le tre equazioni

$$Pdp + Qdq = 0 \quad Pdp + Rdr = 0 \quad Qdq + Rdr = 0$$

supponendo nella prima di queste equazioni r costante, nella seconda q costante, e nella terza p costante.

Da ciò segue che si avrà in generale, facendo variare allo stesso tempo p, q, r, l'equazione

$$Pdp + Qdq + Rdr = 0$$

Infatti, affinché si abbia equilibrio tra le forze P, Q, R, basta che esse siano disposte in modo che una non si possa muovere indipendentemente dalle altre.

Bisogna quindi che vi sia una relazione data tra le differenze dp, dq, dr e di conseguenza anche tra le quantità finite p, q, r; quindi in virtù di questa relazione, qualunque sia, la variabile p potrà essere vista come una funzione delle altre due variabili q, r; e il suo differenziale dp potrà, di conseguenza, esprimersi in generale con

$$dp = mdq + ndr$$

Assumendo r costante, si avrà semplicemente $dp = mdq$, e prendendo q costante, si avrà $dp = ndr$; quindi il termine Pdp che si troverà nelle prime due equazioni, potrà essere rappresentato da $Pmdq$ nella prima di queste equazioni, e con $Pndr$ nella seconda; di modo che la somma di questi due termini sarà

$$P\,(mdq + ndr) = Pdp$$

Si proverà allo stesso modo, assumendo q come funzione di p, r, che la somma dei due termini Qdq che entrano nella prima e nella terza equazione, si ridurrà semplicemente a Qdq, considerando in dq, p, r come variabili; e analogamente i due termini Rdr che si trovano nelle ultime due equazioni, si ridurranno a Rdr, (essendo p, q variabili in dr). Di modo che la somma delle tre equazioni particolari trovate, diverrà, considerando p, q, r come variabili

$$Pdp + Qdq + Rdr = 0$$

formula dell'equilibrio di tre forze qualsiasi P, Q, R.

Se vi fosse una quarta forza S, diretta lungo la retta s, si troverebbe con un ragionamento del tutto simile, che l'equilibrio delle quattro forze P, Q, R, S sarà racchiuso nella formula

$$Pdp + Qdq + Rdr + Sds = 0$$

Così di seguito, indipendentemente dal numero delle forze.

2. Si ha quindi in generale per l'equilibrio di un numero qualsiasi di forze P, Q, R, ecc., dirette lungo le rette p, q, r, s, ecc., applicate a un sistema qualsiasi di corpi o punti disposti tra loro in un modo qualsiasi, una equazione del tipo

$$Pdp + Qdq + Rdr + Sds + ecc = 0$$

Questa è la formula generale dell'equilibrio di un sistema qualsiasi di forze.

Chiameremo ognuno dei termini di questa formula, come Pdp, il momento della forza P, assegnando alla parola momento il significato che Galileo le ha dato, cioè, il prodotto della forza per la velocità virtuale. Di modo che la formula generale dell'equilibrio consisterà nell'uguaglianza a zero, della somma dei momenti di tutte le forze.

3. Per utilizzare tale formula, la difficoltà si ridurrà nel determinare, conformemente alla natura del sistema dato, i valori dei differenziali dp, dq, dr, ecc.

Si considererà quindi il sistema nelle due diverse posizioni, e infinitamente vicine, e si cercheranno le espressioni più generali delle differenze in questione, introducendo in queste espressioni tante quantità indeterminate, quanti elementi arbitrari vi sono nella variazione di posizione del sistema. Si sostituiranno poi queste espressioni di dp, dq, dr, ecc., nell'equazione proposta, e basterà risolvere tale equazione indipendentemente da tutte le incognite, affinché l'equilibrio del sistema sussista in generale e in tutti i versi. Si uguaglierà, quindi, separatamente a zero, la somma dei termini attribuiti a ciascuna delle stesse incognite; e si avranno, in tal modo, tante equazioni particolari, quanto sono queste incognite; non è difficile convincersi che il loro numero deve sempre essere uguale a quello delle quantità incognite nella posizione del sistema; si avranno, quindi, con questo metodo, tante equazione quante basteranno per determinare la condizione di equilibrio del sistema.

È così che hanno operato tutti gli Autori che hanno applicato finora il Principio delle velocità virtuali, alla soluzione dei problemi di Statica; ma questo modo di impiegare questo Principio, può richiedere costruzioni e considerazioni geometriche, che rendono le soluzioni così lunghe come se le si deducesse dai principi ordinari della Statica; è forse la principale ragione che ha impedito che finora non si sia fatto di questo Principio l'uso che sembrerebbe di dover fare, vista la semplicità e la generalità.

4. Qualunque siano le forze P, Q, R, ecc, che agiscono sui diversi corpi o punti del sistema, è chiaro che si può sempre supporli tendenti a punti posti nelle direzioni di queste forze, e che chiameremo i *centri* delle forze.

Così per avere le linee p, q, r, ecc, che rappresentano le direzioni delle forze P, Q, R, ecc, non avrà che da prendere le distanze rettilinee tra i corpi o i punti, sui quali le forze agiscono, e i centri di queste stesse forze. Ora questi centri possono essere posti al di fuori del sistema, oppure farne parte.

Nel primo caso è visibile che le differenze dp, dq, dr, ecc, esprimono le variazioni intere delle linee p, q, r, ecc, dovute al cambiamento di situazione del sistema; sono di conseguenza i differenziali esatti delle quantità p, q, r, ecc, considerando come variabili tutte le quantità relative alla condizione del sistema, e come costanti quelle che si riferiscono alla posizione dei diversi centri di forza.

Nel secondo caso, alcuni dei corpi del sistema saranno loro stessi i centri delle forze che agiscono su altri corpi dello stesso sistema, e a causa dell'uguaglianza tra l'azione e la reazione, questi ultimi corpi saranno allo stesso tempo i centri delle forze che agiscono sui primi.

Consideriamo quindi due corpi che agiscono l'uno sull'altro con una forza qualsiasi P, sia che questa forza derivi dall'attrazione o dalla repulsione di questi corpi, o da una molla posta tra loro, o in un altro modo qualsiasi, sia p la distanza tra questi due corpi, e che dp' esprime la variazione di questa distanza, in quanto dipende dal cambiamento di condizione di uno dei corpi; è chiaro che si avrà relativamente a questo corpo, Pdp' per il momento della forza P; ugualmente se si indica con dp" la variazione della stessa distanza p, risultante dal cambiamento di condizione dell'altro corpo, si avrà relativamente a questo secondo corpo, il momento Pdp" della stessa forza P; quindi il momento totale dovuto a questa forza, sarà rappresentata da $P\left(dp' + dp"\right)$; ma è chiaro che $dp' + dp"$ è il differenziale esatto di p che indicheremo con dp, poiché la distanza p può variare solo per lo spostamento dei due corpi; il momento, quindi, di cui si tratta sarà espresso semplicemente da Pdp: si può estendere questo ragionamento a un numero di corpi a piacere.

5. Ne segue che per avere la somma dei momenti di tutte le forze di un sistema dato, bisognerà considerare in particolare ognuna delle forze che agiscono sui diversi corpi o punti del sistema, e prendere la somma dei prodotti di queste diverse forze moltiplicata ognuna per il differenziale della distanza rispettiva tra i due termini di ogni forza, cioè tra il punto sul quale agisce questa forza e quello da cui parte, considerando, in questi differenziali, come variabili tutte le quantità che dipendono dalla condizione del sistema, e come costanti quelle che si riferiscono ai punti o centri esterni, cioè considerando questi punti come fissi, mentre si fa variare la condizione del sistema. Questa quantità essendo uguale a zero, darà la formula generale del principio dell'equilibrio.

6. Per esprimere analiticamente la stessa quantità, ciò che si mostra più semplice, è riferire la posizione di tutti i punti del sistema dato alle coordinate perpendicolari e parallele a tre assi fissi nello spazio.

Chiameremo in generale x, y, z le coordinate dei punti di applicazione delle forze, e le distingueremo poi con uno o più tratti, relativamente ai diversi punti del sistema.

Indicheremo anche con a, b, c le coordinate dei centri delle forze.

È chiaro che le distanze p, q, r, ecc, saranno espresse in generale dalla formula

$$\sqrt{\left((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right)}$$

nella quale a, b, c saranno costanti o almeno considerate tali, mentre x, y, z variano, nel caso in cui esse si riferiscono a punti fissi posti al di fuori del sistema; ma nel caso in cui le forze partono da qualcuno dei corpi del sistema, queste quantità a, b, c diverranno $x^{''' \, ecc}$, $y^{''' \, ecc}$, $z^{''' \, ecc}$ e saranno di conseguenza variabili.

Avendo così le espressioni delle quantità finite p, q, r, ecc, in funzioni note delle coordinate di diversi corpi del sistema, basterà differenziare, considerando queste coordinate come variabili, per avere i valori cercati delle differenze dp, dq, dr, ecc, che entrano nella formula generale dell'equilibrio.

Ma sebbene si possa sembra considerare le forze P, Q, R, ecc, come tendenti a centri dati; tuttavia siccome la considerazione di questi centri è estranea al problema, nel quale si considerano solitamente come dati, come la quantità e la direzione di ogni forza; ecco dei modi più generali di esprimere le differenze dp, dq, dr, ecc.

7. E dapprima supponendo, cosa che è sempre permessa, che la forza P tende a un centro fisso, si ha

$$p = \sqrt{\left((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right)}$$

e differenziando senza che a, b, c varino

$$dp = \frac{x-a}{p}dx + \frac{y-b}{p}dy + \frac{z-c}{p}dz$$

È facile ora pensare che $\frac{x-a}{p}, \frac{y-b}{p}, \frac{z-c}{p}$ non sono diversi dai coseni degli angoli che la linea p forma con le coordinate x, y, z. In generale se si indicano con α, β, γ gli angoli che la direzione della forza P forma con gli assi x, y, z, o con parallele a questi assi, si avrà

$$\frac{x-a}{p} = \cos\alpha \quad \tfrac{y-b}{p} = \cos\beta \quad \frac{z-c}{p} = \cos\gamma$$

di conseguenza

$$dp = \cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz$$

e analogamente per le altre differenze dq, dr, ecc.

Si evidenzierà rispetto agli angoli α, β, γ che $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, ciò che è evidente dalla formula precedente. In secondo luogo che se si indicano con ε l'angolo che la proiezione della linea p sul piano xy forma con l'asse x, è chiaro che si avrà

$$\frac{x-a}{\pi} = \cos\varepsilon \quad \tfrac{y-b}{\pi} = \sin\varepsilon$$

supponendo $\pi = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$; sostituendo, pertanto, per $x-a$ e $y-b$ i loro valori $p\cos\alpha$, $p\cos\beta$, si avrà

$$\pi = p\sqrt{(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)} = p\sqrt{(1-\cos^2\gamma)} = p\sin\gamma$$

quindi

$$\frac{x-a}{p} = \sin\gamma\cos\varepsilon \qquad \frac{y-b}{p} = \sin\gamma\sin\varepsilon$$

e di conseguenza,

$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\varepsilon \qquad \cos\beta = \sin\gamma\sin\varepsilon$$

8. Considero poi che poiché dp rappresenta il piccolo spazio che il corpo o punto al quale è applicata la forza P può percorrere lungo la direzione di tale forza, se si pone $dp = 0$, questo punto potrà muoversi solo nelle direzioni perpendicolari a quella della forza medesima. Quindi, $dp = 0$ sarà l'equazione differenziale di una superficie alla quale la direzione della forza P sarà perpendicolare.

Supponiamo ora in generale che la forza P agisca perpendicolarmente a una superficie rappresentata dall'equazione differenziale $du = 0$, sia che du sia oppure no un differenziale esatto. Siccome questa equazione deve essere equivalente all'equazione $dp = 0$, si avrà necessariamente $du = Vdp$, dove V è una funzione finita delle coordinate x, y, z. E per trovare questa funzione, basterà notare che poiché si ha per la sezione precedente $dp = \cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz$ e $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, si avrà secondo la notazione usata per le differenze parziali,

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dz}\right)^2 = 1$$

quindi anche

$$\left(\frac{du}{Vdx}\right)^2 + \left(\frac{du}{Vdy}\right)^2 + \left(\frac{du}{Vdz}\right)^2 = 1$$

da ciò si ricava

$$V = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}$$

pertanto

$$dp = \frac{du}{V} = \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}$$

Si determineranno in modo analogo i valori delle altre differenze dq, dr, ecc, dalle equazioni differenziali delle superfici alle quali le direzioni delle forze Q, R, ecc. sono perpendicolari.

9. I valori delle differenze dp, dq, dr, ecc, essendo note come funzioni differenziali delle coordinate dei diversi corpi del sistema, basterà sostituirli nella formula generale

$$Pdp + Qdq + Rdr + ecc = 0$$

e verificare poi questa equazione nella forma più generale, e indipendente dai differenziali che essa contiene.

Se, quindi, il sistema è completamente libero, di modo che non abbia alcuna relazione data tra le coordinate dei diversi corpi, né, di conseguenza, tra i loro differenziali, basterà soddisfare all'equazione precedente, indipendentemente da questi differenziali, e per questo eguagliare separatamente a zero la somma di tutti i termini che si troveranno moltiplicati per ciascuno di essi; ciò fornirà tante equazioni quante sono le coordinate variabili, e di conseguenza tante quante basteranno per determinare tutte queste variabili, e conoscere tramite loro la posizione di tutto il sistema nella condizione di equilibrio.

10. Ma se la natura del sistema è tale che i corpi sono soggetti nei loro movimenti a condizioni particolari, bisognerà cominciare con l'esprimere tali condizioni con equazioni analitiche che chiameremo *equazioni di condizione*; operazione sempre facile. Per esempio, se qualche corpo fosse obbligato a muoversi su linee o superfici date, si avrebbero tra le loro coordinate, anche le equazioni stesse delle linee o superfici date; se due corpi fossero talmente uniti, in modo da doversi trovare sempre ad una medesima distanza k, si avrebbe evidentemente l'equazione

$$k^2 = (x' - x")^2 + (y' - y")^2 + (z' - z")^2$$

e così via.

Le equazioni condizione così trovate, serviranno ad eliminare altrettanti differenziali nelle espressioni di dp, dq, dr, ecc, di modo che i differenziali restanti siano assolutamente indipendenti tra loro, ed esprimano solo quanto di arbitrario vi è nel cambiamento della condizione del sistema. Siccome la formula generale dell'equilibrio deve essere valida, qualunque possa essere questo cambiamento, basterà uguagliare separatamente a zero la somma di tutti i termini che comprenderanno i differenziali indeterminati; da ciò si otterranno tante equazioni particolari relative a questi differenziali; e queste equazioni, essendo unite alle equazione di condizione assegnate, racchiuderanno tutte le condizioni necessarie per la determinazione della condizione di equilibrio del sistema; poiché è facile pensare che tutte queste equazioni insieme saranno sempre nello stesso numero delle diverse variabili che fungono da coordinate a tutti i corpi del sistema, e basteranno sempre, di conseguenza, a determinare ognuna di esse.

11. Del resto se abbiamo sempre determinato la posizione di questi corpi con coordinate rettangolari, trarremo vantaggio dalla semplicità e facilità del calcolo; ma è possibile anche impiegarne altre utilizzando il metodo precedente; poiché è chiaro che nulla obbliga a servirci di coordinate rettangolari, piuttosto che di altre rette o quantità, relative alla posizione dei corpi. Così, invece delle due coordinate x, y, si potrà impiegare, quando le circostanze lo esigeranno, un raggio vettore $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$e un angolo ϕ la cui tangente sia $\frac{y}{x}$ (ciò che darà $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$), mantenendo la terza coordinata z; oppure si impiegherà un raggio vettore $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ con due angoli ϕ, ψ, tali che $\tan \phi = \frac{y}{x}$, $\tan \psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, che darà $x = \rho \cos \psi \cos \varphi$, $y = \cos \psi \sin \phi$, $z = \rho \sin \psi$; o altri angoli o linee qualsiasi.

Sottolineiamo ancora che siccome il metodo in questione considera solo le differenze dx, dy, dz, è permesso introdurre immediatamente al posto di queste, altre espressioni differenziali qualunque, sia integrabili oppure no, e senza alcun riguardo ai valori di x, y, z.

1.3 Proprietà generali dell'equilibrio dedotte dalla formula precedente

1. Consideriamo un sistema qualsiasi di corpi o punti, che essendo sottoposti a forze qualsiasi, che si fanno mutuamente equilibrio. Se in un istante l'azione di queste forze non si equilibrassero, il sistema inizierebbe a muoversi, e qualsiasi sia il movimento, lo si potrebbe sempre pensare composto, 1° di un moto di traslazione comune a tutti i corpi; 2° di un moto di rotazione attorno a un punto qualsiasi; 3° moti relativi dei corpi tra loro, per i quali varieranno la loro posizione e le loro distanze reciproche. Affinché vi sia equilibrio è necessario che i corpi non assumano nessuno di questi moti. È chiaro che i moti relativi dipendono dal modo in cui i corpi sono disposti gli uni rispetto agli altri; di conseguenza le condizioni necessarie per impedire tali moti, devono essere particolari per ogni sistema. Ma i moti di traslazione e rotazione possono essere indipendenti dalla forma del sistema, e svolgersi senza che la disposizione e i legami reciproci siano disturbati.

Così la considerazione di queste due specie di moti deve fornire delle condizioni o proprietà generali dell'equilibrio. È quanto esamineremo ora.

2. Un numero qualsiasi di corpi sia visto come tanti punti, disposti o legati tra loro a piacere, i quali siano tirati dalle forze $P, P', P"$, ecc, lungo le direzioni delle rette $p, p', p"$, ecc. Si avrà, per la sezione precedente, per l'equilibrio di questi corpi, la formula

$$Pdp + P'dp' + P"dp" + ecc = 0$$

Siano ora x, y, z le coordinate rettangolari del punto tirato dalla forza P; x', y', z' quelle del punto tirato dalla forza P' e così di seguito; queste coordinate sono parallele ai tre assi fissi, e hanno per origine lo stesso punto.

Siano, inoltre, α, β, γ gli angoli che la retta p o la direzione della forza P forma con gli assi x, y, z; α', β', γ', gli angoli che la direzione di P' forma con gli stessi assi, e così di seguito.

Si avrà (sez. precedente, §7),

$$\begin{array}{rcl} dp & = & \cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz \\ dp' & = & \cos\alpha' dx' + \cos\beta' dy' + \cos\gamma' dz' \\ dp" & = & \cos\alpha" dx" + \cos\beta" dy" + \cos\gamma" dz" \\ ecc & & \end{array}$$

E la formula dell'equilibrio diverrà,

$$\begin{array}{rcl} 0p & = & P(\cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz) \\ dp' & = & P'(\cos\alpha' dx' + \cos\beta' dy' + \cos\gamma' dz') \\ dp" & = & P"(\cos\alpha" dx" + \cos\beta" dy" + \cos\gamma" dz") \\ ecc & & \end{array}$$

3. Facciamo, in quanto permesso,

$$\begin{array}{ccc} x' = x + \xi & y' = y + \eta & z' = z + \zeta \\ x" = x + \xi' & y" = y + \eta' & z" = x + \zeta' \\ ecc & & \end{array}$$

sostituendo questi valori nella formula precedente, si avrà questa trasformata,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P"\cos\alpha" + ecc)\, dx \\ & + & (P\cos\beta + P'\cos\beta' + P"\cos\beta" + ecc)\, dy \\ & + & (P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P"\cos\gamma" + ecc)\, dz \\ & + & P'(\cos\alpha' d\xi + \cos\beta' d\eta + \cos\gamma"\zeta) \\ & + & P"(\cos\alpha" d\xi' + \cos\beta" d\eta' + \cos\gamma" d\zeta') \\ & ecc & \end{array}$$

Essendo x, y, z le coordinate assolute del corpo tirato dalla forza P, è chiaro che $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$, ecc, saranno le coordinate relative degli altri corpi rispetto a quelle prese per l'origine comune; di modo che la posizione reciproca dei corpi dipenderà solo da quest'ultime coordinate, e non dalle prime. Quindi, se si suppone il sistema completamente libero, cioè, dove i corpi sono legati tra loro in un modo qualsiasi, ma senza che siano trattenuti o impediti da appoggi fissi, o da ostacoli esterni qualsiasi, è facile pensare che le condizioni risultanti dalla natura del sistema, riguarderanno solo le quantità $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$, ecc, e non le quantità x, y, z, i cui differenziali risultano, di conseguenza, indipendenti e indeterminati.

Nell'equazione precedente basterà uguagliare separatamente a zero ognuno dei membri comprendenti dx, dy, dz; si otterranno così tre equazioni particolari.;

$$\begin{array}{rcl} P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P"\cos\alpha" + ecc & = & 0 \\ P\cos\beta + P'\cos\beta' + P"\cos\beta" + ecc & = & 0 \\ P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P"\cos\gamma" + ecc & = & 0 \end{array}$$

le quali dovranno necessariamente valere per l'equilibrio di un sistema libero. Queste sono le equazioni necessarie ad impedire il moto di traslazione.

4. Se le forze $P, P', P"$, ecc, fossero parallele, si avrebbe $\alpha = \alpha' = \alpha"$ ecc, $\beta = \beta' = \beta"$ ecc, $\gamma = \gamma' = \gamma"$, ecc, e le tre equazioni precedenti si ridurrebbero a questa,

$$P + P' + P" + ecc = 0$$

la quale mostra che la somma delle forze parallele deve essere nulla.

In generale è facile pensare che P rappresenti l'azione totale della forza P lungo la propria direzione, $P\cos\alpha$ la sua azione relativa, stimata lungo la direzione dell'asse x, la quale forma con la direzione della forza l'angolo α; analogamente $P\cos\beta$, e $P\cos\gamma$, saranno le azioni relative della stessa forza, valutate lungo le direzioni degli assi y, z e così di seguito.

Da quanto detto risulta questo teorema, che *la somma delle forze valutate lungo la direzione dei tre assi perpendicolari tra loro, deve essere nulla rispetto a ognuno di questi assi, nell'equilibrio di un sistema libero.*

5. Prendiamo ora, cosa permessa, al posto delle coordinate $x, y, x', y', x", y"$, ecc, i raggi vettori $\rho, \rho', \rho"$, ecc, con gli angoli $\phi, \phi', \phi"$, ecc, che questi angoli formano con l'asse x; si avrà, come si è fatto, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, e analogamente $x' = \rho'\cos\phi'$, $y' = \rho'\sin\phi'$, ecc. Pertanto $dx = \cos\phi d\rho - yd\phi$, $dy = \sin\phi d\rho + xd\phi$, $dx' = x = \cos\phi' d\rho' - y'd\phi'$, $dy' = \sin\phi' d\rho' + x'd\rho'$, ecc. E l'equazione del §" diverrà con queste sostituzioni,

$$\begin{aligned} 0 &= P\left(x\cos\beta - y\cos\alpha\right) + P'\left(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha'\right)d\phi' \\ &+ P"\left(x"\cos\beta" - y"\cos\alpha"\right)d\phi" + ecc \\ &+ P\left(\cos\phi\cos\alpha + \sin\phi\cos\beta\right)d\rho + P'\left(\cos\phi'\cos\alpha' + \sin\phi'\cos\beta'\right)d\rho' \\ &+ P"\left(\cos\phi"\cos\alpha" + \sin\phi"\cos\beta"\right)d\rho" + ecc \\ &+ P\cos\gamma dz + P'\cos\gamma' dz' + P"\cos\gamma" dz" + ecc \end{aligned}$$

Si si pone ora $\phi' = \phi + \sigma$, $\phi" = \phi + \sigma'$, ecc. è chiaro che σ, σ', ecc, saranno gli angoli che i raggi $\rho, \rho', \rho"$, ecc, formano con il raggio ρ; di conseguenza le distanze dei corpi, tanto tra loro, quanto rispetto al piano x, y e all'origine delle coordinate, dipenderanno semplicemente dalle quantità $\rho, \rho', \rho"$, ecc, $\sigma, \sigma', \sigma"$, ecc, $z, z', z"$, ecc. Se, quindi, il sistema è libero di ruotare attorno a questo punto, parallelamente al piano x, y, cioè, attorno all'asse z, che perpendicolare a questo piano, l'angolo ϕ sarà indeterminato e la differenza $d\phi$ arbitraria. Da ciò segue che il termine contenente $d\phi$ nell'equazione precedente, dovrà essere in particolare uguale a zero.

6. Si avrà quindi l'equazione,

$$P\left(x\cos\beta - y\cos\alpha\right) + P'\left(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha'\right) + P"\left(x"\cos\beta" - y"\cos\alpha"\right) + ecc = 0$$

la quale dovrà valere nell'equilibrio dell'intero sistema che è libero di ruotare attorno all'asse z.

Allo stesso modo si troverà, rispetto all'asse y, se il sistema è libero di ruotare attorno a questo asse, l'equazione

$$P\left(x\cos\gamma - z\cos\alpha\right) + P'\left(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha'\right) + P"\left(x"\cos\gamma" - z"\cos\alpha"\right) + ecc = 0$$

Analogamente si avrà rispetto all'asse x, se il sistema è libero si ruotare attorno a questo asse, l'equazione

$$P\left(y\cos\gamma - z\cos\beta\right) + P'\left(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta'\right) + P"\left(y"\cos\gamma" - z"\cos\beta"\right) + ecc = 0$$

Di modo che, quando il sistema potrà ruotare attorno ad ognuno di questi tre assi, affinché vi sia equilibrio tutte le tre equazioni dovranno valere.

Se nella quantità $x\cos\beta - y\cos\alpha$, che moltiplica la forza P nella prima equazione, si mette per $\cos\alpha, \cos\beta$, i valori $\sin\gamma\cos\varepsilon$, $\sin\gamma\sin\varepsilon$ (punto 7, §2), si ha $\sin\gamma\left(x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon\right)$; e questa quantità diverrà $\rho\sin\gamma\sin\left(\varepsilon - \phi\right)$, sostituendo ad x, y i loro valori $\rho\cos\phi, \rho\sin\phi$.

Ora ε è l'angolo che la proiezione della direzione della forza P sul piano x, y forma con l'asse x, e ϕ è l'angolo che il raggio vettore ρ forma con lo stesso asse. Pertanto $\varepsilon - \phi$ sarà l'angolo che proiezione in questione forma con questo raggio; di conseguenza $\rho\sin\left(\varepsilon - \phi\right)$ sarà la perpendicolare tracciata dal centro dei raggi ρ alla direzione della forza P proiettata sul piano x, y; cioè in generale la perpendicolare tracciata dall'asse z (il quale è pure perpendicolare al raggio ρ), alla direzione di questa forza. Così chiamando π questa perpendicolare, si avrà $x\cos\beta - y\cos\alpha = \pi\sin\gamma$; e si potrà così ridurre ad una forma simile le quantità analoghe, che moltiplicano le forze $P, P', P"$, ecc, nelle tre precedenti equazioni.

7. Quando il sistema è libero di ruotare e piroettare in tutti i versi attorno a un punto, si potrebbe dubitare sulla possibilità di considerare separatamente le rotazioni attorno ai tre assi perpendicolari passanti per tale punto, e se, essendo impedite queste tre rotazioni attorno a questo punto, lo dovranno essere pure tutte le altre.

Per chiarire questo dubbio, suppongo $x = \rho\cos\phi$, $y = \sin\phi$, $x' = \rho\cos\phi'$, $y' = \sin\phi'$ ecc; e facendo variare semplicemente gli angoli ϕ, ϕ', ecc, della stessa differenza $d\phi$, si avrà,

$$dx = -yd\phi \quad dy = xd\phi \quad dx' = -y'd\phi \quad dy' = x'd\phi\, ecc$$

Queste sono le variazioni di x, y, x', y', ecc, dovute alla rotazione elementare $d\phi$ del sistema attorno all'asse z.

Si avranno analogamente le variazioni di y, z, y', z', ecc. dovute ad una rotazione elementare $d\psi$ attorno all'asse x, cambiando semplicemente nelle formule precedenti, x, y, x', y', ecc, in y, z, y', z', ecc: e $d\phi$ in $d\psi$; è ciò darà

$$dy = -zd\psi \quad dz = yd\psi \quad dy' = -z'd\psi \quad dz' = y'd\psi\, ecc$$

Infine, cambiando in queste ultime formule y, z, y', z', ecc rispettivamente in z, x, z', x', ecc, e $d\psi$ in $d\omega$, si avranno le variazioni provenienti dalla rotazione elementare $d\omega$ attorno all'asse y, le quali saranno

$$dz = -xd\omega \quad dx = zd\omega \quad dz' = -x'd\omega \quad dx' = z'd\omega\, ecc$$

Se si suppone, quindi, che le tre rotazioni elementari $d\phi, d\psi, d\omega$ si susseguano, le variazioni totali di coordinate x, y, z, x', y', z', ecc, saranno uguali alle somme delle variazioni parziali dovute a ciascuna di queste rotazioni; di modo che si avrà

$$\begin{array}{ccc} dx = zd\omega - yd\phi & dy = xd\phi - zd\psi & dz = yd\psi - x\omega d \\ dx' = z'd\omega - y'd\phi & dy' = x'd\phi - z'd\psi & dz' = y'd\psi - x'd\omega \end{array}$$

ecc.

8. Sottolineo ora che se le coordinate x, y, z di un punto qualsiasi del sistema fossero rispettivamente proporzionali a $d\psi, d\omega, d\phi$, le variazioni dx, dy, dz, saranno nulle, come si vede dalle formule appena presentate. Tutti i punti che corrisponderanno a queste coordinate saranno immobili dall'istante in cui il sistema descriverà i tre angoli $d\psi, d\omega, d\phi$, ruotando attorno agli assi x, y, z.

È chiaro che tutti questi punti sono su una linea retta che passa per l'origine delle coordinate; non è difficile pensare che gli assi x, y, z degli angoli i cui coseni saranno

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi")}} \quad \frac{d\omega}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi")}} \quad \frac{d\phi}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi")}}$$

questa retta sarà, pertanto, immobile per tutto l'istante, e il moto del sistema potrà essere solo un semplice moto di rotazione attorno a questa stessa retta, che si chiamerà a causa di ciò, asse di istantanea rotazione.

Per avere l'angolo descritto in virtù di questa rotazione, si considererà che $\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi")}$ è l'elemento di spazio descritto da un punto qualunque che corrisponde alle coordinate x, y, z.

Sostituendo ora i valori di dx, dy, dz trovati in precedenza, si ha

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 = & \quad (zd\omega - yd\phi)^2 + (xd\phi - zd\psi)^2 + (yd\psi - xd\omega)^2 \\ = & \quad \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2\right) - (xd\psi + yd\omega + zd\phi)^2 \end{aligned}$$

D'altro canto, è facile provare con la Geometria, che $xd\psi + yd\omega + zd\phi = 0$, è l'equazione di un piano passante per l'origine delle coordinate e perpendicolare alla retta, per la quale le coordinate saranno proporzionali alle quantità date $d\psi, d\omega, d\phi$, cioè, l'asse di istantanea rotazione, indicando sempre le coordinate per x, y, z. Pertanto, lo spazio elementare descritto da un punto qualsiasi di questo piano, sarà espresso semplicemente da $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \times \sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2)}$; e siccome $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ è la distanza di questo punto dall'origine, in cui il piano e l'asse di istantanea rotazione si intersecano ad angolo retto, ne segue che $\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2)}$ sarà l'angolo elementare di rotazione attorno a questo asse, in virtù delle rotazioni parallele $d\psi, d\omega, d\phi$ attorno agli assi delle coordinate x, y, z.

9. Si deve concludere in generale, che rotazioni qualsiasi $d\psi, d\omega, d\phi$ attorno ai tre assi che incontrano perpendicolarmente in un punto, si compongono in uno solo, $d\theta = \sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2)}$, attorno ad un asse passante per lo stesso punto di intersezione, e formante con questo angoli λ, μ, ν, tali che $\cos\lambda = \frac{d\psi}{d\theta}$, $\cos\mu = \frac{d\omega}{d\theta}$, $\cos\nu = \frac{d\phi}{d\theta}$, e reciprocamente che una rotazione qualunque $d\theta$ attorno ad un asse dato, si può comporre in tre rotazioni parziali espresse da $d\theta\cos\lambda$, $d\theta\cos\mu$, $d\theta\cos\nu$, attorno a tre assi che si incontrano perpendicolarmente in un punto dell'asse dato, e che formano con esso angoli λ, μ, ν; e ciò fornisce, come si vede, un mezzo assai semplice di comporre e scomporre i moti di rotazione.

10. Pertanto, qualsiasi rotazione che il sistema possa avere attorno al punto che è l'origine delle coordinate, la si potrà sempre ridurre a tre $d\psi, d\omega, d\phi$, attorno a tre assi di coordinate x, y, z; e le variazioni di tutte le coordinate x, y, z, x', y', z', ecc, dei diversi corpi del sistema, derivanti unicamente da queste rotazioni, saranno espresse dalle formule trovate nella §7.

Sostituendo quindi semplicemente questi valori di $dx, dy, dz, dx', dy', dz'$, ecc, nella formula generale dell'equilibrio (art. 2), si otterranno i termini dovuti alle rotazioni $d\psi, d\omega, d\phi$ del sistema, e poiché tali rotazioni sono del tutto arbitrarie quando il sistema può ruotare in tutte le direzioni, basterà in questo caso che ognuno dei termini contenenti $d\psi, d\omega, d\phi$ sia nullo; ciò darà le stesse tre equazioni già trovate nella §6, le quali saranno quindi sufficienti ad impedire tutte le rotazioni del sistema attorno al punto che è l'origine delle coordinate.

11. Se tutte le forze $P, P', P"$, ecc, fossero tra loro parallele, si avrebbe $\alpha = \alpha' = \alpha"$, ecc; $\beta = \beta' = \beta"$, ecc; $\gamma = \gamma' = \gamma"$, ecc, e le tre equazioni dette diverranno

$$\begin{aligned} (Px + P'x' + P"x" + ecc)\cos\beta - (Py + P'y' + P"y" + ecc)\cos\alpha = 0 \\ (Px + P'x' + P"x" + ecc)\cos\gamma - (Pz + P'z' + P"z" + ecc)\cos\alpha = 0 \\ (Py + P'y' + P"y" + ecc)\cos\gamma - (Pz + P'z' + P"z" + ecc)\cos\beta = 0 \end{aligned}$$

di cui la terza è già una conseguenza delle prime due. Ma siccome si ha $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (§2, art.7), si potrà determinare da tali equazioni, gli angoli α, β, γ e abbreviando

$$\begin{aligned} Px + P'x' + P"x" + ecc = L \\ Py + P'y' + P"y" + ecc = M \\ Pz + P'z' + P"z" + ecc = N \end{aligned}$$

si troverà

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{L}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}} \\ \cos\beta &= \frac{M}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}} \\ \cos\gamma &= \frac{N}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}} \end{aligned}$$

Assegnata, pertanto, la posizione dei corpi rispetto ai tre assi, basterà, affinché tutti i moti di rotazione siano annullati, che il sistema sia posto relativamente nella direzione delle forze, in modo che questa direzione formi con gli stessi assi gli angoli α, β, γ che si vengono a determinare.

12. Se le quantità L, M, N fossero nulle, gli angoli α, β, γ rimarranno indeterminati, e la posizione del sistema, rispetto alla direzione delle forze, potrà essere una qualsiasi; da cui risulta questo teorema, *che se la somma dei prodotti delle forze parallele per le loro distanze da tre piani tra loro perpendicolari, è nullo rispetto a ognuno di questi tre piani, l'effetto delle forze per far ruotare il sistema attorno al punto comune di intersezione degli stessi piani, si troverà azzerato.*

Si sa che la gravità agisce verticalmente e proporzionalmente alla massa; così nel sistema di corpi pesanti, se si cerca un punto tale che la somma di ogni massa per la sua distanza da un piano passante per questo punto, sia nulla rispetto a tre piani perpendicolari, questo punto avrà la proprietà che la gravità non potrà imprimere al sistema alcun moto di rotazione attorno allo stesso punto. Questo punto è detto *centro di gravità*, ed è ampiamente utilizzato in tutta la Meccanica.

Per determinarlo, basta cercare la sua distanza dai tre piani perpendicolari dati. Poiché la somma dei prodotti delle masse per le loro distanze da un piano passante per il centro di gravità è nullo, la somma dei prodotti delle stesse masse per le loro distanze da un altro piano ad esso parallelo, sarà necessariamente uguale al prodotto di tutte le masse per la distanza tra il centro di gravità e lo stesso piano; di modo che si otterrà questa distanza dividendo la somma dei prodotti delle masse, e delle loro distanze per la somma stessa delle masse. E da ciò derivano le formule note per i centri di gravità delle linee, delle superfici e dei solidi.

13. Consideriamo ora i *massimi* e *minimi* che si possono avere nell'equilibrio; e pertanto riprendiamo la formula generale

$$Pdp + Qdq + Rdr + ecc = 0$$

dell'equilibrio tra le forze P, Q, R, ecc, dirette lungo le rette p, q, r, ecc (§2, art. 2).

Si può supporre che queste forze siano espresse in modo che la quantità $Pdp + Qdq + Rdr + ecc$, sia un differenziale esatto di una funzione di p, q, r, la quale sia rappresentata da Φ, di modo che si abbia

$$d\Phi = Pdp + Qdq + Rdr + ecc$$

Si avrà allora per l'equilibrio questa equazione $d\Phi = 0$, la quale mostra che il sistema deve essere disposto in modo che la funzione Φy sia, generalmente parlando, un *massimo* o un *minimo*.

Dico, generalmente parlando; poiché si sa che l'uguaglianza di un differenziale con lo zero, non indica sempre un *massimo* o un *minimo*, come si vede dalla teorie delle curve.

La supposizione precedente si ha in generale quando le forze P, Q, R, ecc, tendono realmente a punti fissi o a corpi dello stesso sistema, e sono proporzionali a funzioni qualsiasi delle distanze (§2, art.4); e questo è proprio il caso in esame.

Così in questa ipotesi di forze il sistema sarà in equilibrio quando la funzione Φ sarà un *massimo* o un *minimo*;è in questo che consiste il principio che M. de Maupertois aveva proposto con il nome di *legge di riposo.*

14. Se si considera un sistema di corpi pesanti in equilibrio, le forze P, Q, R, ecc, derivanti dalla gravità, saranno proporzionali alle masse dei corpi, e di conseguenza costanti, e le distanze p, q, r, ecc, concorrono al centro della terra. Si avrà quindi in questo caso $\Phi = Pp + Qq + Rr + ecc$; di conseguenza, poiché le rette p, q, r, ecc, sono parallele, la quantità $\frac{\Phi}{P+Q+R+ecc}$, esprimerà la distanza del centro di gravità dell'intero sistema dal centro della terra; la quale sarà quindi un *minimo* o un *massimo*, quando il sistema sarà in equilibrio; sarà, per esempio, un *minimo* nel caso della catenaria, e un *massimo* nel caso di parecchi e sferette che si sostengono a forma di volta. Questo principio è noto da lungo tempo.

15. Se nell'ipotesi dell'art. 13, si considera il sistema in movimento, e che $u', u", u"'$, ecc, siano le velocità, e $m', m", m"'$, ecc, le rispettive masse dei diversi corpi che formano il sistema; il principio noto della *conservazione delle forze vive*, di cui daremo una dimostrazione diretta e generale nella seconda Parte, fornirà questa equazione

$$m'u'^2 + m"u"^2 + m"'u"'^2 + ecc = cost - 2\Phi$$

Pertanto, poiché on condizioni di equilibrio la quantità Φ è un *minimo* o un *massimo*, ne segue che la quantità $m'u'^2 + m"u"^2 + m"'u"'^2 + ecc$, che esprime la forza viva di tutto il sistema, sarà nello stesso tempo un *massimo* o un *minimo*; in ciò consiste il principio della Statica proposto da M. de Courtivron, *che tutte le condizioni che assume successivamente il sistema, quella in cui si ha la forza viva maggiore o minore, è la stessa di quella in cui basterebbe porla in primo luogo per mantenere l'equilibrio.*

16. Si vede che la funzione Φ è un *minimo* o un *massimo*, quando la posizione del sistema è quella dell'equilibrio; dimostriamo ora che se questa funzione è un *minimo*, l'equilibrio avrà stabilità; di modo che il sistema, supposto dapprima nella condizione di equilibrio, e venendo poi anche di poco spostato da tale condizione, tenderà a ritornarvi, compiendo oscillazioni infinitamente piccole; al contrario, nel caso in cui la stessa funzione sarà un *massimo*, l'equilibrio non avrà stabilità, e disturbato anche di poco, il sistema compirà oscillazioni non molto piccole, e che potrebbero spostarlo sempre più dalla sua condizione iniziale.

17. Per dimostrare questa proposizione in modo generale, considero che, indipendentemente dalla forma del sistema, la sua posizione, cioè quella dei diversi corpi componenti, sarà sempre determinata da un certo numero di variabili, e la quantità Φ sarà una funzione data di queste variabili. Supponiamo ora che nella condizione di equilibrio le variabili di cui si tratta siano uguali a a, b, c, ecc, che in una situazione molto prossima a questa, siano $a + x, b + y, c + z$, ecc,

essendo le quantità x, y, z, ecc, molto piccole; sostituendo questi ultimi valori nella funzione Φ, e riducendo in serie, secondo le dimensioni delle quantità molto piccole x, y, z, ecc, la funzione Φ diverrà

$$\Phi = A + Bx + Cy + Dz + ecc + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + ecc$$

essendo date le quantità A, B, C, ecc, in a, b, c, ecc. Ma nella condizione di equilibrio il valore di $d\Phi$ deve essere nullo, in qualunque modo si faccia variare la posizione del sistema; sarà necessario, quindi, che il differenziale di Φ sia nullo, quando x, y, z, ecc, sono $= 0$; pertanto $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, ecc.

Si avrà quindi per una situazione qualsiasi molto vicina a quella dell'equilibrio, questa espressione di Φ.

$$\Phi = A + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + ecc$$

nella quale affinché le variabili x, y, z, ecc, siano nulle, basta che la funzione

$$Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + ecc$$

che chiamerò X, sia costantemente positiva, per ogni valore delle variabili x, y, z, ecc.

Supponiamo dapprima y, z, ecc, nulle, si avrà $X = Fx^2$, quantità che sarà sempre positiva, se F è positivo; in tal modo si avrà, come prima condizione di *minimo*, $F > 0$.

Poiché la quantità X è sempre positiva, quando y, z, ecc, sono nulli, è chiaro che affinché rimanga costantemente positiva, dando a queste variabili valori qualsiasi, bisogna che essa non possa mai annullarsi. Pertanto, se si pone l'equazione $X = 0$, e si ricava il valore di x, basterà che questo valore sia immaginario; ma l'equazione $X = 0$, dà

$$x + \frac{Gy + Kz + ecc}{2F} = \sqrt{-\frac{Hy^2 + Lyz + Mz^2 + ecc}{F} + \left(\frac{Gy + Kz + ecc}{2F}\right)^2}$$

pertanto, basterà che la quantità

$$\frac{Hy^2 + Lyz + Mz^2 + ecc}{F} + \left(\frac{Gy + Kz + ecc}{2F}\right)^2$$

che indicherò con Y risulti sempre positiva. Questa quantità si riduce alla forma

$$Py^2 + Qyz + Rz^2 + ecc$$

e ponendo, per abbreviare

$$P = -\frac{H}{F} - \frac{G^2}{4F^2} \quad Q = \tfrac{L}{F} - \tfrac{GK}{2F^2} \quad R = \frac{M}{F} - \frac{K^2}{4F^2}, ecc$$

Mediante, quindi, un ragionamento simile al precedente, si avrà in primo luogo la condizione $P > 0$; basterà poi che il valore di y ricavato dall'equazione $Y = 0$ sia immaginario; questa equazione dà

$$y + \frac{Qz + ecc}{2P} = \sqrt{-\frac{Rz^2 + ecc}{P} + \left(\frac{Qz + ecc}{2P}\right)^2}$$

pertanto, la quantità

$$\frac{Rz^2 + ecc}{P} + \left(\frac{Qz + ecc}{2P}\right)^2$$

che indicherò con Z, e che si riduce alla forma $Tz^2 + ecc$, ponendo per abbreviare

$$T = \frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2} + ecc$$

dovrà essere sempre positiva. Basterà di nuovo che si abbia $T > 0$; è così si seguito.

Se la funzione X contiene solo tre variabili x, y, z, è chiaro che le tre condizioni $F > 0$, $P > 0$, $T > 0$, basteranno per renderla positiva; e di conseguenza per il *minimo* della quantità Φ; se si avesse una quarta variabile, si troverebbe una condizione aggiuntiva; in generale il numero delle condizioni sarà sempre uguale a quello delle variabili.

Se, al contrario, la quantità Φ dovesse essere sempre un *massimo* quando x, y, z, ecc sono nulli, basterebbe che la funzione X fosse costantemente negativa. Di conseguenza, basterebbe dapprima che F fosse una quantità negativa, e poi che l'equazione $X = 0$ non desse alcuna radice reale per x; ciò fornirà le stesse condizioni che si sono trovate nel caso precedente, cioè $P > 0$, $T > 0$, *ecc*.

Da ciò segue che le condizioni di *massimo* sono le stesse di quelle di *minimo*, ad eccezione della prima che, per il *minimo* è $F > 0$, e per il *massimo* $F < 0$.

19. Noto ora che le quantità X, Y, Z, ecc, possono essere messe sotto la forma

$$\begin{aligned} X &= F\left(\left(x + \tfrac{Gy+Kz+ecc}{2F}\right)^2 + Y\right) \\ Y &= P\left(\left(y + \tfrac{Qz+ecc}{2P}\right)^2 + Z\right) \\ Z &= T\left((z+ecc)^2 + ecc\right) \\ ecc & \end{aligned}$$

Sostituendo, si avrà

$$\begin{aligned} X &= F\left(x + \tfrac{Gy+Kz+ecc}{2F}\right)^2 \\ &+ FP\left(y + \tfrac{Qz+ecc}{2P}\right)^2 \\ &+ FPT\,(z+ecc)^2 \\ ecc & \end{aligned}$$

da cui si vede chiaramente che il valore di X sarà sempre positivo, se $F, P, T, ecc > 0$, e che, al contrario, sarà sempre negativo, se $F < 0$ e $P, T, ecc > 0$.

Da ciò segue che, prendendo, per maggiore semplicità, al posto delle variabili x, y, z, ecc, altre variabili, ξ, η, ζ, ecc, tali che $\xi = x + \frac{Gy+Kz+ecc}{2F}$, $\eta = y + \frac{Qz+ecc}{2P}$, ecc, si potrà sempre dare alla funzione X questa forma semplice,

$$X = f\xi^2 + g\eta^2 + h\zeta^2 + ecc$$

di modo che la quantità Φ sarà

$$\Phi = A + f\xi^2 + g\eta^2 + h\zeta^2 + ecc$$

e i coefficienti f, g, h, ecc, saranno necessariamente tutti positivi, nel caso del *minimo* di Φ, e negativo in quello di *massimo*.

20. Ciò posto, per dimostrare il teorema dell'articolo 16, basterà solo sostituire l'espressione precedente di Φ nell'equazione della conservazione delle forze vive (art. 15), e si otterrà così

$$M'u'^2 + M"u"^2 + M'"u'"^2 + ecc = cost - 2A - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2, ecc$$

In condizioni di equilibrio si ha (ipotesi) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ecc; per cui anche $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, ecc (art. 19); pertanto se si suppone che il sistema si sposti da questo stato, imprimendo ai corpi $M', M", M'"$, ecc, le velocità molto piccole $V', V", V'"$, ecc, quando $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, ecc. Si avrà, pertanto, $M'V'^2 + M"V"^2 + M'"V'"^2 + ecc = cost - 2A$; e questo servirà a determinare la costante arbitraria.

Così l'equazione precedente diverrà

$$\begin{aligned} M'u'^2 + M"u"^2 + M'"u'"^2 + ecc &= M'V'^2 + M"V"^2 + M'"V'"^2 \quad + \\ &\quad -2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2, ecc \end{aligned}$$

da cui è facile trarre queste due conclusioni.

1° Nel caso del *minimo* di Φ, nel quale i coefficienti f, g, h, ecc, sono tutti positivi, la quantità sempre positiva, $2f\xi^2 + 2g\eta^2 + 2h\zeta^2, ecc$, dovrà necessariamente essere minore, o almeno non potrà essere maggiore della quantità data $M'V'^2 + M"V"^2 + M'"V'"^2 + ecc$, che è essa stessa molto piccola; di conseguenza se si indica questa quantità con T, si avranno per ognuna delle variabili ξ, η, ζ, ecc, questi limiti $\pm\sqrt{\frac{T}{2f}}$, $\pm\sqrt{\frac{T}{2g}}$, $\pm\sqrt{\frac{T}{2h}}$, *ecc*, tra i quali saranno contenute; da cui segue che in questo caso il sistema potrà allontanarsi solo di molto poco dalla sua condizione di equilibrio, e potrà fare solo oscillazioni molto piccole di una estensione determinata.

2° Nel caso del massimo di Φ nel quale i coefficienti f, g, h, ecc, sono tutti negativi, la quantità sempre positiva $-2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2, ecc$, potrà crescere all'infinito, e in tal modo il sistema potrà allontanarsi sempre più dalla sua condizione di equilibrio. L'equazione sopra mostra che in questo caso nulla impedisce alle variabili ξ, η, ζ, ecc, di continuare a crescere; ma non ne deriva che esse debbano effettivamente aumentare; dimostreremo quest'ultima proposizione nella sezione cinque della Dinamica.

1.4 Metodo molto semplice per trovare le equazioni necessarie all'equilibrio di un sistema qualsiasi di corpi così come di punti, o come di masse finite, e soggette a forze date.

1. Coloro che finora è stato scritto sul Principio delle velocità virtuali, si sono piuttosto occupati a dimostrare la verità di questo principio tramite la conformità dei suoi risultati con quella dei principi consueti della Statica, che a mostrare l'uso che se ne può fare per ridurre direttamente i problemi di questa Scienza. Noi ci siamo proposti di raggiungere quest'ultimo obiettivo con tutta la generalità che offre, e dedurre dal Principio formule analitiche che racchiudono

la soluzione di tutti i problemi sull'equilibrio dei corpi, allo stesso modo delle formule delle sotto tangenti, dei raggi osculatori, ecc, racchiudendo la determinazione di queste linee in tutte le curve.

2. Il metodo esposto nella prima sezione, può essere impiegato in tutti i casi, e richiede, come visto, solo operazioni puramente analitiche; ma poiché l'eliminazione immediata di queste variabili o delle loro differenze, tramite le equazioni di condizione, può essere spesso complicata, presentiamo lo stesso metodo in una forma più semplice, riducendo in qualche modo tutti i casi a quello di un sistema completamente libero.

3. Siano $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ecc, le differenti equazioni di condizione date dalla natura del sistema, le quantità L, M, N, ecc, essendo funzioni finite delle variabili x, y, z, x', y', z', ecc; differenziando queste equazioni si avranno $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, ecc, le quali daranno la relazione che deve sussistere tra i differenziali delle stesse variabili. In generale rappresenteremo con $dL =$, $dM = 0$, $dN = 0$, ecc, le equazioni di condizione tra questi differenziali, sia che queste equazioni siano esse stesse differenze esatte oppure no, purché i differenziali siano solo lineari.

Ora poiché queste equazioni devono servire solo ad eliminare un certo numero di differenziali nell'equazione delle velocità virtuali, dopo di che i coefficienti dei differenziali restanti, devono essere uguali ognuno a zero, non è difficile provare con la teoria dell'eliminazione delle equazioni lineari, che si avranno gli stessi risultati se si aggiungono semplicemente all'equazione delle velocità virtuali, le diverse equazioni di condizione $dL =$, $dM = 0$, $dN = 0$, ecc, moltiplicate ognuna per un coefficiente indeterminato, e poi si eguaglia a zero la somma di tutti i termini che si trovano moltiplicati per uno stesso differenziale; e ciò darà tante equazioni particolari quanti sono i differenziali; infine, si eliminano da queste ultime equazioni i coefficienti indeterminati per i quali sono state moltiplicate le equazioni di condizione.

4. Da ciò risulta quindi questa regola estremamente semplice per trovare le condizioni dell'equilibrio di un sistema qualsiasi proposto.

Si prenderà la somma dei *momenti* di tutte le forze che devono essere in equilibrio (Sez. 1, art. 5), e si aggiungeranno le differenti funzioni differenziali che devono essere nulle per le condizioni del problema, dopo aver moltiplicato ognuna di queste funzioni per un coefficiente indeterminato; si eguaglierà tutto a zero, e si avrà così un'equazione differenziale che si gestirà come una equazione ordinaria *di massimi e minimi*, e dalla quale si ricaveranno tante equazioni particolari finite quante le variabili; una volta poi queste equazioni, per eliminazione, private dei coefficienti indeterminati daranno tutte le condizioni necessarie per l'equilibrio.

5. L'equazione differenziale in questione, avrà quindi questa forma

$$Pdp + Qdq + Rdr + ecc + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + ecc = 0$$

nella quale λ, μ, ν, ecc, sono quantità indeterminate; la chiameremo in seguito, *equazione generale dell'equilibrio.*

Questa equazione darà relativamente a ogni coordinata, tale che x, di ciascun corpo del sistema, una equazione della forma seguente

$$P\frac{dp}{dx} + Q\frac{dq}{dx} + R\frac{dr}{dx} + ecc + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + ecc$$

di modo che il numero di queste equazioni sarà uguale a quello di tutte le coordinate dei corpi. Le chiameremo *equazioni particolari dell'equilibrio.*

6. Tutta la difficoltà consisterà quindi nell'eliminare da queste ultime equazioni, le indeterminate λ, μ, ν, ecc; ciò sarà sempre possibile con i metodi noti; ma converrà in ogni caso scegliere quelli che portano ai risultati più semplici. Le equazioni finali racchiuderanno tutte le condizioni necessarie per l'equilibrio considerato; e siccome il numero di queste equazioni sarà uguale a quello di tutte le coordinate dei corpi del sistema meno quelle delle indeterminate λ, μ, ν, ecc, che non si sono potute eliminare, e d'altronde queste stesse indeterminate sono nello stesso numero delle equazioni di condizione finite $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ecc, ne segue che le equazioni in questione, unite a queste ultime, saranno sempre nello stesso numero delle coordinate di tutti i corpi; di conseguenza saranno sufficienti a determinare queste coordinate, e a far conoscere la posizione che ogni corpo deve assumere per essere in equilibrio.

7. Noto ora che i termini λdL, μdM, ecc, dell'equazione generale dell'equilibrio, possono essere anche viste come rappresentanti i momenti di diverse forze applicate allo stesso sistema.

Infatti, poiché dL è una funzione differenziale delle variabili $x', y', z', x", y", z"$, ecc, che fungono da coordinate ai diversi corpi del sistema, questa funzione sarà composta di diverse parti che indicherò con dL', $dL"$, ecc, di modo che $dL = dL' + dL" + ecc$; dove dL' contiene solo termini con dx', dy', dz', $dL"$ solo quelli con $dx", dy", dz"$, e così di seguito.

In questo modo il termine λdL, dell'equazione generale sarà composta dai termini $\lambda dL'$, $\lambda dL"$, ecc. Se si dà al termine $\lambda dL'$ la forma seguente

$$\lambda\sqrt{\left(\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right)} \times \frac{dL'}{\sqrt{\left(\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right)}}$$

È chiaro che, per quanto detto nell'art.8 della seconda sezione, questa quantità può rappresentare il momento di una forza $= \lambda\sqrt{\left(\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right)}$, applicata al corpo le cui coordinate sono x', y', z', e diretta perpendicolarmente alla superficie che avrà per equazione $dL' = 0$, e riguardante solo le variabili x', y', z'. Analogamente il termine $\lambda dL"$, potrà rappresentare il momento di una forza $= \sqrt{\left(\left(\frac{dL"}{dx"}\right)^2 + \left(\frac{dL"}{dy"}\right)^2 + \left(\frac{dL"}{dz"}\right)^2\right)}$, applicata al corpo che ha come coordinate $x", y", z"$, e diretta perpendicolarmente alla superficie curva, la cui equazione sarà $dL" = 0$, e relative alle sole variabili $x", y", z"$, e così di seguito.

In generale, pertanto, il termine λdL sarà equivalente all'effetto delle diverse forze espresse da $\lambda\sqrt{\left(\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right)}$ ecc, e applicate rispettivamente ai corpi che corrispondono alle coordinate $x'.y'.z', x", y", z"$, ecc, lungo direzioni perpendicolari alle diverse superfici curve rappresentate dall'equazione $dL = 0$, e che fanno variare inizialmente x', y', z', poi $x", y", z"$, e così di seguito.

8. Da ciò risulta che ogni equazione di condizione è equivalente a una o più forze applicate al sistema lungo direzioni date; di modo che lo stato di equilibrio del sistema sarà lo stesso, sia che si considerino le forze, sia le equazioni di condizione.

Reciprocamente queste forze possono fare da equazioni di condizioni risultanti della natura del sistema dato; di modo che impiegando tali forze, si potrà considerare i corpi come interamente liberi e senza alcun vincolo. E da ciò si vede che la ragione metafisica, perché l'introduzione dei termini $\lambda dL + \mu dM + ecc$, nell'equazione generale dell'equilibrio, fa sì che si può poi trattare questa equazione come se tutti i corpi del sistema fossero interamente liberi; è in ciò che consiste lo spirito del metodo di questa sezione.

Propriamente parlando, le forze in questione tengono conto delle resistenze che i corpo dovrebbero subire in virtù del loro legame reciproco, o da parte di ostacoli che, per la natura del sistema, potrebbero opporsi al loro moto, o piuttosto queste forze sono solo le forze stesse di queste resistenze, le quali devono essere uguali e direttamente opposte alle pressioni esercitate dai corpi. Il nostro metodo dà, come si vede, il mezzo per determinare queste forze e queste resistenze; e ciò non uno dei minori vantaggi di questo metodo.

9. Finora abbiamo considerato i corpi come puntiformi; e abbiamo visto come si determinino le leggi dell'equilibrio di questi punti, in numero qualsiasi, e per qualsiasi forza agisca su di essa. Ora un corpo di volume e figura qualsiasi, essendo solo l'insieme di una infinità di parti o punti materiali, ne segue che si possono determinare anche le leggi dell'equilibrio dei corpi di qualsiasi forma, applicando i principi precedenti.

Infatti, il modo ordinario di risolvere le questioni di Meccanica che riguardano i corpi di massa finita, consiste nel considerare dapprima solo un dato numero di punti posti a distanze finite gli uni dagli altri, e a cercare le leggi del loro equilibrio o del loro moto; e di estendere poi questa ricerca a un numero indefinito di punti; infine nel supporre che il numero dei punto diviene infinito, e che nello stesso tempo le loro distanze divengono infinitamente piccole, e nell'applicare alle formule trovate per un numero finito di punti, le riduzioni e le modifiche richieste dal passaggio all'infinito.

Questo procedimento è, come si vede, analogo ai metodi geometrici e analitici che hanno preceduto il calcolo infinitesimale; e se questo calcolo ha il vantaggio di facilitare e semplificare in modo sorprendente, le soluzioni dei problemi che si riferiscono alle curve, considerando queste linee come curve senza aver bisogno di vederle prima come poligoni e poi come curve. Vi sarà quindi lo stesso vantaggio nel trattare i problemi di Meccanica in modo diretto, e considerando immediatamente i corpi di massa finita come insiemi di una infinità di punti o corpuscoli, sottoposti ognuno a forze date. Nulla è più facile che modificare e semplificare con questa considerazione il metodo generale presentato.

10. Ma è necessario notare, prima di tutto, che nell'applicazione di questo metodo ai corpi di massa finita, in cui tutti i punti sono animati da forze qualsiasi, si presentano naturalmente due tipi di differenziali che bisogna distinguere. Gli uni si riferiscono ai diversi punti che compongono il corpo; gli altri sono indipendenti dalla posizione reciproca di questi punti, e rappresentano solo gli spazi infinitamente piccoli che ogni punto può percorrere, supponendo che la situazione del corpo vari infinitamente poco. Siccome finora abbiamo dovuto considerare solo differenze di quest'ultimo tipo, le abbiamo indicate con la notazione solita d; ma poiché dobbiamo ora tenere conto di due specie di differenze alla volta, e che è, quindi, necessario introdurre una nuova notazione, ci pare opportuno impiegare l'antica notazione d per indicare le differenze di prima specie che sono analoghe a quella che si considerano comunemente in Geometria, e di denotare le differenze della seconda specie che sono specifiche della materia trattata con la notazione δ, che abbiamo impiegato altre volte nel calcolo delle variazioni, con la quale ciò che qui si tratta ha un legame intimo e necessario.

Chiameremo anche, per questo motivo, *variazioni* le differenze riguardanti δ, e conserveremo il nome di *differenziali*, a quelle che riguarderanno d. Del resto, le stesse formule che danno i differenziali ordinari, daranno anche le variazioni, sostituendo ∂ al posto di d.

11. Sottolineo inoltre che invece di considerare la massa data come un insieme di un'infinità di punti contigui, basterà, secondo il senso del calcolo infinitesimale, considerarla piuttosto come composta di elementi infinitamente piccoli, che siano dello stesso ordine dell'intera massa; che per avere le forze che animano ognuno di questi elementi, basterà moltiplicare per questi stessi elementi, le forze P, Q, R, ecc, che si suppongono applicate a ogni punto di questi elementi, e che si considereranno come analoghi a quelli che provengono dall'effetto della gravità.

12. Se, pertanto, si indica con m la massa totale, e con dm uno qualsiasi dei suoi elementi, si avrà Pdm, Qdm, Rdm, ecc, per le forze esercitate sull'elemento dm, lungo le direzioni delle linee p, q, r, ecc. Moltiplicando rispettivamente queste forze per le variazioni $\delta p, \delta q, \delta r$, ecc, si avranno i momenti, la cui somma per ogni elemento dm, sarà data dalla formula $(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc)\, dm$; e per avere la somma dei momenti di tutte le forze del sistema, basterò prendere l'integrale di questa formula rispetto all'intera massa data.

Indicheremo questo integrale totale, cioè, relativo all'estensione dell'intera massa, con la notazione maiuscola S, conservando la notazione ordinaria $\int$ per indicare gli integrali parziali o indefiniti.

13. Si avrà così per la somma dei momenti di tutte le forze del sistema, la formula integrale

$$S\,(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc)\,dm$$

e questa quantità dovrà essere nulla in generale nella condizione di equilibrio del sistema.

Siccome per la natura del sistema vi sono necessariamente dei rapporti dati tra le diverse variazioni, $\delta p, \delta q, \delta r$, ecc, relative a ogni punto della massa, basterà ridurle a un dato numero di variazioni indipendenti e indeterminate; e i termini moltiplicati per queste ultime variazioni, essendo uguali a zero, daranno le equazioni particolari dell'equilibrio. Ma siccome tali riduzioni possono essere complesse, converrà evitarle, tramite il metodo che presentiamo in questa sezione.

14. Per applicare questo metodo al caso in esame, supporremo che $L = 0$, $M = 0$, ecc, siano le equazioni di condizione che deve esistere per la natura del problema, rispetto a ogni punto della massa; e le chiameremo equazioni di condizione indeterminate.

Essendo queste equazioni differenziate secondo δ, si avranno $\delta L = 0$, $\delta M = 0$, ecc. Si moltiplicheranno le quantità $\delta L, \delta M$, ecc, per quantità indeterminate λ, μ, ecc: se ne prenderà l'integrale totale, che sarà di conseguenza rappresentato dalla formula

$$S\,(\lambda\delta L + \mu\delta M + ecc)$$

e aggiungendo questo integrale a quello del punto precedente, si avrà l'equazione generale dell'equilibrio.

Del resto, si osserverà che non è necessario che $\delta L, \delta M$, ecc, siano le variazioni esatte delle funzioni $x, y, z, dx.dy$, ecc, ma basta che $\delta L = 0$, $\delta M = 0$, ecc, siano le equazioni di condizione indeterminate tra le variazioni x, y, z, dx, dy, ecc, (art. 3)

15. Ma per comprendere in una sola volta tutta la generalità possibile, basta notare che si può fare che oltre alle forze che agiscono su tutti i punti della massa, ve ne sono che agiscono solo su punti determinati di questa massa, i quali sono quelli che corrispondono alle estremità della massa data, cioè, all'inizio e alla fine dell'integrale indicato con S.

Allo stesso modo si potranno avere equazioni di condizione particolari in questi punti, che chiameremo equazioni di condizione *determinate*, per distinguerle da quelle che si hanno in tutta l'estensione della massa, e le rappresenteremo con $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ecc, o piuttosto con $\delta A = 0$, $\delta B = 0$, $\delta C = 0$, ecc.

Segneremo con un tratto, due, tre, tutte le quantità che si riferiscono a punti determinati della massa, e in particolare con un solo tratto quelli che si riferiscono all'inizio dell'integrale indicato con S, con due tratti quelli che si riferiscono alla fine di tale integrale, con tre o più, quelli che si riferiscono a punti intermedi.

Così basterà aggiungere all'integrale $S\,(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc)\,dm$ la quantità $P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + ecc + P"\delta p" + Q"\delta q" + R"\delta r" + ecc$; all'integrale $S\,(\lambda v L + \mu\delta M + ecc)$ la quantità $\alpha\delta A + \beta\delta B + \gamma\delta C + ecc.$

L'equazione generale dell'equilibrio acquisterà pertanto questa forma,

$$\begin{aligned} S\,(Pvp + Q\delta q + R\delta r + ecc)\,dm &+ S\,(\lambda\partial L + \mu\delta M + ecc) + \\ P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + ecc &+ P"\delta p" + Q"\delta q" + R"\delta r" + ecc + \\ \alpha\delta A + \beta\delta B + \gamma\delta C + ecc &= 0 \end{aligned}$$

16. Questa equazione, dopo aver sostituito i valori di $\delta p, \delta q, \delta r, ecc$; $\delta L, \delta M, ecc$, in $\delta x, \delta y, \delta z, \delta dx, \delta dy$,ecc; così che quelli di $\delta p', \delta p"$, ecc; $\delta q', \delta q"$, ecc, $\delta A, \delta B$, ecc, in $x', x"$, ecc, $\delta x', \delta x"$, ecc, $\delta dx'$, ecc, dedotti dalle circostanze particolari di ogni problema, si avrà sempre una forma analoga a quelle che *il calcolo delle variazioni* fornisce per la determinazione dei *massimi e minimi* delle formule integrali; così basterà applicare le regole del calcolo note.

Si considererà quindi che, siccome le notazioni d e δ indicano due tipi di differenze completamente indipendenti tra loro, quando queste notazioni si trovano insieme, sarà indifferente l'ordine in cui sono poste, poiché che una quantità vari in due modi diversi, si avrà sempre lo stesso risultato, qualunque sia l'ordine nel quale avvengono tali variazioni. Così δdx sarà la stessa cosa di $d\delta x$, e analogamente δd^2x sarà la stessa cosa di $d^2\delta x$; e così di seguito. Si potrà, quindi, sempre cambiare a piacere l'ordine delle notazioni, senza alterare il valore delle differenze; e per il nostro scopo sarà opportuno trasportare la notazione d prima della δ, affinché l'equazione proposta contenga solo le variazioni delle coordinate, e i differenziali di queste stesse variazioni. In questo consiste il primo principio fondamentale del *calcolo delle variazioni.*

17. I differenziali dvx, $d\delta y, d\delta z, d^2\delta x$, ecc, che si trovano sotto il segno S, possono essere eliminati con l'operazione nota di integrazione per parti. Poiché in generale $\int \Omega d\delta x = \Omega\delta x - \int \delta x d\Omega$, $\int \Omega d^2\delta x = \Omega d\delta x - d\Omega\delta x + \int \delta x d^2\Omega$, e così per gli altri, basta osservare che le quantità fuori dal segno $\int$ si riferiscono naturalmente agli ultimi punti degli integrali, ma che per rendere questi integrali completi, bisogna necessariamente eliminare i valori delle stesse quantità fuori dal segno, affinché tutte svaniscano in questi punti; ciò che è evidente dalla teoria delle integrazioni.

Segnando con un tratto le quantità che si riferiscono all'inizio degli integrali totali indicati con S, e con due tratti quelli che si riferiscono alla fine di questi integrali, si avrà la seguente riduzione,

$$\begin{aligned} S\Omega d\delta x &= \Omega"\delta x" - \Omega'\delta x' - S\delta x d\Omega \\ S\Omega d^2\delta x &= \Omega" d\delta x" - d\Omega"\delta x" - \Omega' d\delta x' \\ &\quad + d\Omega'\delta x' + S\delta x d^2\Omega\, ecc \end{aligned}$$

le quali serviranno a far scomparire tutti i differenziali di variazione che si potrebbero trovare sotto il segno S. Queste riduzioni costituiscono il secondo principio fondamentale del *calcolo delle variazioni*.

18. In questo modo l'equazione generale dell'equilibrio si ridurrà alla forma seguente,

$$S\,(\Pi\delta x + \Sigma\delta y + \Psi\delta z) + \Delta = 0$$

nella quale Π, Σ, Ψ saranno funzioni di x, y, z, ecc e dei loro differenziali, e Δ conterrà i termini riguardanti le variazioni $\delta x', \delta y', \delta z', \delta x", \delta y", \delta z"$, ecc, e dei loro differenziali.

Affinché tale equazione sia verificata, indipendentemente dalle variazioni delle diverse coordinate, basterà avere, 1°. Π, Σ, Ψ, nulli in tutta l'estensione dell'integrale S, cioè, in ogni punto della massa, 2°. anche ogni termine di Δ uguale a zero.

Le equazioni indefinite $\Pi = 0$, $\Sigma = 0$, $\Psi = 0$, daranno in generale la relazione esistente tra le variabili x, y, z; ma bisognerà eliminare le variabili indeterminate λ, μ, ecc, le quali sono nello stesso numero delle equazioni di condizione indeterminate $L = 0$, $M = 0$, ecc (art. 14).

Noto ora che queste equazioni potranno essere più di tre; poiché sono equazioni indefinite tra le tre variabili x, y, z, e i loro differenziali, è chiaro che se sono più di tre, si avranno più equazioni di variabili; di modo che la quarta dovrà essere combinazione delle prime tre, e così per le altre. Non vi saranno mai, pertanto, più di tre indeterminate, λ, μ, ν da eliminare; si potrà sempre trovare i valori di tali indeterminate in funzione di x, y, z. Del resto le equazioni che sparirebbero con queste eliminazioni, saranno sostituite dalle stesse equazioni di condizione, dopodiché si potranno sempre conoscere i valori di x, y, z che determinano la condizione di equilibrio di tutto il sistema.

Le altre equazioni risultanti dai diversi termini della quantità Δ saranno equazioni particolari che varranno solo rispetto a punti determinati della massa, e che serviranno principalmente a determinare le costanti arbitrarie che le espressioni di x, y, z, dedotte dalle equazioni precedenti, potrebbero contenere. Per utilizzare tali equazioni, si sostituiranno, quindi, i valori già trovati di λ, μ, ν, ecc, e si elimineranno poi le indeterminate α, β, ecc, e si uniranno le equazioni di condizione $A = 0$, $B = 0$, ecc, che serviranno a sostituire quelle che l'eliminazione ha tolto.

19. ci sarà infine rispetto alle coordinate perpendicolari, la stessa notazione già introdotta al termine della seconda sezione, applicando alle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$, quanto abbiamo detto relativamente alle differenze dx, dy, dz; ma per quanto riguarda i differenziali dx, dy, dz, dal metodo della sezione precedente, non sarà consentito impiegare al loro posto altri differenziali, a meno che essi non risultino dalla differenziazione delle espressioni finite di x, y, z.

1.5 Soluzione di diversi problemi di Statica

Mostriamo ora l'uso dei nostri metodi in diversi problemi sull'equilibrio dei corpi; si vedrà, per l'uniformità e la rapidità delle soluzioni, quanto questi metodi sono superiori a quelli finora impiegati nella Statica.

1.5.1 Sull'equilibrio di numerose forze applicate ad uno stesso punto; e sulla composizione e scomposizione delle forze.

1. Si tratta di trovare le leggi dell'equilibrio di tante forze a piacere, P, Q, R, ecc, tutte applicate ad uno stesso punto, e dirette verso punti dati.

Indicando con p, q, r, ecc, le distanze rettilinee tra il punto comune di applicazione di queste forze e i loro punti di tendenza, si avrà la formula

$$Pdp + Qdq + Rdr + ecc$$

per la somma dei momenti di tutte le forze, il quale deve essere nulla nella condizione di equilibrio.

2. Siano x, y, z le tre coordinate del punto al quale tutte le forze sono applicate; e siano pure a, b, c le coordinate per il punto al quale tende la forza P; f, g, h quelle del punto al quale tende la forza Q; l, m, n, quella del punto al quale tende la forza R, e così via per le altre; queste coordinate sono tutte riferite agli stessi assi fissi nello spazio. Si avrà

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \\ q &= \sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2} \\ r &= \sqrt{(x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2} \\ ecc & \end{aligned}$$

E la quantità $Pdp + Qdq + Rdr + ecc$, si trasformerà in

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

nella quale si avrà

$$X = \frac{x-a}{p}P + \frac{x-f}{q}Q + \frac{x-l}{r}R + ecc$$

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{y-b}{p}P + \frac{y-g}{q}Q + \frac{y-m}{r}R + ecc \\
Z &= \frac{z-c}{p}P + \frac{z-h}{q}Q + \frac{z-n}{r}R + ecc
\end{aligned}$$

Non è inutile sottolineare in queste espressioni che le quantità $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ sono uguali ai coseni degli angoli che la linea p, cioè la direzione della forza P, forma con gli assi x, y, z; che anche $\frac{x-f}{q}$, $\frac{y-g}{q}$, $\frac{z-h}{q}$ sono i coseni degli angoli che la direzione della forza Q forma con gli stessi assi; e così di seguito (Sez.2 art. 7).

3. ciò posto, supponiamo in primo luogo che i corpi o i punti ai quali le forze P, Q, R, ecc, sono applicati, siano interamente liberi; non vi sarà quindi alcuna equazione di condizione tra le coordinate x, y, z; e la quantità $Xdx + Ydy + Zdz$ dovrà essere nulla, indipendentemente dai valori di dx, dy, dz (Sez. 2, art. 9); e ciò restituirà queste tra equazioni particolari

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0$$

Queste sono le equazioni che racchiudono le leggi dell'equilibrio di un numero a piacere di forze concorrenti in uno stesso punto.

4. Se nelle espressioni di X, Y, Z, si pone $P = 0, Q = q, R = r$, ecc, (cosa permessa, poiché è indifferente a quali punti presi nelle direzioni delle forze, siano supposti tendere) si avranno queste equazioni

$$\begin{aligned}
x - a + x - f + x - l + ecc &= 0 \\
y - b + y - g + y - m + ecc &= 0 \\
z - c + z - h + z - n + ecc &= 0
\end{aligned}$$

da cui si ricavano, supponendo che il numero delle forze P, Q, R, ecc, sia μ

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a + f + l + ecc}{\mu} \\
y &= \frac{b + g + m + ecc}{\mu} \\
z &= \frac{c + h + n + ecc}{\mu}
\end{aligned}$$

e queste espressioni di x, y, z mostrano che il punto al quale sono applicate le forze, è nel centro di gravità dei punti ai quali queste forze tendono.

Da ciò risulta il teorema di Leibniz, che se un numero di forze a piacere sono in equilibrio su un punto, e che se si tracciano da questo punto delle rette che rappresentano tanto l'intensità quanto la direzione di ogni forza, il punto in questione sarà il centro di gravità di tutti i punti ai quali queste rette saranno indirizzate.

Se, pertanto, vi sono solo quattro forze, e si immagina una piramide i cui quattro angoli siano alle estremità delle rette che rappresentano queste quattro forze, vi sarà tra loro equilibrio, quando il punto sul quale esse agiscono, si troverà nel centro di gravità della piramide; poiché si sa dalla Geometria, che il centro di gravità di tutta la piramide è lo stesso di quello di quattro corpi uguali posti ai quattro vertici della piramide stessa. Questo ultimo teorema è dovuto a Robertval.

5. Se si considera l'equazione

$$Pdp + Qdq + Rdr + ecc - Xdx - Ydy - Zdz = 0$$

la quale, essendo una identità (art. 2), deve di conseguenza valere in generale, per qualunque differenza dx, dy, dz, è chiaro che la si potrà vedere come l'equazione dell'equilibrio tra le forze P, Q, R, ecc, dirette lungo le rette p, q, r, ecc, e le forze X, Y, Z dirette lungo le rette $-x, -y, -z$, essendo tutte queste forze applicate in uno stesso punto. Le tre forze X, Y, Z sono, pertanto, in equilibrio con le forze P, Q, R, ecc; ma è evidente che le forze X, Y, Z, essendo applicate lungo le direzioni delle rette x, y, z, saranno anche in equilibrio con le stesse forze X, Y, Z, ma dirette lungo $-x, -y, -z$; essere saranno, quindi, equivalenti alle forze P, Q, R, ecc. Da ciò segue che le intensità X, Y, Z non sono altra cosa dei valori delle forze P, Q, R, ecc, ridotte alle direzioni delle tre coordinate perpendicolari x, y, z, e tendenti a diminuire queste coordinate, e le formule dell'art. 3 danno, di conseguenza, un mezzo molto semplice per ottenere tale riduzione, cioè, per trovare le risultanti di un numero a piacere di forze che concorrono in uno stesso punti, e che hanno direzioni qualsiasi.

6. In generale se forze qualsiasi P, Q, r, ecc, dirette lungo le rette p, q, r, ecc, agiscono su uno stesso punto, e se si vuole ridurle tutte ad altre tre Ξ, Π, Σ, dirette lungo le rette ξ, π, σ, basterà considerare l'equilibrio delle forze P, Q, R, ecc, e Ξ, Π, Σ, applicate a questo stesso punto, e dirette rispettivamente lungo le rette p, q, r, ecc, $-\xi, -\pi, -\sigma$, e formare di conseguenza l'equazione

$$Pdp + Qdq + Rdr + ecc - \Xi d\xi - \Pi d\pi - \Sigma d\sigma = 0$$

la quale deve essere vera in qualsiasi modo si faccia variare la posizione del punto in cui concorrono tutte le forze. Per qualunque ξ, π, σ, è chiaro che purché non siano tutte nello stesso piano, esse bastano a determinare la posizione di tale punto; di conseguenza, si potrà sempre esprimere le rette p, q, r, ecc, con funzioni di ξ, π, σ, e l'equazione precedente dovrà allora valere, rispetto alle variazioni di ciascuno di queste tre quantità in particolare; da ciò segue che si avrà

$$\begin{aligned}
\Xi &= P\frac{dp}{d\xi} + Q\frac{dq}{d\xi} + R\frac{dr}{d\xi} + ecc \\
\Pi &= P\frac{dp}{d\pi} + Q\frac{dq}{d\pi} + R\frac{dr}{d\pi} + ecc \\
\Sigma &= P\frac{dp}{d\sigma} + Q\frac{dq}{d\sigma} + R\frac{dr}{d\sigma} + ecc
\end{aligned}$$

Queste formule possono essere di grande utilità in numerose occasioni, e soprattutto quando si tratta di trovare le risultanti di una infinità di forze che agiscono su uno stesso punto, come per l'attrazione di un corpo di forma qualsiasi, ecc.

7. Se si vuole che le direzioni delle forze risultanti passino per punti dati, allora indicando con α, β, γ le coordinate del punto al quale deve tendere la forza Ξ, e anche ε, ζ, η, e λ, μ, ν, le coordinate dei punti di tendenza delle forze Π e Σ, sarà

$$\begin{aligned}
\xi &= \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} \\
\pi &= \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-\eta)^2} \\
\sigma &= \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2}
\end{aligned}$$

e da queste equazioni si ricaveranno i valori di x, y, z, in ξ, π, σ, che si sostituiranno poi nelle espressioni di $'p, q, r$, ecc, dell'art. 2.

Si potrebbero ancora considerare direttamente le quantità p, q, r, ecc, ξ, π, σ, come funzioni di x, y, z e facendo variare ognuna di queste tre quantità separatamente, si avrebbe

$$\begin{aligned}
\Xi\frac{d\xi}{dx} + \Pi\frac{d\pi}{dx} + \Sigma\frac{d\sigma}{dx} &= P\frac{dp}{dx} + Q\frac{dq}{dx} + R\frac{dr}{dx} + ecc \\
\Xi\frac{d\xi}{dy} + \Pi\frac{d\pi}{dy} + \Sigma\frac{d\sigma}{dy} &= P\frac{dp}{dy} + Q\frac{dq}{dy} + R\frac{dr}{dy} + ecc \\
\Xi\frac{d\xi}{dz} + \Pi\frac{d\pi}{dz} + \Sigma\frac{d\sigma}{dz} &= P\frac{dp}{dz} + Q\frac{dq}{dz} + R\frac{dr}{dz} + ecc
\end{aligned}$$

tramite le quali si conosceranno le tre forze Ξ, Π, Σ.

Se la forza Ξ deve essere diretta come prima a un punto fisso, mentre le altre due forze Π e Σ dovessero essere perpendicolari a quella nel piano dato, allora si prenderebbero per π e σ gli archi di cerchio descritti dal raggio ξ nei piani in questione; per questo si considererà la retta ξ come un raggio vettore, e indicando con ψ, ϕ gli angoli che questo raggio forma con piani perpendicolari ai piani dati, è chiaro che si avrà $d\pi = \xi d\psi$, $d\sigma = \xi d\phi$; d'altronde si potrà sempre, con le tre variabili ξ, ψ, ϕ, determinare la posizione del punto al quale le forze sono applicate; di conseguenza si potranno esprimere le rette p, q, r, ecc, tramite funzioni di queste variabili; basterà esprimere dapprima le coordinate x, y, z in ξ, ψ, ϕ, e sostituire poi queste espressioni in quelle di p, q, r, ecc. Considerando quindi la variabilità di ξ, ψ, ϕ, si avranno le tre equazioni

$$\begin{aligned}
\Xi &= P\frac{dp}{d\xi} + Q\frac{dq}{d\xi} + R\frac{dr}{d\xi} + ecc \\
\Pi &= P\frac{dp}{\xi d\psi} + Q\frac{dq}{\xi d\psi} + R\frac{dr}{\xi d\psi} + ecc \\
\Sigma &= P\frac{dp}{\xi d\phi} + Q\frac{dq}{\xi d\phi} + R\frac{dr}{\xi d\phi} + ecc
\end{aligned}$$

Si vede da questo come si deve operare in tutti i casi simili, e quanto il metodo precedente è utile per trovare le risultanti di un numero di forze a piacere, e ridurle alle direzioni assegnate.

8. Riprendiamo le formule dell'art. 2 e supponiamo in secondo luogo che i corpi o punti sui quali agiscono le forze P, Q, R, ecc, non siano del tutto liberi, ma che siano vincolati a muoversi su una superficie, o su una retta data; si avranno allora tra le coordinate x, y, z, una o due equazioni di condizione, che non saranno diverse dalle equazioni stesse della superficie o della retta considerata.

Sia pertanto $L = 0$ l'equazione della superficie solo sulla quale il corpo può scorrere, si aggiungerà alla somma dei momenti $Xdx + Ydy + Zdz$ il termine λdL (Sez. 4, artt. 4,5) e si avrà per l'equazione generale dell'equilibrio

$$Xdx + Ydy + Zdz + \lambda dL = 0$$

essendo λ una quantità indeterminata.

Essendo L una funzione nota di x, y, z si avrà per differenziazione

$$dL = \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz$$

e quindi sostituendo e uguagliando separatamente a zero la somma dei termini moltiplicati per ognuna delle differenze dx, dy, dz, si avranno queste tre equazioni particolari dell'equilibrio

$$\begin{aligned} X + \lambda\frac{dL}{dx} &= 0 \\ Y + \lambda\frac{dL}{dy} &= 0 \\ Z + \lambda\frac{dL}{dz} &= 0 \end{aligned}$$

dalle quali eliminando l'indeterminata λ, se ne otterranno due

$$\begin{aligned} Y\frac{dL}{dx} - X\frac{dL}{dy} &= 0 \\ Z\frac{dL}{dx} - X\frac{dL}{dy} &= 0 \end{aligned}$$

le quali racchiudono, di conseguenza, le condizioni cercate dell'equilibrio del corpo sulla superficie proposta.

9. Se si applica ora la teoria data nell'art. 7 della sez. 4, si concluderà che la superficie deve opporre al corpo una resistenza uguale a

$$\lambda\sqrt{\left(\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right)}$$

e diretta lungo la perpendicolare alla superficie che avrà per equazione $dL = 0$, cioè, perpendicolarmente alla stessa superficie sulla quale il corpo si trova; e siccome si ha

$$\lambda\frac{dL}{dx} = -X \quad \lambda\tfrac{dL}{dy} = -Y \quad \lambda\frac{dL}{dz} = -Z$$

ne segue che la pressione del corpo sulla superficie (pressione che deve essere uguale e direttamente contraria alla resistenza della superficie) sarà espressa da $\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$, e agirà perpendicolarmente alla stessa superficie; e ed è solo a questa condizione che si riducono le due equazioni prima trovate per l'equilibrio del corpo, cosa di cui ci si può assicurare con il metodo della composizione delle forze.

10. Del resto, nel caso di un solo corpo sottoposto a forze date, si possono trovare ancora più semplicemente le condizioni di equilibrio, sostituendo immediatamente nell'equazione $Xdx+Ydy+Zdz = 0$, al posto del differenziale dz, il suo valore $-\frac{\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy}{\frac{dL}{dz}}$, ricavato dall'equazione differenziale della superficie data sulla quale il corpo può muoversi, ed uguagliando poi separatamente a zero i coefficienti dei differenziali dx e dy che rimangono indeterminati, secondo il metodo generale dell'art. 10 della sez. 2.

Si avranno così all'istante le due equazioni

$$\begin{aligned} X - Z\frac{\frac{dL}{dx}}{\frac{dL}{dz}} &= 0 \\ Y - Z\frac{\frac{dL}{dy}}{\frac{dL}{dz}} &= 0 \end{aligned}$$

che riconducono a quelle trovate in precedenza.

Analogamente se il corpo fosse costretto a muoversi su una linea di forma data, e determinata dalle due equazioni differenziali $dy = pdx$, $dz = qdx$, basterebbe sostituire questi valori di dy e dz nella $Xdx+Ydy+Zdz = 0$, e si avrebbe, dividendo per dx

$$X + Yp + Zq = 0$$

per la condizione di equilibrio.

Ma in tutti i casi in cui si avranno numerosi corpi in equilibrio, il metodo dei coefficienti indeterminati esposto nella sezione precedente, avrà sempre il vantaggio tanto dal punto di vista della facilità, sia della semplicità e uniformità del calcolo.

1.5.2 Sull'equilibrio di più forze applicate a un sistema di corpi considerati puntiformi, e legati tra loro con fili o verghe.

11. qualunque siano le forze che agiscono su ogni corpo, abbiamo prima visto, (art. 2,5), come è possibile ridurle sempre a tre, X, Y, Z, dirette lungo le tre coordinate x, y, z dello stesso corpo e tendenti a diminuire tali coordinate.

Supporremo, quindi, per maggiore semplicità, qui e in seguito, che tutte le forze esterne che agiscono su uno stesso punto, siano ridotte a queste tre X, Y, Z. Così la somma dei momenti di queste forze sarà espressa dalla formula $Xdx + Ydy + Zdz$; di conseguenza la somma totale dei momenti di tutte le forze del sistema, sarà espressa dalla somma di tante formule simili, quanti sono i corpi o punti mobili, segnando con uno, due, tre, ecc tratti, le quantità che si riferiscono ai diversi corpi che chiameremo primo, secondo, terzo, ecc.

In questo modo si avrò quindi per la somma dei momenti di queste forze che agiscono su tre o più corpi, la quantità

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + ecc$$

Si tratterà quindi di cercare le equazioni di condizione $L = 0, M = 0, N = 0$, ecc, risultanti dalla natura del problema.

Avendo L, M, N, ecc, o solamente i loro differenziali in funzione di x', y', z', x'', ecc, e prendendo coefficienti indeterminati λ, μ, ν, ecc, si aggiungeranno alla quantità precedente i termini $\lambda dL + \mu dM + \nu dN + ecc$, e si eguaglieranno poi separatamente a zero i termini contenenti ciascuna delle differenze dx', dy', dz', dx'', ecc, (Sez. precedente, art. 5).

12. Consideriamo prima tre corpi attaccati in modo fisso a un filo inestensibile; le condizioni del problema sono che le distanze tra il primo e il secondo corpo, e tra il secondo e il terzo siano invariabili, essendo tali distanze le lunghezze delle parti di filo tra i corpi. Chiamando f la prima di queste due distanze, e g la seconda, si avrà $df = 0$, $dg = 0$ per le equazioni di condizione; quindi $dL = df$, $dM = dg$, e l'equazione generale dell'equilibrio dei tre corpi sarà

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda df + \mu dg = 0$$

Ora è chiaro che si avrà

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2} \\ g &= \sqrt{(x'''-x'')^2 + (y'''-y'')^2 + (z'''-z'')^2} \end{aligned}$$

da cui, differenziando

$$\begin{aligned} df &= \frac{(x''-x')(dx''-dx') + (y''-y')(dy''-dy') + (z''-z')(dz''-dz')}{f} \\ dg &= \frac{(x'''-x'')(dx'''-dx') + (y'''-y'')(dy'''-dy'') + (z'''-z'')(dz'''-dz'')}{g} \end{aligned}$$

sostituendo tali valori, si avranno le nuove equazioni seguenti per le condizioni di equilibrio del filo,

$$\begin{aligned} X' - \lambda\tfrac{x''-x'}{f} &= 0 \\ Y' - \lambda\tfrac{y''-y'}{f} &= 0 \\ Z' - \lambda\tfrac{z''-z'}{f} &= 0 \\ X'' + \lambda\tfrac{x''-x'}{f} - \mu\tfrac{x'''-x''}{g} &= 0 \\ Y'' + \lambda\tfrac{y''-y'}{f} - \mu\tfrac{y'''-y''}{g} &= 0 \\ Z'' + \lambda\tfrac{z''-z'}{f} - \mu\tfrac{z'''-z''}{g} &= 0 \\ X''' + \mu\tfrac{x'''-x''}{g} &= 0 \\ Y''' + \mu\tfrac{y'''-y''}{g} &= 0 \\ Z''' + \mu\tfrac{z'''-z''}{g} &= 0 \end{aligned}$$

e si dovranno eliminare soltanto da queste equazioni le due incognite λ e μ; e ciò si può fare in parecchi modi, i quali forniranno equazioni differenti, o presentate in modo differente per l'equilibrio dei tre corpi attaccati al filo; sceglieremo quello che si mostrerà più semplice.

È dapprima chiaro che se si aggiungono rispettivamente le prime tre equazioni alle tre seguenti, e alle ultime tre, si ottengono queste tre prive delle incognite λ e μ.

$$\begin{aligned} X' + X'' + X''' &= 0 \\ Y' + Y'' + Y''' &= 0 \\ Z' + Z'' + Z''' &= 0 \end{aligned}$$

le quali mostrano che la somma di tutte le forze parallele a ognuno dei tre assi coordinati deve essere nulla.

Rimane quindi solo da trovare quattro altre equazioni; astraendo dalle prime tre, aggiungo rispettivamente le tre del mezzo alle ultime tre, e ne ricavo equazioni senza μ;

$$\begin{aligned} X" + X'" + \frac{\lambda}{f}(x" - x') &= 0 \\ Y" + Y'" + \frac{\lambda}{f}(y" - y') &= 0 \\ Z" + Z'" + \frac{\lambda}{f}(z" - z') &= 0 \end{aligned}$$

e che, per l'eliminazione di λ danno le seguenti

$$\begin{aligned} Y" + Y'" - \frac{y" - y'}{x" - x'}(X" - X'") &= 0 \\ Z" + Z'" - \frac{z" - z'}{x" - x'}(X" - X'") &= 0 \end{aligned}$$

Considerando, infine, separatamente le tre ultime equazioni che contengono solo μ e eliminando μ, si avranno queste altre due,

$$\begin{aligned} Y'" - \frac{y'" - y"}{x'" - x"}X'" &= 0 \\ Z'" - \frac{z'" - z"}{x'" - x"}X'" &= 0 \end{aligned}$$

Queste sette equazioni racchiudono le condizioni necessarie per l'equilibrio dei tre corpi.

13. Se il filo supposto sempre inestensibile, fosse caricato con quattro corpi, animati rispettivamente dalle forze $X', Y', Z'; X", Y", Z"$, ecc, lungo le direzioni dei tre assi coordinati, si troverebbero con procedimenti simili, che mi sembra inutile ripetere, le nove equazioni seguenti per l'equilibrio di questi quattro corpi,

$$\begin{aligned} &X' + X" + X'" + X^{iv} &= 0 \\ &Y' + Y" + Y'" + Y^{iv} &= 0 \\ &Z' + Z" + Z'" + Z^{iv} &= 0 \\ &Y" + Y'" + Y^{iv} - \tfrac{y" - y'}{x" - x'}\left(X" + X'" + X^{iv}\right) &= 0 \\ &Z" + Z'" + Z^{iv} - \tfrac{z" - z'}{x" - x'}\left(X" + X'" + X^{iv}\right) &= 0 \\ &Y'" + Y^{iv} - \tfrac{y'" - y"}{x'" - x"}\left(X'" + X^{iv}\right) &= 0 \\ &Z'" + Z^{iv} - \tfrac{z'" - z"}{x'" - x"}\left(X'" + X^{iv}\right) &= 0 \\ &Y^{iv} - \tfrac{y^{iv} - y'"}{x^{iv} - x'"}X^{iv} &= 0 \\ &Z'" - \tfrac{z^{iv} - z'"}{x^{iv} - x'"}X^{iv} &= 0 \end{aligned}$$

È facile ora estendere questa soluzione a un numero di corpi a piacere, e anche al caso della curva funicolare o catenaria; ma tratteremo questo caso in particolare, con il metodo esposto al termine della sezione precedente.

14. Se si vuole che il primo corpo sia fisso, allora le differenze dx', dy', dz' saranno nulle, e i termini contenenti queste differenze scompariranno nell'equazione generale dell'equilibrio. Così le prime tre equazioni, cioè, $X' - \frac{\lambda}{f}(x" - x') = 0$, $Y" - \frac{\lambda}{f}(y" - y') = 0$, $Z" - \frac{\lambda}{f}(z" - z') = 0$, non esisterebbero; pertanto, le equazioni $X' + X" + X'" + ecc = 0$, $Y' + Y" + Y'" + ecc = 0$, $Z' + Z" + Z'" + ecc = 0$, non varrebbero più, ma tutte le altre sì. Questo caso è, come si vede, quello dove il filo sarà attaccato in modo fisso a una delle estremità.

E se il filo fosse attaccato per due estremità, allora si avrebbe non solo $dx' = 0, dy' = 0, dz' = 0$, ma anche $dx'"^{ecc} = 0$, $dy'"^{ecc} = 0$, $dz'"^{ecc} = 0$; e i termini contenenti queste differenze fisse nell'equazione generale dell'equilibrio, sparirebbero, e sarebbero di conseguenza scomparse anche le equazioni fisse particolari che ne dipendono.

15. In generale se le due estremità del filo non fossero del tutto libere, ma attaccate a punti mobili secondo una legge data, allora questa legge espressa analiticamente, darebbe una o più equazioni tra le differenze dx', dy', dz' che si riferiscono al primo corpo, e le differenze $dx'"^{ecc}, dy'"^{ecc}$, $dz'"^{ecc}$, che si riferiscono all'ultimo; e bisognerebbe aggiungere queste equazioni moltiplicate ciascuna per un nuovo coefficiente indeterminato, all'equazione generale dell'equilibrio trovata prima; o si sostituirebbe in questa equazione generale il valore di una o più di tali differenze, tratte dalle equazioni in questione, e si eguaglierebbe poi a zero il coefficiente di ognuno di quelle che rimangono, come si è fatto qui sopra (art. 9). Poiché non vi è alcuna difficoltà, non ci fermeremo.

16. Se si volessero conoscere le forze che provengono dalla reazione del filo sui diversi corpi, basterebbe far uso del metodo dato per questo scopo nella sezione precedente (art. 7).

Si considererà quindi che si ha nel caso attuale

$$\begin{aligned} dL = df &= \frac{(x" - x')(dx" - dx') + (y" - y')(dy" - dy') + (z" - z')(dz" - dz')}{f} \\ dM = dg &= \frac{(x'" - x")(dx'" - dx") + (y'" - y")(dy'" - dy") + (z'" - z")(dz'" - dz")}{g} \end{aligned}$$

Pertanto, 1° si avrà rispetto al primo corpo le cui coordinate sono x', y', z', $\frac{dL}{dx'} = -\frac{\text{x"-x'}}{f}$, $\frac{dL}{dy'} = -\frac{y"-y'}{f}$, $\frac{dL}{dz'} = -\frac{z"-z'}{f}$; pertanto

$$\sqrt{\left(\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{\left((x" - x')^2 + (y" - y')^2 + (z" - z')^2\right)}}{f} = 1$$

Così il primo corpo riceverà a causa dell'azione delle altre una forza $= \lambda$, e la cui direzione sarà perpendicolare alla superficie rappresentata dall'equazione $dL = df = 0$, facendo variare semplicemente x', y', z'; è ora chiaro che questa superficie non è altro che una sfera il cui raggio è f, e il cui centro corrisponde alle coordinate $x", y", z"$; di conseguenza la forza λ sarà diretta lungo questo stesso raggio, cioè, lungo il filo che unisce il primo al secondo corpo.

2°. Si avrà pure rispetto al secondo corpo, le cui coordinate sono $x", y", z"$; $\frac{dL}{dx"} = -\frac{x"-x'}{f}$, $\frac{dL}{dy"} = -\frac{y"-y'}{f}$, $\frac{dL}{dz"} = -\frac{z"-z'}{f}$; pertanto

$$\sqrt{\left(\left(\frac{dL}{dx"}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy"}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz"}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{\left((x" - x')^2 + (y" - y')^2 + (z" - z')^2\right)}}{f} = 1$$

da cui segue che il secondo corpo riceverà pure una forza λ, diretta perpendicolarmente alla superficie la cui equazione è $dL = df = 0$, facendo variare $x", y", z"$; ma questa superficie è di nuovo una sfera il cui raggio è f, ma il cui centro corrisponderà alle coordinate x', y', z' del primo corpo; di conseguenza, la forza λ che agisce sul secondo corpo, sarà pure diretta lungo il filo f che unisce questo corpo al primo.

3°. Si avrà inoltre, rispetto al secondo corpo,

$$\frac{dM}{dx"} = -\frac{x'" - x"}{g} \quad \frac{dM}{dy"} = -\frac{y'"-y"}{g} \quad \frac{dM}{dz"} = -\frac{z'" - z"}{g}$$

pertanto

$$\sqrt{\left(\left(\frac{dM}{dx"}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy"}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dz"}\right)^2\right)} = 1$$

Di modo che il secondo corpo sarà spinto anche da una forza uguale a μ, la cui direzione perpendicolare alla superficie rappresentata dall'equazione $dg = 0$, e facendo variare $x", y", z"$; non essendo questa superficie altra cosa di una sfera di raggio g, ne segue che la direzione della forza μ sarà, lungo questo raggio, cioè, secondo il filo che unisce il secondo corpo al terzo.

Si farà lo stesso ragionamento rispetto agli altri corpi, e se dedurranno conclusioni simili.

17. È evidente che la forza λ prodotta dal primo corpo, lungo la direzione del filo che unisce questo corpo al seguente, e la forza uguale λ, ma direttamente contraria, che agisce sul secondo corpo, lungo la direzione dello stesso filo, possono essere solo le forze che risultano dalla reazione di questo filo sui due corpi, cioè, della tensione che subisce la parte del filo compresa tra il primo e il secondo corpo; di modo che il coefficiente λ esprimerà la tensione della parte di filo compresa tra il secondo e il terzo corpo, e così via.

Del resto, si è supposto tacitamente nella soluzione del problema in esame, che ogni parte del filo fosse, non solo inestensibile, ma anche rigido, di modo che essa conservi sempre la stessa lunghezza; di conseguenza le forze λ, μ, ecc, esprimeranno le tensioni che tendono ad avvicinare i corpi; ma se tendessero ad allontanarle tra loro, allora esprimeranno piuttosto le resistenze che il filo deve opporre al corpo per mezzo della sua rigidità, o incomprimibilità.

18. Per confermare ciò che dobbiamo dimostrare, e per presentare nello stesso tempo una nuova applicazione dei nostri metodi, supporremo che il filo al quale i corpi sono attaccati, sia elastico e suscettibile di estensione e di contrazione; e che F, G, ecc, siano le forze di contrazione delle parti del filo f, g, ecc, comprese tra il primo e il secondo corpo, tra il secondo e il terzo, ecc.

È chiaro che, per quanto detto nell'art. 5 della seconda sezione, le forze F, G, ecc, daranno i momenti $Fdf + Gdg$, ecc.

Basterà quindi aggiungere questi momenti a quelli che derivano dall'azione delle forze esterne, e che abbiamo visto prima, essere rappresentati dalla formula $X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X"dx" + Y"dy" + Z"dz" + X'"dx'" + ecc$ (art. 10), per avere la somma totale dei momenti del sistema; e siccome non vi è d'altronde alcuna condizione da soddisfare, relativamente alla disposizione dei corpi, si avrà l'equazione generale dell'equilibrio uguagliando semplicemente a zero la somma cercata, quindi $X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X"dx" + Y"dy" + Z"dz" + X'"dx'" + Y'"dy'" + Z'"dz'" + ecc + Fdf + Gdg = 0ecc$

Sostituendo i valori df, dg, ecc, trovati nell'art. 11, e uguagliando a zero la somma dei termini comprendenti ognuna delle differenze dx', dy', ecc, si avranno le equazioni seguenti per l'equilibrio del filo, nel caso in questione.

$$\begin{aligned}
X' - \tfrac{F\left(x''-x'\right)}{f} &= 0\\
Y' - \tfrac{F\left(y''-y'\right)}{f} &= 0\\
Z' - \tfrac{F\left(z''-z'\right)}{f} &= 0\\
X'' + \tfrac{F\left(x''-x'\right)}{f} - \tfrac{G\left(x'''-x''\right)}{g} &= 0\\
Y'' + \tfrac{F\left(y''-y'\right)}{f} - \tfrac{G\left(y'''-y''\right)}{g} &= 0\\
Z'' + \tfrac{F\left(z''-z'\right)}{f} - \tfrac{G\left(z'''-z''\right)}{g} &= 0\\
X''' + \tfrac{G\left(x'''-x''\right)}{g} &= 0\\
Y''' + \tfrac{G\left(y'''-y''\right)}{g} &= 0\\
Z''' + \tfrac{G\left(z'''-z''\right)}{g} &= 0
\end{aligned}$$

le quali sono, come si vede, analoghe a quelle dello stesso articolo, per il caso in cui il filo è inestensibile, supponendo $\lambda = F$, $\mu = G$, ecc.

Da ciò si vede che le quantità F, G, ecc, che esprimono qui le forze dei fili supposti elastici, sono le stesse di quelle che abbiamo trovato sopra (art. 16), per esprimere le forze degli stessi fili, nella supposizione che siano inestensibili.

19. Riprendiamo ancora il caso di un filo inestensibile con appesi tre corpi, ma supponiamo nello stesso tempo che il corpo di mezzo possa scorrere lungo il filo; in questo caso la condizione del problema sarà che la somma delle distanze tra il primo e il secondo corpo, e tra il secondo e il terzo sia costante, così indicando come sopra f e g queste distanze, si avrà $f + g = cost$, e di conseguenza $df + dg = 0$.

Si moltiplicherà quindi la quantità differenziale $df + dg$ per un coefficiente indeterminato λ, e la si aggiungerà alla somma delle diverse forze che si suppone agiscano sui corpi, e ciò darà questa equazione generale dell'equilibrio

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda\,(df + dg) = 0$$

da cui (sostituendo i valori di df e dg, e uguagliando a zero la somma dei termini comprendenti ognuna delle differenze dx', dy' ecc), si otterranno le equazioni seguenti per l'equilibrio del filo

$$\begin{aligned}
X' - \lambda\tfrac{x''-x'}{f} &= 0\\
Y' - \lambda\tfrac{y''-y'}{f} &= 0\\
Z' - \lambda\tfrac{z''-z'}{f} &= 0\\
X'' + \lambda\left(\tfrac{x''-x'}{f} - \tfrac{x'''-x''}{g}\right) &= 0\\
Y'' + \lambda\left(\tfrac{y''-y'}{f} - \tfrac{y'''-y''}{g}\right) &= 0\\
Z'' + \lambda\left(\tfrac{z''-z'}{f} - \tfrac{z'''-z''}{g}\right) &= 0\\
X''' + \lambda\tfrac{x'''-x''}{g} &= 0\\
Y''' + \lambda\tfrac{y'''-y''}{g} &= 0\\
Z''' + \lambda\tfrac{z'''-z''}{g} &= 0
\end{aligned}$$

nelle quali vi sarà da eliminare solo l'incognita λ.

Si vede come ci dovrebbe comportare, se si avesse un maggior numero di corpi di cui gli uni fossero attaccati in modo fisso al filo, e gli altri possano scorrere liberamente.

20. Supponiamo che i tre corpi siano uniti da un'asta inflessibile, di modo che siano vincolati a mantenere tra loro sempre le stesse distanze; in questo caso basterà avere soltanto $df = 0$ e $dg = 0$, ma il differenziale della distanza tra il primo e il terzo corpo che indichiamo con h deve essere nullo; di conseguenza, prendendo tre coefficienti indeterminati, λ, μ, ν, si avrà questa equazione generale dell'equilibrio,

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda df + \mu dg + \nu dh = 0$$

I valori di df e dg sono già stati dati in precedenza; rispetto a quello di dh, è chiaro che si avrà

$$h = \sqrt{\left(x''' - x'\right)^2 + \left(y''' - y'\right)^2 + \left(z''' - z'\right)^2}$$

e di conseguenza,

$$dh = \frac{\left(x''' - x'\right)\left(dx''' - dx'\right) + \left(y''' - y'\right)\left(dy''' - dy'\right) + \left(z''' - z'\right)\left(dz''' - dz'\right)}{h}$$

Introducendo questa sostituzione e uguagliando a zero la somma dei termini comprendenti ciascuna differenza dx', dy', dz', ecc, si avranno queste nuove equazioni particolari

$$\begin{aligned}
X' - \lambda\tfrac{x"-x'}{f} - \nu\tfrac{x'"-x'}{h} &= 0\\
Y' - \lambda\tfrac{y"-y'}{f} - \nu\tfrac{y'"-y'}{h} &= 0\\
Z' - \lambda\tfrac{z"-z'}{f} - \nu\tfrac{z'"-z'}{h} &= 0\\
X" + \lambda\tfrac{x"-x'}{f} - \mu\tfrac{x'"-x"}{g} &= 0\\
Y" + \lambda\tfrac{y"-y'}{f} - \mu\tfrac{y'"-y"}{g} &= 0\\
Z" + \lambda\tfrac{z"-z'}{f} - \mu\tfrac{z'"-z"}{g} &= 0\\
X'" + \mu\tfrac{x'"-x"}{g} + \nu\tfrac{x'"-x'}{h} &= 0\\
Y'" + \mu\tfrac{y'"-y"}{g} + \nu\tfrac{y'"-y'}{h} &= 0\\
Z'" + \mu\tfrac{z'"-z"}{g} + \nu\tfrac{z'"-z'}{h} &= 0
\end{aligned}$$

dalle quali bisognerà eliminare le tre incognite indeterminate λ, μ, ν, ottenendo sei equazioni per le condizioni di equilibrio.

21. È chiaro dalla forma stessa di queste equazioni, che aggiungendo rispettivamente le prime tre alle tre successive e poi alle ultime tre, si ottengono all'istante tre equazioni prive di λ, μ, ν, le quali saranno

$$\begin{aligned}
X' + X" + X'" &= 0\\
Y' + Y" + Y'" &= 0\\
Z' + Z" + Z'" &= 0
\end{aligned}$$

Nulla è più facile che trovare ancora altre tre equazioni eliminando λ, μ, ν; ma per giungervi nel modo più semplice e generale, inizio col dedurre dalle equazioni sopra, queste nuove trasformate

$$\begin{aligned}
X'y' - Y'x' - \lambda\tfrac{y'x"-x'y"}{f} - \nu\tfrac{y'x'"-x'y'"}{h} &= 0\\
X'z' - Z'x' - \lambda\tfrac{z'x"-x'z"}{f} - \nu\tfrac{z'x'"-x'z'"}{h} &= 0\\
Y'z' - Z'y' - \lambda\tfrac{z'y"-y'z"}{f} - \nu\tfrac{z'y"-y'z'"}{h} &= 0\\
X"y" - Y"x" + \lambda\tfrac{y'x"-x'y"}{f} - \mu\tfrac{y"x'"-x"y'"}{g} &= 0\\
X"z" - Z"x" + \lambda\tfrac{z'x"-x'z"}{f} - \mu\tfrac{z"x'"-x"z'"}{g} &= 0\\
Y"z" - Z"y" + \lambda\tfrac{z'y"-y'z"}{f} - \mu\tfrac{z"x'"-x"z'"}{g} &= 0\\
X'"y'" - Y'"x'" + \mu\tfrac{y"x'"-x"y"}{g} + \nu\tfrac{y'x'"-x'y'"}{h} &= 0\\
X'"z'" - Z'"x'" + \mu\tfrac{z"x'"-x"z'"}{g} + \nu\tfrac{z'x'"-x'z'"}{h} &= 0\\
Y'"z'" - Z'"y'" + \mu\tfrac{z"y'"-y"z'"}{g} + \nu\tfrac{z'y'"-y'z'"}{h} &= 0
\end{aligned}$$

le quali essendo, come si vede, analoghe alle equazioni originarie, daranno allo stesso modo, per la semplice addizione, queste tre,

$$\begin{aligned}
X'y' - Y'x' + X"y" - Y"x" + X'"y'" - Y'"x'" &= 0\\
X'z' - Z'x' + X"z" - Z"x" + X'"z'" - Z'"x'" &= 0\\
Y'z' - Z'y' + Y"z" - Y"z" + Y'"z'" - Z'"y'" &= 0
\end{aligned}$$

Le prime tre equazioni mostrano che la somma delle forze parallele a ciascuno dei tre assi coordinati, deve essere nulla; e le ultime tre contengono il principio noto dei momenti (intendendo per momento il prodotto della forza per il suo braccio) per il quale basta che la somma dei momenti di tutte le forze, per far ruotare il sistema attorno a ciascuno dei tre assi, sia pure nullo.

22. Se il primo corpo fosse fisso, allora le differenze dx', dy', dz' sarebbero nulle, e le prime tre nuove equazioni dell'art. 20 non esisterebbero più; rimarrebbero quindi solo sei equazioni, che, per eliminazione delle tre incognite λ, μ, ν, si ridurranno a tre.

Per giungere a queste tre equazioni, si può operare in modo analogo a quello utilizzato per ottenere le ultime tre equazioni dell'art. 21, purché si abbia cura di far sì che le trasformate non contengano le indeterminate λ e μ che entrano nelle tre prime equazioni dalle quali facciamo ora astrazione; mediante queste combinazioni si otterrà

$$\begin{aligned}
X"\left(y"-y'\right) - Y"\left(x"-x'\right) - \mu\frac{\left(y"-y'\right)\left(x'"-x"\right) - \left(x"-x'\right)\left(y'"-y"\right)}{g} &= 0\\
X"\left(z"-z'\right) - Z"\left(x"-x'\right) - \mu\frac{\left(z"-z'\right)\left(x'"-x"\right) - \left(x"-x'\right)\left(z'"-z"\right)}{g} &= 0\\
Y"\left(z"-z'\right) - Z"\left(y"-y'\right) - \mu\frac{\left(z"-z'\right)\left(y'"-y"\right) - \left(y"-y'\right)\left(z'"-z"\right)}{g} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X'''\left(y'''-y'\right)-Y'''\left(x'''-x'\right)-\mu\frac{\left(y'''-y'\right)\left(x'''-x''\right)-\left(x'''-x'\right)\left(y'''-y''\right)}{g} &= 0\\
X'''\left(z'''-z'\right)-Z'''\left(x'''-x'\right)-\mu\frac{\left(z'''-z'\right)\left(x'''-x''\right)-\left(x'''-x'\right)\left(z'''-z''\right)}{g} &= 0\\
Y'''\left(z'''-z'\right)-Z'''\left(y'''-y'\right)-\mu\frac{\left(z'''-z'\right)\left(y'''-y''\right)-\left(y'''-y'\right)\left(z'''-z''\right)}{g} &= 0
\end{aligned}$$

e se si aggiungono ora le prime tre di questa trasformate alle ultime tre, si avranno queste

$$\begin{aligned}
X''\left(y''-y'\right)-Y''\left(x''-x'\right)+X'''\left(y'''-y'\right)-Y'''\left(x'''-x'\right) &= 0\\
X''\left(z''-z'\right)-Z''\left(x''-x'\right)+X'''\left(z'''-z'\right)-Z'''\left(x'''-x'\right) &= 0\\
Y''\left(z''-z'\right)-Z''\left(y''-y'\right)+Y'''\left(z'''-z'\right)-Z'''\left(y'''-y'\right) &= 0
\end{aligned}$$

le quali varranno sempre qualunque sia lo stato del primo corpo, poiché sono indipendenti dalle equazioni relative a tale corpo. Queste equazioni racchiudono, come si vede, lo stesso principio dei momenti, ma rispetto ad assi che passeranno per il primo corpo.

23. Supponiamo di avere un quarto corpo attaccato alla stessa asta inflessibile, per il quale le coordinate siano x^{iv}, y^{iv}, z^{iv}, e le forze parallele a queste coordinate X^{iv}, Y^{iv}, Z^{iv}.

Basterà aggiungere alla somma dei momenti delle forze, la quantità $X^{iv}dx^{iv} + Y^{iv}dy^{iv} + Z^{iv}dz^{iv}$; poi, siccome le distanze tra tutti i corpi devono rimanere costanti, si avrà per le condizioni del problema, non solo $df = 0$, $dg = 0$, $dh = 0$, come nel caso precedente; ma anche $dl = 0$, $dm = 0$, $dn = 0$, indicando con l, m, n le distanze del quarto corpo dai tre precedenti. Così l'equazione generale dell'equilibrio sarà in questo caso (98)

$$\begin{gathered}
X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz''\\
+X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + X^{iv}dx^{iv} + Y^{iv}dy^{iv} + Z^{iv}dz^{iv}\\
+\lambda df + \mu dg + \nu dh + \pi dl + \rho dm + \sigma dn = 0
\end{gathered}$$

I valori di df, dg, dh sono gli stessi di prima, mentre quelli di dl, dm, dn, è chiaro che si avrà

$$\begin{aligned}
l &= \sqrt{\left(x^{iv}-x'\right)^2+\left(y^{iv}-y'\right)^2+\left(z^{iv}-z'\right)^2}\\
m &= \sqrt{\left(x^{iv}-x''\right)^2+\left(y^{iv}-y''\right)^2+\left(z^{iv}-z''\right)^2}\\
n &= \sqrt{\left(x^{iv}-x'''\right)^2+\left(y^{iv}-y'''\right)^2+\left(z^{iv}-z'''\right)^2}
\end{aligned}$$

e di conseguenza,

$$\begin{aligned}
dl &= \frac{\left(x^{iv}-x'\right)\left(dx^{iv}-dx'\right)+\left(y^{iv}-y'\right)\left(dy^{iv}-dy'\right)+\left(z^{iv}-z'\right)\left(dz^{iv}-dz'\right)}{l}\\
dm &= \frac{\left(x^{iv}-x''\right)\left(dx^{iv}-dx''\right)+\left(y^{iv}-y''\right)\left(dy^{iv}-dy''\right)+\left(z^{iv}-z''\right)\left(dz^{iv}-dz''\right)}{m}\\
dn &= \frac{\left(x^{iv}-x'''\right)\left(dx^{iv}-dx'''\right)+\left(y^{iv}-y'''\right)\left(dy^{iv}-dy'''\right)+\left(z^{iv}-z'''\right)\left(dz^{iv}-dz'''\right)}{n}
\end{aligned}$$

Facendo queste sostituzioni, e uguagliando a zero la somma dei termini comprendenti ognuna delle differenze dx', dy', ecc, si troveranno dodici equazioni particolari, di cui le prime nove saranno le stesse dell'art. 10, aggiungendo rispettivamente ai loro primi membri le quantità seguenti

$$\begin{array}{ccc}
-\pi\frac{\left(x^{iv}-x'\right)}{l} & -\pi\frac{\left(y^{iv}-y'\right)}{l} & -\pi\frac{\left(z^{iv}-z'\right)}{l}\\
-\rho\frac{\left(x^{iv}-x''\right)}{m} & -\rho\frac{\left(y^{iv}-y''\right)}{m} & -\rho\frac{\left(z^{iv}-z''\right)}{m}\\
-\sigma\frac{\left(x^{iv}-x'''\right)}{n} & -\sigma\frac{\left(y^{iv}-y'''\right)}{n} & -\sigma\frac{\left(z^{iv}-z'''\right)}{n}
\end{array}$$

mentre le ultime tre saranno

$$\begin{aligned}
X^{iv}+\pi\frac{\left(x^{iv}-x'\right)}{l}+\rho\frac{\left(x^{iv}-x''\right)}{m}+\sigma\frac{\left(x^{iv}-x'''\right)}{n} &= 0\\
Y^{iv}+\pi\frac{\left(y^{iv}-y'\right)}{l}+\rho\frac{\left(y^{iv}-y''\right)}{m}+\sigma\frac{\left(y^{iv}-y'''\right)}{n} &= 0\\
Z^{iv}+\pi\frac{\left(z^{iv}-z'\right)}{l}+\rho\frac{\left(z^{iv}-z''\right)}{m}+\sigma\frac{\left(z^{iv}-z'''\right)}{n} &= 0
\end{aligned}$$

24. Poiché vi sono in tutto dodici equazioni e sei indeterminati fissi, $\lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma$, da eliminare , per le condizioni di equilibrio rimarranno solo sei equazioni finali come nel caso dei tre corpi; e si troveranno con un metodo simile a quello dell'art. 21, queste sei equazioni analoghe a quelle di questo articolo

$$\begin{aligned}
X'+X''+X'''+X^{iv} &= 0\\
Y'+Y''+Y'''+Y^{iv} &= 0\\
Z'+Z''+Z'''+Z^{iv} &= 0\\
X'y'-Y'x'+X''y''-Y''x''+X'''y'''-Y'''x'''+X^{iv}y^{iv}-Y^{iv}x^{iv} &= 0\\
X'z'-Z'x'+X''z''-Z''x''+X'''z'''-Z'''x'''+X^{iv}z^{iv}-Z^{iv}x^{iv} &== 0\\
Y'z'-Z'y'+Y''z''-Z''y''+Y'''z'''-Z'''y'''+Y^{iv}z^{iv}-Z^{iv}y^{iv} &== 0
\end{aligned}$$

Invece delle ultime tre, si potranno anche sostituire le tre seguenti, che si troveranno con il metodo dell'art. 22, e che, essendo indipendenti dalle equazioni relative al primo corpo, hanno il vantaggio di valere sempre, qualunque sia lo stato di questo corpo

$$\begin{array}{c} X"\left(y"-y'\right)-Y"\left(x"-x'\right)+X'"\left(y'"-y'\right)-Y'"\left(x'"-x'\right)+X^{iv}\left(y^{iv}-y'\right)-Y^{iv}\left(x^{iv}-x'\right)=0 \\ X"\left(z"-z'\right)-Z"\left(x"-x'\right)+X'"\left(z'"-z'\right)-Z'"\left(x'"-x'\right)+X^{iv}\left(z^{iv}-z'\right)-Z^{iv}\left(x^{iv}-x'\right)=0 \\ Y"\left(z"-z'\right)-Z"\left(y"-y'\right)+Y'"\left(z'"-z'\right)-Z'"\left(y'"-y'\right)+Y^{iv}\left(z^{iv}-z'\right)-Z^{iv}\left(y^{iv}-y'\right)=0) \end{array}$$

25. Si vede ora come si dovrebbe operare per trovare le condizioni dell'equilibrio di un numero qualsiasi si corpi attaccati ad un'asta o a una leva inflessibile. In generale è chiaro che affinché la posizione rispettiva dei corpi rimanga la stessa, basta che le distanze dei primi tre corpi siano costanti, e che le distanze di ciascuno degli altri a questi tre lo siano pure, poiché la posizione di un punto qualsiasi è sempre determinata dalle distanze di questo punto dai tre dati; ci sarà quindi per ogni nuovo corpo aggiunto, lo stesso ragionamento e le stesse operazioni fatte nell'art. 23, rispetto ai quattro corpi; e ognuno di essi fornirà tre nuove equazioni particolari, con tre nuove indeterminate da eliminare; di modo che le equazioni finali saranno sempre nello stesso numero del caso dei tre corpi; e saranno della stessa forma di quella trovate nel precedente articolo.

Del resto, è chiaro che queste equazioni rientrano in quelle che abbiamo trovato in generale per l'equilibrio di un sistema qualsiasi libero, negli artt. 3,6 della terza sezione. Infatti, poiché, per l'inflessibilità della verga, le distanze dei corpi tra loro sono invariabili, ne segue che l'equilibrio deve sussistere, purché i moti di traslazione e di rotazione siano eliminati; e si sarebbe potuto con questa sola considerazione, risolvere il problema precedente, con le formule degli articoli citati; ma abbiamo creduto che non fosse inutile darne una soluzione diretta, e ricavata dalle condizioni particolari del problema.

26. Consideriamo di nuovo il caso dei tre corpi uniti da un'asta; e supponiamo inoltre che l'asta sia elastica nel punto in cui si trova il secondo corpo, di modo che le distanze di questo dal primo e dall'ultimo siano costanti, ma che l'angolo formato dalle rette di queste distanze sia variabile, e che l'effetto dell'elasticità consista nell'aumentare tale angolo, e di conseguenza nel diminuire l'angolo esterno formata da uno dei lati, e dal prolungamento dell'altro.

Indichiamo la forza elastica con E, e l'angolo esterno lungo il quale essa agisce e; è facile concludere da quanto stabilito nella seconda sezione, che il momento della forza E dovrà essere rappresentato da Ede; di modo che la somma dei momenti di tutte le forze del sistema sarà $X'dx'+Y'dy'+Z'dz'+X"dx"+Y"dy"+Z"dz"+X'"dx'"+Y'"dy'"+Z'"dz'"+Ede$

Ora le condizioni del problema sono le stesse dell'art. 11, cioè, $df=0$ e $dg=0$. Pertanto, si avrà questa equazione generale dell'equilibrio

$$X'dx'+Y'dy'+Z'dz'+X"dx"+Y"dy"+Z"dz"+X'"dx'"+Y'"dy'"+Z'"dz'"+Ede+\lambda df+\mu dg=0$$

e si tratterà solo di sostituire i valori di de, df, dg; quelli di df e dg sono gli stessi dell'art. citato; e per trovare il valore di de, si noterà che nel triangolo i cui tre lati sono f, g, h, (art. 20), $180^\circ - e$ è l'angolo opposto al lato h; di modo che per il teorema noto, si avrà $\cos e=\frac{f^2+g^2-h^2}{2fg}$; da cui si dedurrà per differenziazione il valore di de; e siccome per le condizioni del problema si ha $df=0$ e $dg=0$, basterà far variare e e h ottenendo $de=\frac{hdh}{fg\sin e}$; sostituendo questo valore nella equazione precedente, è chiaro che esso diverrà della stessa forma dell'equazione generale dell'equilibrio nel caso dell'art. 20, supponendo in questo $\nu=\frac{Eh}{fg\sin e}$; di conseguenza le equazioni particolari saranno ancora le stesse nei due casi, con questa sola differenza, che in quello dell'art. citato, la quantità ν è indeterminata, e deve di conseguenza essere eliminata; nel caso attuale, invece, questa quantità è nota e vi sono solo due indeterminate λ, μ da eliminare; di modo che deve restare una equazione finale in più del caso citato, cioè, sette equazioni finali invece di sei. Siccome, sia che la quantità ν sia nota oppure no, nulla impedisce di eliminarla con le altre due, λ, μ, è chiaro che si avranno anche nel presente caso le stesse equazioni trovate negli artt. 21, 22; per trovare la settima equazione, basterà eliminare λ nelle prime tre, o μ nelle ultime tre delle nove equazioni particolari dell'art. 21, e sostituire per ν il suo valore $\frac{Eh}{fg\sin e}$.

27. Del resto, se nel valore di de non si fossero supposti df e dg nulli, si sarebbe ottenuta una espressione della forma $de=\frac{hdh}{fg\sin e}+Adf+Bdg$, essendo A, B funzioni di $f, g, h, \sin e$; allora i tre termini $Ede+\lambda df+\mu dg$ dell'equazione generale, sarebbero diventati $\frac{Eh}{fg\sin e}dh+(EA+\lambda)\,df+(EB+\mu)\,dg$; ma λ e μ sono due quantità indeterminate ed è chiaro che le si può sostituire con $\lambda-EA$, $\mu-EB$; dopodiché la quantità diverrà $\frac{Eh}{fg\sin e}dh+\lambda df+\mu dg$ come se f e g non fossero variati nell'espressione di de.

28. Se fossero uniti insieme numerosi punti con aste metalliche, si troverebbero allo stesso modo le equazioni necessarie per il loro equilibrio, e in generale il nostro metodo darà sempre, con la stessa facilità, le condizioni di equilibrio di un sistema di corpi legati tra loro in un modo qualsiasi, e sottoposti all'azione di forze esterne a piacere. Lo sviluppo del calcolo è, come si vede, sempre uniforme, aspetto da riguardare come uno dei principali vantaggi di questo metodo.

1.5.3 Equilibrio di un filo, di cui tutti i punti sono tirati da forze qualsiasi, e che è supposto perfettamente flessibile o inflessibile, o elastico, e nello stesso tempo estensibile oppure no.

29. È questa un'occasione per impiegare il metodo esposto nell'art. 9 e seguenti della sezione 4.

Supporremo sempre, per maggiore semplicità, che tutte le forze esterne che agiscono su ogni punto del filo siano ridotte a tre, X, Y, Z, dirette lungo le coordinate x, y, z di questo punto. Così chiamando dm l'elemento del filo, si avrà per la somma dei momenti di tutte queste forze, relativamente alla lunghezza totale del filo, questa formula integrale (Art. 13, sez. 4)

$$S\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm$$

30. Consideriamo il caso di un filo perfettamente flessibile e inestensibile; chiamando ds l'elemento della curva di questo filo, che è espresso da $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$; basterà, per la condizione dell'inflessibilità, che ds sia una quantità invariabile e che si abbia anche rispetto ad ogni elemento del filo, questa equazione di condizione indefinita $\delta ds = 0$. Moltiplicando, quindi, δds per una quantità indeterminata λ, e prendendo l'integrale totale, si avrà $S\lambda\delta ds$; e se non vi sono altre equazioni di condizione, si avrà l'equazione generale dell'equilibrio, uguagliando a zero la somma dei due integrali che si incontrano.

Avendo ora $ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, si avrà differenziando rispetto a δ

$$\delta ds = \frac{dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz}{ds}$$

quindi

$$S\lambda\delta ds = S\frac{\lambda dx}{ds}\delta dx + S\frac{\lambda dy}{ds}\delta dy + S\frac{\lambda dz}{dx}\delta dz$$

cambiando δd in $d\delta$, e integrando per parti per eliminare la d davanti a δ, secondo le regole date nell'art. 17 della sezione 4, si avranno queste trasformate

$$\begin{array}{rcl}
S\frac{\lambda dx}{ds}\delta dx &=& \frac{\lambda" dx"}{ds"}\delta x" - \frac{\lambda' dx'}{ds'}\delta x' - Sd\frac{\lambda dx}{ds}xdx\\
S\frac{\lambda dy}{ds}\delta dy &=& \frac{\lambda" dy"}{ds"}\delta y" - \frac{\lambda' dy'}{ds'}\delta x' - Sd\frac{\lambda dy}{ds}xdy\\
S\frac{\lambda dz}{ds}\delta dz &=& \frac{\lambda" dz"}{ds"}\delta z" - \frac{\lambda' dz'}{ds'}\delta z' - Sd\frac{\lambda dz}{ds}xdz
\end{array}$$

Così l'equazione generale dell'equilibrio diverrà

$$\begin{array}{c}
S\left(\left(Xdm - d\frac{\lambda dx}{ds}\right)\delta x + \left(Ydm - d\frac{\lambda dy}{ds}\right)\delta y\right)\\
+\left(Zdm - d\frac{\lambda dz}{ds}\right) + \frac{\lambda" dx"}{ds"}\delta x" - \frac{\lambda' dy"}{ds"}\delta y"\\
+\frac{\lambda" dx"}{ds"}\delta z" - \frac{\lambda' dx'}{ds'}\delta x' - \frac{\lambda' dy'}{ds'}\delta y' - \frac{\lambda' dz'}{ds'}\delta z' = 0
\end{array}$$

31. Si eguaglieranno dapprima a zero (art. 18, sez. citata), i coefficienti di $\delta x, \delta y, \delta z$ sotto il segno di S, e si avranno allora queste tre equazioni particolari e indefinite

$$\begin{array}{c}
Xdm - d\frac{\lambda dx}{ds} = 0\\
Ydm - d\frac{\lambda dy}{ds} = 0\\
Zdm - d\frac{\lambda dz}{ds} = 0
\end{array}$$

dalle quali eliminando l'indeterminata λ, rimarranno due equazioni che serviranno a determinare la curva del filo.

Questa eliminazione è molto semplice, poiché basta integrare le equazioni precedenti, e ciò darà

$$\begin{array}{c}
\frac{\lambda dx}{ds} = A + \int Xdm\\
\frac{\lambda dy}{ds} = B + \int Ydm\\
\frac{\lambda dz}{ds} = C + \int Zdm
\end{array}$$

essendo A, B, C costanti arbitrarie; si avrà poi eliminando λ

$$\begin{array}{rcl}
\frac{dy}{dx} &=& \frac{B+\int Ydm}{A+\int Xdm}\\
\frac{dz}{dx} &=& \frac{C+\int Zdm}{A+\int Xdm}
\end{array}$$

equazioni in accordo con le formule note della catenaria.

32. Se si vuole giungere direttamente a equazioni puramente differenziali e senza il segno $\int$, si metteranno le equazioni trovate nella forma

$$\begin{array}{rcl}
Xdm - \lambda d.\frac{dx}{ds} - d\lambda\frac{dx}{ds} &=& 0\\
Ydm - \lambda d.\frac{dy}{ds} - d\lambda\frac{dy}{ds} &=& 0\\
YZdm - \lambda d.\frac{dz}{ds} - d\lambda\frac{dz}{ds} &==& 0
\end{array}$$

dalle quali, eliminando $d\lambda$, si otterranno queste sue

$$\begin{aligned} \frac{Xdy - Ydx}{ds}dm &= \lambda\left(\frac{dy}{ds}d.\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}d.\frac{dy}{ds}\right) \\ \frac{Xdz - Zdx}{ds}dm &= \lambda\left(\frac{dz}{ds}d.\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}d.\frac{dz}{ds}\right) \end{aligned}$$

e poi se si moltiplicano le stesse equazioni rispettivamente per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, si avrà, poiché $\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d.\frac{dz}{ds} = \frac{1}{2}d.\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}\right) = 0$, $\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{ds}dm = d\lambda$; e basterà solo sostituire in quest'ultima i valori di λ ricavati dalle precedenti.

33. Consideriamo ora i termini dell'equazione generale che stanno fuori dal segno di S; e supponiamo in primo luogo che il filo sia interamente libero; in questo caso le variazioni $\delta x', \delta y', \delta z'$ e $\delta x", \delta y", \delta z"$ che si riferiscono ai due punti estremi del filo, saranno tutte indeterminate e arbitrarie; di conseguenza servirà che ogni termine contenente queste variazioni sia nullo. Basterà quindi che si abbia $\lambda' = 0$ e $\lambda" = 0$, cioè che il valore di λ dovrà essere nullo all'inizio e alla fine del filo. Si soddisferà questa condizione per mezzo delle costanti. Così, siccome le prime tre equazioni integrali dell'art. 32 danno per il primo punto del filo dove le quantità nel segno di $\int$ divengono nulle,

$$\frac{\lambda' dx'}{ds'} = A \quad \frac{\lambda' dy'}{ds'} = B \quad \frac{\lambda' dz'}{ds'} = C$$

e per l'ultimo punto del filo in cui $\int$ cambia in S,

$$\frac{\lambda" dx"}{ds"} = A + SXdm \frac{\lambda" dy"}{ds"} = B + SYdm \frac{\lambda" dz"}{ds"} = C + SZdm$$

si avrà nel caso in esame $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, e $SXdm = 0$, $SYdm = 0$, $SZdm = 0$. Queste tre ultime equazioni corrispondono, come si vede, alle prime tre dell'art. 12 della sezione precedente.

34. Supponiamo in secondo luogo che il filo sia attaccato per uno dei suoi estremi, o per entrambi; e se è il primo ad essere fisso, le variazioni $\delta x', \delta y', \delta z'$ saranno nulle, e basterà uguagliare a zero i coefficienti di $\delta x", \delta y", \delta z"$, cioè di fare $\lambda" = 0$.

Per lo stesso motivo, quando il secondo estremo sarà fisso, basterà avere $\lambda' = 0$. Ma se i due estremi fossero entrambi fissi, allora non si avrebbe alcuna condizione particolare da soddisfare, poiché le variazioni $\delta x', \delta y', \delta z', \delta x", \delta y", \delta z"$ saranno tutte nulle.

35. Supponiamo in terzo luogo che le estremità del filo siano attaccate a linee o superfici curve, lungo le quali possano scorrere liberamente; e siano, per esempio, $dz' = a'dx' + b'dy'$, $dz" = a"dx" + b"dy"$ le equazioni differenziali delle superfici alle quali il primo e l'ultimo punto del filo sono attaccati; si avrà analogamente cambiando d in δ, $\delta z' = a'\delta x' + b'\delta y'$, $\delta z" = a"\delta x" + b"\delta y"$; si sostituiranno questi valori nei termini in questione, si eguaglieranno poi a zero i coefficienti di $\delta x', \delta y', \delta x", \delta y"$.

In generale si tratterà la parte che è fuori dal segno nell'equazione generale dell'equilibrio, come se fosse sola e rappresentasse l'equazione dell'equilibrio dei due corpi separati e posti alle estremità del filo.

36. Supponiamo, per esempio, che il filo sia attaccato con le sue due estremità alle estremità di una leva mobile attorno ad un punto fisso. Siano a, b, c le tre coordinate che determinano nello spazio la posizione di questo punto fisso, cioè, del punto di appoggio della leva, e siano inoltre f la distanza tra questo punto d'appoggio e l'estremità della leva alla quale è attaccata la seconda estremità del filo, h la distanza tra le due estremità della leva, e di conseguenza anche tra i due estremi del filo; è chiaro che queste quantità fisse a, b, c, f, g, h sono date dalla tipologia del problema, ed è chiaro nello stesso tempo che x', y', z', essendo le coordinate per l'inizio della curva del filo, e $x", y", z"$, le coordinate per la parte finale della stessa curva, si avrà

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{(a - x')^2 + (b - y')^2 + (c - z')^2} \\ g &= \sqrt{(a - x")^2 + (b - y")^2 + (c - z")^2} \\ h &= \sqrt{(x" - x')^2 + (y" - y')^2 + (z" - z')^2} \end{aligned}$$

Essendo le quantità f, g, h invariabili, si avrà differenziando rispetto a δ queste tre equazioni determinate

$$\begin{aligned} (a - x')\,\delta x' + (b - y')\,\delta y' + (c - z')\,\delta z' &= 0 \\ (a - x")\,\delta x" + (b - y")\,\delta y" + (c - z")\,\delta z" &= 0 \\ (x" - x')\,(\delta x" - \delta x') + (y" - y')\,(\delta y" - \delta y') + (z" - z')\,(\delta z" - \delta z') &= 0 \end{aligned}$$

che essendo ciascuna moltiplicata per un coefficiente indeterminato, dovranno pure essere aggiunte all'equazione generale dell'equilibrio. Così prendendo α, β, γ per i tre coefficienti, e uguagliando a zero i coefficienti delle sei variazioni

$\delta x', \delta y', \delta z', \delta x", \delta y", \delta z"$, si avranno tante equazioni particolari determinate, che saranno

$$\begin{array}{rcl} \alpha\,(a-x') - \gamma\,(x" - x') - \frac{\lambda' dx'}{ds'} & = & 0 \\ \alpha\,(b-y') - \gamma\,(y" - y') - \frac{\lambda' dy'}{ds'} & = & 0 \\ \alpha\,(c-z') - \gamma\,(z" - z') - \frac{\lambda' dz'}{ds'} & = & 0 \\ \beta\,(a-x") + \gamma\,(x" - x') + \frac{\lambda" dx"}{ds"} & = & 0 \\ \beta\,(b-y") + \gamma\,(y" - y') + \frac{\lambda" dy"}{ds"} & = & 0 \\ \beta\,(c-z") + \gamma\,(z" - z') + \frac{\lambda" dz"}{ds"} & = & 0 \end{array}$$

che, eliminando α, β, γ, si ridurranno a tre.

Essendo queste tre combinate poi con le tre equazioni di condizione sopra, serviranno poi a determinare la posizione della leva.

Si vede così come operare in altri casi simili.

37, Infine, se oltre alle forze che animano ogni punto del filo, ve ne saranno di particolari applicate alle due estremità del filo, e rappresentate da X', Y', Z' per la prima estremità del filo, e da $X", Y", Z"$ per l'ultima estremità, queste forze daranno i momenti

$$X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z' + X"\delta x" + Y"\delta y" + Z"\delta z"$$

e bisognerà aggiungere ancora questa quantità al primo membro dell'equazione generale dell'equilibrio, cioè, alla parte che è fuori dal segno, la quale diventerà allora

$$\left(X" + \frac{\lambda" dx"}{ds"}\right)\delta x" + \left(Y" + \frac{\lambda" dy"}{ds"}\right)\delta y" + \left(Z" + \frac{\lambda" dz"}{ds"}\right)\delta z" + \left(X' + \frac{\lambda' dx'}{ds'}\right)\delta x' + \left(Y' + \frac{\lambda' dy'}{ds'}\right)\delta y' + \left(Z' + \frac{\lambda' dz'}{ds'}\right)\delta z' +$$

e sulla quale si opererà nei diversi casi, come si è visto nell'articolo precedente.

38. Supponiamo ora il filo animato in tutti i suoi punti dalle stesse forze X, Y, Z, e tirato inoltre nelle sue due estremità dalle forze $X', Y', Z', X", Y", Z"$, deve essere disteso su una superficie curva data, la cui equazione sia $dz = pdx + qdy$, e richiede la forma e la posizione di questo filo sulla stessa superficie affinché sia in equilibrio.

Questo problema che potrebbe forse essere alquanto difficile da trattare con i principi ordinari della Meccanica, si risolve molto facilmente con il nostro metodo e con le nostre formule; infatti, l'equazione della superficie data, dà cambiando d in δ, $\delta z = p\delta x + q\delta y$; basterà così sostituire questo valore di δz nei termini sotto il segno dell'equazione generale dell'equilibrio del filo (art. 30) e poi uguagliare separatamente a zero le quantità contenenti δx e δy. Si avranno in tal modo queste due equazioni indefinite

$$\begin{array}{rcl} Xdm - d.\dfrac{\lambda dx}{ds} + p\left(Zdm - d.\dfrac{\lambda dz}{ds}\right) & = & 0 \\ Ydm - d.\dfrac{\lambda dy}{ds} + p\left(Zdm - d.\dfrac{\lambda dz}{ds}\right) & = & 0 \end{array}$$

le quali serviranno a determinare la curva del filo, essendo combinate con l'equazione $dz = pdx + qdy$ della superficie, ed essendo semplificate, per eliminazione dell'indeterminata λ.

39. Inoltre, siccome si suppone che il filo sia applicato in tutta la sua lunghezza alla stessa superficie, si avranno anche per i suoi due punti estremi, $\delta z' = p'\delta x' + q'\delta y'$, e $\delta z" = p"\delta x" + q"\delta y"$. Si faranno ancora queste sostituzioni nei termini fuori dal segno dell'equazione generale (art. 30), o piuttosto nella formula data nell'art. 37, e nella quale si è tenuto conto delle forze X', Y', ecc; si eguaglieranno poi separatamente a zero le quantità contenenti ognuna di queste quattro variazioni restanti $\delta x', \delta y', \delta x", \delta y"$; si otterranno queste quattro nuove equazioni determinate

$$\begin{array}{rcl} X' - \frac{\lambda' dx'}{ds'} + p'\left(Z' - \frac{\lambda' dz'}{ds'}\right) & = & 0 \\ Y' - \frac{\lambda' dy'}{ds'} + q'\left(Z' - \frac{\lambda' dz'}{ds'}\right) & = & 0 \\ X" - \frac{\lambda" dx"}{ds"} + p"\left(Z" - \frac{\lambda" dz"}{ds"}\right) & = & 0 \\ Y" - \frac{\lambda" dy"}{ds"} + q"\left(Z" - \frac{\lambda" dz"}{ds"}\right) & = & 0 \end{array}$$

le quali dovranno essere soddisfatte tramite le costanti.

40. Ma invece di sostituire, come abbiamo fatto, il valore di δz in δx e δy ricavati dalle equazioni $\delta z - p\delta x - q\delta y = 0$, si potrebbe considerare questa stessa equazione come una nuova equazione di condizione indeterminata; basterà allora moltiplicare questa equazione per un altro coefficiente indeterminato μ, prendendone l'integrale totale, e aggiungerla all'equazione generale dell'equilibrio (art. 30). In questo modo la parte sotto il segno diverrà

$$S\left[\left(Xdm - d.\frac{\lambda dx}{ds} - \mu p\right)\delta x + \left(Ydm - d.\frac{\lambda dy}{ds} - \mu q\right)\delta y + \left(Zdm - d.\frac{\lambda dz}{ds} - \mu\right)\delta z\right]$$

e si otterranno immediatamente queste tre equazioni indefinite

$$\begin{array}{rcl} Xdm - d.\dfrac{\lambda dx}{ds} - \mu p & = & 0 \\ Ydm - d.\dfrac{\lambda dy}{ds} - \mu q & = & 0 \\ Zdm - d.\dfrac{\lambda dz}{ds} - \mu & = & 0 \end{array}$$

le quali per eliminazione di μ si ridurranno alle stesse equazioni già trovate (art. 38). Ma queste ultime hanno l'ulteriore vantaggio di far conoscere nello stesso tempo la pressione che ogni elemento del filo esercita sulla superficie secondo la teoria data nell'art. 7 della sezione 4.

41. Infatti, è facile dedurre da questa teoria che i termini $\mu\left(\delta z - p\delta x - q\delta y\right)$ derivanti dall'equazione di condizione $\delta z - p\delta x - q\delta y = 0$, possono rappresentare l'effetto di una forza uguale a $\mu\sqrt{(1+p^2+q^2)}$, e applicata ad ogni elemento dm del filo in una direzione perpendicolare alla superficie che ha per equazione $\delta z - p\delta x - q\delta y = 0$, oppure $dz - pdx - qdy = 0$, è alla superficie stessa sulla quale il filo è supposto stare. Questa superficie produce quindi l'effetto della forza in questione, la quale sarà di conseguenza uguale e direttamente contraria alla pressione esercitata dal filo sulla superficie stessa (art. 8, sez. 4). Di modo che la pressione di ogni punto del filo sarà $= \frac{\mu\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{dm}$, o sostituendo i valori di $\mu, \mu p, \mu q$ ricavati dalle equazioni sopra

$$\sqrt{\left(\left(X - \frac{1}{dm}\times d.\frac{\lambda dx}{ds}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{dm}\times d.\frac{\lambda dy}{ds}\right)^2 + \left(Z - \frac{1}{dm}\times d.\frac{\lambda dz}{ds}\right)^2\right)}$$

Si applicherà poi il medesimo ragionamento alla parte della equazione generale che è fuori dal segno S, e se ne ricaveranno conclusioni analoghe.

42. Finora abbiamo supposto che il filo fosse inestensibile; vediamo ora come una molla in grado di dilatarsi e di contrarsi; e sia F la forza con la quale ogni elemento ds della curva del filo tende a contrarsi, si avrà, come nell'art. 18 (mettendo ds al posto di f, e cambiando d in δ), $F\delta ds$ per il momento di questa forza, e $SF\delta ds$ per la somma dei momenti di tutte le forze di contrazione che agiscono su tutta la lunghezza del filo. Si aggiungerà quindi questo integrale $SF\delta ds$ all'integrale $S\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right)$ che esprime la somma dei momenti di tutte le forze esterne che agiscono sul filo (art. 29), e uguagliando il tutto a zero, si avrà l'equazione generale dell'equilibrio del filo a molla.

Ora è chiaro che questa equazione sarà della stessa forma di quella dell'art. 30 per il caso di un filo inestensibile, e che cambiando F in λ, anche le due equazioni diverranno identiche. Si avranno quindi in questo caso le stesse equazioni particolari per l'equilibrio del filo trovate nell'art. 31, mettendo solo in queste F al posto di λ. Siccome si suppone che la quantità F sia nota, non si avrà bisogno di eliminarla; è per questo che si avrà qui una equazione in più per l'equilibrio del filo rispetto al caso citato; ma siccome l'eliminazione è sempre permessa, ne segue che le equazioni risultanti da questa eliminazione, varranno pure per un filo inestensibile, come per un filo estensibile e a molla.

Si può concludere che la quantità indeterminata λ della soluzione dell'art. 31, non esprime altra cosa che la forza con la quale ogni elemento del filo resiste all'allungamento per l'azione di forze esterne; cioè, per quella che si chiama comunemente la tensione del filo. È anche ciò che si sarebbe potuto trovare direttamente dalla teoria dell'art. 7 della sezione precedente, così come l'abbiamo fatto rispetto alla pressione esercitata dal filo su una superficie (art. precedente).

43. Supponiamo di nuovo il filo inestensibile, ma invece di supporlo nello stesso tempo perfettamente flessibile, come fatto finora, supponiamo elastico, in modo che si abbia in ogni punto una forza che chiamerò E, che si oppone alla inflessione del filo, e che tende di conseguenza a diminuire l'angolo di contingenza. Chiamando questo angolo e, si avrà, come nell'art. 26 (cambiando solo d in δ), $E\delta e$ per il momento di ogni forza E; quindi $SE\delta e$ sarà la somma dei momenti di tutte le forze d'elasticità che agiscono lungo tutto il filo, la quale dovrà essere aggiunta al primo membro dell'equazione generale dell'equilibrio nel caso di un filo inestensibile e perfettamente flessibile (art. 30).

Tutta la difficoltà consiste quindi nel riportare l'integrale $SE\delta e$ alla forma conveniente; per questo bisogna iniziare a cercare il valore di e; abbiamo trovato in precedenza (art. 26) $\cos e = \frac{f^2+g^2-h^2}{2fg}$, da cui si ricava

$$\sin e^2 = \frac{4f^2g^2 - \left(f^2+g^2-h^2\right)^2}{4f^2g^2}$$

per applicare questa formula al caso presente, basta notare che le coordinate $x', y', z', x", y", z", x'", y'", z'"$ per le quali abbiamo espresso le quantità f, g, h (artt. 11 e 20), divengono qui x, y, z; $x+dx, y+dy, z+dz$; $x+2dx+d^2x, y+2dy+d^2y, z+2dz+d^2z$; di modo che si avrà;

$$f^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

$$\begin{aligned} g^2 &= \left(dx+d^2x\right)^2 + \left(dy+d^2y\right)^2 + \left(dz+d^2z\right)^2 \\ &= dx^2+dy^2+dz^2+2\left(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z\right)+d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2 \\ &= ds^2+2dsd^2s+d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(2dx+d^2x\right)^2 + \left(2dy+d^2y\right)^2 + \left(2dz+d^2z\right)^2 \\ &= 4ds^2+4dsd^2s+d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2 \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} f^2+g^2-h^2 &= 4ds^4+8ds^3d^2s+4ds^2\left(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2\right)-4\left(ds^2+dsd^2s\right) \\ &= 4ds^2\left(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2\right) \end{aligned}$$

Si avrà pertanto alla fine

$$\sin e^2 = \frac{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}{ds^2}$$

Siccome questo valore di $\sin e^2$ è infinitesimo del secondo ordine, ne segue che $\sin e$, e di conseguenza anche l'angolo e sarà infinitesimo del primo ordine; di modo che si avrà

$$e = \frac{\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}{ds}$$

che è l'espressione dell'angolo di contingenza e in una qualsiasi curva a doppia curvatura.

44. Si differenzierà ora secondo δ, per avere il valore di δe, e siccome per la condizione dell'inestensibilità del filo si ha già $\delta ds = 0$ (art. 21), e di conseguenza anche $d\delta ds = \delta d^2 s = 0$, si potranno trattare nella differenziazione, ds e d^2s come costanti, e si avrà

$$\delta e = \frac{d^2x\delta d^2x + d^2y\delta d^2y + d^2z\delta d^2z}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}$$

sostituendo in $SE\delta e$, e semplificando

$$I = \frac{E}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}$$

si avrà quindi

$$SE\delta e = SId^2x\delta d^2x + SId^2y\delta d^2y + SId^2z\delta d^2z$$

Essendo queste espressioni trattate secondo le regole date nell'art. 17 della sezione 4, cambiando dapprima δd in δd e integrando poi per parti per fare scomparire il d davanti a δ, si avranno le seguenti trasformate

$$\begin{array}{lcl} SId^2x\delta d^2x & = & I"d^2x"d\delta x" - d.\left(I"d^2x"\right)\delta x" - I'd^2x'd\delta x' + d.\left(I'd^2x'\right)\delta x' + Sd^2.\left(Id^2x\right)\delta x \\ SId^2y\delta d^2y & & I"d^2y"d\delta y" - d.\left(I"d^2y"\right)\delta y" - I'd^2y'd\delta y' + d.\left(I'd^2y'\right)\delta y' + Sd^2.\left(Id^2y\right)\delta y \\ SId^2z\delta d^2z & & I"d^2z"d\delta z" - d.\left(I"d^2z"\right)\delta z" - I'd^2z'd\delta z' + d.\left(I'd^2z'\right)\delta z' + Sd^2.\left(Id^2z\right)\delta z \end{array}$$

Si aggiungeranno quindi questi diversi termini a quelli che formano il primo membro dell'equazione generale dell'equilibrio dell'art. 30 e si avrà l'equazione dell'equilibrio di un filo inestensibile ed elastico.

45. Eguagliando dapprima a zero i coefficienti delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ che si trovano sotto il segno S, si avranno queste tre equazioni indefinite

$$\begin{array}{rcl} Xdm - d.\dfrac{\lambda dx}{ds} + d^2.\left(Id^2x\right) & = & 0 \\ Ydm - d.\dfrac{\lambda dy}{ds} + d^2.\left(Id^2y\right) & = & 0 \\ Zdm - d.\dfrac{\lambda dz}{ds} + d^2.\left(Id^2z\right) & = & 0 \end{array}$$

dalle quali bisognerà eliminare l'indeterminata λ, riducendole a due, che saranno sufficienti a determinare la curva del filo.

Una prima integrazione dà

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\lambda dx}{ds} - d.\left(Id^2x\right) & = & A + \int Xdm \\ \dfrac{\lambda dy}{ds} - d.\left(Id^2y\right) & = & B + \int Ydm \\ \dfrac{\lambda dz}{ds} - d.\left(Id^2z\right) & = & C + \int Zdm \end{array}$$

essendo A, B, C costanti arbitrarie e l'eliminazione di λ darà

$$\begin{array}{rcl} dxd.\left(Id^2y\right) - dy.\left(Id^2x\right) & = & \left(A + \int Xdm\right)dy - \left(B + \int Ydm\right)dx \\ dxd.\left(Id^2z\right) - dz.\left(Id^2x\right) & = & \left(A + \int Xdm\right)dz - \left(C + \int Zdm\right)dx \\ dyd.\left(Id^2z\right) - dz.\left(Id^2y\right) & = & \left(B + \int Ydm\right)dz - \left(B + \int Zdm\right)dy \end{array}$$

e l'ultima è già contenuta nelle altre.

Queste equazioni sono nuovamente integrabili, e si avrà

$$
\begin{aligned}
I\left(dxd^2y - dyd^2x\right) &= F + \int\left(A + \int Xdm\right)dy - \int\left(B + \int Ydm\right)dx \\
I\left(dxd^2z - dzd^2x\right) &= G + \int\left(A + \int Xdm\right)dz - \int\left(C + \int Zdm\right)dx \\
I\left(dyd^2z - dzd^2y\right) &= H + \int\left(B + \int Ydm\right)dz - \int\left(B + \int Zdm\right)dy
\end{aligned}
$$

essendo F, G, H nuove costanti.

Ora, abbiamo supposto prima (art. 44) $I = \frac{E}{ds\sqrt{(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2)}}$; il quadrato del denominatore di questa quantità è

$$
\begin{aligned}
ds^2\left(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2\right) - ds^2d^2s^2 &= \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)\left(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2\right) - \left(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z\right)^2 \\
&= \left(dxd^2y - dyd^2x\right)^2 + \left(dxd^2z - dzd^2x\right)^2 + \left(dyd^2z - dzd^2y\right)^2
\end{aligned}
$$

Se si sommano, pertanto, tra loro i quadrati delle tre equazioni precedenti, si avranno queste, senza differenziali

$$
\begin{aligned}
E^2 &= \left(F + \int\left(A + \int Xdm\right)dy - \int\left(B + \int Ydm\right)dx\right)^2 \\
&+ \left(G + \int\left(A + \int Xdm\right)dz - \int\left(C + \int Zdm\right)dx\right)^2 \\
&+ \left(H + \int\left(B + \int Ydm\right)dz - \int\left(B + \int Zdm\right)dy\right)^2
\end{aligned}
$$

e se si dividono tra loro due di queste stesse equazioni, si avranno quelle in cui l'elasticità non compare

$$
\frac{dxd^2z - dzd^2x}{dxd^2y - dyd^2x} = \frac{G + \int\left(A + \int Xdm\right)dz - \int\left(C + \int Zdm\right)dx}{F + \int\left(A + \int Xdm\right)dy - \int\left(B + \int Ydm\right)dx}
$$

Queste due equazioni sono quanto di più semplice vi è per determinare la curva elastica, tenendo conto della doppia curvatura.

46. Consideriamo ora i termini dell'equazione generale che sono fuori dal segno S; essi sono

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\lambda" dx"}{ds"} - d.\left(I" d^2x"\right)\right)\delta x" + I" d^2x" d\delta x" \\
+&\left(\frac{\lambda" dy"}{ds"} - d.\left(I" d^2y"\right)\right)\delta y" + I" d^2y" d\delta y" \\
+&\left(\frac{\lambda" dz"}{ds"} - d.\left(I" d^2z"\right)\right)\delta z" + I" d^2z" d\delta z" \\
-&\left(\frac{\lambda' dx'}{ds'} - d.\left(I' d^2x'\right)\right)\delta x' + I' d^2x' d\delta x' \\
-&\left(\frac{\lambda' dy'}{ds'} - d.\left(I' d^2y'\right)\right)\delta y' + I' d^2y' d\delta y' \\
-&\left(\frac{\lambda' dz'}{ds'} - d.\left(I' d^2z'\right)\right)\delta z' + I' d^2z' d\delta z'
\end{aligned}
$$

e basterà eliminarli indipendentemente dai valori di $\delta x", \delta y"$, ecc.

Pertanto, 1°, se il filo è completamente libero, basterà che i coefficienti delle dodici quantità $\delta x", \delta y", \delta z", d\delta x", d\delta y", d\delta z", \delta x', \delta y', \delta z', d\delta x', d\delta y', d\delta z'$ siano ognuno nullo.

Dalle prime equazioni integrali dell'articolo 45, si vede che iniziando l'integrazione al primo punto del filo, i coefficienti di $\delta x', \delta y', \delta z'$, sono uguali a A, B, C, e quelli $\delta x", \delta y", \delta z"$ divengono $A + SXdm$, $B + SYdm$, $C + SZdm$. Così basterà che si abbia nel caso trattato $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ e $SXdm = 0$, $SYdm = 0$, $SZdm = 0$.

Poi dovrà essere anche $I" d^2x" = 0$, $I" d^2y" = 0$, $I" d^2z" = 0$, $I'd^2x' = 0$, $I'd^2y' = 0$, $I'd^2z' = 0$, per far scomparire i termini con $d\delta x", d\delta y"$, ecc; ed è chiaro che le seconde equazioni integrali dello stesso articolo daranno $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$; e $S\left(\int Xdm.dy - \int Ydm.dx\right) = 0$, $S\left(\int Xdm.dz - \int Zdm.dx\right) = 0$, $S\left(\int Ydm.dz - \int Zdm.dy\right) = 0$.

2° Se la prima estremità del filo è fissa, allora $\delta' x = 0, \delta' y = 0, \delta' z = 0$; di conseguenza A, B, C non saranno nulli; ma la condizione che i coefficienti di $\delta x", \delta y", \delta z"$ siano nulli, darà $A = -SXdm$, $B = -SYdm, C = -SZdm$; e se la posizione della tangente a questa estremità fosse data, si avrebbe inoltre $d\delta' x = 0, d\delta' y = 0, d\delta' z = 0$, di conseguenza F, G, H non saranno nulli, ma la nullità dei coefficienti di $d\delta x", d\delta y", d\delta z"$ darà

$$
\begin{aligned}
F &= S\left(\left(B + \int Ydm\right)dx - \left(A + \int Xdm\right)dy\right) \\
G &= S\left(\left(C + \int Zdm\right)dx - \left(A + \int Xdm\right)dz\right) \\
H &= S\left(\left(C + \int Zdm\right)dy - \left(B + \int Ydm\right)dz\right)
\end{aligned}
$$

Si ragionerà allo stesso modo rispetto alle condizioni della seconda estremità del filo.

3° Infine, se oltre alle forze che agiscono su tutti i punti del filo, si avessero in particolare $X', Y', Z', X", Y", Z"$ applicate ad entrambe le estremità del filo, basterebbe aggiungere ai termini sopra i seguenti

$$X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z' + X"\delta x" + Y"\delta y" + Z"\delta z"$$

e vi fossero altre condizioni relative allo stato di queste estremità, si opererebbe sempre allo stesso modo e secondo i medesimi principi.

47. Se si volesse che il filo fosse doppiamente elastico, sia rispetto all'estensibilità sia alla flessibilità, allora si avrebbe nell'equazione generale dell'equilibrio, al posto del termine $S\lambda d\delta s$, questo $SFd\delta s$, cioè, semplicemente F al posto di λ, indicando con F la forza elastica che resiste all'estensione del filo (art. 42) . Ma servirebbe, inoltre, in questo caso, considerare ds come variabile nell'espressione di δe; di conseguenza bisognerebbe aggiungere al valore di δe dell'art. 44, questi due termini, nei quali pongo, per semplificare, $\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)} = \sigma$, $-\frac{\sigma\delta ds}{ds^2} - \frac{de^2\delta d^2s}{\sigma ds}$; si aggiungeranno quindi al valore di $SE\delta e$ dello stesso articolo i termini $-S\frac{E\sigma}{ds^2}\delta ds - S\frac{Ed^2s}{\sigma ds}\delta d^2s$; quest'ultimo si riduce (art. 17, sez. 4) a $-\frac{E"d^2s"}{\sigma"ds"}d\delta s" + \frac{E'd^2s^2}{\sigma'ds'}d\delta s' + Sd.\frac{Ed^2s}{\sigma ds}.\delta ds$; basterà quindi aggiungere al valore di $SE\delta e$ i termini $-\frac{E"d^2s"}{\sigma"ds"}d\delta s" + \frac{E'd^2s^2}{\sigma'ds'}d\delta s' + S\left(d.\frac{Ed^2s}{\sigma ds'} - \frac{E\sigma}{ds^2}\right)\delta ds$. Essendo l'ultimo termine di questa espressione analogo al termine $SF\delta ds$ sarà suscettibile di una simile riduzione; rispetto agli altri due basterà solo sostituire per $d\delta s$ il suo valore $\frac{dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z}{ds}$, segnando tutte le lettere di un tratto o due.

Da ciò è facile concludere che si avranno per la soluzione del caso presente, le stesse formule degli artt. 31 e 32, mettendo solo $F + d.\frac{Ed^2s}{\sigma ds'} - \frac{E\sigma}{ds^2}$ al posto di λ; e aggiungendo ai coefficienti di $d\delta x", d\delta y", d\delta z", d\delta x', d\delta y', d\delta z'$, le quantità $\omega"dx", \omega"dy", \omega"dz", \omega'dx', \omega'dy', \omega'dz'$, dove $\omega = -\frac{Ed^2s}{\sigma ds^2}$.

48. Veniamo infine al caso di un filo inestensibile e inflessibile; si avrà qui per la somma dei momenti delle forze la stessa formula integrale dell'art. 30, cioè, $S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm$; ne segue che la condizione dell'inestensibilità del filo darà come nel precedente articolo, $\delta ds = 0$; e quella dell'inflessibilità darà $\delta e = 0$, poiché l'angolo di contingenza deve essere invariabile; ma queste due condizioni non bastano ancora nel caso in cui la curva è a doppia curvatura, come si mostrerà.

49. Per trattare la questione in modo più semplice e diretto, noto che tutto consiste nel fare in modo che i diversi punti della curva del filo conservino sempre tra loro le stesse distanze: considerando parecchi punti successivi, le cui coordinate siano $x, y, z, x + dx, y + dy + z + dz, x + 2dx + d^2x, y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z$ecc. È chiaro che i quadrati delle distanze tra il primo di questi punti e i successivi saranno espressi dalle quantità

$$\begin{gathered} dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ \left(2dx + d^2x\right)^2 + \left(2dy + d^2y\right)^2 + \left(2dz + d^2z\right)^2 \\ \left(3dx + 3d^2x + d^3x\right)^2 + \left(3dy + 3d^2y + d^3y\right)^2 + \left(3dz + 3d^2z + d^3z\right)^2 \end{gathered}$$

ecc.

Supponiamo, per brevità, $dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha$, $d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 = \beta$, $d^3x^2 + d^3y^2 + d^3z^2 = \gamma$, ecc, le quantità precedenti che, una volta sviluppate, diverranno $\alpha, 4\alpha + 2d\alpha + \beta, 9\alpha + 9d\alpha + 9\beta + 3\left(d^2\alpha - 2\beta\right) + 3d\beta + \gamma$, ecc.

Basterà quindi che le variazioni di queste quantità siano nulle in tutta l'estensione della curva, dando luogo a queste equazioni indefinite,

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= 0 \\ 4\delta\alpha + 2\delta d\alpha + \delta\beta &= 0 \\ 9\delta\alpha + 9\delta d\alpha + 3\delta\beta + 3\delta d^2\alpha + 3\delta\beta + \delta\gamma &= 0 \end{aligned}$$

ecc; ma essendo $\delta\alpha = 0$, si ha anche $d\delta\alpha = \delta d\alpha = 0$; quindi $\delta\beta = 0$; da ciò si avrà inoltre $d^2\delta\alpha = \delta d^2\alpha = 0$, $d\delta\beta = \delta d\beta = 0$; quindi $\delta\gamma = 0$; e così di seguito. Di modo che le equazioni di condizione per l'inestensibilità e l'inflessibilità del filo saranno $\delta\alpha = 0$, $\delta\beta = 0$, $\delta\gamma = 0$, ecc, cioè, differenziando e cambiando δd in $d\delta$,

$$\begin{aligned} dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z &= 0 \\ d^2xd^2\delta x + d^2yd^2\delta y + d^2zd^2\delta z &= 0 \\ d^3xd^3\delta x + d^3yd^3\delta y + d^3zd^3\delta z &= 0 \end{aligned}$$

ecc.

È chiaro che bastano tre di queste equazioni per determinare le tre variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$, da cui si può concludere che soddisfacendo alle tre equazioni, tutte le altre che si potranno trovare all'infinito, lo saranno pure; ci si può convincere anche con lo stesso calcolo, come si vedrà in seguito (art. 55).

50. Si avrà quindi con il nostro metodo questa equazione generale dell'equilibrio

$$\begin{aligned} 0 &= S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + S\lambda\,(dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z) \\ &+ S\mu\left(d^2xd^2\delta x + d^2yd^2\delta y + d^2zd^2\delta z\right) + S\nu\left(d^3xd^3\delta x + d^3yd^3\delta y + d^3zd^3\delta z\right) \end{aligned}$$

la quale con le trasformazioni mostrate si ridurrà alla forma seguente,

$$\begin{array}{rl} 0 = & S\left(Xdm - d.\left(\lambda dx\right) + d^2.\left(\mu d^2x\right) - d^3.\left(\nu d^3x\right)\right)\delta x \\ + & S\left(Ydm - d.\left(\lambda dy\right) + d^2.\left(\mu d^2y\right) - d^3.\left(\nu d^3y\right)\right)\delta y \\ + & S\left(Zdm - d.\left(\lambda dz\right) + d^2.\left(\mu d^2z\right) - d^3.\left(\nu d^3z\right)\right)\delta z \\ + & \left(\lambda" dx" - d.\left(\mu" d^2x"\right) + d^2.\left(\nu" d^3x"\right)\right)\delta x" \\ + & \left(\mu" d^2x" - d.\left(\nu" d^3x"\right)d\delta x"\right) + \nu" d^3x" d^2\delta x" \\ + & \left(\lambda" dy" - d.\left(\mu" d^2y"\right) + d^2\left(\nu" d^3y"\right)\right)\delta y" \\ + & \left(\mu" d^2y" - d.\left(\nu" d^3y"\right)d\delta y"\right) + \nu" d^3y" d^2\delta y" \\ + & \left(\lambda" dz" - d.\left(\mu" d^2z"\right) + d^2\left(\nu" d^3z"\right)\right)\delta z" \\ + & \left(\mu" d^2z" - d.\left(\nu" d^3z"\right)d\delta z"\right) + \nu" d^3z" d^2\delta z" \\ - & \left(\lambda' dx' - d.\left(\mu' d^2x'\right) + d^2.\left(\nu' d^3x'\right)\right)\delta x' \\ - & \left(\mu' d^2x' - d.\left(\nu' d^3x'\right)\right)d\delta x' - \nu' d^3x' d^2\delta x' \\ - & \left(\lambda' dy' - d.\left(\mu' d^2y'\right) + d^2.\left(\nu' d^3y'\right)\right)\delta y' \\ - & \left(\mu' d^2y' - d.\left(\nu' d^3y'\right)\right)d\delta y' - \nu' d^3y' d^2\delta y' \\ - & \left(\lambda' dz' - d.\left(\mu' d^2z'\right) + d^2.\left(\nu' d^3z'\right)\right)\delta z' \\ - & \left(\mu' d^2z' - d.\left(\nu' d^3z'\right)\right)d\delta z' - \nu' d^3z' d^2\delta z' \end{array}$$

51. Uguagliando a zero i coefficienti di $\delta x, \delta y, \delta z$ sotto il segno S, si avranno queste tre equazioni indefinite,

$$\begin{array}{rcl} Xdm - d.\left(\lambda dx\right) + d^2.\left(\mu d^2x\right) - d^3.\left(\nu d^3x\right) & = & 0 \\ Ydm - d.\left(\lambda dy\right) + d^2.\left(\mu d^2y\right) - d^3.\left(\nu d^3y\right) & = & 0 \\ Zdm - d.\left(\lambda dz\right) + d^2.\left(\mu d^2z\right) - d^3.\left(\nu d^3z\right) & = & 0 \end{array}$$

le quali, contenendo tre variabili indeterminate λ, μ, ν, serviranno solo a determinare queste tre quantità; di modo che non si avrà più alcuna equazione indefinita tra le diverse forze X, Y, Z, che si suppongono applicate a tutti i punti dell'asta.

Per determinare le quantità in esame, è chiaro che basta integrare le equazioni precedenti; ciò è semplice e si avranno queste tre

$$\begin{array}{rcl} \int Xdm - \lambda dx + d.\left(\mu d^2x\right) - d^2.\left(\nu d^3x\right) & = & A \\ \int Ydm - \lambda dy + d.\left(\mu d^2y\right) - d^2.\left(\nu d^3y\right) & = & B \\ \int Zdm - \lambda dz + d.\left(\mu d^2z\right) - d^2.\left(\nu d^3z\right) & = & C \end{array}$$

essendo A, B, C tre costanti arbitrarie.

Sottolineo inoltre che se si moltiplica la prima per dy o dz, e si sottrae la seconda o la terza moltiplicata per dx, per eliminare λ da queste tre equazioni, si avrà

$$\begin{array}{c} dy\int Xdm - dx\int Ydm + dyd.\left(\mu d^2x\right) - dxd.\left(\mu d^2y\right) - dyd^2\left(\nu d^3x\right) + dxd^2.\left(\nu d^3y\right) = Ady - Bdx \\ dz\int Xdm - dx\int Zdm + dzd.\left(\mu d^2x\right) - dxd.\left(\mu d^2z\right) - dzd^2\left(\nu d^3x\right) + dxd^2.\left(\nu d^3z\right) = Adz - Cdx \\ dz\int Ydm - dy\int Zdm + dzd.\left(\mu d^2y\right) - dyd.\left(\mu d^2z\right) - dzd^2\left(\nu d^3y\right) + dyd^2.\left(\nu d^3z\right) = Bdz - Cdy \end{array}$$

le quali sono anche integrabili, e gli integrali sono

$$\begin{array}{rcl} y\int Xdm - x\int Ydm - \int\left(Xy - Yx\right)dm + \mu\left(dyd^2x - dxd^2y\right) - dyd.\left(\nu d^3x\right) & & \\ +dxd.\left(\nu d^3y\right) + \nu\left(d^2yd^3x - d^2xd^3y\right) & = & Ay - Bx + F \\ z\int Xdm - x\int Zdm - \int\left(Xz - Zx\right)dm + \mu\left(dzd^2x - dxd^2z\right) - dzd.\left(\nu d^3x\right) & & \\ +dxd.\left(\nu d^3z\right) + \nu\left(d^2zd^3x - d^2xd^3z\right) & = & Az - Cx + G \\ z\int Ydm - y\int Zdm - \int\left(Yz - Zy\right)dm + \mu\left(dzd^2y - dyd^2z\right) - dzd.\left(\nu d^3y\right) & & \\ +dyd.\left(\nu d^3y\right) + \nu\left(d^2zd^3y - d^2yd^3z\right) & = & Bz - Cy + H \end{array}$$

essendo F, G, H nuove costanti arbitrarie.

Queste ultime tre equazioni serviranno a determinare le tre quantità μ, ν e $d\nu$; e le prime tre equazioni integrali daranno i valori si $\lambda, d\mu, d^2\nu$. Così si avranno tutte le incognite che entrano nei termini dell'equazione generale (art. prec.) che sono fuori dal segno S; basterà perciò segnare nelle sei equazioni trovate, tutte le lettere di un tratto, o di due, ad eccezione delle costanti arbitrarie, supponendo nulle nel primo caso le quantità con il segno $\int$, le quali sono presunte iniziare al primo punto del filo, e cambiando nel secondo caso, $\int$ in S nelle stesse quantità, per riferirle all'ultimo punto del filo.

52. Ciò posto, vediamo ora le condizioni che possono derivare dall'annullamento dei termini fuori dal segno S nell'equazione generale dell'equilibrio (art. 50).

E dapprima se si suppone l'asta interamente libera, le variazioni $\delta x', \delta y', \delta z', d\delta x', d\delta y', d\delta z', d^2\delta x', d^2\delta y', d^2\delta z'$ e $\delta x", \delta y", \delta z", d\delta x"$, ecc, saranno tutte indeterminate; di conseguenza basterà eguagliare a zero ognuno dei loro coefficienti; ed è chiaro che basterà per questo che le quantità $\lambda', \mu', \nu', d\mu', d\nu', d^2\nu'$, così come $\lambda", \mu", \nu", d\mu", d\nu", d^2\nu"$, siano tutte nulle.

Pertanto, le prime tre equazioni integrali dell'articolo precedente, daranno queste sei condizioni, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $SXdm = A$, $SYdm = B$, $SZdm = C$.

E le tre ultime daranno queste

$$\begin{aligned} Ay' - Bx' + F &= 0 \\ Az' - Cx' + G &= 0 \\ Bz' - Cy' + H &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y"SXdm - x"SYdm - S\,(Xy - Yx)\,dm &= Ay" - Bx" + F \\ z"SXdm - x"SZdm - S\,(Xz - Zx)\,dm &= Az" - Cx" + G \\ z"SYdm - y"SZdm - S\,(Yz - Zy)\,dm &= Bz" - Cy" + H \end{aligned}$$

Pertanto $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$ e di conseguenza

$$\begin{array}{ccc} SXdm = 0 & SYdm = 0 & SZdm = 0 \\ S\,(Xy - Yx)\,dm = 0 & S\,(Xz - Zx)\,dm = 0 & S\,(Yz - Zy)\,dm = 0 \end{array}$$

Queste sei condizioni sono quindi le sole necessarie per l'equilibrio di un'asta inflessibile quando vi sono solo due punti fissi; ciò è in accordo con quanto detto in precedenza (art. 25), ed è anche quanto si sarebbe potuto dedurre immediatamente dalla teoria data nella Sez. 3, così come sottolineate nell'art. citato.

53. supponiamo ora che si abbia nell'asta un punto fisso, e che questo punto sia la prima estremità dell'asta; in questo caso si avrà $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta z' = 0$; di modo che i termini contenenti queste variazioni scompariranno; basterà quindi uguagliare a zero i coefficienti di $d\delta x', d\delta y', d\delta z', d^2\delta x', d^2\delta y', d^2\delta z'$ così come i coefficienti $\delta x", \delta y", \delta z", d\delta x", d\delta y"$, ecc.

È facile vedere che per questo basterà che si abbia $\mu' = 0$, $\nu' = 0$, $d\nu' = 0$; e poi $\lambda" = 0$, $\mu" = 0$, $\nu" = 0$, $d\nu" = 0$, $d^2\nu" = 0$, come nel caso precedente; e si troveranno le stesse condizioni dell'art. precedente, ad eccezione di A, B, C che non saranno nulli.

Si avrà quindi $A = SXdbm$, $B = SYdm$, $C = SZdm$, poi $F = Bx' - Ay'$, $G = Cx' - Az'$, $H = Cy' - Bz'$ e le ultime tre equazioni si ridurranno a queste

$$\begin{aligned} S\,(Xy - Yx)\,dm &= Bx' - Ay' \\ S\,(Xz - Zx)\,dm &= Cx' - Az' \\ S\,(Yz - Zy)\,dm &= Cy' - Bz' \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} S\,(Xy - Yx)\,dm + x'SYdm - y'SXdm &= 0 \\ S\,(Xz - Zx)\,dm + x'SZdm - z'SXdm &= 0 \\ S\,(Yz - Zy)\,dm + y'SZdm - z'SYdm &= 0 \end{aligned}$$

o che è la stessa cosa, a

$$\begin{aligned} S\,(X\,(y - y') - Y\,(x - x'))\,dm &= 0 \\ S\,(X\,(z - z') - Z\,(x - x'))\,dm &= 0 \\ S\,(Y\,(z - z') - Z\,(y - y'))\,dm &= 0 \end{aligned}$$

Queste sono le sole condizioni necessarie per l'equilibrio, ed è chiaro che esse corrispondono a quelle che sono state trovate nell'art. 24.

54. Se l'asta fosse fissamente attaccata per la sua prima estremità, di modo che non solo il primo punto della curva fosse fisso, ma anche la tangente a questo primo punto, allora si avrebbe soltanto $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta z' = 0$, ma anche $\delta dx' = d\delta x' = 0$, $\delta dy' = d\delta y' = 0$, $\delta dz' = d\delta z' = 0$; di conseguenza tutti i termini con queste quantità scomparirebbero e rimarrebbe da eliminare i termini con $d^2\delta x'$, $d^2\delta y'$, $d^2\delta z'$ e $\delta x", \delta y", \delta z" d\delta x", d\delta y"$, ecc.

Si avranno in questo caso queste sole condizioni

$$\nu" = 0 \quad \lambda" = 0 \quad \mu" = 0 \quad \nu' = 0 \quad d\mu" = 0 \quad d\nu" = 0 \quad d^2\ \nu" = 0$$

Pertanto le costanti A, B, C avranno ancora i valori $A = SXdm$, $B = SYdm$, $C = SZdm$; essendo le ultime tre equazioni dell'art. 51 applicate all'ultimo punto dell'asta, daranno $F = S\,(Yx - Xy)\,dm$, $G = S\,(Zx - Xz)\,dm$, $H = S\,(Zy - Yz)\,dm$. E se si applicano queste stesse equazioni al primo punto, si avrà

$$\begin{aligned}
\mu'\left(dy'ddx' - dx'ddy'\right) - d\nu'\left(dy'd^3x' - dx'd^3y'\right) &= Ay' - Bx' + F \\
\mu'\left(dz'ddx' - dx'ddz'\right) - d\nu'\left(dz'd^3x' - dx'd^3z'\right) &= Az' - Cx' + G \\
\mu'\left(dz'ddy' - dy'ddz'\right) - d\nu'\left(dz'd^3y' - dy'd^3z'\right) &= Bz' - Cy' + H
\end{aligned}$$

da cui eliminando μ'e $d\nu'$, risulta questa condizioni di equilibrio

$$A\,(y'dz' - z'dy') + B\,(z'dx' - x'dz') + C\,(x'dy' - y'dx') + Fdz' - Gdy' + Hdx' = 0$$

Vediamo qui sotto un caso simile, art. 59.

Si potrebbe risolvere allo stesso modo tutti gli altri casi e particolarmente quello di un corpo di forma qualsiasi. Ma quest'ultimo problema merita di essere esaminato con più attenzione, e con un metodo più semplice del precedente.

1.5.4 Sull'equilibrio di un corpo solido di grandezza sensibile e di forma qualunque, i cui punti sono tirati da forze qualsiasi.

55. Poiché la condizione di solidità del corpo consiste nel fatto che tutti i suoi punti conservano costantemente tra loro la stessa posizione e le stesse distanze, si avranno tra le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$, le stesse equazioni di condizione trovate nell'art. 49; si potrà così, tramite esse, determinare immediatamente i valori di queste variazioni. Per questo sottolineo che, poiché passando alle differenze seconde, è sempre permesso prendere una delle prime differenze per costane, si può supporre dx costante, e di conseguenza $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, ecc; dopodiché la seconda e la terza equazione dell'art. citato, diverranno

$$d^2yd^2\delta y + d^2zd^2\delta z = 0 \qquad d^3yd^3\delta y + d^3zd^3\delta z = 0$$

La prima di queste equazioni dà

$$d^2\delta y = -\frac{d^2z}{d^2y}d^2\delta z$$

e differenziando

$$d^3\delta y = -\frac{d^2z}{d^2y}d^3\delta z - \left(\frac{d^3z}{d^3y} - \frac{d^2zd^3y}{d^2y^2}\right)d^2\delta z$$

sostituendo questo valore nella seconda equazione, si troverà interamente divisibile per $d^3z - \frac{d^3yd^2z}{d^2y}$, e si avrà dopo la divisione $d^3\delta z - \frac{d^3y}{d^2y}d^2\delta z = 0$; da cui si ricava, integrando $d^2\delta z = \delta Ld^2y$, essendo δL una costante. Conoscendo $d^2\delta z$ si troverà $d^2\delta y0 - \delta Ld^2z$; quindi integrando di nuovo, e aggiungendo le costanti $-\delta Mdx$, δNdx, si avrà $d\delta z = \delta Ldy - \delta Mdx$, $d\delta y = -\delta Ldz + \delta Ndx$; ed essendo questi valori poi sostituiti nella prima equazione di condizione, cioè $dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z = 0$, diverrà $d\delta x = -\delta Ndy + \delta Mdz$.

Infine si avrà con una terza integrazione, e aggiungendo nuove costanti $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$,

$$\begin{aligned}
\delta x &= \delta\lambda - y\delta N + z\delta M \\
\delta y &= \delta\mu + x\delta N - z\delta L \\
\delta z &= \delta\nu - x\delta M + y\delta L
\end{aligned}$$

È facile convincersi che queste tre espressioni non soddisfano solamente le prime tre equazioni di condizione dell'art. 49, ma anche tutte le altre che si potrebbero trovare all'infinito, e che sono tutte contenute in questa equazione generale

$$d^nxd^n\delta x + d^nyd^n\delta y + d^nzd^n\delta z = 0$$

Tali sono quindi i valori di $\delta x, \delta y, \delta z$ per un sistema qualsiasi di punti uniti in modo che conservino sempre tra loro le stesse distanze; questi valori serviranno così non solo per il caso di una curva qualsiasi mobile e invariabile nella sua forma, ma anche per il caso di un corpo solido di figura qualsiasi.

56. Dopo che i valori precedenti di $\delta x, \delta y, \delta z$ soddisfano già alle equazioni di condizione del problema, è chiaro che basterà sostituirle nella formula $S\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm$ e fare in modo che divenga nulla, indipendentemente dalle quantità $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu, \delta L, \delta M, \delta N$ che sono le sole indeterminate restanti.

Siccome queste quantità sono le stesse per tutti i punti del corpo, bisognerà nella sostituzione farle uscire fuori dal segno S; e si avrà di conseguenza questa equazione generale dell'equilibrio di un corpo solido di figura qualsiasi.

$$\begin{aligned}
\delta\lambda SXdm + \delta\mu SYdm + \delta\nu SZdm &+ \\
\delta NS\,(Yx - Xy)\,dm + \delta MS\,(Xz - Zx)\,dm &+ \\
\delta LS\,(Zy - Yz)\,dm &= 0
\end{aligned}$$

da cui si ricaveranno le equazioni particolari dell'equilibrio tenendo conto delle condizioni del problema.

57. E se il corpo è supposto interamente libero, le sei variazioni $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu, \delta L, \delta M, \delta N$, saranno tutte indeterminate, e bisognerà uguagliare separatamente a zero le quantità per le quali si trovano moltiplicate; e ciò darà queste sei equazioni già note,

$$\begin{array}{rrr} SXdm = 0 & SYdm = 0 & SZdm = 0 \\ S(Yx - Xy)\,dm = 0 & S(Xz - Zx)\,dm = 0 & S(Zy - Yz)\,dm = 0 \end{array}$$

58. In secondo luogo, se nel corpo vi è un punto fisso attorno al quale possa ruotare in tutti i sensi, e se si indicano con a, b, c i valori delle coordinate x, y, z per questo punto, basterà che si abbia $\delta a = 0, \delta b = 0, \delta c = 0$; pertanto $\delta\lambda - b\delta N + c\delta M = 0$, $\delta\mu + a\delta N - c\delta L = 0$, $\delta\nu - a\delta M + b\delta L = 0$; da cui si ricava

$$\begin{array}{rcl} \delta\lambda & = & b\delta N - c\delta M \\ \delta\mu & = & c\delta L - a\delta N \\ \delta\nu & = & a\delta M - b\delta L \end{array}$$

Se si sostituiscono questi valori nell'equazione generale dell'art. precedente, e mettendo sotto il segno S le quantità a, b, c che sono costanti rispetto ai diversi punti del corpo, si avrà questa trasformata

$$\delta NS\left(Y\left(x-a\right)-X\left(y-b\right)\right)dm+\delta MS\left(X\left(z-c\right)-Z\left(x-a\right)\right)dm+\delta LS\left(Z\left(y-b\right)-Y\left(z-c\right)\right)dm=0$$

la quale fornirà tre sole equazioni, cioè,

$$\begin{array}{rcl} S\left(Y\left(x-a\right)-X\left(y-b\right)\right)dm & = & 0 \\ S\left(X\left(z-c\right)-Z\left(x-a\right)\right)dm & = & 0 \\ S\left(Z\left(y-b\right)-Y\left(z-c\right)\right)dm & = & 0 \end{array}$$

59. In terzo luogo se vi sono nel corpo due punti fissi, e se f, g, h sono i valori di x, y, z per il secondo di questi punti, si avrà

$$\begin{array}{rcl} \delta\lambda & = & g\delta N - h\delta M \\ \delta\mu & = & h\delta L - f\delta N \\ \delta\nu & = & f\delta M - g\delta L \end{array}$$

pertanto, confrontando questi valori di $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$, con quelli dell'art. precedente, si avrà

$$\begin{array}{rcl} (g-b)\,\delta N - (h-c)\,\delta M & = & 0 \\ (f-a)\,\delta N - (h-c)\,\delta L & = & 0 \\ (f-a)\,\delta M - (g-b)\,\delta L & = & 0 \end{array}$$

Le prime due di queste equazioni danno

$$\delta L = \frac{f-a}{h-c}\delta N \qquad \delta M = \frac{g-b}{h-c}\delta N$$

e siccome questi valori soddisfano anche alla terza equazione, ne segue che la variazione δN rimane indeterminata.

Operando quindi queste sostituzioni nella trasformata dell'art. precedente, si avrà

$$\begin{array}{rcl} \delta N[(h-c)\,S\left(Y\left(x-a\right)-X\left(y-b\right)\right)dm+(g-b)\,S\left(X\left(z-c\right)-Z\left(x-a\right)\right)dm & & \\ +\,(f-a)\,S\left(Z\left(y-b\right)-Y\left(z-c\right)\right)dm] & = & 0 \end{array}$$

così le condizioni dell'equilibrio saranno racchiuse in questa sola equazione

$$(h-c)\,S\left(Y\left(x-a\right)-X\left(y-b\right)\right)dm+(g-b)\,S\left(X\left(z-c\right)-Z\left(x-a\right)\right)dm+(f-a)\,S\left(Z\left(y-b\right)-Y\left(z-c\right)\right)dm=0$$

60. In generale se i due punti del corpo che supponiamo fisso non lo fossero, ma fossero mobili su linee o superfici date, o anche uniti tra loro in un modo qualsiasi, si avrebbe allora una o più equazioni differenziale tra le variazioni delle coordinate a, b, cf, g, h che descrivono questi punti; e sostituendo al posto di queste variazioni i loro valori $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu, \delta L, \delta M, \delta N$, secondo le formule generali dell'art. 55, si avrebbero altrettante equazioni tra queste ultime variazioni, per mezzo delle quali si determinerebbero alcune di queste variazioni tramite le altre, e sostituendo poi questi valori nell'equazione generale, si uguaglierebbe a zero ciascuno dei coefficienti delle variazioni restanti; e così si avranno tutte le equazioni necessarie per l'equilibrio.

La procedura del calcolo è, come si vede, sempre la stessa; e questo è uno dei principali vantaggi di questo metodo.

61. Del resto, le espressioni trovate prima (art. 55), per le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ mostrano che sono proprio le risultanti dei moti di traslazione e di rotazione considerati in generale nella sezione 3.

Infatti, è chiaro che i termini $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ che sono comuni a tutti i punti del corpo, rappresentano i piccoli spazi percorsi dal corpo, lungo le direzioni delle coordinate x, y, z in virtù di un moto qualsiasi di traslazione; e si vede dalle formule dell'art. 3 della stessa sezione, che i termini $z\delta M - y\delta N$, $x\delta N - z\delta L$, $y\delta L - x\delta M$ rappresentano i piccoli spazi percorsi da ogni punto del corpo, lungo le stesse direzioni, in virtù dei tre moti di rotazione $\delta L, \delta M, \delta N$ attorno ai tre assi di x, y, z; queste quantità $\delta L, \delta M, \delta N$ corrispondono alle quantità $d\psi, d\omega, d\phi$ dell'art. citato. Si sarebbe così potuto dedurre immediatamente le espressioni dalla sola considerazione di questi moti, e ciò sarebbe stato più semplice ma non così diretto. L'analisi precedente porta naturalmente a queste espressioni, e prova in modo diretto e generale che quando i diversi punti di un sistema conservano le loro posizioni reciproche, il sistema può avere in ogni istante solo moti di traslazione nello spazio e di rotazione attorno ai tre assi perpendicolari tra loro.

1.6 Sui Principi dell'Idrostatica

Sebbene ignoriamo la costituzione interna dei fluidi, non possiamo tuttavia dubitare che le particelle che li compongono non siano materiali, e che per questo motivo le leggi generali dell'equilibrio non si addicano loro come per i corpi solidi. Infatti, la proprietà principale dei fluidi e la sola che li distingue dai solidi, consiste nel fatto che tutte le loro parti subiscono una forza minore e possono muoversi tra loro con tutta la facilità possibile, qualunque sia il legame e l'azione reciproca di queste parti. Questa proprietà può facilmente essere tradotta in calcolo, e ne segue che le leggi dell'equilibrio dei fluidi non richiedono una teoria particolare, ma possono essere viste come un caso particolare della teoria generale della Statica. Noi la confideremo da questo punto di vista; ma crediamo di dover cominciare esponendo in poche parole i diversi principi che sono stati impiegati finora in questa parte della Statica, che si chiama comunemente Idrostatica.

Archimede è il antico autore che ci abbia lasciato qualche principio sull'equilibrio dei fluidi. Il suo trattato *de Indefinitibus humido* non è mai stato ritrovato in greco; ne abbiamo solo una traduzione latina assai difettosa, dovuta a Comandino e alle sue note esplicative; apparve a cura di questo commentatore nel 1565 con il titolo di *Iis quae vehuntur in aquâ.*

Quest'opera che si può vedere come una dei più preziosi resti dell'antichità è divisa in due Libri. Nel primo, Archimede pone questi due principi, che si presentano come principi sperimentali, e sui quali fonda tutta la sua teoria. 1°. La natura dei fluidi è tale che le parti meno pressate sono sostituite da quelle che lo sono di più, e che ogni parte è sempre premuta dal peso della colonna che la sovrasta verticalmente. 2°. Tutto ciò che è spinto in alto da un fluido è sempre spinto lungo la perpendicolare che passa per il suo centro di gravità.

Dal primo principio Archimede conclude dapprima che la superficie di un fluido, nel quale tutte le parti sono supposte pesare verso il centro della terra, deve essere sferica affinché il fluido sia in equilibrio. Dimostra poi che un corpo tanto pesante quanto un uguale volume di fluido deve affondare completamente, poiché considerando due piramidi di fluido uguali supposte in equilibrio attorno al centro della terra, quella il cui corpo sarebbe immerso solo parzialmente, eserciterebbe una pressione minore dell'altra sul centro della terra, o in generale su una superficie sferica qualsiasi che si può immaginare attorno a questo centro. Dimostra allo stesso modo che i corpi più leggeri di un ugual volume del fluido non possono affondare finché la parte sommersa che occupa lo spazio di un volume del fluido pesante quanto il corpo intero; da cui deduce questi due teoremi Idrostatici, che i corpi più leggeri dei volumi uguali di un fluido in esso immersi, sono spinti dal basso verso l'alto con una forza uguale all'eccesso del peso del fluido spostato rispetto a quello del corpo immerso, e che i corpi più pesanti perdono una parte del loro peso uguale a quella del fluido spostato.

Archimede si serve poi del suo secondo principio per stabilire le leggi dell'equilibrio dei corpi che galleggiano su un fluido; dimostra che tutta la sezione della sfera più leggera di un pari volume di fluido, in esso immersa, deve necessariamente disporsi in modo che la base sia orizzontale; e la dimostrazione consiste nel mostrare che se la base fosse inclinata, il peso totale del corpo considerato come concentrato nel suo centro di gravità, e la spinta verticale del fluido considerato pure come concentrato nel suo centro di gravità della parte sommersa, tenderebbero sempre a far ruotare il corpo fino a disporre la base orizzontalmente.

Tali sono i contenuti del primo Libro. Nel secondo, Archinede dà, secondo gli stessi principi. le leggi dell'equilibrio di diversi solidi formati dalla rotazione di sezioni coniche, e immersi in fluidi più pesanti di questi corpi; esamina i casi in cui queste conoidi possono rimanere inclinate, quelli in cui devono stare in piedi, e quelli dove devono ribaltarsi o raddrizzarsi. Questo Libro è uno dei più bei monumenti del genio di Archimede e racchiude una teoria della stabilità dei corpi galleggianti, alla quale i moderni hanno aggiunto poco.

Sebbene non fosse difficile, in base a quanto dimostrato da Archimede, determinare la pressione di un fluido sul fondo o sulle pareti del vaso nel quale era racchiuso, Stevin fu il primo che abbia intrapreso questa ricerca, e che abbia scoperto il paradosso Idrostatico, che un fluido può esercitare una pressione molto maggiore del suo peso. È nel terzo libro degli *Hypomnemata Mathematica*, tradotto dall'olandese da Snellius, e pubblicato a Leyde nel 1608, che trovo la teoria idrostatica di Stevin. Dopo aver dimostrato che un corpo solido si forma qualsiasi, e della stessa gravità dell'acqua può rimanere in una situazione qualunque, per il motivo che occupa lo stesso posto, e pesa come se ci fosse l'acqua, Stevin immagina un vaso rettangolare riempito d'acqua, e mostra facilmente che il suo fondo deve sostenere tutto il peso dell'acqua che riempie il vaso. Suppone poi di immergere in questo vaso un solido di forma qualsiasi, e della stessa gravità dell'acqua; è chiaro che la pressione rimarrà la stessa; di modo che se si assegna al solido immerso una forma tale che rimane solo un canale di fluido di forma qualsiasi, la pressione di questo canale sulla base sarà ancora la stessa e di conseguenza uguale al peso di una colonna verticale di acqua che avrebbe questa stessa base. Stevin poi osserva che supponendo questo solido ancorato nella sua posizione, non vi può essere alcun cambiamento nell'azione dell'acqua sul fondo del vaso; quindi la pressione su questo fondo sarà sempre uguale al peso della stessa colonna di acqua, per qualunque forma del vaso.

Stevin passa poi a determinare la pressione dell'acqua sulle pareti verticali o inclinate; divide la loro superficie in numerose piccole parti con linee orizzontali e mostra che ogni parte è maggiormente pressata che se fosse orizzontale e all'altezza del suo bordo superiore, ma che nello stesso tempo è meno pressata che se fosse posta orizzontalmente all'altezza del suo bordo inferiore. Da cui diminuendo la larghezza delle parti e aumentando il loro numero all'infinito, prova con il metodo dei limiti, che la pressione su una parete piana inclinata è uguale al peso di una colonna avente questa parete come base e l'altezza pari alla metà dell'altezza del vaso.

Determina poi la pressione su una parte qualsiasi di una parete piana inclinata e la trova uguale al peso di una colonna di acqua che sarebbe formata applicando perpendicolarmente a ogni punto di questa parte delle rette uguali alla profondità di questo punto sotto l'acqua. Essendo dimostrato questo teorema per superfici piane qualsiasi, poste a piacere, è facile estenderlo a superfici curve qualsiasi e concluderne che la pressione esercitata da un fluido pesante contro una superficie qualunque, misura come il peso di una colonna di questo stesso fluido, avente come base questa stessa superficie, convertita in una superficie piana, se è necessario, e la cui altezze corrispondenti ai diversi punti della base, saranno le stesse delle distanze dei punti corrispondenti della superficie dalla linea di livello del fluido, o analogamente, questa pressione sarà misurata dal peso di una colonna avente come base la superficie pressata e come altezza la distanza verticale del centro di gravità di questa stessa superficie dalla superficie superiore del fluido.

Le teorie precedenti dell'equilibrio e della pressione dei fluidi sono, come si vede, interamente indipendenti dai principi generali della Statica, essendo basate solo su principi sperimentali, particolari dei fluidi; e questo modo di dimostrare le leggi dell'Idrostatica, deducendo dalla conoscenza sperimentale di alcune di queste leggi quelle di tutte le altre, è stato adottato dalla maggior parte degli autori moderni, facendo dell'Idrostatica una scienza completamente differente e indipendente dalla Statica.

Tuttavia sarebbe importante legare queste due scienze tra loro e farle dipendere da un solo e uguale principio. Tra i diversi principi che possono fungere da base della Statica, e del quale abbiamo dato una breve esposizione nella prima sezione, è chiaro che quello delle velocità virtuali si può applicare in modo naturale all'equilibrio dei fluidi. Così Galileo, autore di tale principio, se ne servì per dimostrare i principali teoremi di Statica e Idrostatica.

Nel suo Discorso *intorno alle cose che stanno in su l'acqua, o in quelle che si muovono*, deduce immediatamente da questo principio l'equilibrio dell'acqua in un sifone, mostrando che se si suppone il fluido alla stessa altezza nei due rami, non farebbe scendere in uno e salire nell'altro, senza che i momenti non siano uguali nella parte del fluido che scende e in quello che sale. Galileo dimostra in modo simile l'equilibrio dei fluidi con i solidi che vi sono immersi; e sebbene le sue dimostrazioni non mostrano tutte il rigore desiderabile, è tuttavia facile inserirvi il Principio in una forma più generale, così come a fatto in seguito l'abate Grandi nelle sue note allo stesso Trattato di Galileo. Descartes e Pascal hanno pure impiegato il principio delle velocità virtuali nell'Idrostatica; quest'ultimo ne ha fatto un maggior uso nel suo Trattato *dell'equilibrio dei liquidi*, e se ne è servito per dimostrare la proprietà principale dei fluidi; cioè che una pressione qualsiasi applicata a un punto della loro superficie, si distribuisce ugualmente in tutti gli altri punti.

Tuttavia, sebbene questo Principio abbia il vantaggio di essere semplice e generale, sia per l'equilibrio dei fluidi, sia per quello dei corpi solidi, è stato abbandonato dalla maggior parte degli autori moderni che hanno trattato l'Idrostatica e soprattutto da quello che hanno cercato di estendere i limiti di questa scienza cercando le leggi dell'equilibrio dei fluidi eterogenei, le cui parti sono animate da forze qualsiasi; ricerca molto importante collegata a quella della questione della figura della Terra.

Huyghens ha assunto in questa ricerca, come principio di equilibrio, la perpendicolarità del peso rispetto alla superficie. Newton è partito dal principio dell'uguaglianza dei pesi delle colonne centrali. Bouger ha infine evidenziato che spesso questi due principi non danno lo stesso risultato, e ne ha concluso che affinché vi sia equilibrio in una massa fluida, è necessario che i due principi valgano entrambi e si accordino nel dare la stessa figura alla superficie del fluido. Ma solo M. Clairaut ha dimostrato che vi possono essere casi in cui questo accordo avviene e che tuttavia non vi è un punto di equilibrio. Mclaurin ha generalizzato il principio di Newton, stabilendo che in una massa fluida in equilibrio, ogni particella deve essere compressa allo stesso modo da tutte le colonne rettilinee del fluido, le quali poggiano su questa particella e hanno come altro estremo la superficie; e M. Clairaut l'ha reso ancora più generale, mostrando che l'equilibrio di una massa fluida richiede che le forze di tutte le parti del fluido, racchiuso in un condotto qualsiasi, portino alla superficie o rientrando in se stesse si annullino. Infine ha dedotto per primo questo Principio, le vere leggi fondamentali dell'equilibrio di una massa fluida della quale tutte le parti sono animate da forze qualsiasi e ha trovato le equazioni alle differenze parziali, tramite le quali si possono esprimere queste leggi. Scoperta che ha cambiato il volto dell'Idrostatica e ne ha fatto una scienza nuova.

Il Principio di M. Clairaut è una conseguenza naturale del Principio dell'uguaglianza della pressione in tutte le direzioni. Anche M. d'Alembert ha dedotto immediatamente da quest'ultimo principio, le stesse equazioni differenziali che M. Clairaut aveva trovato; e basta ammettere che questo Principio racchiude infatti la proprietà più semplice e più generale che l'esperienza ha fatto scoprire nell'equilibrio dei fluidi. Ma la conoscenza di questa proprietà è indispensabile nella ricerca delle leggi dell'equilibrio dei fluidi? Non potrebbe questa legge derivare direttamente dalla natura stessa dei fluidi considerati come ammassi di molecole molto slegate, indipendenti tra loro e perfettamente mobili in tutte le direzioni? È quanto cerco di fare nelle sezioni seguenti, impiegando solo il Principio generale dell'equilibrio che ho utilizzato finora per i corpi solidi; e questa parte del mio lavoro fornirà, non solo una delle più belle applicazioni del

Principio detto, ma servirà anche a semplificare la teoria stessa dell'Idrodinamica.

Si sa che i fluidi si dividono in genere in due specie; incomprimibili, le cui parti possono cambiare forma, ma non il volume; comprimibili ed elastici le cui parti possono cambiare forma e volume e tendono sempre a dilatarsi con una forza nota che si suppone di solito proporzionale ad una funzione della densità.

L'acqua, il mercurio, ecc, appartengono alla prima specie; l'aria, il vapore d'acqua bollente, ecc, appartengono alla seconda.

Tratteremo dapprima l'equilibrio dei fluidi incomprimibili e poi quello dei fluidi comprimibili ed elastici.

1.7 Equilibrio dei fluidi incomprimibili

1. Sia m una massa fluida, i punti della quale siano animati da una gravità o forze qualsiasi P, Q, R, ecc, dirette lungo le rette p, q, r, ecc, si avrà, secondo le denominazioni dell'art. 12 della sez. 4, per la somma dei momenti di tutte queste forze, la formula integrale

$$S\left(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc\right) dm$$

la quale dovrà essere nulla in generale, affinché si abbia equilibrio nel fluido.

2. Supponiamo dapprima il fluido racchiuso in un canale o tubo infinitamente stretto e di figura data; e immaginiamo questo fluido suddiviso in fasce o parti infinitamente piccole, la cui altezza sia ds, e la larghezza ω, si potrà assumere $dm = \omega ds$, poiché la larghezza del tubo è supposta infinitamente piccola, essendo ds l'elemento della curva del tubo. Immaginando che il fluido riceva un piccolo movimento, e cambi infinitamente di poco posizione nel tubo, sia δs il piccolo spazio che la striscia o particella dm percorre nel tubo; è chiaro che $\omega\delta s$ sarà la quantità di fluido che passerà nello stesso tempo per ciascuna sezione ω del canale. Quindi a causa dell'incomprimibilità del fluido, basterà che questa quantità sia dappertutto la stessa; di modo che ponendo $\omega\delta s = \alpha$, la quantità α sarà costante rispetto alla curva del tubo. Si avrà così $\omega = \frac{\alpha}{\delta s}$ e di conseguenza $dm = \frac{\alpha ds}{\delta s}$; di modo che la formula che esprime la somma dei momenti delle forze, diverrà (facendo uscire fuori dal segno integrale S la quantità costante α) $\alpha S\left(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc\right)\frac{ds}{\delta s}$.

È chiaro che poiché δp, δq, δr, ecc, sono le variazioni delle linee p, q, r, ecc, risultanti dalla variazione δs, esse devono avere tra lor gli stessi rapporti dei differenziali $dp.\, dq$, dr, ecc, ds, a causa della forma del canale dato; così si avrà $\frac{\delta p}{\delta s} = \frac{dp}{ds}$, $\frac{\delta q}{\delta s} = \frac{dq}{ds}$, $\frac{\delta r}{\delta s} = \frac{dr}{ds}$, ecc; e ciò ridurrà la formula precedente a questa forma

$$\alpha S\left(Pdp + Qdq + Rdr + ecc\right)$$

dove i differenziali dp, dq, dr, ecc, si riferiscono alla curva del canale, e il simbolo S indica un integrale preso per l'intera estensione del canale.

Ponendo quindi questa quantità $= 0$, si avrà l'equazione

$$S\left(Pdp + Qdq + Rdr + ecc\right) = 0$$

la quale contiene la legge generale dell'equilibrio di un fluido racchiuso in un canale di forma qualsiasi.

3. Se oltre alle forze P, Q, R, ecc, che animano ogni punto del fluido, vi fosse inoltre a una estremità del canale una forza esterna Π' che agisse per mezzo di un pistone sulla superficie del fluido, e perpendicolarmente alle pareti del canale; allora indicando con $\delta s'$ il piccolo spazio percorso dalla parte di fluido che si suppone pressata dalla forza Π', mentre le altre parti percorrono i diversi spazi δs, bisognerà aggiungere alla somma dei momenti delle forze P, Q, R, ecc, il momento della forza Π', il quale sarà rappresentato da $\Pi'\delta s'$. Se ora si indica con ω' la sezione del canale nel luogo in cui agisce la forza Π', si avrà $\omega'\delta s'$ per la quantità di fluido che passa per la sezione ω', mentre per un'altra sezione qualsiasi ω, passa la quantità di fluido $\omega\delta s$.

Ma l'incomprimibilità del fluido richiede che queste quantità siano dappertutto le stesse; pertanto avendo già supposto $\omega\delta s = \alpha$, si avrà anche $\omega'\delta s' = \alpha$; di conseguenza $\delta s' = \frac{\alpha}{\omega'}$. Pertanto la somma totale dei momenti delle forze che agiscono sul fluido, sarà rappresentata dalla formula

$$\alpha\left(\frac{\Pi'}{\omega'} + S\left(Pdp + Qdq + Rdr + ecc\right)\right)$$

di modo che l'equazione dell'equilibrio sarà

$$\frac{\Pi'}{\omega'} + S\left(Pdp + Qdq + Rdr + ecc\right) = 0$$

4. È evidente che nella condizione di equilibrio, la forza Π' deve essere controbilanciata dalla pressione del fluido sul pistone la cui larghezza è ω'; da ciò segue che questa pressione sarà uguale a $-\Pi'$, e di conseguenza

$$\omega' S\left(Pdp + Qdq + Rdr + ecc\right)$$

Pertanto la pressione del fluido su ogni punto del pistone sarà espressa dalla formula integrale

$$S\left(Pdp + Qdq + Rdr + ecc\right)$$

prendendo questo integrale per tutta la lunghezza del canale. E questa pressione sarà anche la stessa, se invece del pistone mobile si suppone un fondo immobile che chiude il canale da un lato.

5. Se all'altra estremità del canale vi fosse un'altra forza Π" agente sempre tramite un pistone, si troverebbe analogamente, indicando con ω" la sezione del canale in questo luogo, l'equazione

$$\frac{\Pi'}{\omega'} + \frac{\Pi"}{\omega"} + S\,(Pdp + Qdq + Rdr + ecc) = 0$$

per l'equilibrio del fluido.

6. Pertanto se il fluido è premuto solo dalle due forze esterne Π' e Π" applicate alle superfici ω' e ω", affinché vi sia equilibrio è necessario che $\frac{\Pi'}{\omega'} + \frac{\Pi"}{\omega"} = 0$; da cui si vede che le due forze Π' e Π" devono avere verso contrario, e nello stesso tempo reciprocamente proporzionali alle superfici ω' e ω" sulle quali tali forze agiscono. Proposizione che si considera comunemente come un principio sperimentale. o almeno come una conseguenza del principio dell'uguaglianza della pressione in tutte le direzioni, nel quale la maggior parte degli studiosi di Idrostatica fa consistere la natura dei fluidi.

7. Conoscendo le leggi dell'equilibrio di un fluido racchiuso in un canale molto stretto e di forma qualsiasi, non è difficile dedurre quelle dell'equilibrio di una massa qualsiasi di fluido racchiusa oppure no in un contenitore.

Poiché è evidente che se una massa fluida è in equilibrio e se si immagina un canale qualsiasi che l'attraversa, il fluido contenuto in questo canale sarà pure in equilibrio, cioè, indipendentemente da tutto il resto del fluido. Si avrà quindi per l'equilibrio di questo canale, tralasciando forze esterne (art. 1),

$$S\,(Pdp + Qdq + Rdr + ecc) = 0$$

e siccome la figura del canale deve essere indeterminata, l'equazione precedente dovrà sempre valere, facendo variare questa forma in un modo qualsiasi.

Indichiamo in generale con ϕ il valore dell'integrale $S\,(Pdp + Qdq + Rdr + ecc)$ preso su tutta la lunghezza del canale, in modo che l'equazione dell'equilibrio del canale sia $\Phi = 0$; e rappresentando con δ le variazioni, come è d'uso, sarà necessario avere $\delta\Phi = 0$

Ora

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \delta.S\,(Pdp + Qdq + Rdr + ecc) = S\delta\,(Pdp + Qdq + Rdr + ecc)\\ &= S\,(P\delta dp + Q\delta dq + R\delta dr + ecc + \delta Pdp + \delta Qdq + \delta Rdr + ecc)\end{aligned}$$

Cambiando δd con $d\delta$, e facendo poi scomparire il doppio segno $d\delta$ delle integrazioni per parti, secondo i principi noti del calcolo delle variazioni, si avrà

$$\delta\Phi = P\delta dp + Q\delta dq + R\delta dr + ecc + S\,(\delta Pdp - dP\delta p + \delta Qdq - dQ\delta q + \delta Edr - dR\delta r + ecc)$$

dove i termini che sono fuori dal segno S si riferiscono alle estremità dell'integrale rappresentato da questo simbolo, e che corrispondono, di conseguenza, alla superficie del fluido.

Ora siccome le quantità P, Q, R, ecc, che rappresentano le forze, sono, o possono sempre essere supposte funzioni di p, q, r, ecc, è chiaro che la parti di $\delta\Phi$ che è sotto il simbolo S, non è più suscettibile di riduzione; quindi affinché si abbia in generale $\delta\Phi = 0$, sarà necessario che 1° questa parte sia nulla, e che di conseguenza si abbia per ogni punto della massa fluida, l'identità

$$\delta Pdp - dP\delta p + \delta Qdq - dQ\delta q + \delta Rdr - dR\delta r + ecc = 0$$

2° che si abbia per la superficie esterna del fluido

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc = 0$$

supponendo che le differenze $\delta p, \delta q, \delta r$, ecc, si riferiscono a questa superficie.

La prima condizione servirà a determinare la natura delle forze P, Q, R, ecc, tramite le quali il fluido potrà essere in equilibrio, e la seconda darà la forma stessa che il fluido assumerà in virtù di tali forze.

8. Supponiamo che le quantità P, Q, R, ecc, siano tali che la prima condizione sia verificata, si avrà in questo caso

$$\delta\Phi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc$$

Ora $\delta\Phi$ è evidentemente un differenziale esatto preso rispetto alla variabile δ; così $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc$ sarà pure un differenziale esatto; quindi cambiando δ in d, si avrà il differenziale esatto $Pdp + Qdq + Rdr + ecc$, di cui Φ sarà l'integrale.

Reciprocamente se $Pdp + Qdq + Rdr + ecc$ è un differenziale esatto, la prima condizione sarà necessariamente verificata. Allora l'integrale Φ di questa quantità sarà una funzione di p, q, r, ecc, di modo che differenziando;

$$d\Phi = Pdp + Qdq + Rdr + ecc$$

e analogamente

$$\delta\Phi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc$$

quindi

$$\delta d\Phi = \delta Pdp + \delta Qdq + \delta R\delta r + ecc + P\delta dp + Q\delta dq + R\delta dr + ecc$$

e

$$\delta d\Phi = dP\delta p + dQ\delta q + dR\delta r + ecc + Pd\delta p + Qd\delta q + Rd\delta r + ecc$$

Ma dal principio del calcolo delle variazioni, δd è la stessa cosa di $d\delta$; si avrà quindi

$$\delta d\Phi - d\delta\Phi = \delta Pdp + \delta Qdq + \delta Rdr + ecc - dP\delta p - dQ\delta q - dR\delta r + ecc = 0$$

che è la condizione cercata. Da ciò segue che questa condizione si riduce a che le forze P, Q, R, ecc, siano tali che $Pdp + Qdq + Rdr + ecc$, sia una quantità integrabile.

Indicando con Φ l'integrale di questa quantità, la seconda condizione dell'equilibrio sarà $\delta\Phi = 0$, o $d\Phi = 0$ per la superficie esterna del fluido; di modo che integrando si avrà $\Phi = cost$ per l'equazione di tale superficie.

9. Se si considera l'equazione stessa

$$\delta Pdp - dP\delta p + \delta Qdq - dQ\delta q + \delta Rdr - dR\delta r + ecc = 0$$

trovata nell'art. 7, se ne potranno dedurre le condizioni analitiche che devono valere tra le espressioni delle forze P, Q, R, ecc; considerando queste espressioni come funzioni qualsiasi di p, q, r, ecc., si avrà. usando la notazione introdotta,

$$dP = \frac{dP}{dp}dp + \frac{dP}{dq}dq + \frac{dP}{dr}dr + ecc$$

anche

$$\delta P = \frac{dP}{dp}\delta p + \frac{dP}{dq}\delta q + \frac{dP}{dr}\delta r + ecc$$

e così per le altre differenze; sostituendo questi valori nell'equazione precedente, e ordinando i termini, diverrà

$$\left(\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp}\right)(\delta qdp - dq\delta p) + \left(\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp}\right)(\delta rdp - dr\delta p) + \left(\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq}\right)(\delta rdq - dr\delta) = 0$$

e dovrà valere indipendentemente dalle differenze dp, dq, dr, ecc; $\delta p, \delta q, \delta r$, ecc.

10. Se non vi è alcuna relazione data tra le variabili p, q, r, ecc, bisognerà porre separatamente

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp} &= 0 \\ \frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp} &= 0 \\ \frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq} &= 0 \end{aligned}$$

ecc.

Queste sono le equazioni di condizione note per l'integrabilità della formula $Pdp + Qdq + Rdr + ecc.$

Ma se la variabile r dipendesse, per esempio, dalle due variabili p e q, di modo che $dr = Adp + Bdq$, si avrebbe ugualmente $\delta r = A\delta p + B\delta q$; quindi $\delta rdp - dp\delta r = B(\delta qdp - dq\delta p)$, $\delta rdq - dr\delta q = A(\delta pdq - dp\delta q)$; sostituendo questi valori nell'equazione generale, e uguagliando a zero il coefficiente di $\delta qdp - dq\delta p$, si avrà l'equazione

$$\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp} + B\left(\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp}\right) - A\left(\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq}\right) = 0$$

la quale conterrà le prime tre equazioni di condizione, e anche del resto.

11. Quando la massa fluida ha solo due dimensioni, la posizione di ogni punto dipende solo da due variabili; così le diverse variabili p, q, r, ecc, potranno sempre ridursi a due soltanto; vi sarà allora solo un'equazione di condizione. Ma quando la massa fluida ha tre dimensioni, la posizione dei suoi punti dipende in generale da tre variabili; di conseguenza si potrà sempre ridurre a tre tutte le diverse variabili p, q, r, ecc, e si avranno sempre tre equazioni di condizione.

12. Del resto, se si trascura la densità del fluido, o la si considera piuttosto come costante e uguale all'unità; ma se la si volesse supporre variabile, allora indicando con Δ la densità di una particella qualsiasi dm, si avrà (art. 2) $dm = \Delta\omega ds$; di modo che le quantità P, Q, R, ecc, si troveranno tutte moltiplicate per Δ. Si avranno così per l'equilibrio dei fluidi di densità variabile, le stesse leggi dell'equilibrio dei fluidi di densità uniforme, moltiplicando dolo le diverse forze per la densità del punto sul quale agiscono; cioè, scrivendo semplicemente ΔP, $\Delta Q, \Delta R$, ecc, al posto di P, Q, R, ecc.

13. Abbiamo iniziato col cercare le leggi dell'equilibrio di un fluido racchiuso in un tubo infinitamente stretto, e ne abbiamo dedotto poi le leggi generali dell'equilibrio di una massa fluida qualsiasi. Si può tuttavia pervenire immediatamente a queste ultime leggi, considerando dapprima la questione in tutta la sua generalità e utilizzando il metodo della sezione 4.

Supponiamo, per maggiore semplicità, che tutte le forze che agiscono sulle particelle del fluido siano ridotte a tre, rappresentate da X, Y, Z e dirette lungo le coordinate perpendicolare x, y, z, cioè, tendenti a diminuire queste coordinate. Abbiamo dato nell'art. 5 della sezione 5 le formule generali di questa riduzione. Indicando con dm la massa di una particella qualsiasi, si avrà per la somma dei momenti delle forze X, Y, Z la formula integrale

$$S\left(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z\right)dm$$

o il volume della particella dm può essere rappresentato da $dxdydz$; esprimendo così con Δ la densità, è chiaro che si avrà $dm=\Delta dxdydz$; e il simbolo di integrazione S apparterrà a sua volta alle tre variabili x, y, z.

Bisognerà inoltre tenere conto dell'equazione di condizione risultante dall'incomprimibilità del fluido, la quale essendo supposta rappresentata da $L=0$, si avrà (differenziando rispetto a δ, moltiplicando per un coefficiente indeterminato λ, e integrando) la formula $S\lambda\delta L$ da aggiungere alla precedente.

In assenza di forze acceleratrici che agiscono sulla superficie del fluido, e di condizioni particolari relative a questa superficie. si avrà semplicemente per l'equilibrio questa equazione (sez. 4, art. 14)

$$\delta S\left(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z\right)dm+S\lambda\delta L=0$$

nella quale basterà prendere gli integrali rispetto a tutta la massa del fluido.

14. Cerchiamo ora i valori di L e della sua variazione δL. È chiaro che la condizione dell'incomprimibilità consiste nel fatto che il volume di ogni particella sia costante; così avendo espresso questo volume con $dxdydz$, si avrà $dxdydz=cost$ per l'equazione di condizione; di conseguenza $L=dxdydz-cost$; e $\delta L=\delta.\left(dxdydz\right)$.

Per avere la variazione $\delta.\left(dxdydz\right)$, sembra che si debba differenziare semplicemente $dxdydz$ secondo δ; ma vi è qui una considerazione particolare da fare, e senza la quale il calcolo non sarebbe rigoroso. La quantità $dxdydz$ esprime solo il volume di una particella fintanto che si suppone il suo volume quello di un parallelepipedo rettangolo i cui lati sono paralleli agli assi x, y, z; questa ipotesi è molto permissiva, poiché si può immaginare il fluido diviso in elementi infinitamente piccola di forma qualsiasi. Ora $\delta.\left(dxdydz\right)$ deve esprimere la variazione che subisce questo volume quando la particella cambia infinitamente poco, divenendo le sue coordinate da x, y, z a $x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z$; è chiaro che se in questa variazione di posizione la particella cambierà anche forma e posizione rispetto agli assi x, y, z, non si potrà più misurare il suo volume con il prodotto delle differenze $d\left(x+\delta x\right), d\left(y+\delta y\right), d\left(z+\delta z\right)$ delle sue coordinate; così per avere la variazione esatta di volume, basta tener conto del cambiamento di posizione e forma della particella.

Per questo è necessario considerare le coordinate che corrispondono agli angoli del parallelepipedo $dxdydz$ nelle sue condizioni iniziali, e nello stato cambiato. Nel primo stato è chiaro che queste coordinate sono x, y, z; $x+dx, y, z$; $x, y+dy, z$; $x, y, z+dz$; $x+dx+y+dy+z$; $x+dx, y, z+dz$; $x, y+dy, z+dz$; $x+dx, y+dy, z+dz$; e da ciò, prendendo le radici della somma dei quadrati delle differenze tra le coordinate per due angoli qualsiasi, si avrà la retta che unisce questi angoli e che sarà o un lato o una diagonale del parallelepipedo; si trova così dx, dy, dz per i lati, e $\sqrt{\left(dx^2+dy^2\right)}$, $\sqrt{\left(dx^2+dz^2\right)}$, $\sqrt{\left(dy^2+dy^2\right)}$, $\sqrt{\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)}$ per le diagonali.

Supponiamo ora che le coordinate x, y, z divengano $x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z$ e consideriamo $\delta x, \delta y, \delta z$ come funzioni qualsiasi di x, y, z; facendo variare successivamente x, y, z di dx, dy, dz, si troverà ciò che devono divenire le altre coordinate $x+dx, y, z$; $x, y+dy, z$, ecc.

Facendo variare semplicemente x di dx, si avrà $x+dx+\delta x+\frac{d\delta y}{dx}dx,\ y+\delta y+\frac{d\delta y}{dx}dx,\ z+\delta z+\frac{d\delta z}{dx}dx$ affinché le coordinate divengano $x+dx, y:z$; facendo variare y di dy, si avrà $x+\delta x+\frac{d\delta x}{dy}dy, y+dy+\delta y+\frac{d\delta y}{dy}dy, z+\delta z+\frac{d\delta z}{dy}dy$ affinché divengano $x+y+dy, z$; e facendo variare z di dz si avrà $x+\delta x+\frac{d\delta x}{dz}dz, y+\delta y+\frac{d\delta y}{dz}dz, z+dz+\delta z+\frac{d\delta z}{dz}dz$ affinché divengano $x, y, z+dz$, così facendo variare x di dx e y di dy, si avrà $x+dx+\delta x+\frac{d\delta x}{dx}dx+\frac{d\delta x}{dy}dy,\ y+dy+\delta y+\frac{d\delta y}{dx}dx+\frac{d\delta y}{dy}dy$, $z+\delta z+\frac{d\delta z}{dx}dx+\frac{d\delta z}{dy}dy$, affinché divengano $x+dx,\ y+dy,\ z$; e così per le altre.

Prendendo la radice della somma dei quadrati delle differenze di queste nuove coordinate per due angoli qualsiasi del romboide nel quale si è trasformato il parallelepipedo $dxdydz$, si troveranno alle quantità infinitamente piccole del terzo ordine, queste espressioni per i lati $dx+\frac{d\delta x}{dx}dx,\ dy+\frac{d\delta y}{dy}dy,\ dz+\frac{d\delta z}{dz}dz$ e quelle per le diagonali

$$\begin{array}{c}\sqrt{\left[\left(dx+\frac{d\delta x}{dx}dx\right)^2+\left(dy+\frac{d\delta y}{dy}dy\right)^2\right]}\\ \sqrt{\left[\left(dx+\frac{d\delta x}{dx}dx\right)^2+\left(dz+\frac{d\delta z}{dz}dz\right)^2\right]}\\ \sqrt{\left[\left(dy+\frac{d\delta y}{dy}dy\right)^2+\left(dz+\frac{d\delta z}{dz}dz\right)^2\right]}\\ \sqrt{\left[\left(dx+\frac{d\delta x}{dx}dx\right)^2+\left(dy+\frac{d\delta y}{dy}dy\right)^2+\left(dz+\frac{d\delta z}{dz}dz\right)^2\right]}\end{array}\quad da$$

cui è facile concludere che il romboide in questione è di nuovo un parallelepipedo rettangolo e che di conseguenza il suo contenuto può essere espresso dal prodotto dei lati $dx\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)$, $dy\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)$, $dz\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)$. Pertanto la variazione del volume del primo parallelepipedo, cioè, il valore di $\delta.\left(dxdydz\right)$ sarà espresso da $dxdydz\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)-dxdydz$; di conseguenza sviluppando i termini e trascurando gli infinitamente piccoli di ordine superiore, si avrà

$$\delta.\left(dxdydz\right)=dxdydz\left(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)$$

cioè il valore di δL che bisognerà sostituire nell'equazione dell'art. precedente.

15. Questa equazione diverrà quindi di questa forma, mettendo per dm il suo valore $\Delta dxdydz$

$$S\left(\Delta X\delta x+\Delta Y\delta y+\Delta Z\delta z+\lambda\frac{d\delta x}{dx}+\lambda\frac{d\delta y}{dy}+\lambda\frac{d\delta z}{dz}\right)dxdydz=0$$

si tratterà quindi solo si far scomparire i doppi simboli $d\delta$ con il metodo esposto nell'art. 17 della sez. 4.

Consideriamo dapprima la quantità $S\lambda\frac{d\delta x}{dx}dxdydz$, dove il simbolo S indica un triplo integrale relativo a x, y, z; è chiaro che siccome la differenza di δx è relativa solo alla variazione di x, basterà per farla scomparire applicare l'integrazione rispetto a x; è per questo che si darà dapprima a questa quantità la forma $SdydzS\lambda\frac{d\delta x}{dx}dx$; poi si trasformerà l'integrale semplice $S\lambda\frac{d\delta x}{dx}$ in $\lambda"\delta x" - \lambda'\delta x' - S\frac{d\lambda}{dx}\delta xdx$; le quantità indicate con un apice si riferiscono all'inizio dell'integrazione e quelle che ne hanno due ai punti in cui essa finisce, secondo la notazione adottata nel posto citato. Così la quantità in questione di troverà cambiata in questa

$$Sdydz\left(\lambda"\delta x" - \lambda'\delta x'\right) - SdydzS\frac{d\lambda}{dx}\delta xdx$$

o, che è la stessa cosa

$$S\left(\lambda"\delta x" - \lambda'\delta x'\right)dydz - S\frac{d\lambda}{dx}\delta xdxdydz$$

Allo stesso modo e con un ragionamento simile, si cambieranno le quantità $S\lambda\frac{d\delta y}{dy}dxdydz$ e $S\lambda\frac{d\delta z}{dz}dxdydz$, in queste

$$S\left(\lambda"\delta y" - \lambda'\delta y'\right)dxdz - S\frac{d\lambda}{dy}\delta ydxdydz$$
$$S\left(\lambda"\delta yz" - \lambda'\delta z'\right)dxdy - S\frac{d\lambda}{dz}\delta zdxdydz$$

Operando queste sostituzioni, si avrà quindi per l'equilibrio della massa fluida questa equazione generale:

$$\begin{gathered}S\left[\left(\Delta X-\tfrac{d\lambda}{dx}\right)\delta x+\left(\Delta Y-\tfrac{d\lambda}{dy}\right)\delta y+\left(\Delta Z-\tfrac{d\lambda}{dz}\right)\delta z\right]dxdydz\\ +S\left(\lambda"\delta x" - \lambda'\delta x'\right)dydz+S\left(\lambda"\delta y" - \lambda'\delta y'\right)dxdz\\ +S\left(\lambda"\delta z" - \lambda'\delta z'\right)dxdy\end{gathered}$$

nella quale basterà solo eguagliare separatamente a zero i coefficienti delle variazioni indeterminate δx, δy, δz (art. 8, sez. 4).

16. si avranno quindi queste tre equazioni indefinite

$$\Delta X-\frac{d\lambda}{dx}=0\quad \Delta Y-\tfrac{d\lambda}{dy}=0\quad \Delta Z-\frac{d\lambda}{dz}=0$$

le quali devono valere per tutti i punti della massa fluida.

In seguito se il fluido è libero da tutte la parti, le variazioni $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z', \delta x"$, $\delta y"$, $\delta z"$ che si riferiscono ai punti della superficie del fluido saranno pure indeterminati, e di conseguenza bisognerà ancora eguagliare separatamente a zero i loro coefficienti, e ciò darà $\lambda'=0$, $\lambda"=0$, cioè, in generale $\lambda=0$ per tutti i punti della superficie del fluido; e questa equazione servirà a determinare la figura di questa superficie.

Sarà così anche quando il fluido è racchiuso in un contenitore, per la parte della superficie dove esso è aperto ma dalla parte che appoggia contro le pareti, è chiaro che le variazioni $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z', \delta x"$, $\delta y"$, $\delta z"$ devono avere tra loro rapporti dati dalla forma di queste pareti, poiché il fluido non può scorrere nella loro direzione e noi dimostreremo in seguito (art. 20, 21) quale potrà essere la loro forma, i termini che racchiudono le variazioni saranno sempre nulli; di modo che non vi sarà alcuna condizione rispetto a questa parte della superficie del fluido.

17. Le tre equazioni trovate per le condizioni di equilibrio del fluido, danno $\frac{d\lambda}{dx}=\Delta X$, $\frac{d\lambda}{dy}=\Delta Y$, $\frac{d\lambda}{dz}=\Delta Z$; quindi poiché $d\lambda=\frac{d\lambda}{dx}dx+\frac{d\lambda}{dy}dy+\frac{d\lambda}{dz}dz$, si avrà $d\lambda=\Delta\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)$; di conseguenza basterà che la quantità $\Delta\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)$ sia un differenziale totale in x, y, z; e questa condizione racchiude solo le leggi dell'equilibrio dei fluidi.

Si vede anche che essa è in accordo con quanto prima trovato (art. 8, 12); per quanto dimostrato nell'art. 5 della sez. 5, si ha in generale $Xdx+Ydy+Zdz == dp+Qdq+Rdr+ecc.$

Se si elimina la quantità λ dalle stesse equazioni, si avranno le seguenti

$$\begin{aligned}\frac{d.\Delta X}{dy}&=\frac{d.\Delta y}{dx}\\ \frac{d.\Delta X}{dz}&=\frac{d.\Delta Z}{dx}\\ \frac{d.\Delta Y}{dz}&=\frac{d.\Delta Z}{dy}\end{aligned}$$

equazioni che differiscono tra loro e delle quali una non potrà essere considerata come derivante dalle altre due.

Queste condizioni sono dunque necessarie affinché la massa fluida possa essere in equilibrio, in virtù delle forze X, Y, Z. Quando esse derivano dalla natura di queste forze, si è certi che l'equilibrio è possibile; e non rimane che da trovare la forma che assume la massa fluida per essere in equilibrio, cioè, l'equazione della superficie esterna del fluido. Abbiamo visto nell'art. 16 che si deve avere in ogni punto di questa superficie $\lambda = 0$. Pertanto, poiché $d\lambda = \Delta\,(Xdx + Ydy + Zdz)$, si avrà integrando $\lambda = \int \Delta\,(Xdx + Ydy + Zdz) + cost$; di conseguenza l'equazione della superficie esterna sarà

$$\int \Delta\,(Xdx + Ydy + Zdz) = K$$

essendo K una costante qualsiasi; e questa equazione sarà sempre in termini finiti, poiché la quantità $\Delta\,(Xdx + Ydy + Zdz)$ è supposta essere un differenziale esatto.

18. Se la quantità $Xdx + Ydy + Zdz$ è pure un differenziale esatto, sempre vero quando le forze X, Y, Z sono il risultato di uno o più attrazioni proporzionali a funzioni qualsiasi delle distanze dai centri, poiché si ha in generale $Xdx+Ydy+Zdz = Pdp+Qdq+Rdr+ecc$ (sez. 5, art. 5); indicando questa quantità con $d\Phi$, si avrà allora $d\lambda = \Delta d\Phi$; quindi affinché $d\lambda$ sia un differenziale totale, basterà che Δ sia una funzione di Φ. Di conseguenza $\lambda = \int \Delta d\Phi$ sarà pure necessariamente una funzione di Φ.

Si avrà quindi in questo caso per la forma della superficie l'equazione $funz\,\Phi = K$; cioè $\Phi =$ a una costante e anche che la densità del fluido sarà uniforme. Inoltre, poiché Φ è costante alla superficie e Δ è funzione di Φ, ne segue che la densità Δ deve essere la stessa in tutti i punti della superficie esterna di una massa fluida in equilibrio.

All'interno del fluido la densità può variare in modo qualsiasi, purché essa sia sempre una funzione di Φ; essa dovrà quindi essere costante dappertutto dove il valore di Φ sarà costante; di modo che $\Phi = h$, sarà in generale l'equazione degli strati di uguale densità, essendo h una costante. Pertanto, differenziando, si avrà $d\Phi = 0$, o $Xdx+Ydy+Zdz = 0$ per l'equazione generale di questi strati; è chiaro che questa equazione è quella delle superfici per le quali la risultante delle forze X, Y, Z è perpendicolare e che M. Clairaut chiamo superfici di livello. Da ciò segue che la densità deve essere uniforme in ogni strato di livello formato da due superficii di livello infinitamente vicine.

E questa legge deve valere sulla Terra e sui Pianeti, supposto che questi corpi siano stati originariamente fluidi, e che abbiano conservato solidificando la forma che avevano assunto in virtù dell'attrazione delle loro parti combinata con la forza centrifuga.

19. L'equazione $\Delta\,(Xdx + Ydy + Zdz) = K$ della superficie dei fluidi in equilibrio, vale anche per i fluidi liberi da tutte le parti e per quelli che sono racchiusi in un contenitore, almeno per quanto riguarda la parte della loro superficie che corrisponde alle aperture del contenitore (art. 17).

Per quanto riguarda la superficie attigua alle pareti del contenitore, è chiaro che essa deve avere la stessa forma di queste pareti; di modo che se il contenitore è inflessibile, la forma sarà data e indipendente dalle condizioni dell'equilibrio. Servirà quindi che rispetto a questa parte della superficie del fluido, i termini dell'equazione generale dell'equilibrio, contenenti le variazioni $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z', \delta x"$, $\delta y"$, $\delta z"$ scompariranno, poiché non potrebbero annullarsi per alcuna condizione particolare; è quanto va esaminato per non lasciare nulla a desiderare sulla correttezza e generalità dei nostri metodi.

20. Consideriamo un punto qualsiasi della superficie del fluido contiguo alle pareti del recipiente supposto inflessibile e di data forma; questo punto corrisponderà necessariamente all'inizio o alla fine di ognuna delle integrazioni relative a x, y, z, o all'inizio dell'una e alla fine delle altre due, o reciprocamente (art. 15). Supponiamo dapprima che corrisponda alla fine di ognuna delle tre integrazioni; le variazioni di x, y, z relative a questo punto, saranno allora $\lambda"\delta x"dydz$, $\lambda"\delta y"dxdz$, , $\lambda"\delta z"dxdy$. Di modo che si avranno per tutti i punti simili della superficie del fluido gli integrali $S\lambda"\delta x"dydz$, $S\lambda"\delta y"dxdz$, $S\lambda"\delta z"dxdy$, il primo dei quali deve essere preso facendo variare separatamente y e z, dopo aver sostituito a x il suo valore in y e z dari dalla natura della superficie o della parete del contenitore, il secondo dei quali deve essere preso facendo variare separatamente x e z e sostituendo a y il suo valore in x e z dati dalla stessa superficie e anche il terzo deve essere preso facendo variare successivamente e separatamente x e y e sostituendo a z il suo valore dato in x e y dalla stessa stessa superficie.

È chiaro che si possono ridurre questi tre integrali alla stessa forma, al posto di z il suo valore in x e y, e prendendolo poi nella prima variabile x e nella seconda variabile y al posto di z.

Così se si rappresenta con $dz = pdx+qdy$ l'equazione della superficie data, basterà mettere nell'integrale $S\lambda"\delta x"dydz$, pdx al posto di dz e nell'integrale $S\lambda"\delta y"dxdz$, qdy al posto di dz; integrare poi l'uno e l'altro rispetto a x e a y. Ma vi è qui un'osservazione importante da fare, cioè che le differenze dx, dy, dz devono sempre essere prese positivamente, poiché si ritengono tali nel parallelepipedo rettangolo $dxdydz$ che esprime il volume della particella dm, la quale non può mai divenire negativa per la natura stessa della cosa. Da ciò segue che nelle sostituzioni di pdx e qdy al posto di dz, bisogna sempre supporre p e q quantità positive.

Supporremo quindi in generale che l'equazione delle pareti del contenitore sia rappresentata da $dz = \pm pdx \pm qdy$, essendo p e q sempre quantità positive; e da quanto abbiamo dimostrato, si avrà invece dei tre integrali $S\lambda"\delta x"dydz$, $S\lambda"\delta y"dxdz$, $S\lambda"\delta z"dxdy$ l'unico $S\lambda"\,(p\delta x" + q\delta y" + \delta z")\,dxdy$.

Ora poiché abbiamo supposto che i punti che consideriamo della superficie del fluido corrispondono alla fine di ciascuna delle tre integrazioni relative a x, y, z, è facile convincersi che questa ipotesi può sussistere solo se le coordinate x, y, z di questi punti non capitano tutti dallo stesso lato della superficie in esame, cioè, dallo stesso lato dei piani che intersecano questa superficie negli stessi punti. Per questo è necessario che l'equazione differenziale della superficie sia in questi punti $dz = -pdx - qdy$, affinché x e y crescano e z diminuisca. Ma $\delta x", \delta y", \delta z"$ essendo (*ipotesi*:) le variazioni di dx, dy, dz almeno fintanto che considerano la forma della superficie come invariabile. Si avrà quindi anche $\delta z" = -p\delta x" - q\delta y"$; valore che sostituito nell'integrale precedente, lo rende evidentemente nullo.

21. Se i punti in esame, invece di corrispondere alla fine delle tre integrazioni relative a x, y, z, corrispondessero all'inizio di queste stesse integrazioni, allora si avrebbe nell'equazione generale dell'equilibrio (art. 15), relativamente a questi punti, i tre integrali $-S\lambda'\delta x' dydz - S\lambda'\delta y' dxdz - S\lambda'\delta z' dxdy$, che si muteranno nell'unico

$$-S\lambda' \left(p\delta x' + q\delta y' + \delta z'\right) dxdy$$

e si avrebbe in questo caso $dz = -pdx - qdy$ e di conseguenza anche $\delta z' = -p\delta x' - q\delta y'$; ciò che renderà similmente questo integrale nullo.

Ma se questi stessi punti corrispondono, per esempio, all'inizio dell'integrazione relativa a x, e alla fine delle due integrazioni relative a y e z, allora le variazioni delle coordinate x, y, z, per questi punti, saranno $\delta x', \delta y", \delta z"$ e gli integrali corrispondenti saranno

$$-S\lambda'\delta x' dydz - S\lambda"\delta y" dxdz - S\lambda"\delta z" dxdy$$

nei quali λ' sarà la stessa cosa di $\lambda"$; questi integrali si muteranno nel seguente

$$S\lambda" \left(-p\delta x' + q\delta y" + \delta z'\right) dxdy$$

È facile pensare che affinché questo caso si verifichi basta che le due coordinate y, z si trovino da uno stesso lato e la coordinata x dall'altro lato di ogni piano intersecante la superficie nei punti dati; è ciò che richiede che l'equazione della superficie sia per questi punti della forma $dz = pdx - qdy$; di modo che si avrà anche $\delta z" = p\delta x' - q\delta y"$, che sostituita nell'integrale precedente lo renderà ancora nullo.

Si troverà lo stesso risultato per gli altri casi in cui si considereranno punti relativi all'inizio delle integrazioni secondo x, y, e alla fine dell'integrazione secondo z, o all'inizio delle integrazioni secondo x, z e alla fine dell'integrazione secondo y, o ecc.

22. Da quanto dimostrato rispetto a questi diversi casi, si può concludere che se si denotano con un tratto le quantità che corrispondono all'inizio dell'integrazione relativa a z, cioè le quantità che appartengono alla parte anteriore della superficie del fluido rispetto al piano delle x, y e con due tratti quelle corrispondenti alla fine della stessa integrazione secondo z, cioè le quantità relative alla parte posteriore della superficie del fluido rispetto allo stesso piano delle x, y; ne segue che si rappresenta in generale con $dz + pdx + qdy = 0$ l'equazione differenziale della superficie del fluido (essendo p e q positivi o negativi) si potrà sempre trasformare le tre espressioni integrali

$$S\left(\lambda"\delta x" - \lambda'\delta x'\right) dydz + S\left(\lambda"\delta y" - \lambda'\delta y'\right) dxdz + S\left(\lambda"\delta z" - \lambda'\delta z'\right) dxdy$$

dell'equazione generale dell'equilibrio dell'art. 15 in queste due

$$\begin{gathered} S\lambda" \left(\delta z" + p"\delta x" + q"\delta y"\right) dxdy \\ -S\lambda' \left(\delta z' + p'\delta x' + q'\delta y'\right) dxdy \end{gathered}$$

Poiché $dz + pdx + qdy = 0$ è l'equazione di una superficie curva, ne segue dalla teoria nota, che vi è necessariamente un moltiplicatore r che può rendere questa equazione integrabile; di modo che si avrà $r\left(dz + pdx + qdy\right) = du$, essendo du il differenziale esatto di una funzione u di x, y, z. Si avrà quindi cambiando d in δ nella differenziazione di u, $r\left(\delta z + p\delta x + q\delta y\right) = \delta u$ e di conseguenza $\delta z + p\delta x + q\delta y = \frac{\delta u}{r}$. Segnando quindi tutte le quantità con uno o due tratti per riferirle alla superficie anteriore o posteriore del fluido, e sostituendo nelle espressioni integrali precedenti, questi diverranno

$$S\frac{\lambda"\delta u"}{r"} dxdy - S\frac{\lambda'\delta u'}{r'} dxdy$$

23. Sia ora ds l'elemento della superficie del fluido la cui equazione è in generale $dz + pdx + qdy = 0$, si avrà

$$ds = dxdy\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$$

Ma considerando u come una funzione di x, y, z si ha secondo la notazione data, $r = \frac{du}{dz}$, $rp = \frac{du}{dx}$, $rq = \frac{du}{dy}$; pertanto

$$\frac{dxdy}{r} = \frac{ds}{r\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} = \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}$$

e indicando tutte le quantità di uno o due tratti per riferirle alla superficie anteriore o posteriore del fluido, si potrà dare alle espressioni integrali questa forma

$$S\frac{\lambda"\delta u"}{V"} ds" - S\frac{\lambda'\delta u'}{V'} ds'$$

Per quanto è stato detto nell'art. 8 della seconda sezione, si vede che la quantità $\lambda ds \times \frac{\delta u}{V}$ può rappresentare il momento di una forza uguale a λds e applicato all'elemento ds della superficie del fluido, la cui equazione è supposta δu o $du = 0$ (art.22). Così l'espressione integrale $S\frac{\lambda"\delta u"}{V"} ds"$ rappresenterà la somma dei momenti delle forze $\lambda"$ agenti su ogni punto della superficie posteriore della massa fluida nelle direzioni perpendicolari ad essa; così anche l'espressione $S\frac{\lambda'\delta u'}{V'} ds'$ rappresenterà la somma dei momenti delle forze λ' applicate a ogni punto della superficie anteriore, e dirette pure perpendicolarmente ad essa; di modo che $-S\frac{\lambda'\delta u'}{V'}ds'$ sarà la somma dei momenti di queste ultime forze prese in verso contrario, cioè, supponendo le loro direzioni opposte a quelle delle forze λ" rispetto al piano delle x, y; cioè è equivalente al fatto che tutte le forze applicate alla superficie della massa fluida siano dirette perpendicolarmente a questa superficie e tendano dall'interno all'esterno o viceversa.

24. Poiché, quindi, le espressioni integrali che entrano nell'equazione generale dell'equilibrio di una massa fluida incomprimibile e che si riferiscono ai punti della sua superficie, sono equivalenti alla somma dei momenti di una infinità di forze λ applicate perpendicolarmente a tutti i punti di tale superficie; ne segue che queste forze hanno si manifestano realmente alla superficie del fluido; ed è chiaro che esse non sono diverse dalla pressione che il fluido esercita in tutti i punti della sua superficie, in virtù delle forze che agiscono in tutta la sua massa.

25. Questa pressione sarà quindi espressa in generale dalla quantità λ, cioè dalla formula $\int \Delta\left(Xdx + Ydy + Zdz\right)$ riferita alla superficie del fluido (art. 17); ed è chiaro che dovunque il fluido è libero, dovrà essere nulla nella condizione di equilibrio; ma in ogni parte in cui la superficie del fluido sarà applicata contro la superficie di un corpo solido qualsiasi, basterà che questo corpo sostenga lo sforzo delle forze λ applicate alla sua superficie. Da ciò è facile dedurre le leggi dell'equilibrio dei fluidi con i solidi che li contengono o che vi sono immersi. Siccome esse sono assai note, non ci soffermeremo a dettagliarle; ci esimeremo anche dal dare applicazioni particolari della teoria generale dell'equilibrio dei fluidi incomprimibili, non avendo nulla da aggiungere a quanto esposto su tale questione dagli Autori che l'hanno già trattata.

1.8 Equilibrio dei corpi comprimibili ed elastici

1. Siano come nell'art. 13 della sezione precedente, X, Y, Z le forze che agiscono su ogni punto della massa fluida, lungo le direzioni delle coordinate x, y, z e tendenti a diminuire tali coordinate; si avrà $S\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right)dm$ per la somma dei momenti.

Nei fluidi elastici vi è inoltre una forza interna che si chiama elasticità e che tende a dilatarli o ad aumentare il loro volume. Sia quindi ε l'elasticità di una particella qualsiasi dm; essendo questa forza diretta ad aumentare il volume $dxdydz$ della stessa particella tenderà quindi a diminuire la quantità $-dxdydz$; di conseguenza essa avrà o potrà essere considerata avere per momento la quantità $-\varepsilon\delta\left(dxdydz\right)$. Di modo che la somma dei momenti provenienti dall'elasticità di tutta la massa fluida, sarà espressa da $-S\varepsilon\delta\left(dxdydz\right)$.

Quindi la somma totale dei momenti delle forze che agiscono sul fluido, sarà

$$S\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right)dm - S\varepsilon\delta\left(dxdydz\right)$$

e siccome non vi è alcuna condizione particolare da soddisfare, si avrà l'equazione generale dell'equilibrio uguagliando semplicemente questa somma a zero.

2. Si avrà quindi per l'equilibrio dei fluidi elastici una equazione della stessa forma di quella trovata nella sezione precedente (art. 13) per l'equilibrio dei fluidi incomprimibili, poiché in quella $\delta L = \delta\left(dxdydz\right)$ (art. 14), ciò che rende il termine $S\lambda\delta L$ proveniente dalla condizione di incomprimibilità del tutto simile al termine $S\varepsilon\delta\left(dxdydz\right)$ dovuto ai momenti delle forze elastiche.

3. Segue da ciò che le formule trovate per l'equilibrio dei fluidi incomprimibili si applicano immediatamente e senza alcuna restrizione all'equilibrio dei fluidi elastici, cambiando semplicemente il coefficiente λ in $-\varepsilon$, cioè, supponendo che la quantità λ assunta negativa, esprima la forza elastica di ogni elemento del fluido. Basterà quindi ripetere qui quanto abbiamo dimostrato nella sezione precedente a partire dall'art. 14.

4. Si suppone di solito che l'elasticità è proporzionale alla densità o più in generale a una funzione qualsiasi della densità; si avrà quindi $\varepsilon = -\lambda = \Phi\Delta$ (indicando con Δ la densità); quindi la determinazione di Δ dipenderà dalla seguente equazione (art. 17, sez. precedente).

$$d.\Phi\Delta = \Delta\left(Xdx + Ydy + Zdz\right)$$

Questa equazione dà

$$\frac{d.\phi\Delta}{\Delta} = Xdx + Ydy + Zdz$$

o $\frac{d.\Phi\Delta}{\Delta}$ è un differenziale totale di una funzione di Δ; quindi basterà che $Xdx + Ydy + Zdz$ sia sempre un differenziale totale; altrimenti l'equilibrio non sarà possibile. Si ha quindi il caso dell'art. 18 della sez. precedente; si avranno di conseguenza anche le stesse conseguenze.

Chapter 2

La Dinamica

2.1 Sui diversi Principi della Dinamica

La Dinamica è la Scienza delle forze acceleratrici o ritardatrici e dei moti vari che esse possono produrre. Questa Scienza è interamente dovuta ai Moderni e Galileo è quello che ne posto i primi fondamenti. Prima di lui si erano considerate le forze che agiscono sui corpi solo nelle condizioni di equilibrio; e sebbene si potesse attribuire l'accelerazione dei corpi pesanti e i moti curvilinei dei proiettili all'azione della gravità, nessuna era ancora riuscito a determinare le leggi di questi fenomeni quotidiani partendo da una causa semplice. Galileo ha fatto per primo questo passo importante aprendo una strada nuova e immensa per lo sviluppo della Meccanica. Queste scoperte sono esposte e sviluppate nell'opera intitolata: *Dialoghi sulle Scienze nuove*, ecc. il quale apparve per la prima volta a Leyda nel 1637; essa non procurò a Galileo, in vita, tanta celebrità quanto quella ottenuta per il sistema del mondo, ma è al giorno d'oggi la parte più solida e più attuale della gloria di questo grand'uomo.

Le scoperte dei satelliti di Giove, delle fasi di Venere, delle macchie solari, ecc, richiedono solo telescopi e costanza; ma serve un genio straordinario per individuare le leggi della natura nei fenomeni che si hanno sempre sotto gli occhi, ma la cui spiegazione era tuttavia sempre sfuggita alle ricerche dei Filosofi.

Huyghens che sembra essere stato destinato a perfezionare e completare la maggior parte delle scoperte di Galileo, aggiunse alla teoria dell'accelerazione dei gravi quella del moto dei pendoli e delle forze centrifughe e preparò così la strada alla grande scoperta della gravitazione universale. La Meccanica divenne una nuova Scienza nelle mani di Newton, e i suoi *Principi Matematici* che apparvero la prima volta nel 1687, segnarono il tempo di questa rivoluzione.

Infine l'invenzione del calcolo infinitesimale mise i Matematici nella condizione di ridurre ad equazioni analitiche le leggi del moto dei corpi e la ricerca delle forze e dei momenti che ne risultano è divenuta poi il principale oggetto dei loro lavori.

Io mi sono proposto di offrire loro un nuovo metodo per facilitare questa ricerca; ma prima non sarà inutile esporre i principi che sono di fondamento alla Dinamica e di presentare il percorso logico e i passaggi che hanno maggiormente contribuito ad estendere e perfezionare questa Scienza.

La teoria dei moti vari e delle forze acceleratrici che li producono è fondata su queste leggi generali, che il moto impresso a un corpo è per sua natura uniforme e rettilineo e che diversi moti impressi insieme o in successione a uno stesso corpo, si compongono in modo che il corpo si trova in ogni istante nello stesso punto dello spazio in cui dovrebbe trovarsi effettivamente per la combinazione di questi moti, se essi agissero ciascuno effettivamente e separatamente nel corpo. È in queste due leggi che consistono i Principi noti della forza d'inerzia e del moto composto. Galileo ha compreso per primo questi due principi e ne ha dedotto le leggi del moto dei proiettili, componendo il moto obliquo, effetto dell'impulso comunicato al corpo con la sua caduta perpendicolare dovuta all'azione della gravità.

Le leggi dell'accelerazione dei gravi si deducono naturalmente dalla considerazione dell'azione costante e uniforme della gravità, in virtù della quale i corpi ricevono in istanti uguali gradi uguali di velocità lungo la stessa direzione, la velocità totale acquisita dopo un tempo qualunque, deve essere proporzionale a questo tempo; è chiaro che questo rapporto costante tra velocità e tempi deve essere pure proporzionale all'intensità della forza che la gravità esercita per muovere il corpo; di modo che nel moto su piani inclinati, questo rapporto non deve essere proporzionale alla forza assoluta della gravità come nel moto verticale, ma alla forza relativa, la quale dipende dall'inclinazione del piano e si determina con le regole della Statica; ciò fornisce un mezzo semplice per confrontare tra loro i moti dei corpi che discendono lungo piani diversamente inclinati.

Tuttavia non sembra che Galileo abbia scoperto in questo modo le leggi della caduta dei corpi pesanti. Egli ha iniziato, al contrario, con il supporre la nozione di un moto uniformemente accelerato, nel quale le velocità crescono come i tempi; ne ha dedotto geometricamente le principali proprietà di questa specie di moto e soprattutto la legge dell'accrescimento degli spazi in ragione dei quadrati dei tempi; poi si è assicurato con delle esperienze che questa legge vale effettivamente nel moto dei corpi che cadono lungo piani inclinati qualsiasi. Ma per poter confrontare tra loro i moti su diversi piani inclinati, è stato obbligato dapprima ad ammettere questo principio precario, che le velocità acquisite discendendo da altezze verticali uguali, sono sempre uguali; ed è solo poco prima della sua morte e dopo la pubblicazione dei suoi Dialoghi che ha trovato la dimostrazione di questo principio, dalla considerazione dell'azione relativa della gravità sui piani inclinati, dimostrazione che è stato poi inserita nelle altre edizioni di quest'Opera.

Il rapporto costante che nei moti uniformemente accelerati, deve sussistere tra le velocità e i tempi, o tra gli spazi e i quadrati dei tempi, può quindi essere assunto come misura della forza acceleratrice che agisce con continuità sul mobile; poiché infatti questa forza non può essere stimata se non tramite l'effetto che essa produce nel corpo e che consiste nelle velocità prodotte o negli spazi percorsi nei tempi dati.

Così basta, per questa stima delle forze, considerare il moto prodotto in un tempo qualsiasi, finito o infinitamente piccolo, purché la forza sia ritenuta costante durante questo tempo; di conseguenza, qualunque sia il moto del corpo e la legge della sua accelerazione, si potrà sempre determinare il valore della forza che agisce su di esso in ogni istante, confrontando la velocità prodotta in questo istante con la durata dello stesso istante, o lo spazio che essa fa percorrere durante lo stesso istante con il quadrato della durata di questo istante; e non è necessario che questo spazio sia stato realmente percorso dal corpo, basta che possa essere ritenuto percorso da un moto composto, poiché l'effetto della forza è lo stesso in entrambi i casi, per i principi del moto prima esposti.

È così che Huyghens ha scoperto le leggi delle forze centrifughe dei corpi mossi in cerchi con diverse velocità costanti, e che ha confrontato queste forze tra loro e con la forza peso alla superficie della terra, come si vede dalle dimostrazioni che ha lasciato dei suoi teoremi sulla forza centrifuga, pubblicati nel 1673 alla fine del Trattato *de Horologio oscillatorio.*

Ma Huyghens non è andato oltre e fu riservato a Newton di estendere questa teoria a curve qualsiasi e di completare la scienza dei moti vari e delle forze acceleratrici che possono produrli. Questa scienza consiste ora solo in qualche formula differenziale molto semplice; ma Newton ha costantemente fatto uso del metodo geometrico semplificato mediante la considerazione delle prime e ultime ragioni, e se si è qualche volta servito del calcolo analitico, è unicamente per il metodo delle serie che ha impiegato, il quale deve essere ben distinto dal metodo differenziale, sebbene sia facile avvicinarlo e ricondurlo ad uno stesso principio.

I Matematici che hanno trattato dopo Newton la teoria delle forze acceleratrici si sono quasi tutti accontentati di generalizzare i suoi teoremi e di tradurli in espressioni differenziali. Da qui le diverse formule delle forze centrali che si trovano nella maggior parte delle opere di Meccanica, ma che ora non si usano più nelle ricerche sui moti dei corpi animati da forze qualsiasi, poiché vi è un modo più semplice di tradurre questi problemi in equazioni.

Se si ritiene che il moto di un corpo e le forze che agiscono su di esso siano scomposte lungo tre rette tra loro perpendicolari, si potranno considerare separatamente i moti e le forze relative a ciascuna di queste tre direzioni. A causa della perpendicolarità delle direzioni, è chiaro che ognuno di questi moti parziali può essere visto come indipendente dagli altri due, e che può subire cambiamenti solo dalla parte della forza che agisce nella direzione di tale moto; da cui si può concludere che questi tre moti devono seguire, ognuno in particolare, le leggi dei moti rettilinei accelerati o ritardati con forze date. Nel moto rettilineo, l'effetto della forza acceleratrice consiste nell'alterare la velocità del corpo e tale forza deve essere misurata rispetto all'aumento o diminuzione della velocità in un istante qualsiasi, e la durata di questo istante, cioè, dal differenziale della velocità diviso quello del tempo; e siccome la stessa velocità è espressa nei moti vari con il differenziale dello spazio diviso per quello del tempo, ne segue che la forza sarà misurata dal differenziale secondo dello spazio diviso per il quadrato del differenziale primo del tempo supposto costante. Così il differenziale secondo dello spazio che il corpo percorre o che si ritiene percorra lungo ognuna delle tre direzioni perpendicolari, diviso per il quadrato del differenziale costante del tempo, esprimerà la forza acceleratrice che anima il corpo lungo questa stessa direzione e dovrà di conseguenza essere uguagliata alla forza reale che è supposta agire lungo questa direzione.

Non è necessario che le tre direzioni alle quali si riferisce il moto istantaneo del corpo siano assolutamente fissate, basta che lo siano per la durata di un istante. Così nei moti su linea curva, si può prendere in ogni istante queste direzioni, una lungo la tangente e le altre due lungo le perpendicolari alla curva. Allora la forza acceleratrice che agisce lungo la tangente e che si chiama forza tangenziale, sarà tutta impiegata ad alterare la velocità assoluta del corpo e sarà espressa dall'elemento di questa velocità diviso per l'elemento del tempo. È ciò che costituisce il principio noto delle forze acceleratrici.

Le forze normali, al contrario, faranno cambiare la direzione del corpo e dipenderanno dalla curvatura della linea che descrive. Riducendo queste ultime due a forze a una sola, basterà che la direzione di questa sia nel piano della curvatura e il suo valore si troverà espresso dal quadrato della velocità del corpo diviso per il raggio del cerchio che misura la curvatura della curva in ogni punto, e che si chiama cerchio *osculatore*. È questa l'espressione che Huyghens trovò per la forza centrifuga dei corpi che descrivono cerchi con velocità uniformi; ed essa è generale per curva e velocità qualsiasi, considerando in ogni istante il corpo come mosso nel cerchio osculatore.

È tuttavia molto più semplice riferire il moto del corpo a direzioni fisse nello spazio. Allora, impiegando per determinare la posizione del corpo nello spazio, tre coordinate perpendicolari aventi queste stesse direzioni, le variazioni di queste coordinate rappresenteranno evidentemente gli spazi percorsi dal corpo lungo le direzioni di queste coordinate; di conseguenza i loro differenziali secondi, divisi per il quadrato del differenziale costante del tempo, esprimeranno le forze acceleratrici che devono agire lungo queste stesse coordinate; così eguagliando queste espressioni a quelle delle forze date dalla natura del problema, si avranno tre equazioni simile in grado di determinare tutte le circostanze del moto. Questo modo di determinare il moto di un corpo animato da forze acceleratrici qualsiasi, è per la sua semplicità preferibile a tutti gli altri; sembra che McLaurin fu il primo che l'abbia impiegato nel suo Trattato delle Flussioni, stampato nel 1742; esso è ora universalmente adottato.

Dai principi esposti, si può quindi determinare le leggi del moto di un corpo libero, sollecitato da forze qualsiasi purché il corpo sia considerato come puntiforme.

Si possono anche applicare questi principi alla ricerca del moto di parecchi corpi che esercitano gli uni sugli altri una attrazione reciproca, secondo una legge qualsiasi che sia una funzione nota delle distanze; infine non è difficile estenderle ai moti nei mezzi resistenti, così come a quelli su superfici curve assegnate, essendo la resistenza del mezzo non è altro che una forza che agisce in direzione opposta a quella del mobile; e quando un corpo è costretto a muoversi su una superficie data, vi è necessariamente una forza perpendicolare alla superficie che lo trattiene e il cui valore incognito può essere determinato dalle condizioni che derivano dalla natura stessa della superficie.

Ma se si cerca il moto di parecchi corpi che agiscono gli uni sugli altri per impulso o pressione, sia istantaneamente come nel caso dell'urto, o per mezzo di fili o leve inflessibili, alle quali siano attaccati, o in generale da qualunque altro mezzo, allora la questione è di un ordine superiore e i principi precedenti sono insufficienti a risolverla. Essendo qui le forze che agiscono sui corpi incognite, bisogna dedurre tali forze dall'azione che i corpi devono esercitare tra loro, secondo la loro mutua disposizione. È quindi necessario fare ricorso a un nuovo principio che serve a determinare la forza dei corpi in movimento, tenendo conto della loro massa e velocità.

Questo principio consiste nel fatto che per imprimere a una massa data una certa velocità lungo una direzione qualsiasi, sia con la massa a riposo sia in movimento, serve una forza il cui valore sia proporzionale al prodotto della massa per la velocità, e la cui direzione sia la stessa di quella della velocità. Questo prodotto della massa di un corpo per la velocità, si chiama comunemente la quantità di moto di questo corpo, poiché infatti è la somma dei moti di tutte le parti materiali del corpo. Così le forze di misurano dalle quantità di moto che esse sono in grado di produrre, e inversamente la quantità di moto di un corpo è la misura della forza che il corpo è in grado di esercitare contro un ostacolo e che si chiama la *percussione*. Da ciò segue che se due corpi non elastici si urtano direttamente in versi contrari con quantità di moto uguali, le loro forze devono controbilanciarsi e annullarsi, di conseguenza i corpi devono fermarsi e rimanere a riposo. Ma se l'urto si facesse per mezzo di una leva, basterebbe per la distruzione del molto dei corpi, che le loro forze soddisfino la legge nota dell'equilibrio della leva.

Sembra che Descartes ha colto per primo il Principio che abbiamo esposto, ma si è sbagliato nella sua applicazione all'urto dei corpi, per aver creduto che la stessa quantità di moto assoluta doveva sempre conservarsi.

Wallis è propriamente il primo che ha avuto un'idea precisa di questo Principio e che se ne è servito con successo per scoprire le leggi della trasmissione del moto nell'urto dei corpi duri o elastici, come si vede nelle Transactions Philosophiques del 1669, e nella terza parte del suo Trattato *de Motu*, stampato nel 1671.

Così come il prodotto della massa e della velocità esprime la forza che finita di un corpo in movimento, anche il prodotto della massa e della forza acceleratrice che abbiamo visto essere rappresentato dall'elemento di velocità diviso per l'elemento del tempo, esprimerà la forza elementare o nascente; e questa quantità se la si considera come la misura dello sforzo che il corpo può fare in virtù della velocità elementare che ha acquisito, o che tende ad acquisire, costituisce ciò che si chiama *pressione*; ma se la si considera come la misura della forza o potenza necessaria ad imprimere questa stessa velocità, essa è allora ciò che chiamiamo *forza motrice*.

Così pressioni o forze motrici si annulleranno o si faranno equilibrio se sono uguale e di verso opposto, o se essendo applicate a una macchina qualsiasi, esse seguono le leggi dell'equilibrio di questa macchina.

Quando si hanno corpi uniti tra loro in modo che non possono obbedire liberamente agli impulsi ricevuti, e alle forze acceleratrici da cui sono animati, questi corpi esercitano necessariamente gli uni sugli altri pressioni continue che alterano il loro moto e ne rendono difficile la determinazione.

Il primo problema e il più semplice di questo genere di cui i Matematici si sono occupati è quello dei centri di oscillazione. Questo problema è stato famoso nell'ultimo secolo e all'inizio di questo, per gli sforzi e i tentativi che i più grandi Matematici hanno compiuto per venirne a capo; e siccome è principalmente a questi tentativi che si devono i progressi immensi che la Dinamica ha fatto poi, credo di doverne dare qui una breve presentazione, per mostrare attraverso quali passi questa Scienza si innalzata verso la perfezione a cui sembra essere giunta in questi ultimi tempi.

Le prime tracce delle ricerche sui centri di oscillazione si trovano nelle Lettere di Descartes. Si vede che il Padre Mersenne gli aveva proposto di determinare la grandezza che deve avere un corpo di forma qualsiasi, perché sospeso per un punto, compia le sue oscillazioni nello stesso tempo di un filo di lunghezza data e caricato di un solo peso alla sua estremità. Descartes osserva che questa questione ha qualche rapporto con quella del centro di gravità, e che così come in un corpo pesante che cade liberamente vi è un centro di gravità attorno al quale gli sforzi del peso di tutte le parti del corpo si fanno equilibrio, di modo che questo centro discende allo stesso modo come se il resto del corpo fosse annullate, o concentrato nello stesso centro; così nei corpi pesanti che ruotano attorno ad un asse fisso, vi deve essere un centro, che si chiama *centro di agitazione*, attorno al quale le forze di *agitazione* di tutte le parti del corpo si controbilanciano in modo che questo centro, libero dall'azione di queste forze, possa essere mosso come se le altre parti del corpo fossero annullate, o concentrate in questo stesso centro; e che di conseguenza tutti i corpi nei quali questo centro sarà ugualmente lontano dall'asse di rotazione, vibreranno nello stesso tempo.

Secondo questa nozione di agitazione, Descartes fornisce un metodo generale per determinarla nei corpi di forma qualsiasi; questo metodo consiste nel cercare il centro di gravità delle forze di agitazione di tutte le parti del corpo, stimando tali forze con il prodotto della masse per le velocità che sono qui proporzionali alle distanze dall'asse di rotazione, e supponendo che le parti del corpo siano proiettate sul piano che passa per il suo centro di gravità e per l'asse di rotazione, di modo che esse siano sempre alla stessa distanza da questo asse.

Ma questa ipotesi non è qui permessa, poiché l'effetto delle forze non dipende solo dalla quantità di moto, ma anche dalla sua direzione; la regola di Descartes è valida quindi solo quando tutte le parti del corpo sono realmente o possono essere considerate poste in uno stesso piano passante per l'asse di rotazione; in tutti gli altri casi bisogna considerare che i moti perpendicolari al piano passante per l'asse di rotazione e per il centro di gravità del corpo e si deve riferire ogni particella al punto in cui questo piano è intersecato dalla direzione del moto di questa particella, direzione che è sempre perpendicolare al piano di questa particella e all'asse di rotazione.

Questa mancanza nella regola di Descartes fu segnalata da Robertval e divenne l'oggetto di una contestazione tra questi due Matematici, nella quale la correttezza parve essere interamente dalla parte di quest'ultimo. Roberval fornisce calcoli risposte esatte dei centri di agitazione dei settori e degli archi di cerchio mossi perpendicolarmente al loro piano e mostra l'insussistenza della regola del suo avversario in questo caso; ma abituato a nascondere i suoi metodi, si accontenta di indicare questi risultati particolari ed è impossibile valutare se fosse in possesso di un metodo generale.

Del resto, Roberval evidenzia con ragione, che il centro in questione è propriamente solo il centro di percussione, attorno al quale gli urti o i momenti di percussione sono uguali, e che per trovare il vero centro di oscillazione di un pendolo pesante, bisogna anche considerare l'azione della gravità tramite la quale il pendolo si muove. Ma essendo questa ricerca superiore alla Meccanica di quei tempi, i Matematici continuarono a supporre tacitamente che il centro di percussione fosse lo stesso di quello di oscillazione e Huyghens fu il primo che esaminò quest'ultimo centro dal punto di vista corretto; credette anche di dover considerare il problema come del tutto nuovo e non potendo risolverlo con l'applicazione delle leggi note del moto, inventò un nuovo principio, ma indiretto, il quale è divenuto celebre in seguito, sotto il nome di *Conservazione delle forze vive.*

Un filo considerato come una linea inflessibile, privo di peso e massa, e appeso a un punto fisso e con un piccolo peso all'altra estremità che si può considerare puntiforme, forma quello che si chiama un pendolo semplice, e la legge delle oscillazioni di questo pendolo dipende unicamente dalla sua lunghezza, cioè, dalla distanza tra il peso e il punto di sospensione. Ma se a questo filo si attacca ancora uno o più pesi a diverse distanze dal punto di sospensione, si avrà allora un pendolo composto, il cui moto dovrà sostenere una specie di mezzo tra quei diversi pendoli semplici che si avrebbe, se ciascuno dei pesi fosse sospeso da solo al filo.

Poiché la forza di gravità tende da un lato a far scendere tutti i peso ugualmente nello stesso tempo, e dall'altro l'inflessibilità del filo li costringe a descrivere in questo stesso tempo degli archi diseguali e proporzionali alle loro distanze dal punto di sospensione, si deve fare tra questi pesi una specie di compensazione e di ripartizione dei loro moti, di modo che i pesi che sono più vicini al punto di sospensione, aumenteranno le oscillazioni dei più lontani e questi, al contrario, ritarderanno le oscillazioni dei primi. Così si avrà nel filo un punto nel quale, posto un corpo, non avrà né un moto accelerato né ritardato dagli altri pesi, ma sarà lo stesso come se fosse l'unico sospeso al filo. Questo punto sarà il reale centro di oscillazione del pendolo composto e un tale centro deve trovarsi anche in tutti i corpi solidi di qualsiasi forma che oscillano attorno a un asse orizzontale.

Huyghens vide che non si poteva determinare questo centro in modo rigoroso, senza conoscere la legge secondo la quale i diversi pesi del pendolo composto alterano reciprocamente i moti che la gravità tende loro ad imprimere in ogni istante; ma invece di cercare di dedurre questa legge dai Principi fondamentali della Meccanica, si accontentò di sostituirla con un Principio indiretto, il quale consiste nel supporre che se si attaccano più pesi, come si vedrà, a un pendolo discendente per la sola azione della gravità e che in un istante qualsiasi si stacchino e si separino gli uni dagli altri, ognuno di loro, per la velocità acquisita durante la caduta, risalirà ad un'altezza tale che il centro comune di gravità si troverà risalito alla stessa altezza dalla quale è disceso. In verità Huyghens, non stabilì questo principio immediatamente, ma lo dedusse da due ipotesi che ammise come richieste di Meccanica; una è che il centro di gravità di un sistema di corpi pesanti non può mai risalire ad un'altezza superiore a quella da cui è caduto, per qualsiasi cambiamento si faccia alla disposizione reciproca dei corpi, poiché altrimenti il moto perpetuo non sarebbe più impossibile; l'altro è che un pendolo composto può sempre risalire da solo alla stessa altezza da cui è disceso liberamente. Del resto, Huyghens nota che lo stesso principio si ha nel moto dei corpi pesanti collegati tra loro in modo qualsiasi, come anche nel moto dei fluidi.

Non si può immaginare da dove abbia ricavato l'Autore questo Principio, ma si può supporre che sia stato portato dal teorema che Galileo aveva dimostrato sulla caduta dei corpi pesanti, i quali sia che discendano in verticale o su piani inclinati, acquistano sempre velocità in grado di farli risalire alle stesse altezze da cui sono caduti. Questo teorema generalizzato e applicato al centro di gravità di un sistema di corpi pesanti, da il Principio di Huyghens.

Comunque sia, è chiaro che questo Principio fornisce un'equazione tra l'altezza verticale, dalla quale il centro di gravità del sistema è disceso in un tempo qualsiasi e le diverse altezze verticali alle quali i corpi che compongono il sistema potrebbero risalire con le loro velocità acquisite, e che per i teoremi di Galileo stanno come i quadrati di queste velocità. In un pendolo che oscilla attorno ad un asse orizzontale le velocità dei diversi punti sono proporzionali alle loro distanze dall'asse; così si può ridurre l'equazione a due sole incognite, di cui una sia la discesa del centro di gravità del pendolo in un tempo qualsiasi e l'altra l'altezza alla quale un punto dato di questo pendolo potrebbe risalire per la velocità acquisita. Ma la discesa del centro di gravità determina quella di tutti gli altri punti del pendolo; quindi si avrà un'equazione tra l'altezza da cui un punto qualsiasi del pendolo è disceso, e quella alla quale potrebbe risalire per la velocità dovuta a questa caduta. Nel centro di oscillazione, queste due altezze devono essere uguali, poiché i corpi liberi possono sempre risalire alla stessa altezza da cui sono caduti; e l'equazione mostra che questa uguaglianza può aversi soltanto in un punto della linea perpendicolare all'asse di rotazione e passante per il centro di gravità del pendolo, il quale sia distante da questo asse della quantità che deriva moltiplicando tutti i pesi che compongono il pendolo per i quadrati delle loro distanze dall'asse, e dividendo la somma di questi prodotti per la distanza dal suo centro di gravità dallo stesso asse. Questa quantità esprimerà quindi la lunghezza di un pendolo semplice, il cui moto sarà uguale a quello del pendolo composto.

Questa teoria di Huyghens è esposta nel suo Tratta *de Horologio oscillatorio*, che apparve nel 1673, ed è accompagnata da un grande numero di significative applicazioni. Non avrebbe lasciato nulla a desiderare se non si fosse basata su un Principio precario; e rimase sempre da dimostrare questo Principio per porlo al di fuori di ogni attacco. Nel 1681 apparvero nel Giornale degli Scienziati di Parigi, alcune obiezioni contro questa teoria, alle quali Huyghens non rispose se non in forma vaga e poco soddisfacente. Ma questa attenzione richiamò l'attenzione di Jacques Bernoulli e gli diede l'occasione di esaminare a fondo la teoria di Huyghens e di cercare di ricondurla ai principali Principi della Dinamica. Considera dapprima solo due pesi uguali attaccati a una linea inestensibile e diritta, ed evidenzia che la velocità che il primo peso, quello che è più vicino al punto di sospensione, acquista descrivendo un arco qualsiasi, deve essere minore di quella che avrebbe acquisito descrivendo liberamente lo stesso arco; e che nello stesso tempo la velocità acquisita dall'altro peso, deve essere maggiore di quella che avrebbe acquisito percorrendo lo stesso arco liberamente. La velocità perduta dal primo peso si quindi comunicata al secondo e siccome questo scambio avviene per mezzo di una leva mobile attorno a un punto fisso, l'Autore suppone che esso debba seguire la legge dell'equilibrio delle potenze applicate a questa leva, di modo che la perdita di velocità del primo peso stia al guadagno della velocità del secondo, nella ragione reciproca dei bracci della leva, cioè, delle distanze dal punto di sospensione. Da ciò e dal fatto che le velocità reali dei due pesi devono pure stare nella ragione diretta di queste distanze, si determinano facilmente queste velocità e di conseguenza il moto del pendolo.

Questo è il primo passo che è stato fatto verso la soluzione diretta di questo famoso problema. L'idea di attribuire alla leva le forze risultanti delle velocità guadagnate o perse dai pesi, è molto sottile e fornisce la chiave della vera teoria; ma Jacques Bernoulli si è sbagliato, considerando le velocità acquisite durante un tempo qualsiasi finite, invece avrebbe dovuto considerare le velocità elementari acquisite in un istante e confrontarle con quelle che la gravità tende ad imprimere durante lo stesso istante. È quanto ha poi fatto il Marchese de l'Hopital, in uno scritto inserito nel Giornale di Rotterdam del 1690. Suppose due pesi qualsiasi attaccata al filo inestensibile che forma il pendolo composto e stabilisce l'equilibrio tra le quantità di moto perse e guadagnate da questi pesi in un istante qualsiasi, cioè, tra le differenze delle quantità di moto che i pesi acquistano realmente in questo istante, e quelle che la gravità tende ad imprimere loro. Determina in questo modo il rapporto tra l'accelerazione istantanea di ogni peso e quello che la sola gravità tende a dargli e trova il centro di oscillazione, cercando il punto del pendolo per il quale queste due accelerazioni risulteranno uguali. Estende poi la sua teoria a un maggior numero di pesi, ma considera i primi come riuniti successivamente nel loro centro di oscillazione, la qual cosa non è più così diretta né può essere ammessa senza dimostrazione.

Questa analisi del Marchese de l'Hopital fece riconsiderare a Bernoulli quanto fatto e determinò infine la prima soluzione diretta e rigorosa del problema dei centri di oscillazione, soluzione che merita tanta più attenzione da parte dei Matematici, contenendo i germi di questo Principio di Dinamica, che è divenuto così fecondo nelle mani di M. d'Alembert.

L'Autore considera i moti che la gravità imprime ad ogni istante ai corpi che compongono il pendolo e poiché questi corpi, a causa del loro legame, non possono seguirli per intero, immagina i moti impressi come composti da quelli che i corpi possono assumere e da altri moti che devono essere distrutti, e in virtù dei quali il pendolo deve rimanere in equilibrio. Il problema si trova così ricondotto ai principi della Statica e richiede solo l'aiuto dell'analisi. Jacques Bernoulli trovò in questo modo formule generali per i centri di oscillazione dei corpi di forma qualsiasi e fece vedere l'accordo con il principio di Huyghens e dimostrò l'identità dei centri di oscillazione e di percussione. Questa soluzione era stata abbozzata nel 1691 negli Atti di Lipsia, ma è stata presentata in modo completo solo nel 1703, nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

Per non tralasciare nulla su questa storia del problema del centro di oscillazione, dovrò rendere conto anche della soluzione che Jean Bernoulli ha dato in seguito nelle stesse Memorie, e che essendo stata trovata e pubblicata circa nello stesso tempo da Taylor, nell'opera intitolata: *Methodus incrementorum*, è stata l'occasione per una vivace disputa tra questi due Matematici; ma per quanto ingegnosa sia l'idea sulla quale è basata questa nuova soluzione, e che consiste nel ridurre tutto d'un colpo il pendolo composto in un pendolo semplice, sostituendo i diversi peso con altri riuniti in un solo punto, e le cui masse e i cui pesi sono tali che le loro accelerazioni angolari e i loro momenti, rispetto all'asse di rotazione, siano gli stessi, bisogna tuttavia ammettere che questa idea non è così naturale né così luminosa di quella dell'equilibrio tra i moti distrutti alla quale Jacques Bernoulli aveva avuto la capacità di ridurre questa ricerca.

Si trova ancora nella *Phoronomie* d'Herman, pubblicato nel 1716, un nuovo modo di risolvere lo stesso problema e che è basato su questo altro principio, che le forze motrici, i cui pesi che formano il pendolo sono realmente animati, per poter essere mossi congiuntamente, devono essere equivalenti a quelli che provengono dall'azione della gravità; di modo che i primi, essendo supposti diretti in verso contrario, devono fare equilibrio a questi ultimi.

Questo principio presentato in questo modo, non è tuttavia molto chiaro da poter essere preso per un assioma delle Meccanica; ma non è difficile dimostrarlo per mezzo di quello di Jacques Bernoulli, di cui è infatti una conseguenza necessaria.

M. Euler gli ha dato in seguito una maggiore generalità, e lo ha applicato alla soluzione di diversi problemi riguardanti le oscillazioni dei corpi flessibili o inflessibili, in una Memoria stampata nel 1740, nel tomo VII degli antichi Commentari di Pietroburgo.

Sarebbe troppo lungo parlare di altri problemi di Dinamica che hanno esercitato l'intelligenza dei Matematici dopo quello del centro di oscillazione, e prima che la capacità di risolverli fosse ricondotta a regole fisse. Questi problemi che MM. Bernoulli, Clairaut, Euler si proposero tra loro, si trovano trattati nei primi volumi delle Memorie di Pietroburgo e di Berlino, nelle Memorie di Parigi (anni 1736 e 1742), nelle Opere di Jean Bernoulli e negli Opuscoli di M. Euler. Essi consistono nella determinazione dei moti di parecchi corpi pesanti che si possono oppure no tirare con fili o leve inflessibili ai quali sono fissati, o lungo quali essi possono scorrere liberamente, e che avendo ricevuto impulsi qualsiasi, sono poi abbandonati a loro stessi, o costretti a muoversi su curve o superfici date.

Il principio di Huyghens era quasi sempre impiegato nella soluzione di questi problemi; ma siccome questo principio offre una sola equazione, si cercarono le altre considerando forze incognite con le quali si pensava che i corpi dovessero spingersi o tirarsi, e che si consideravano come forze elastiche agenti pure in versi contrari; l'impiego di queste forze consentiva di non tener conto del legame tra i corpi e permettevano di utilizzare leggi del moto dei corpi liberi; poi le condizioni che emergevano dalla natura del problema che dovevano sussistere tra i moti dei diversi corpi, dovevano servire a determinare le forze incognite introdotte nel calcolo. Ma serviva sempre un'abilità particolare per eliminare in ogni problema tutte le forze e ciò rendeva tali problemi arguti e capaci di esercitare l'emulazione.

Il trattato di Dinamica di M. d'Alembert che apparve nel 1743, mise fine a questa specie di sfide, offrendo un metodo diretto e generale per risolvere, o almeno per tradurre in equazioni tutti i problemi di Dinamica immaginabili. Questo metodo riduce tutte le leggi del moto dei corpi a quelle del loro equilibrio, e riporta così la Dinamica alla Statica. Abbiamo già sottolineato che il principio impiegato da Jacques Bernoulli nella ricerca del centro di oscillazione, aveva il vantaggio di far dipendere questa ricerca dalle condizioni di equilibrio della leva; ma era riservato a M. d'Alembert di trattare questo principio in modo generale e di mostrarne tutta la semplicità e fecondità che poteva offrite.

Se parecchi corpi tendono a muoversi con velocità e direzione che sono forzati a cambiare a causa della loro reciproca azione, si possono considerare come composti da quelli che i corpi assumerebbero realmente e da altri che sono distrutti; da ciò segue che questi ultimi devono essere tali che i corpi animati da questi soli moti si equilibrano.

Questo è il principio che M. d'Alembert ha dato, e del quale ha fatto tante pregevoli e utili applicazioni. Questo Principio non fornisce immediatamente le equazioni necessarie alla soluzione dei diversi problemi di Dinamica, ma insegna a dedurli dalle condizioni di equilibrio. Combinando in tal modo questo Principio con i Principi ordinari dell'equilibrio della leva, o della composizione delle forze, si può sempre trovare le equazioni di ogni problema con l'aiuto di qualche costruzione più o meno complicata. È in questo modo che è stato usato finora nell'applicazione del Principio in esame; ma la difficoltà di determinare le forze che devono essere distrutte, così come le leggi dell'equilibrio tra queste forze, rende spesso questa applicazione imbarazzante e faticosa; e le soluzioni che ne derivano sono quasi sempre più lunghe di quelle dedotte da Principi meno semplici e diretti.

Nella prima parte di questo Trattato, il Principio delle velocità virtuali ci ha portato a un metodo analitico molto semplice, per risolvere tutte le questioni di Statica. Questo stesso Principio combinato con quello esposto, fornirà quindi anche un Metodo simile per i problemi di Dinamica e con gli stesso vantaggi.

Per formarsi un'idea di questo Metodo, si ricorderà che il Principio generale delle velocità virtuali consiste nel fatto che, quando un sistema di corpi ridotto a punti e animati da forze qualsiasi è in equilibrio, se si dà a questo sistema un piccolo movimento qualsiasi in virtù del quale ogni corpo percorre uno spazio infinitamente piccolo, la somma delle forze o potenze moltiplicate ognuna per lo spazio che il punti in cui essa è applicata percorre lungo la direzione di questa forza, è sempre uguale a zero.

Se ora si suppone il sistema in movimento, e si considera il moto che ogni corpo ha in un istante come composto di due, di cui uno sia quello che il corpo avrà nell'istante successivo, bisognerà che l'altro sia distrutto dall'azione reciproca dei corpi, e da quello delle forze motrici di cui sono reciprocamente animati. Così vi dovrà essere equilibrio tra queste forze e le pressioni o resistenze che risultano dai moti che si possono vedere come persi dai corpi da un istante all'altro. Da ciò segue che per estendere al moto del sistema la formula del suo equilibrio, basterà aggiungere i termini dovuti a queste ultime forze.

Se si considerano ora, come già fatto prima, le velocità che ogni corpo ha lungo tre direzioni fisse e perpendicolari tra loro, i decrementi di queste velocità rappresenteranno i moti persi lungo le stesse direzioni e i loro accrescimenti saranno di conseguenza i moti persi nelle direzioni opposte. Pertanto le pressioni risultanti da questi moti persi saranno espresse in generale dalla massa moltiplicata per l'elemento di velocità, e divisa per l'elemento del tempo, e avranno direzioni direttamente contrarie a quelle delle velocità. In questo modo si potrà esprimere analiticamente i termini in questione e si avrà una formula generale per il moto dei corpi, la quale racchiuderà la soluzione di tutti i problemi di Dinamica, e il cui semplice sviluppo darà le equazioni necessarie per ogni problema, come si vedrà nel seguito di questo Trattato.

Ma uno dei maggiori vantaggi di questa formula è quello di offrire immediatamente le equazioni generali che racchiudono i Principi, o teoremi noti sotto i nomi di *conservazione delle forze vive*, di *conservazione del moto del centro di gravità*, di *conservazione del momento del moto di rotazione*, o *Principio delle aree* e del *principio della minima quantità d'azione*. Questi Principi devono essere visti piuttosto come risultati generali delle leggi della Dinamica, che come principi primitivi di questa Scienza, ma essendo spesso impiegati come tali nella soluzione dei problemi, crediamo di doverne dire anche una parola, indicando in cosa consistono e a quali Autori sono dovuti, per non tralasciare nulla in questa esposizione preliminare dei Principi della Dinamica.

Il primo dei quattro Principi elencati, quello della conservazione delle forze vive, è stato trovato da Huyghens, ma in una forma un poco diversa da quella presentata; e ne già abbiamo già parlato in occasione del problema dei centri di oscillazione. Il principio come è stato impiegato nella soluzione di questo problema consiste nell'uguaglianza tra la discesa e la risalita del centro di gravità di parecchi corpi pesanti che scendono congiuntamente e che risalgono poi separatamente, essendo rilanciati in alto ognuno con la velocità acquisita. Dalle proprietà note del centro di gravità, il cammino percorso da questo centro in una direzione qualsiasi, è espresso dalla somma dei prodotti della massa di ogni corpo e del cammino che ha percorso lungo la stessa direzione, diviso per la somma delle masse. D'altro canto, dai teoremi di Galileo, il cammino verticale percorso da un corpo grave è proporzionale al quadrato della velocità che ha acquisito discendendo liberamente, e con la quale potrebbe risalire alla stessa altezza. Così il Principio di Huyghens si riduce a quello che nel moto dei corpi pesanti, la somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle velocità ad ogni istante, è lo stesso, sia che i corpi si muovano congiuntamente in modo qualsiasi, o che percorrano liberamente le stesse altezze verticali. È anche ciò che lo stesso Huyghens ha sottolineato in poche parole nel piccolo scritto relativo ai metodi di Jacques Bernoulli e del Marchese de l'Hopital, per i centri di oscillazione.

Fino ad allora tale Principio era stato visto solo come un semplice teorema di Meccanica; ma quando Jean Bernoulli ebbe adottato la distinzione stabilita da Leibniz, tra le forze morte o pressioni che agiscono senza moto reale, e le forze vive accompagnate da questo movimento, cosicché la misura di queste ultime per i prodotti delle masse e dei quadrati delle velocità, non vide più nel Principio in questione, che una conseguenza della teoria delle forze vive, e una legge generale della natura, secondo la quale la somma delle forze vive di parecchi corpi si conserva mentre questi corpi agiscono gli uni gli altri con semplici pressioni, ed è costantemente uguale alla semplice forza viva che risulta dall'azione delle forze reali che muovono i corpi. Gli diede così il nome di *conservazione delle forze vive*, e se ne è servito con successo per risolvere alcuni problemi che non lo erano ancora stati, e dei quali sembrava difficile venire a capo con i metodi diretti.

Il suo illustre figlio, Daniel Bernoulli, ha poi dedotto da questo Principio, le leggi del moto dei fluidi nei contenitori, materia che era stata trattata prima di lui solo in modo vago e arbitrario. Infine ha reso questo stesso principio molto generale nelle Memorie di Berlino dell'anno 1748, mostrando come lo si possa applicare al moto dei corpi animati da attrazioni reciproche qualsiasi, o attratti verso centri fissi da forze proporzionali a qualche funzione delle distanze.

Il grande vantaggio di questo Principio è di fornire immediatamente una equazione finita tra le velocità dei corpi e le variabili che determinano la loro posizione nello spazio; di modo che quando dalla natura del problema, tutte queste variabili si riducono a una sola, questa equazione basta a risolverlo completamente, ed è questo il caso dei centri di oscillazione. In generale la conservazione delle forze vive dà sempre un integrale primo di diverse equazioni differenziali di ogni problema; ciò che è di grande utilità in parecchie occasioni.

Il secondo Principio è dovuto a Newton, che, all'inizio dei suoi *Principi Matematici*, dimostra che la condizione di riposo o di moto del centro di gravità di parecchi corpi non è alterata dall'azione reciproca di questi corpi, qualunque essa sia; di modo che il centro di gravità dei corpi che agiscono gli uni sugli altri in un modo qualsiasi, mediante fili o leve, o leggi di attrazione, ecc, senza vi sia alcuna azione né ostacolo esterno, è sempre a riposo, o si muove uniformemente in linea retta.

M. d'Alembert gli ha dato poi, nel suo Trattato di Dinamica, una maggiore generalizzazione, mostrando che se ogni corpo è sollecitato da una forza acceleratrice costante e agente lungo rette parallele, o che sia diretta verso un punto fisso, e agisca in ragione della distanza, il centro di gravità deve descrivere la stessa curva di un corpo libero; si può anche aggiungere che il moto di questo centro è in generale lo stesso di quello in cui le forze qualsiasi sono applicate ognuna lungo la propria direzione.

È chiaro che questo Principio serve a determinare il moro del centro di gravità, indipendentemente dai mori rispettivi dei corpi, e che può sempre fornire tre equazioni finite tra le coordinate dei corpi e i tempi, i quali saranno integrali delle equazioni differenziali del problema.

Il terzo Principio è molto meno antico dei due precedenti, e sembra essere stato scoperto nello stesso tempo da MM. Euler, Daniel Bernoulli e Chevalier d'Arcy, ma in forme diverse.

Secondo i primi due, questo Principio consiste nel fatto che nel moto di più corpi attorno ad un centro fisso, la somma dei prodotti della massa di ogni corpo per la sua velocità di rotazione e per la sua distanza dal centro stesso, è sempre indipendente dall'azione reciproca che i corpi possono esercitare gli uni sugli altri, e si conserva lo stesso fintanto che non vi è alcuna azione né ostacolo esterno. M. Daniel Bernoulli ha esposto questo Principio nel primo volume delle Memorie dell'Accademia di Berlino apparso nel 1746 e M. Euler nello stesso anno nel primo tomo dei suoi Opuscoli; è questo anche lo stesso problema che li ha guidati, durante la ricerca del moto di parecchi corpi mobili in un tubo di forma data, e che non può che ruotare attorno ad un punto o centro fisso.

Il Principio di M. d'Arcy, come è stato presentato all'Accademia delle Scienze di Parigi, in una Memoria che porta la data del 1746, ma che è apparso solo nel 1752 nella Raccolta del 1747, è che la somma dei prodotti della massa di ogni corpo per l'area che il suo raggio vettore descrive attorno ad un centro fisso, è sempre proporzionale al tempo. Si vede che questo Principio è una generalizzazione del bel teorema di Newton sulle aree descritte in virtù delle forze centripete; e per cogliere l'analogia, o piuttosto l'identità con quelle di MM. Euler e Daniel Bernoulli, basta considerare che la velocità di rotazione è espressa dall'elemento dell'arco circolare divisa per l'elemento del tempo, e che il primo di questi elementi moltiplicato per la distanza dal centro, dà l'elemento dell'area descritta attorno a questo centro; da ciò si vede che quest'ultimo Principio altro non è che l'espressione differenziale di quello di M. d'Arcy.

Questo Autore ha presentato poi il suo Principio sotto un'altra forma che lo avvicina di più al precedente, e che consiste nel fatto che la somma dei prodotti delle masse per le velocità e per le perpendicolari tracciate dal centro sulle direzione del corpo è una quantità costante.

Sotto questo punto di vista ne ha fatto anche una specie di Principio metafisico, che si chiama la *conservazione dell'azione*, per opporlo, o piuttosto per sostituirlo a quello della *minore quantità di azione*; come se denominazioni vaghe e arbitrarie rappresentassero l'essenza delle leggi della natura, e potessero per qualche virtù segreta ergersi a cause finali, da semplici risultati delle leggi note della Meccanica.

Nonostante tutto, il Principio in esame vale generalmente per tutto il sistema di corpi che agiscono gli uni sugli altri in un modo qualsiasi, sia con fili, linee inflessibili, leggi di attrazione, ecc, e che sono inoltre sollecitati da forze qualsiasi dirette verso un centro fisso, sia che il sistema si trovi del tutto libero, o che sia costretto a muoversi attorno a questo stesso centro. La somma dei prodotti delle masse per le aree descritte attorno a questo centro, e proiettate su un piano qualsiasi, è sempre proporzionale al tempo; di modo che riferendo queste aree a tre piani perpendicolari tra loro, si hanno tre equazioni differenziali del primo ordine tra il tempo e le coordinate delle curve descritte dai corpi; ed è proprio in queste equazioni che consiste la natura del Principio in questione.

Vengo infine al quarto Principio che chiamo *della minima azione*, per analogia con quello che solo M. Maupertuis ha dato sotto questo nome, e che gli scritti di parecchi Autori illustri hanno reso poi così famoso. Questo Principio considerato analiticamente, consiste nel fatto che nei moti dei corpi che agiscono gli uni sugli altri, la somma dei prodotti delle masse per le velocità e per gli spazi percorsi, è un *minimo.* L'Autore ne ha dedotto le leggi della riflessione e della rifrazione della luce, così come quelle dell'urto dei corpi in due Memorie, l'una all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1744 e l'altra due anni dopo a Berlino.

Ma bisogna ammettere che queste applicazioni sono troppo particolari per servire a stabilire la verità di un Principio generale; esse hanno d'altronde qualcosa di vago e arbitrario, che può solo rendere incerte le conseguenze che potrebbero trarre sull'esattezza stessa del Principio. Si avrebbe torto, mi sembrano porre questo Principio sullo stesso piano di quelli prima esposti. Ma vi è un altro modo più generale e rigoroso e che merita l'attenzione dei Matematici. M. Euler ha fornito per primo l'idea al termine del suo Trattato degli Isoperimetri, stampato a Losanna nel 1744, mostrando che nelle traiettorie descritte a causa delle forze centrali, l'integrale della velocità moltiplicato per l'elemento della curva, presenta sempre un *massimo* o un *minimo.*

Questa proprietà che M. Euler aveva riconosciuto solo nel moto dei corpi isolati, io l'ho poi estesa al moto dei corpi che agiscono gli uni sugli altri in modo qualsiasi, e ne è risultato questo nuovo Principio generale, che la somma dei prodotti delle masse per gli integrali delle velocità moltiplicate per gli elementi degli spazi percorsi, è costantemente un *massimo* o un *minimo.*

Tale è il Principio al quale io assegno qui, anche se impropriamente il nome di *minima azione*, e che considero non come un principio metafisico, ma come un risultato semplice e generale delle leggi della Meccanica. Si può vedere nel Tomo II delle Memorie di Torino, l'uso che ne ho fatto per risolvere numerosi problemi difficili di Dinamica. Questo principio combinato con quello della conservazione delle forze vive, e sviluppato secondo le regole del calcolo delle variazioni, fornisce direttamente tutte le equazioni necessarie per la soluzione di ogni problema; e da ciò nasce un metodo pure semplice e generale per trattare le questioni riguardanti i moti dei corpi; ma questo metodo non è altro che un corollario di quello trattato nella seconda parte di quest'Opera, e che nello stesso tempo ha il vantaggio di essere tratto dai Principi primitivi della Meccanica.

2.2 Formula generale per il moto di un sistema di corpi animati da forze qualsiasi

1. Quando le forze che agiscono su un sistema di corpi sono disposte conformemente alle leggi esposte nel primo Capitolo di questo Trattato, queste forze si annullano reciprocamente e il sistema rimane in equilibrio. Ma quando non vi è equilibrio, i corpi devono necessariamente muoversi, obbedendo in tutto o in parti all'azione delle forze che li sollecitano. La determinazione dei moti prodotti da queste forze date è l'oggetto di questo secondo Capitolo.

Consideriamo principalmente le forze acceleratrici o ritardatrici, la cui azione è continua, come quella della gravità, e che tendono a imprimere in ogni istante una velocità infinitamente piccola e uguale a tutte le particelle materiali.

Quando queste forze agiscono liberamente e uniformemente, esse producono necessariamente velocità che crescono come il tempo; e si possono considerare le velocità così generate in un tempo dato, come gli effetti più semplici di questi tipi di forze e di conseguenza come le più idonee a fungere da misura. Bisogna, nella Meccanica, prendere gli effetti semplici di forze come noti e la qualità di questa scienza consiste unicamente nel dedurre gli effetti composti che ne derivano dall'azione combinata e modificata delle stesse forze.

2. Supponiamo quindi che si conosca per ogni forza acceleratrice la velocità che essa è in grado di imprimere a un mobile agendo sempre allo stesso modo, per un certo tempo, che assumeremo come l'unità dei tempi; e intenderemo semplicemente come forza acceleratrice questa stessa velocità. Essa deve essere valutata dallo spazio che il mobile percorre nello stesso tempo, se continuasse in modo uniforme; e si sa dai teoremi di Galileo che questo spazio è sempre doppio di quello che il corpo ha percorso realmente per l'azione costante della forza acceleratrice.

Si può d'altra parte prendere una forza acceleratrice nota per unità e confrontarla con tutte le altre. Allora basterà prendere per l'unità degli spazi il doppio degli spazi che la stessa forza continuata allo stesso modo farebbe percorrere nel tempo che si vuole assumere come unitario, e la velocità acquisita in questo tempo per l'azione continua della stessa forza, sarà l'unità delle velocità. In questo modo le forze, gli spazi, i tempi e le velocità saranno solo semplici rapporti di quantità matematiche ordinarie.

Per esempio, se si prende (ciò che è molto naturale) la gravità alla latitudine di Parigi come unità delle forze acceleratrici e si contano i tempi in secondi, si dovranno prendere allora $30,196$ *piedi* di Parigi per l'unità degli spazi percorsi, poiché $15,098$ *piedi* è l'altezza da cui un corpo abbandonato a se stesso, cade in un secondo a questa latitudine; e l'unità delle velocità sarà quella che un corpo pesante acquista cadendo da una tale altezza.

3. Date queste nozioni preliminari, consideriamo un sistema di corpi disposti gli uni rispetto agli altri a piacere e animati da forze acceleratrici qualsiasi.

Sia m la massa di uno qualsiasi di questi corpi, considerato puntiforme; e siano x, y, z le tre coordinate che determinano la posizione assoluta dello stesso corpo dopo un qualsiasi tempo t. Queste coordinate sono supposte sempre parallele a tre assi fissi nello spazio e che si incontrano perpendicolarmente in un punto detto l'origine delle coordinate; esse esprimono di conseguenza le distanze in linea retta del corpo dai tre piani passanti per gli stessi assi.

A causa della perpendicolarità di questi piani, le coordinate x, y, z rappresentano gli spazi percorsi dal corpo che si allontana dagli stessi piani; di conseguenza $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ rappresenteranno le velocità che questo corpo ha un istante qualsiasi mentre si allontana da ciascuno di questi piani; e queste velocità, se il corpo fosse poi abbandonato a se stesso, rimarrebbero costanti negli istanti successivi, per i principi fondamentali della teoria del moto.

4. Siano ora P, Q, R, ecc, le forze acceleratrici, che nello stesso istante sollecitano ogni punto della massa m lungo le direzioni date, cioè, le velocità che ognuna di queste forze imprimerebbe alla massa m, se agissero separatamente e in modo uguale per il tempo unitario. Per quanto variabile possa essere l'azione di queste forze, si può tuttavia pensarla come costante in un istante. Di conseguenza, siccome le velocità prodotte dalle forze acceleratrici costanti sono proporzionali al tempo, ne segue che le velocità che le forze P, Q, R, ecc imprimono o tendono ad imprimere al corpo m nell'istante dt, sono espresse da Pdt, Qdt, Rdt, ecc. e hanno le stesse direzioni delle forze.

Nell'istante successivo, dunque, il corpo tenderà a muoversi con le velocità $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, Pdt, Qdt, Rdt, ecc,; e acquisterebbe effettivamente un moto composto da questi, se divenisse libero; ma questo moto è alterata dal legame reciproco tra i corpi.

Poiché $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ esprimono in generale le velocità effettive del corpo dopo il tempo t, le velocità dopo il tempo $t + dt$ saranno espresse da $\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt} + d.\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt} + d.\frac{dz}{dt}$. Il corpo avrà così perso le velocità Pdt, Qdt, Rdt, ecc, e guadagnato al loro posto le velocità $d.\frac{dx}{dt}$, $d.\frac{dy}{dt}$, $d.\frac{dz}{dt}$ tendenti ad aumentare le coordinate x, y, z; o, analogamente, avrà perso le velocità Pdt, Qdt, Rdt, ecc, e le velocità $d.\frac{dx}{dt}$, $d.\frac{dy}{dt}$, $d.\frac{dz}{dt}$ dirette in senso contrario, cioè, lungo le rette stesse x, y, z.

In tal modo le forze acceleratrici in grado di produrre queste diverse velocità saranno state distrutte, e si saranno di conseguenza equilibrate. Alla fine si sarà, quindi, ottenuto equilibrio nel sistema, supponendo ognuno dei corpi m che lo compongono, animato contemporaneamente dalla forze acceleratrici P, q, R, ecc, date, e inoltre dalle forze acceleratrici $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}$, $\frac{d.\frac{dy}{dt}}{dt}$, $\frac{d.\frac{dz}{dt}}{dt}$ o (ponendo dt costante) $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, dirette lungo le rette x, y, z. Da ciò si vede che le leggi del moto del sistema sono le stesse di quelle del suo equilibrio, aggiungendo semplicemente le nuove forze acceleratrici $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ lungo x, y, z.

5. Si potrà pertanto anche trovare una formula generale per il moto, come ne è stata trovata una per l'equilibrio; e questa formula del moto non sarà diversa da quella dell'equilibrio, supponendo ogni corpo m del sistema tirato contemporaneamente dalle forze mP, mQ, mR, ecc, lungo le direzioni delle forze acceleratrici P, Q, R, ecc, che lo anima, e inoltre dalle forze $m\frac{d^2x}{dt^2}, m\frac{d^2y}{dt^2}, m\frac{d^2z}{dt^2}$ lungo le direzioni delle coordinate x, y, z.

Supponiamo per questo che la posizione dei diversi corpi del sistema cambi infinitamente poco, di modo che le coordinate x, y, z divengano $x - \delta x$, $y - \delta y$, $z - \delta z$, essendo le quantità $\delta x, \delta y, \delta z$ infinitamente piccole; è chiaro che queste quantità esprimono i piccoli spazi che i corpi m avranno percorso lungo le direzioni x, y, z, poiché, essendo esse tra loro perpendicolari, lo spazio percorso parallelamente a una dipende solo dalla variazione di questa, e per nulla da quella delle altre.

Così si avrà dapprima $m\frac{d^2x}{dt^2} \times \delta x$, $m\frac{d^2y}{dt^2} \times \delta y$, $m\frac{d^2z}{dt^2} \times \delta z$ per i *momenti* delle forze $m\frac{d^2x}{dt^2}, m\frac{d^2y}{dt^2}, m\frac{d^2z}{dt^2}$.

6. Consideriamo ora le forze acceleratrici P, Q, R, ecc, come tendenti verso centri dati; e siano p, q, r, ecc, le distanze di ogni corpo m da ciascun centro. $\delta p, \delta q, \delta r$, ecc, rappresentino le variazioni delle rette o quantità p, q, r, ecc, derivanti dalle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ delle rette x, y, z; è chiaro che queste quantità $\delta p, \delta q, \delta r$, ecc, esprimeranno nei medesimi tempi gli spazi percorsi dal corpo m lungo le direzioni p, q, r, ecc. Pertanto $mP \times \delta p$, $mQ \times \delta q$, $mR \times \delta r$, ecc, saranno i momenti delle forze mP, mQ, mR, ecc, agenti lungo queste stesse rette p, q, r, ecc.

Ora la formula generale dell'equilibrio consiste nel fatto che la somma dei momenti di tutte le forze del sistema debba essere nulla (Cap I, sez. 2, art. 2); pertanto si avrà la formula cercata uguagliando a zero la somma di tutte le quantità

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) + m\left(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc\right)$$

relative a ognuno dei corpi del sistema in esame.

7. Pertanto se si indica questa somma con il segno di integrale S, che deve comprendere tutti i corpi del sistema, si avrà

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc\right)m = 0$$

per la formula generale del moto di un sistema qualsiasi di corpi, intesi come puntiformi e animati da forze acceleratrici qualsiasi P, Q, R, ecc.

Per utilizzare tale formula, si seguiranno le stesse regole della formula dell'equilibrio; basterà così applicare qui tutto quanto detto nella seconda sezione del primo Capitolo, dall'art.3 fino al termine, osservando che i differenziali indicati con la notazione δ nella formula precedente corrispondono ai differenziali indicati con la notazione ordinaria d nella formula dell'equilibrio, e si determinano con le stesse regole e le stesse operazioni.

Indicheremo nel seguito questi differenziali contrassegnati da δ, delle *variazioni*, per distinguerli dagli altri caratterizzati da d che si trovano nella stessa formula, e che esprimono gli incrementi o decrementi successivi delle variabili, in ragione del tempo e del moto dei corpi; mentre le *variazioni* sono relative al cambiamento arbitrario che si introduce nella posizione istantanea dei corpi, e che è del tutto indipendente dal loro moto effettivo.

8. In generale basterà iniziare a cercare i valori di $\delta p, \delta q$, ecc, in $\delta x, \delta y, \delta z$; cosa facile perché, chiamando a, b, c le coordinate che determinano la posizione del centro delle forze P, si ha

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

da cui si ricava, facendo variare unicamente x, y, z,

$$\delta p = \frac{x-a}{p}\delta x + \frac{y-b}{p}\delta y + \frac{z-c}{p}\delta z$$

espressione che, come già osservato nel riferimento citato, si può ridurre a questa forma generale e indipendente dalla posizione del centro delle forze

$$\delta p = \cos\alpha\delta x + \cos\beta\delta y + \cos\gamma\delta z$$

(chiamando α, β, γ gli angoli che la direzione della forza P forma con le coordinate x, y, z) o anche a quest'altra

$$\delta p = \sin\gamma\left(\cos\varepsilon\delta x + \sin\varepsilon\delta y\right) + \cos\gamma\delta z$$

essendo ε l'angolo che questa direzione proiettata sul piano x, y forma con l'asse x. E così per le altre variazioni $\delta q, \delta r$, ecc.

In questo modo i termini $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc.$ si riducono alla forma $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$; e le quantità X, Y, Z saranno i valori delle tre forze parallele agli assi delle coordinate x, y, z e equivalenti a tutte le forze P, Q, R, ecc, come abbiamo dimostrato nell'art. 5 della sezione quinta del primo Capitolo.

Considerando poi le equazioni di condizione, date dalla natura del sistema proposto, tra le coordinate dei diversi corpi, si ridurranno le *variazioni* di queste coordinate al più piccolo numero possibile, di modo che le variazioni restanti siano del tutto indipendenti tra loro e assolutamente arbitrarie. Allora si eguaglierà a zero la somma di tutti i termini che contengono ciascuna di queste ultime variazioni; e si avranno tutte le equazioni necessarie per la determinazione del moto del sistema.

9. Se il sistema di cui si cerca il moto è un corpo continuo e di forma invariabile come i corpi solidi, o variabile come quelli flessibili e i fluidi; allora indicando con m l'intera massa del corpo e con dm uno qualsiasi dei suoi elementi, cioè, una particella qualsiasi del corpo, si considererà questo corpo come un insieme o sistema di una infinità di corpuscoli dm, animati ciascuno dalle forze acceleratrici P, Q, R, ecc; e basterà meter nella formula generale dell'art. 7 dm al posto di m e nello stesso tempo considerare il simbolo S come un segno di integrazione relativo a tutta l'estensione del corpo, cioè, alla posizione istantanea di tutte le sue particelle, ma indipendente dalla posizione successiva di ogni particella.

10. In generale, basta notare relativamente alle *variazioni*, che si riferiscono solo allo spazio e non alla durata, di modo che nelle differenziazioni indicate con δ la variabile t, che rappresenta il tempo dovrà sempre essere considerata constante. Può accadere secondo le circostanze del problema che le equazioni di condizione contengano il tempo t, nel qual caso esse saranno variabili da un istante all'altro; allora alcune delle coordinate si troveranno espresse in funzione delle altre coordinate e della variabile t; e bisognerà considerare la variabilità di t nelle differenziazioni indicate con d, ma si supporrà t invariabile nelle differenziazioni indicate con δ.

La stessa ipotesi dovrà valore relativamente al simbolo integrale S che si riferisce solo all'estensione stessa del corpo in ogni istante.

2.3 Proprietà generali del moto dedotte dalla formula precedente

1. Consideriamo un sistema di corpi disposti gli uni rispetto agli altri e collegati a piacere tra loro, ma senza la presenza di alcun punto o ostacolo fisso che intralci il loro moto; è evidente che in questo caso le condizioni del sistema possono riguardare solo la posizione rispettiva dei corpi; di conseguenza le equazioni di condizione non potranno contenere altre funzioni delle coordinate diverse dalle espressioni delle distanze reciproche dei corpi.

Siano x', y', z' le coordinate di un corpo qualunque determinato del sistema, mentre x, y, z rappresentano in genere le coordinate di un altro corpo qualsiasi. Poniamo, e ciò è permesso,

$$x = x' + \xi \quad y = y' + \eta \quad z = z' + \zeta$$

è chiaro che le quantità x', y', z' non entreranno nelle espressioni delle distanze reciproche dei corpi, ma che queste distanze dipenderanno solo da diverse quantità ξ, η, ζ che esprimono le coordinate dei diversi corpi, rispetto a quello che corrisponde a x', y', z'; di conseguenza le equazioni di condizione del sistema saranno tra le sole variabili ξ, η, ζ e non comprenderanno x', y', z'.

Pertanto se nella formula generale del moto si sostituisce con $\delta x, \delta y, \delta z$ i loro valori $\delta x' + \delta\xi, \delta y' + \delta\eta, \delta z' + \delta\zeta$, queste variazioni $\delta x', \delta y', \delta z'$ saranno indipendenti da tutte le altre, e arbitrarie esse stesse; così basterà eguagliare separatamente a zero la totalità dei termini contenenti ognuna di queste variazioni; ciò darà tre equazioni generali e indipendenti dalla costituzione particolare del sistema.

2. Introducendo nella formula generale dell'art. 7 della sezione precedente, al posto della quantità $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc$, la sua trasformata $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ (art. 8, sez. citata), questa formula diviene

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) m\delta x + S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) m\delta y + S\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) m\delta z = 0$$

E da ciò si traggono all'istante queste tre equazioni generali

$$\begin{aligned} S\left(\tfrac{d^2x}{dt^2} + X\right) m &= 0 \\ S\left(\tfrac{d^2y}{dt^2} + Y\right) m &= 0 \\ S\left(\tfrac{d^2z}{dt^2} + Z\right) m &= 0 \end{aligned}$$

le quali varranno nel moto di un sistema qualsiasi del corpo, quando il sistema è interamente libero.

3. Supponiamo ora che il corpo al quale corrispondono le coordinate x', y', z' sia posto nel centro di gravità di tutto il sistema. Si avrà, per le proprietà note di questo centro (Cap. I, sez. 3, art. 12), le equazioni $S\xi m = 0$, $S\eta m = 0$, $S\zeta m = 0$; le quali, differenziando rispetto a t, daranno

$$S\frac{d^2\xi}{dt^2}m = 0 \quad S\tfrac{d^2\eta}{dt^2}m = 0 \quad S\frac{d^2\zeta}{dt^2}m = 0$$

Si avrà, pertanto, $S\frac{d^2x}{dt^2}m = S\frac{d^2x'}{dt^2}m = \frac{d^2x'}{dt^2}Sm$, poiché avendo x' lo stesso valore per tutto il corpo, è indipendente dal simbolo S; si avrà analogamente $S\frac{d^2y}{dt^2}m = \frac{d^2y'}{dt^2}Sm$ e $S\frac{d^2z}{dt^2}m = \frac{d^2z'}{dt^2}Sm$. Le tre equazioni dell'articolo precedente assumeranno così questa forma più semplice.

$$\begin{aligned} S\tfrac{d^2x'}{dt^2}Sm + SXm &= 0 \\ S\tfrac{d^2y'}{dt^2}Sm + SYm &= 0 \\ S\tfrac{d^2z'}{dt^2}Sm + SZm &= 0 \end{aligned}$$

Queste equazioni serviranno a determinare il moto del centro di gravità di tutti i corpi, indipendentemente dal moto particolare di ognuno di essi; ed è evidente che il moto di questo centro non dipenderà dall'azione reciproca che i corpi possono esercitare gli uni sugli altri, ma soltanto dalle forze acceleratrici che sollecitano ogni corpo. È in questo che consiste il principio generale della *conservazione del moto del centro di gravità.*

4. si vede del resto che le equazioni per il moto del centro di gravità sono le stesse di quelle del moto di un solo corpo animato contemporaneamente da tutte le forze acceleratrici che agiscono sui diversi corpi del sistema. Infatti, se si immagina che tutti questi corpi siano riuniti in un punto di coordinate x', y', z', si ha allora nella formula generale $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, e eguagliando a zero la totalità dei termini comprendenti ciascuna delle tre variazioni $\delta x', \delta y', \delta z'$, si avranno le stesse equazioni precedenti.

E da ciò risulta questo teorema generale, che il moto del centro di gravità di un sistema libero di corpi disposti gli uni rispetto agli altri a piacere, è come se i corpi fossero sempre riunito in un solo punto, e se nello stesso tempo ognuno di essi fosse animato dalle stesse forze acceleratrici come nel loro stato naturale.

5. Consideriamo qui il moto di un sistema qualsiasi attorno a un punto fisso, sia che questo punto appartenga al sistema oppure no; e per questo impieghiamo dapprima, come mostrato nel primo Capitolo (sez. 3, art. 5), un raggio vettore ρ con l'angolo ϕ descritto da questo raggio sul piano delle coordinate x, y, al posto di queste stesse coordinate, conservando la terza coordinata z perpendicolare a queste due. Si avrà in questo modo $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ e differenziando, $\delta x = \cos\phi\delta p - y\delta\phi$, $\delta y = \sin\phi\delta p + x\delta q$.

Sia per un corpo qualsiasi dato del sistema ϕ' il valore dell'angolo ϕ; e così per ognuno degli altri corpi $\phi = \phi' + \psi$. Si può provare che se il sistema è libero di ruotare attorno all'asse delle z, le variazioni dell'angolo ϕ' saranno indipendenti da quelle di tutte le altre variabili.

In questo caso la totalità dei termini comprendenti $\delta\phi'$ nella formula generale del moto dovrà essere separatamente uguale a zero; ciò darà un'equazione generale e indipendente dalla costituzione particolare del sistema; e per avere questa equazione, è chiaro che basterà mettere le quantità $-y\delta\phi'$ e $x\delta\phi'$ al posto di δz e δy nella formula generale data nell'art. 2 e fare poi un'equazione separata dei diversi termini comprendenti $\delta\phi'$.

6. Questa equazione sarà quindi

$$S\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} + xY - yX\right) m = 0$$

ed essa varrà per qualsiasi sistema di corpi purché possa ruotare attorno alla retta fissa che funge da asse alle coordinate z.

E poiché ciò che è relativo a uno dei tre assi di coordinate si può riferire pure a ciascuno degli altri due, si troverà, in modo simile rispetto all'asse y, se il sistema è libero di ruotare attorno a questo asse, l'equazione

$$S\left(x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2} + xZ - zX\right) m = 0$$

Infine si avrà pure, rispetto all'asse x, supponendo che il sistema sia libero di ruotare attorno a questo asse, l'equazione

$$S\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} + yZ - zY\right)m = 0$$

Queste tre equazioni varranno quindi contemporaneamente, quando il sistema sarà libero di ruotare attorno a ciascuno dei tre assi; cioè, tutte le volte che il sistema sarà disposto in modo da poter ruotare liberamente in tutti i sensi attorno al punto fisso dove è posta l'origine delle coordinate; poiché abbiamo visto nel primo Capitolo (sez. 3, art. 7), che il moto di rotazione attorno a un punto fisso si può sempre ridurre ad altri tre attorno a tre assi passanti per questo punto.

Per farsi un'idea più precisa di queste equazioni, si evidenzierà 1° che le quantità $xd^2y - yd^2x$, $xd^2z - zd^2x$, $yd^2z - zd^2y$ non sono diverse dai differenziali di queste, $xdy - ydx$, $xdz - zdx$, $ydz - zdy$, i quali esprimono il doppio del settore elementare descritto dal corpo m sui piani x, y, x, z, y, z, cioè sui piani perpendicolari agli assi z, x, y; infatti, se in $xdy - ydx$, si sostituiscono a x e y i valori $\rho \cos\phi$, $\rho \sin\phi$, si ottiene $\rho^2 d\phi$, doppio dell'area compresa tra il raggio vettore ρ e il raggio consecutivo che forma con l'angolo elementare $d\phi$. 2°. che le quantità X, Y, Z rappresentano le forze che sollecitano ogni corpo m lungo le direzioni delle coordinate x, y, z e che risultano da tutte le forze P, Q, R, ecc, agenti su questo corpo lungo direzioni qualsiasi (art. 8, sez. 2); e che anche le quantità $xY - yX$, $xZ - zX$, $yZ - zY$, esprimono i momenti delle forze che tendono a far ruotare il corpo attorno a ognuno dei tre assi di coordinate x, y, z; prendendo il termine di momenti, nel senso ordinario, per il prodotto della forza e della perpendicolare tracciata sulla sua direzione.

7. Se il sistema non fosse animato da alcuna forza acceleratrice, o se lo fosse solo da forze qualsiasi, tendenti tutte nel punto preso come origine delle coordinate; allora le quantità $xY - yX$, $xZ - zX$, $yZ - zY$, sarebbero nulle. Nel primo caso, anche le quantità X, Y, Z sarebbero nulle; e nel secondo, queste quantità sarebbero della forma $\frac{Px}{p}$, $\frac{Py}{p}$, $\frac{Pz}{p}$, (art. 8, sez. 2) indicando con P la forza tendente al centro, e ponendo le coordinate a, b, c nulle, poiché il centro delle forze è supposto cadere nell'origine delle coordinate.

Le tre equazioni dell'art. 6 diverranno allora,

$$\begin{aligned} S\left(x\tfrac{d^2y}{dt^2} - y\tfrac{d^2x}{dt^2}\right)m &= 0 \\ S\left(x\tfrac{d^2z}{dt^2} - z\tfrac{d^2x}{dt^2}\right)m &= 0 \\ S\left(y\tfrac{d^2z}{dt^2} - z\tfrac{d^2y}{dt^2}\right)m &= 0 \end{aligned}$$

le quali, essendo integrate rispetto alla variabile t, daranno, assumendo tre costanti arbitrarie A, B, C

$$\begin{aligned} S\left(\tfrac{xdy - ydx}{dt}\right)m &= A \\ S\left(\tfrac{xdz - zdx}{dt}\right)m &= B \\ S\left(\tfrac{ydz - zdy}{dt}\right)m &= C \end{aligned}$$

Queste ultime equazioni contengono evidentemente il Principio delle *aree* di cui abbiamo parlato nel primo Capitolo.

8. Se il sistema fosse libero, cioè, non vi fosse alcun punto fisso, si può prendere l'origine delle coordinate x, y, z in qualsiasi posto; di conseguenza le proprietà delle aree e dei momenti varrebbero, in questo caso rispetto a un punto fisso qualsiasi preso a piacere nello spazio. Ma dimostrerà che essi varranno pure rispetto al centro di gravità dell'intero sistema, sia che il centro sia fisso oppure no.

Per ciò basta sostituire nelle tre equazioni dell'art. 6, per x, y, z le quantità $x' + \xi$, $y' + \eta$, $z' + \zeta$ (art. 1), riferendo, come nell'art. 3, le coordinate x', y', z' al centro di gravità del sistema.

Con queste sostituzioni, la prima delle equazioni diverrà

$$\begin{gathered} \left(x'\tfrac{d^2y'}{dt^2} - y'\tfrac{d^2x'}{dt^2}\right)Sm + x'SYm - y'SXm + x'S\tfrac{d^2y}{dt^2}m - y'S\tfrac{d^2\xi'}{dt^2}m \\ + \tfrac{d^2y'}{dt^2}S\xi m - \tfrac{d^2x'}{dt^2}Sym + S\left(\xi\tfrac{d^2y}{dt^2} - y\tfrac{d^2\xi}{dt^2} + \xi Y - yX\right)m = 0 \end{gathered}$$

Poi dalle equazioni date nello stesso art. 3, essa si ridurrà a

$$S\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi Y - \eta X\right)m = 0$$

Le altre due equazioni dell'art. 6 si ridurranno pure a queste

$$\begin{aligned} S\left(\xi\tfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\tfrac{d^2\xi}{dt^2} + \xi Z - \zeta X\right)m = 0 \\ S\left(\eta\tfrac{d^2\xi}{dt^2} - \zeta\tfrac{d^2\eta}{dt^2} + \eta Z - \zeta Y\right)m = 0 \end{aligned}$$

Si vede che queste tre equazioni sono simili a quelle di questo stesso art. 6 e che tutte le differenze consistono nel fatto che al posto delle coordinate x, y, z partenti da un punto fisso, vi sono le coordinate ξ, η, ζ, la cui origine è nel centro di gravità del sistema. Da ciò segue che le stesse proprietà che valevano rispetto al punto fisso, valgono anche rispetto a questo centro.

9. In generale, in qualsiasi modo i diversi corpi del sistema siano disposti o legati tra loro, purché questa disposizione sia indipendente dal tempo, cioè, che le equazioni di condizione tra le coordinate non contengano la variabile t, è chiaro che si potrà sempre, nella formula generale del moto, supporre le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$, uguali ai differenziali dx, dy, dz, che rappresentano gli spazi effettivi percorsi dai corpi nell'istante dt, mentre le variazioni di cui parliamo devono rappresentare gli spazi qualsiasi, che i corpi potrebbero percorrere nello stesso istante, rispetto alla loro posizione reciproca.

Questa ipotesi è particolare e non può fornire, di conseguenza, che una sola equazione; ma essendo indipendente dalla forma del sistema, ha il vantaggio di dare un'equazione generale per il moto di qualsiasi sistema.

Sostituendo quindi nella formula generale dell'art. 7 della sez. precedente al posto di $\delta x, \delta y, \delta z$, i differenziali ordinari dx, dy, dz, e di conseguenza anche, invece di $\delta p, \delta q, \delta r$, ecc, i differenziali corrispondenti dp, dq, dr, ecc si avrà

$$S\left(\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} + Pdp + Qdq + Rdr + ecc\right)m = 0$$

equazione generale per qualsiasi sistema di corpi.

10. Quando la quantità $Pdp + Qdq + Rdr + ecc$, è integrabile e lo è sempre quando le forze acceleratrici tendono a centri fissi, o agli stessi corpi del sistema, e sono proporzionali a funzioni qualsiasi delle distanze, che è proprio il caso della natura; allora quindi, se si indica con Π l'integrale di questa quantità, in modo che si abbia $d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + ecc$, l'equazione precedente diviene

$$S\left(\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} + d\Pi\right)m = 0$$

il cui integrale è

$$S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + \Pi\right)m = F$$

indicando con F una costante arbitraria e uguale al valore del primo membro dell'equazione in un istante dato.

Quest'ultima equazione racchiude il principio noto sotto il nome di *Conservazione delle forze vive.* Infatti, essendo $dx^2 + dy^2 + dz^2$ il quadrato dello spazio che il corpo percorre nell'istante dt, $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ sarà il quadrato della sua velocità e $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}m$ la forza viva. Quindi $S\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)m$ sarà la somma delle forze vive di tutti i corpi, o la forza viva dell'intero sistema; e si vede dall'equazione in esame che questa forza viva è uguale alla quantità $2F - 2S\Pi m$, la quale dipende semplicemente dalle forze acceleratrici che agiscono sui corpi, ed è la stessa sia per corpi liberi che per corpi legati tra loro in modo qualsiasi, purché il loro legame sia indipendente dal tempo.

11. Indicando con u la velocità del corpo m, si ha $u^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ e l'equazione precedente diviene $S\left(\frac{u^2}{2} + \Pi\right)m = F$, la quale, essendo differenziata rispetto a δ, dà $S\left(u\delta u + \delta\Pi\right)m = 0$.

Ora, essendo Π una funzione finita delle variabili p, q, r, ecc tale che $d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + ecc$, è chiaro che si avrà pure cambiando d in δ, $\delta\Pi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc$. Si avrà quindi $S\left(u\delta u + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc\right)m = 0$; di conseguenza

$$S\left(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc\right)m = -Su\delta u \times m$$

E questa equazione varrà sempre, purché $Pdp + Qdq + Rdr + ecc$, sia una quantità integrabile, e che il legame dei corpi sia indipendente dal tempo; essa cesserebbe di essere vera se una di queste condizioni non valesse.

12. Sostituendo ora il valore precedente nella stessa formula generale dell'art. 7 della seconda sezione, essa diverrà

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - u\delta u\right)m = 0$$

Ora $d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z$ è $= d.\left(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z\right) - dxd\delta x - dyd\delta y - dzd\delta z$. Ma poiché i simboli d e δ rappresentano differenze o variazioni del tutto indipendenti le une dalle altre, è facile pensare che $d\delta x, d\delta y, d\delta z$ devono essere la stessa cosa di $\delta dx, \delta dy, \delta dz$ come già evidenziato nel primo Capitolo (art. 16, sez. 4). D'altra parte è chiaro che $dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz = \frac{1}{2}\delta.\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$. Si avrà pertanto

$$d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z = d.\left(dx\delta x + dy\delta y + dx\delta z\right) - \frac{1}{2}\delta.\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

Sia s lo spazio o l'arco curvilineo descritto dal corpo m nel tempo t; si ha $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, e $dt = \frac{ds}{u}$. Pertanto

$$d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z = d.\left(dx\delta x + dy\delta y + dx\delta z\right) - ds\delta ds$$

e da ciò

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = \frac{d.\left(dx\delta x + dy\delta y + dx\delta z\right)}{dt^2} - \frac{u^2\delta ds}{ds}$$

Così la formula generale diverrà

$$S\left(\frac{d.\left(dx\delta x+dy\delta y+dx\delta z\right)}{dt^2}-\frac{u^2\delta ds}{ds}-u\delta u\right)m=0$$

o, moltiplicando tutti i termini per $dt=\frac{ds}{u}$ e osservando che $u\delta ds+ds\delta u=\delta.\left(uds\right)$,

$$S\left(\frac{d.\left(dx\delta x+dy\delta y+dx\delta z\right)}{dt^2}-\delta.\left(u\delta s\right)\right)m=0$$

E, siccome il segno di integrale S non ha alcun rapporto con i simboli differenziale d e δ, si può far uscire questi fuori da quello e l'equazione precedente assumerà questa forma

$$\frac{d.S\left(dx\delta x+dy\delta y+dx\delta z\right)m}{dt}-\delta.Smuds=0$$

Integriamo rispetto al segno di differenziale d, e indichiamo questa integrazione con il simbolo ordinario di integrale $\int$, avremo

$$\frac{d.S\left(dx\delta x+dy\delta y+dx\delta z\right)m}{dt}-\int\delta.Smuds=cost$$

Se ora il simbolo $\int$ nell'espressione $\int\delta.Smuds$ riguardando solo le variabili u,s e non avendo alcuna relazione con i simboli S e δ, è chiaro che questa espressione è la stessa cosa di quella, $\delta.Sm\int uds$. E se si suppone che nei punti in cui iniziano gli integrali $\int uds$ si abbia $\delta x=0$, $\delta y=0$, $\delta z=0$, basterà che la costante arbitraria sia nulla, poiché il primo membro dell'equazione diviene nullo in questi punti. Si avrà in questo caso

$$\delta.Sm\int uds=\frac{S\left(dx\delta x+dy\delta y+dx\delta z\right)m}{dt}$$

Se si suppone pertanto inoltre che le variazioni $\delta x,\delta y,\delta z$ siano pure nulle per i punti in cui gli integrali $\int uds$ finiscono, si avrà allora $\delta.Sm\int uds=0$; cioè, la variazione della quantità $Sm\int uds$ sarà nulla; di conseguenza questa quantità sarà un *massimo* o un *minimo*.

13. Risulta quindi questo teorema generale, che nel moto di un sistema qualsiasi di corpi animati da forze reciproche di attrazione, o tendenti a centri fissi e proporzionali a funzioni qualsiasi delle distanze, le curve descritte dai diversi corpi e le loro velocità, sono necessariamente tali che la somma dei prodotti di ogni massa per l'integrale della velocità moltiplicata per l'elemento della curva è un *massimo* o un *minimo*, purché si consideri i primi e gli ultimi punti di ogni curva come assegnati, di modo che le variazioni delle coordinate corrispondenti a questi punti siano nulle. È il teorema di cui abbiamo parlato al termine del primo Capitolo, sotto il nome di Principio della minima azione.

Ma questo teorema non contiene solo una proprietà molto significativa del moto dei corpi, ma può servire anche a determinare questo moto. Infatti, poiché la formula $Sm\int uds$ deve essere un *massimo* o un *minimo*, basta cercare con il metodo delle *variazioni*, le condizioni che la possono rendere tale; e impiegando l'equazione generale della conservazione delle forze vive, si troveranno sempre tutte le equazioni necessarie per conoscere il moto di ogni corpo; per il *massimo* o *minimo*, basta che la variazione sia nulla, e che di conseguenza si abbia $\delta.Sm\int uds=0$; e da ciò, praticando in un ordine inverso le operazioni prima esposte , si ritroverà la stessa formula generale dalla quale si è partiti.

14. Per rendere questo metodo più evidente, lo esponiamo qui in poche parole. La condizione di *massimo* o *minimo* dà in generale $\delta.Sm\int uds=0$ e facendo passare il segno differenziale δ sotto il simbolo S e $\int$ (evidentemente permesso dalla natura di questi diversi simboli), si avrà l'equazione $Sm\int\delta\left(uds\right)=0$ oppure $Sm\int\left(ds\delta u+u\delta ds\right)=0$.

Considero dapprima la parte $Sm\int ds\delta u$ e ponendo per ds il suo valore udt, diviene $Sm\int u\delta udt$, o cambiando l'ordine dei simboli S e $\int$ che sono tra loro assolutamente indipendenti, $\int dtSmu\delta u$. L'equazione generale del principio delle forze vive fornisce (art. 11) $Su^2m=2F.2S.\Pi m$, essendo $\Pi=Pdp\grave{e}Qdq\grave{e}Rdr+ecc$; pertanto differenziando rispetto a δ, si avrà $Su\delta um=-S\delta\Pi m=-S\left(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+ecc\right)m$, poiché essendo supposto Π una funzione algebrica di p,q,r,ecc, il differenziale $\delta\Pi$ è lo stesso di $d\Pi$ cambiando solo d in δ. Così la quantità $Sm\int ds\delta u$ si ridurrà alla forma

$$-\int dtS\left(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+ecc\right)m$$

Considero poi l'altra parte $Sm\int u\delta ds$ e sostituisco al posto di ds il suo valore espresso dalle coordinate perpendicolari, o da altre qualsiasi variabili. Impiegando le coordinate x,y,z si ha $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, pertanto, differenziando rispetto a δ, $\delta ds=\frac{dx\delta dx+dy\delta dy+dz\delta dz}{ds}$, oppure, trasportando i simboli d,δ e scrivendo δs invece di δd (sempre permesso a causa dell'indipendenza di questi simboli, e perché forma il primo principio fondamentale del metodo delle variazioni), $\delta ds=\frac{dxd\delta x+dyd\delta y+dzd\delta z}{ds}$; si avrà così sostituendo questo valore e mettendo dt al posto di $\frac{ds}{u}$

$$\int u\delta ds=\int\frac{dxd\delta x+dyd\delta y+dzd\delta z}{dt}$$

Poiché si trovano qui sotto il segno di integrale $\int$ differenziali delle variazioni $\delta x,\delta y,\delta z$, bisogna farli scomparire mediante l'operazione nota delle integrazioni per parti; e in questo consiste il secondo Principio fondamentale del metodo delle variazioni. Si trasformerà quindi la quantità $\int \frac{dxd\delta x}{dt}$ in quello che gli è equivalente $\frac{dx}{dt}\delta x - \int \delta xd.\frac{dx}{dt}$; e supponendo che i due termini della curva siano dati, di modo che le coordinate che corrispondono all'inizio e alla fine dell'integrale, non variano; si avrà semplicemente $\int \frac{dxd\delta x}{dt} = -\int \delta xd.\frac{dx}{dt}$. Si troverà pure $\int \frac{dyd\delta y}{dt} = -\int \delta yd.\frac{dy}{dt}$, e in modo analogo $\int \frac{dzd\delta z}{dt} = -\int \delta zd.\frac{dz}{dt}$; di modo che si avrà questa trasformata

$$\int u\delta ds = -\int \left(\delta xd.\frac{dx}{dt} + \delta yd.\frac{dy}{dt} + \delta zd.\frac{dz}{dt}\right)$$

Pertanto, la quantità $Sm \int u\delta ds$ diverrà, trasponendo, cosa sempre possibile, i simboli di S e $\int$

$$-\int S\left(\delta xd.\frac{dx}{dt} + \delta yd.\frac{dy}{dt} + \delta zd.\frac{dz}{dt}\right)m$$

L'equazione del massimo o minimo sarà quindi

$$\int \left(dtS\left(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc\right)m + S\left(\delta xd.\frac{dx}{dt} + \delta yd.\frac{dy}{dt} + \delta zd.\frac{dz}{dt}\right)m\right) = 0$$

la quale dovendo valere in generale per tutte le possibili variazioni, sarà necessario che la quantità sotto il simbolo di $\int$ sia nulla in ogni istante; si avrà così l'equazione indefinita

$$dtS\left(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc\right)m + S\left(\delta xd.\frac{dx}{dt} + \delta yd.\frac{dy}{dt} + \delta zd.\frac{dz}{dt}\right)m = 0$$

equazione che è la stessa della formula generale del moto (art. 7, sez. \), e che darà, di conseguenza, come quella, tutte le equazioni necessarie alla soluzione del problema.

15. Invece delle coordinate x, y, z si possono impiegare altre indeterminate qualsiasi, e il tutto si riduce ad esprimere l'elemento dell'arco ds in funzione di queste indeterminate. Se si prende, per esempio, il raggio o la distanza rettilinea dall'origine delle coordinate, che si indicherà con ρ, con due angoli, di cui l'uno ψ sia l'inclinazione di questo raggio sul piano xy, e l'altro ϕ l'angolo della proiezione dello stesso raggio su questo piano con l'asse delle x; si avrà $z = \rho \sin\psi$, $y = \rho\cos\psi\sin\phi$, $x = \rho\cos\psi\cos\phi$, e si troverà $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2\left(d\psi^2 + \cos\psi^2 d\phi^2\right)$, espressione che si potrebbe anche trovare direttamente con la Geometria. Differenziando quindi con δ, e cambiando δd in $d\delta$, si avrà

$$\begin{aligned} ds\delta ds &= d\rho d\delta\rho + \rho\left(d\psi^2 + \cos\psi^2 d\phi^2\right)\delta\rho + \rho^2 d\psi d\delta\psi \\ &\quad - \sin\psi\cos\psi d\phi^2\delta\psi + \cos\psi^2 d\phi d\delta\phi \end{aligned}$$

da cui dividendo per $dt = \frac{ds}{u}$ e integrando, si avrà

$$\begin{aligned} \int u\delta ds &= \int \frac{d\rho d\delta\rho + \rho\left(d\psi^2 + \cos\psi^2 d\phi^2\right)\delta\rho}{dt} \\ &+ \int \frac{\rho^2\left(d\psi d\delta\psi - \sin\psi\cos\psi d\phi^2\delta\psi + \cos\psi^2 d\phi d\delta\phi\right)}{dt} \end{aligned}$$

Si farà scomparire da sotto il segno di $\int$ i doppi simboli $d\delta$, con integrazioni per parti, e si elimineranno dapprima i termini contenenti variazioni fuori dal segno di $\int$, poiché queste variazioni dovendo allora riferirsi alle estremità dell'integrale, diverranno nulle con l'ipotesi che i primi e gli ultimi punti delle curve descritte dai corpi siano dati e invariabili. Si avrà così questa trasformata

$$\begin{aligned} \int u\delta ds &= -\int \left[\left(d.\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{d\psi^2 + \cos\psi^2 d\phi^2}{dt}\right)\delta\rho\right. \\ &+ \left.\left(\frac{\rho^2\sin\psi\cos\psi d\phi^2}{dt} + d.\frac{\rho^2 d\psi}{dt}\right)\delta\psi + d.\frac{\cos\psi^2 d\phi}{dt}\delta\rho\right] \end{aligned}$$

di conseguenza l'equazione di *massimo* o *minimo* sarà

$$\begin{gathered} -\int \left[dtS\left(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc\right)m\right. \\ +S\left(d.\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{d\psi^2 + \cos\psi^2 d\phi^2}{dt}\delta\rho\right) + \\ \left.\left(\frac{\rho^2\sin\psi\cos\psi d\phi^2}{dt} + d.\frac{\rho^2 d\psi}{dt}\right)\delta\psi + d.\frac{\cos\psi^2 d\phi}{dt}\delta\rho\right] m = 0 \end{gathered}$$

Uguagliando a zero la quantità che è sotto il segno di $\int$, si avrà un'equazione indefinita, analoga a quella dell'art. precedente, ma che invece delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$, conterrà le $\delta\rho, \delta\phi, \delta\psi$; se ne ricaveranno le equazioni necessarie alla soluzione del problema, riducendo dapprima tutte le variazioni al più piccolo numero possibile, facendo poi equazioni separate dei termini contenenti ognuna delle restanti variazioni.

Impiegando altre indeterminate, si avranno formule diverse; e ci si assicurerà di avere sempre in ogni caso le formule più semplici che la natura delle indeterminate può comportare. Si veda il secondo volume delle Memorie dell'Accademia di Torino.

2.4 Metodo più semplice per giungere alle equazioni che determinano il moto di un sistema qualsiasi di corpi animato da forze acceleratrici qualsiasi.

1. La formula generale alla quale abbiamo ridotto nella seconda sezione, tutta la teoria della Dinamica, non ha bisogno di essere sviluppata, per dare le equazioni necessarie alla soluzione di qualche problema di questa scienza; e questo sviluppo, che è solo questione di calcolo, può ancora essere semplificato tramite le modalità che esporremo in questa sezione.

Siccome tutte consiste nel ridurre le differenze variabili che entrano nella formula in questione al minor numero possibile per mezzo delle equazione di condizione date dalla natura di ogni problema; una delle principali operazioni consiste nel sostituire a queste variabili funzioni di altre variabili. Questo scopo è sempre facile da raggiungere con i metodi ordinari; ma presentiamo un modo particolare di soddisfarlo relativamente alla formula proposta e che ha il vantaggio di condurre sempre direttamente alla trasformata più semplice.

2. questa formula è composta di due parti differenti che si bisogna considerare separatamente.

La prima contiene i termini

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)m$$

che proviene unicamente dalle forze risultanti dall'inerzia dei corpi.

La seconda è composta dai termini

$$S\left(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+ecc\right)m$$

dovuta alle forze acceleratrici P, Q, R, ecc, che sono supposte agire effettivamente su ogni corpo, lungo le direzioni p, q, r, ecc e che tendono a ridurre queste direzioni.

Indicherò per maggiore semplicità la prima parte con Γ e la seconda con Δ, di modo che $\Gamma+\Delta=0$ sarà la formula generale del moto (art. 7, sez. 2).

3. Consideriamo dapprima la quantità $d^2x\delta x+d^2y\delta y+d^2z\delta z$, è chiaro che se si aggiunge a questa $dxd\delta x+dyd\delta y+dzd\delta z$, la somma sarà integrabile e avrà come integrale $dx\delta x+dy\delta y+dz\delta z$. Da ciò segue che si ha

$$d^2x\delta x+d^2y\delta y+d^2z\delta z=d.\left(dx\delta dx+dy\delta dy+dz\delta dz\right)-dxd\delta x+dyd\delta y+dzd\delta z$$

Siccome abbiamo già evidenziato in precedenza che il doppio simbolo $d\delta$ è equivalente a δd (sez. precedente, art. 12); di modo che la quantità $dxd\delta x+dyd\delta y+dzd\delta z$ può essere ridotta alla forma $dx\delta dx+dy\delta dy+dz\delta dz$, cioè, a $\frac{1}{2}\delta.\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$. Si avrà così questa riduzione

$$d^2x\delta x+d^2y\delta y+d^2z\delta z=d.\left(dx\delta x+dy\delta y+dz\delta z\right)-\frac{1}{2}\delta.\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$$

dalla quale si vede che per calcolare la quantità proposta $d^2x\delta x+d^2y\delta y+d^2z\delta z$, basta calcolare quelle due che contengono solo differenze prime, $dx\delta x+dy\delta y+dz\delta z$, $dx^2+dy^2+dz^2$ e differenziare poi l'una per d e l'altra per δ.

4. Supponiamo quindi che si sostituisca alle variabili x, y, z, funzioni date di altre variabili ξ, ψ, ϕ, ecc; differenziando queste funzioni si avranno espressioni del tipo $dx=Ad\xi+Bd\psi+Cd\phi+ecc$, $dy=A'd\xi+B'd\psi+C'd\phi+ecc$, $dz=A"d\xi+B"d\psi+C"d\phi+ecc$, nelle quali $A, A', A", B, B', B"$, ecc, saranno funzioni note delle stesse variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, e i valori di $\delta x, \delta y, \delta z$ assumeranno questa forma

$$Fd\xi\delta\xi+G\left(d\xi\delta\psi+d\psi\delta\xi\right)+Hd\psi\delta\psi+I\left(d\xi\delta\phi+d\phi\delta\xi\right)+ecc$$

dove F, G, H, I, ecc saranno funzioni finite di ξ, ψ, ϕ, ecc.

Cambiando quindi δ in d, si avrà anche il valore di $dx^2+dy^2+dz^2$, il quale sarà

$$Fd\xi^2+2Gd\xi d\psi+Hd\psi^2+2Id\xi d\phi+ecc$$

Se si differenzia rispetto a d la prima di queste due quantità, si avrà il differenziale

$$\begin{gathered}d.\left(Fd\xi\right)\delta\xi+Fd\xi d\delta\xi+d.\left(Gd\xi\right)\delta\psi+\\+d.\left(Gd\psi\right)\delta\xi+Gd\xi d\delta\psi+Gd\psi d\delta\xi+\\+d.\left(Hd\psi\right)\delta\psi+Hd\psi d\delta\psi+ecc\end{gathered}$$

differenziando poi la seconda rispetto a δ, si avrà

$$\begin{gathered}\delta Fd\xi^2+2Fd\xi\delta d\xi+2\delta Gd\xi d\psi+2Gd\psi\delta d\xi+\\+2Gd\xi\delta d\psi+\delta Hd\psi^2+2Hd\psi\delta d\psi+ecc\end{gathered}$$

Se quindi si sottrae la metà di quest'ultimo differenziale al primo, e si osserva che $d\delta$ e δd sono la stessa cosa, si avrà

$$\begin{gathered}d.\left(Fd\xi\right)\delta\xi-\tfrac{1}{2}\delta Fd\xi^2+d.\left(Gd\xi\right)\delta\psi+d.\left(Gd\psi\right)\delta\xi+\\-\tfrac{1}{2}\delta Gd\xi d\psi+d.\left(Hd\psi\right)\delta\psi-\tfrac{1}{2}\delta Hd\psi^2+ecc\end{gathered}$$

per il valore della quantità cercata $d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z$.

È chiaro che questo valore può essere ridotto immediatamente all'ultimo differenziale, dividendo tutti i termini per 2 e cambiando il segno di quelli che non contengono il doppio simbolo δd e cancellando nelle altre la d dopo la δ, per applicarlo alle quantità che moltiplicano le doppie differenze contenenti δd. Così il termine $\delta F d\xi^2$ dà $-\frac{1}{2}\delta F d\xi^2$, il termine $2Fd\xi\delta d\xi$ darà $d.(Fd\xi)\,\delta\xi$, il termine $2\delta G d\xi d\psi$ darà $-\delta G d\xi d\psi$, il termine $2Gd\psi\delta d\xi$ darà $d.(Gd\psi)\,\delta\xi$ e così per gli altri.

5. Segue che se si indica con α la funzione di ξ, ψ, ϕ, e di $d\xi, d\psi, d\phi$, ecc nella quale si trasforma la quantità $\frac{1}{2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$ con la sostituzione dei valori di x, y, z in ξ, ψ, ϕ, ecc, si avrà in generale questa trasformata

$$\begin{aligned} d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z = \left(-\tfrac{d\alpha}{d\xi} + d.\tfrac{d\alpha}{\delta d\xi}\right) d\xi + \left(-\tfrac{d\alpha}{d\psi} + d.\tfrac{d\alpha}{\delta d\psi\xi}\right) d\psi + \\ + \left(-\tfrac{d\alpha}{d\phi} + d.\tfrac{d\alpha}{\delta d\phi}\right) d\phi + ecc \end{aligned}$$

e indicando, secondo l'uso, con $\frac{\delta\alpha}{\delta\xi}$ il coefficiente di $\delta\xi$ nella differenza $\delta\alpha$, con $\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}$ il coefficiente di $\delta d\xi$ nella stessa differenza; e così per gli altri.

6. Quanto abbiamo trovato in modo particolare, avrebbe potuto esserlo più semplicemente e più generalmente con i principi del metodo delle variazioni.

Sia infatti α una funzione qualsiasi di x, y, z, ecc, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, ecc, la quale diviene una funzione di ξ, ψ, ϕ, ecc, $d\xi, d\psi, d\phi$, ecc, $d^2\xi, d^2\psi, d^2\phi$, ecc, con la sostituzione dei valori di x, y, z, ecc, espressi in ξ, ψ, ϕ, ecc; differenziando rispetto a δ, si avrà questa equazione identica,

$$\begin{array}{rcc} \delta\alpha & = & \frac{\delta\alpha}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\alpha}{\delta dx}\delta dx + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2x}\delta d^2x + ecc + \\ & & \frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\alpha}{\delta dy}\delta dy + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2y}\delta d^2y + ecc + \\ & & \frac{\delta\alpha}{\delta zx}\delta z + \frac{\delta\alpha}{\delta dz}\delta dz + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2z}\delta d^2z + ecc + \\ & = & \frac{\delta\alpha}{\delta\xi}\delta\xi + \frac{\delta\alpha}{\delta\psi}\delta\psi + \frac{\delta\alpha}{\delta\phi}\delta\phi + ecc + \\ & & \frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}\delta d\xi + \frac{\delta\alpha}{\delta d\psi}\delta d\psi + \frac{\delta\alpha}{\delta d\phi}\delta d\phi + ecc + \\ & & \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\xi}\delta d^2\xi + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\psi}\delta d^2\psi + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\phi}\delta d^2\phi + ecc \end{array}$$

Cambiando i doppi simboli δd, δd^2, ecc, nei loro equivalenti $d\delta, d^2\delta$, ecc e integrando rispetto a d e facendo scomparire con integrazioni per parti tutti i doppi simboli $d\delta, d^2\delta$, sotto il segno di integrale $\int$ che si riferiscono al simbolo di integrale d; si avrà un'equazione della forma

$$\int (A\delta x + B\delta y + C\delta z + ecc) + Z = \int (A'\delta\xi + B'\delta\psi + C'\delta\phi + ecc) + Z'$$

nella quale

$$\begin{array}{rcl} A & = & \frac{\delta\alpha}{\delta x} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta dx} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2x} - ecc \\ B & = & \frac{\delta\alpha}{\delta y} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta dy} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2y} - ecc \\ C & = & \frac{\delta\alpha}{\delta z} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta dz} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2z} - ecc \\ A' & = & \frac{\delta\alpha}{\delta\xi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\xi} - ecc \\ & & \frac{\delta\alpha}{\delta\psi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\psi} - ecc \\ & & \frac{\delta\alpha}{\delta\phi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\phi} + d^2.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\phi} - ecc \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Z & = & \left(\frac{\delta\alpha}{\delta dx} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2x} + ecc\right)\delta x + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2x} d\delta x + ecc \\ & + & \left(\frac{\delta\alpha}{\delta dy} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2y} + ecc\right)\delta y + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2y} d\delta y + ecc \\ & & \left(\frac{\delta\alpha}{\delta dz} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2z} + ecc\right)\delta z + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2z} d\delta z + ecc \\ Z' & = & \left(\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\xi} + ecc\right)\delta\xi + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\xi} d\delta\xi + ecc \\ & + & \left(\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\psi} + ecc\right)\delta\psi + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\psi} d\delta\psi + ecc \\ & & \left(\frac{\delta\alpha}{\delta d\phi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d^2\phi} + ecc\right)\delta\phi + \frac{\delta\alpha}{\delta d^2\phi} d\delta\phi + ecc \end{array}$$

Differenziando nuovamente e trasponendo, si avrà l'equazione

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z + ecc - A'\delta\xi - B'\delta\psi - C'\delta\phi - ecc = dZ' - dZ$$

la quale deve essere identica e valere qualunque siano le variazioni o differenze indicate con la lettera δ.

Poiché il secondo membro di questa equazione è un differenziale esatto rispetto a d, bisognerà che anche il primo membro lo sia rispetto alla stessa lettera e indipendentemente dalla δ; questo non è possibile, perché i termini di questo primo membro contengono semplicemente le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$, ecc, $\delta\xi, \delta\psi, \delta\phi$, ecc, ma non i differenziali di queste variazioni.

Da ciò segue che affinché l'equazione possa sussistere, servirà necessariamente che i due membri siano entrambi nulli; e ciò darà queste due equazioni identiche

$$\begin{array}{rcl} A\delta x + B\delta y + C\delta z + ecc & = & A'\delta\xi + B'\delta\psi + C'\delta\phi + ecc \\ dZ & = & dZ' \end{array}$$

le quali possono essere utili nelle diverse occasioni.

Sia, per esempio, $\alpha = \frac{1}{2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$, si avrà $\frac{\delta\alpha}{\delta x} = 0$, $\frac{\delta\alpha}{\delta dx} = dx$, $\frac{\delta\alpha}{\delta d^2x} = 0$, ecc, e così per altre quantità simili; per cui

$$A = -d^2x \quad B = -d^2y \quad C = -d^2z$$

e siccome α contiene solo differenze del primo ordine, si avrà semplicemente $A' = \frac{\delta\alpha}{\delta\xi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}$, $B' = \frac{\delta\alpha}{\delta\psi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi}$, $C' = \frac{\delta\alpha}{\delta\phi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\phi}$, ecc. Si avrà, quindi, l'equazione identica

$$-d^2x\delta x - -d^2y\delta y - -d^2z\delta z =$$
$$\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\xi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\xi}\right)\delta\xi + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\psi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\psi}\right)\delta\psi + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\phi} - d.\frac{\delta\alpha}{\delta d\phi}\right)\delta\phi + ecc$$

che è in accordo con quella dell'art. 5.

7. Da ciò risulta, che per avere il valore della quantità Γ (art. 2) in funzione di ξ, ψ, ϕ, ecc, basterà cercare il valore della quantità $S\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}\right)m$ in funzione di ξ, ψ, ϕ, ecc e dei loro differenziali; chiamando T questa funzione, si avrà all'istante

$$\Gamma = \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta\xi}\right)\delta\xi + \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta\psi}\right)\delta\psi + \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\phi} - \frac{\delta T}{\delta\phi}\right)\delta\phi + ecc$$

E questa trasformazione varrà anche quando tra le nuove variabili se troverà il tempo t, purché lo si consideri come costante, cioè, che valga $\delta t = 0$.

Del resto, è bene notare che se l'espressione di T racchiude un termine dA, che sia il differenziale totale di una funzione A nella quale una delle variabili come ξ entri solo in forma finita, questo termine non darà nulla nel valore di Γ rispetto a questa variabile. Ponendo $T = dA = \frac{dA}{d\xi}d\xi + \frac{dA}{d\psi}d\psi + ecc$, si ha

$$\frac{\delta T}{\delta d\xi} = \frac{dA}{d\xi} \qquad \frac{\delta T}{\delta\xi} = \frac{\delta.\frac{dA}{d\xi}}{d\xi}d\xi + \frac{\delta.\frac{dA}{d\psi}}{d\xi}d\psi + ecc$$
$$= \frac{d^2A}{d\xi^2}d\xi + \frac{d^2A}{d\xi d\psi} + ecc = d.\frac{dA}{d\xi}$$

Pertanto $d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta\xi}$ coefficiente di $d\xi$ diverrà $= d.\frac{dA}{d\xi} - d.\frac{dA}{d\xi} = 0$.

Ne segue che se l'espressione di T contenesse un termine della forma BdA, essendo A funzione di ξ, ψ, ecc, senza $d\xi$ e B una funzione qualsiasi senza ξ, questo termine darebbe semplicemente nel valore di Γ, rispetto alla variazione di ξ il termine $dB\frac{\delta A}{\delta\xi}$. Assegnando al termine BdA la forma $d.(BA) - AdB$, si vede dapprima che il termine $d.(BA)$ non darà nulla rispetto alla variazione di ξ, poiché AB contiene ξ senza $d\xi$; siccome poi dB non contiene né ξ né $d\xi$, e che A contiene ξ senza $d\xi$, si vede che ponendo $T = -AdB$, si avrà $\frac{\delta t}{\delta d\xi} = 0$ e $\frac{\delta T}{\delta\xi} = -\frac{dA}{d\xi}dB$; di modo che il coefficiente di $\delta\xi$ in Γ si ridurrà a $\frac{dA}{d\xi}dB$.

8. Per quanto riguarda la quantità Δ (art. 2), essa è sempre sempre facile da ridurre in funzione di ξ, ψ, ϕ, ecc, poiché si tratta solo di ridurre separatamente le espressioni delle distanza p, q, r, ecc, e delle forze P, Q, R, ecc. Ma questa operazione diviene ancora più facile, quando le forze sono tali che la somma dei momenti, cioè la quantità $Pdp + Qdq + Rdr + ecc$, è integrabile, ciò che, come già osservato, è propriamente il caso in questine, (art. 10, sez. precedente).

Supponendo, come nel punto citato,

$$d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + ecc$$

si avrà Π espresso da una funzione finita di p, q, r, ecc, di conseguenza si avrà anche $\delta\Pi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc$; quindi $\Delta = S\delta\Pi m = \delta.S\Pi m$, poiché il simbolo S è indipendente dal simbolo δ.

Vi sarà da cercare solo il valore della quantità $S\Pi m$ in funzione di ξ, ψ, ϕ, ecc; e ciò richiede solo la sostituzione dei valori di x, y, z, in ξ, ψ, ϕ, ecc, nelle espressioni di p, q, ecc, (art. 8, sez. 2); e questo valore di $S\Pi m$ essendo chiamato V, si avrà immediatamente;

$$\Delta = \frac{\delta V}{\delta\xi}\delta\xi + \frac{\delta V}{\delta\psi}\delta\psi + \frac{\delta V}{\delta\phi}\delta\phi, ecc$$

9. In questo modo la formula generale del moto $\Gamma + \Delta = 0$ (art. 2) sarà trasformata in questa

$$\Xi\delta\xi + \Psi\delta\psi + \Phi\delta\phi + ecc = 0$$

nella quale si avrà

$$\begin{array}{rcl} \Xi & = & d.\frac{\delta T}{\delta s\xi} - \frac{\delta T}{\delta\xi} + \frac{\delta V}{\delta\xi} \\ \Psi & = & d.\frac{\delta T}{\delta s\psi} - \frac{\delta T}{\delta\psi} + \frac{\delta V}{\delta\psi} \\ \Phi & = & d.\frac{\delta T}{\delta s\phi} - \frac{\delta T}{\delta\phi} + \frac{\delta V}{\delta\phi} \end{array}$$

supponendo

$$T = S\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}\right)m \qquad V = S\Pi m$$
$$d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + ecc$$

Se pertanto nella scelta delle nuove variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, si considerano le equazioni di condizione date dalla natura del sistema proposto, di modo che queste variabili siano ora del tutto indipendenti le une dalle altre, e che di conseguenza le loro variazioni $\delta\xi, \delta\psi, \delta\phi$, ecc, rimangano assolutamente indeterminate, si avranno le equazioni particolari $\Xi = 0$, $\Psi = 0$, $\Phi = 0$, ecc, le quali serviranno a determinare il moto del sistema; poiché queste equazioni sono nello stesso numero delle variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, dalle quali dipende la posizione del sistema ad ogni istante.

Ma sebbene si possa sempre riportare la questione a questa condizione, poiché basta eliminare dalle equazioni di condizione tante variabili quante possibili, e di prendere poi per ξ, ψ, ϕ, ecc, le variabili rimanenti; vi può tuttavia essere il caso in cui questa strada sia troppo faticosa, e dove sia conveniente, per non complicare troppo il calcolo, conservare un maggior numero di variabili. Allora le equazioni di condizione che non saranno ancora soddisfatte, dovranno essere impiegate per eliminare nella formula generale qualcuna delle variazioni $\delta\xi, \delta\psi, ecc$; ma invece dell'attuale eliminazione, sarà più semplice impiegare il metodo esposto nella quarta sezione del primo Capitolo.

10. Siano quindi come nell'art. 3 della sezione citata, $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ecc, le equazioni, ridotte in funzione di ξ, ψ, ϕ, ecc; di modo che L, M, N, ecc siano funzioni date di queste variabili. Si aggiungerà al primo membro della formula generale (art. precedente) la quantità $\lambda dL + \mu dM + \nu dN + ecc$ nella quale λ, μ, ν, ecc sono coefficienti indeterminati; e si potrà considerare allora le variazioni $\delta\xi, \delta\psi, \delta\phi$, ecc come indipendenti e arbitrarie.

Si avrà così l'equazione generale

$$\Xi\delta\xi + \Psi\delta\psi + \Phi\delta\phi + ecc + \lambda\delta L + \mu\delta M + \nu\delta N + ecc = 0$$

la quale, dovendo essere verificata indipendentemente dalle variazioni $\delta\xi, \delta\psi, \delta\phi$, ecc, darà queste equazioni particolari

$$\begin{aligned}
\Xi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\xi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\xi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\xi} + ecc &= 0\\
\Psi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\psi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\psi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\psi} + ecc &= 0\\
\Phi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\phi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\phi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\phi} + ecc &= 0
\end{aligned}$$

Eliminando le incognite λ, μ, ν, ecc, rimarranno le equazioni necessarie per la soluzione del problema.

Si possono fare d'altronde sui diversi termini $\lambda\delta L, \mu\delta M$, ecc, valutazioni analoghe a quelle dell'art. 7 della sezione già citata e dedurne conclusioni simili.

Del resto nulla impedisce che le equazioni di condizione $L = 0$, $M = 0$, ecc, non possano contenere anche la variabile t che rappresenta il tempo; soltanto basterà considerarla come costante nella differenziazione secondo δ, come giù indicato prima.

11. Impiegando questo metodo, si può conservare se si vuole le variabili iniziali x, y, z purché si considerino tutte le equazioni di condizione date dalle caratteristiche del sistema tra queste variabili. Basterà allora aggiungere al primo membro della formula generale dell'art. 7 della seconda sezione, la quantità $\lambda\delta L + \mu\delta M + \nu\delta N + ecc$ e verificare poi l'equazione rispetto ad ognuna delle variazioni relative ai diversi corpi del sistema.

In questo modo si avrà per ogni corpo m tre equazioni di questo tipo (art. 8, sez. citata)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)m + \lambda\frac{\delta L}{\delta x} + \mu\frac{\delta M}{\delta x} + \nu\frac{\delta N}{\delta x} + ecc &= 0\\
\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)m + \lambda\frac{\delta L}{\delta y} + \mu\frac{\delta M}{\delta y} + \nu\frac{\delta N}{\delta y} + ecc &= 0\\
\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)m + \lambda\frac{\delta L}{\delta z} + \mu\frac{\delta M}{\delta z} + \nu\frac{\delta N}{\delta z} + ecc &= 0
\end{aligned}$$

di modo che il numero totale delle equazioni sarà triplo di quello dei corpi.

Bisognerà poi eliminare le indeterminate λ, μ, ν, ecc il cui numero è uguale a quello delle equazioni di condizione $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ecc, e ciò ridurre di altrettanto il numero delle equazioni trovate; ma aggiungendo le equazioni stesse di condizione, si avranno di nuovo tante equazioni quante sono le variabili.

12. Questo metodo è soprattutto utile quando il sistema proposto è composto di un'infinità di particelle o elementi il cui raggruppamento forma una massa finita di forma variabile. Si impiegherà allora un'analisi simile a quella che abbiamo sviluppato nella stessa sezione quarta del primo Capitolo (art. 9 e segg.); ma al posto del simbolo d, di cui ci siamo serviti in questo ambito per indicare le differenze delle variabili relative ai diversi elementi del sistema, converrà qui far uso di un nuovo simbolo D per poter conservare l'altro d nell'impiego al quale l'abbiamo già in precedenza destinato.

Vi saranno così tre tipi di differenze indipendenti tra loro; le une indicate con d, e relative al simbolo di integrale $\int$; queste si riferiscono unicamente alle curve descritte da ogni corpo o elemento del sistema; le altre indicate con D e relative al simbolo di integrale S, le quali si riferiscono ai diversi elementi del sistema e alla posizione istantanea di questi elementi tra loro; infine le differenze o variazioni indicate con δ, le quali si riferiscono unicamente al cambiamento arbitrario che si suppone nella posizione del sistema, e scompaiono al termine del calcolo.

13. Sia quindi Dm la massa di ogni elemento del sistema, basterà mettere Dm al posto di m nelle espressioni di Γ e Δ (art. 2) e di conseguenza anche in quelle di T e V (art. 9); poi bisognerà aggiungere al primo membro della formula

generale $\Gamma + \Delta = 0$ i termini dovuti alle diverse equazioni di condizione. Queste equazioni possono essere di due tipi; le une *indeterminate* e appartenenti pure a tutti gli elementi del sistema; le altre *determinate* e relative solo ad alcuni di questi elementi. Siano $L = 0$, $M = 0$, *ecc*, le equazioni di condizione del primo tipo, si avranno le quantità L, M, ecc, espresse da funzioni delle coordinate x, y, z, e dalle loro differenze secondo D, cioè $Dx, Dy, Dz, D^2x, D^2y, ecc$; e siccome vi sono solo tre variabili x, y, z, è chiaro che le equazioni tra queste variabili possono essere al più tre. Prendendo quindi i coefficienti indeterminati λ, μ, ν, ecc, si avranno rispetto a ogni elemento del sistema, i termini $\lambda\delta L + \mu\delta M + ecc$, da aggiungere alla formula generale; quindi la totalità dei termini che basterà aggiungere, sarà rappresentata da $S\left(\lambda\delta L + \mu\delta M + ecc\right)$.

14. Indichiamo ora con $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ecc, le equazioni di condizione *determinate*, le quantità A, B, C saranno pure funzioni delle coordinate e delle loro differenze secondo d, ma solo per punti determinati del sistema. Indicheremo queste coordinate con uno o più tratti, e in particolare segneremo con un tratto tutte le quantità che si riferiscono ai punti dove inizia l'integrale rappresentato dal simbolo S, con due quelle che si riferiscono ai punti dove lo stesso integrale finisce, e con tre o più le quantità relative ad altri punti determinati del sistema.

Così i valori di A, B, C, ecc, saranno dati in funzione di $x', y', z', x", y", z", x'", y'"$,ecc; $Dx', Dy', Dz', Dx", Dy"$, ecc; e i termini da aggiungere alla formula generale in conseguenza delle equazioni di condizione $A = 0$, $B = 0$, ecc, saranno $\alpha\delta A + \beta\delta B + \gamma\delta C + ecc$, e prendendo per α, β, γ, ecc, dei nuovi coefficienti indeterminati.

15. Si avrà quindi per il moto del sistema questa equazione generale,

$$\begin{aligned} 0 = \; & S\left(\tfrac{d^2x}{dt^2}\delta x + \tfrac{d^2y}{dt^2}\delta y + \tfrac{\delta^2 z}{dt^2}\delta z\right) Dm + \\ & + S\left(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ecc\right) Dm + \\ & + S\left(\lambda\delta L + \mu\delta M + ecc\right) + \alpha\delta A + \beta\delta B + \gamma\delta C + ecc \end{aligned}$$

la quale deve valere qualunque siano le differenze o variazioni $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z'$, ecc.

Questa equazione è del tutto analoga a quelle trovate con il metodo delle *variazioni* per la determinazione dei *massimi* e *minimi* delle formule integrali; e basterà trattarle secondo le stesse regole. Si veda quanto già esposto nella sez. 4 del primo Capitolo (art. 16 e segg.).

16. Tutto si riduce ad eliminare da sotto il segno S le doppie differenze contenenti $\delta D, \delta D^2$, ecc.

Sia, per esempio, il termine $S\Omega\delta Dx$, si cambierà dapprima δD in $D\delta$, poi si integrerà per parti relativamente al simbolo D che si riferisce a S, e completando l'integrale, si avrà solo la notazione dell'art. 14, $S\Omega\delta Dx = \Omega"\delta x" - \Omega'\delta x' - S\delta x D\Omega$. Si troverà ancora integrando finché è possibile rispetto a D, e completando,

$$D\Omega\delta D^2 x = \Omega" D\delta x" - D\Omega"\delta x" - \Omega' D\delta x' + D\Omega'\delta x' + S\delta x D^2\Omega$$

e così per le altre.

Con simili riduzioni, si ricaverà quindi l'equazione generale dell'art. precedente a questa forma

$$S\left(\Xi\delta x + \Psi\delta y + \Phi\delta z\right) + \Sigma = 0$$

nella quale Ξ, Ψ, Φ saranno funzioni di x, y, z, Dx, Dy, Dz, D^2x, ecc, così che λ, μ, ecc, $D\lambda, D\mu$, ecc; e dove Σ sarà composta di diversi termini comprendenti ciascuno alcune variazioni $\delta x', \delta y', \delta z', \delta x"$, ecc, o alcune loro differenze $D\delta x', D^2\delta x'$, ecc.

Si eguaglierà allora separatamente a zero ciascuna quantità contenente differenti variazioni, come se queste variazioni fossero tutte indipendenti e arbitrarie. Così si avranno dapprima queste tre equazioni indefinite $\Xi = 0$, $\Psi = 0$, $\Phi = 0$ per tutti gli elementi del sistema; ogni termine della quantità Σ fornirà un'equazione definita e relativa a punti determinati dello stesso sistema. Per mezzo delle diverse equazioni, si elimineranno le indeterminate λ, μ, ecc, α, β, γ, ecc, ed essendo le equazioni risultanti combinate poi con le equazioni di condizione

$$L = 0 \quad M = 0 \quad ecc, \quad A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0, \quad ecc$$

daranno in ogni caso la soluzione completa del problema. Il resto sarà solo una questione di puro calcolo.

2.5 Soluzione di diversi problemi di Dinamica

Abbiamo dato nel primo Capitolo (sez. 4), la soluzione di numerosi problemi sull'equilibrio dei corpi. Niente di più facile che applicare al moto degli stessi corpi le formule trovate per il loro equilibrio; per quanto dimostrato nella seconda sezione (art. 4), basta aggiungere alle forze che sono supposte agire su ogni corpo, le nuove forze acceleratrici $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, dirette lungo le rette x, y, z indicando con t il tempo trascorso e ponendo dt costante.

Nei problemi in cui X, Y, Z indicano forze assolute che muovono i corpi m intesi puntiformi lungo le coordinate x, y, z basterà mettere dappertutto al posto di quelle forze, queste $X + m\frac{d^2x}{dt^2}$, $Y + m\frac{d^2y}{dt^2}$, $Z + m\frac{d^2z}{dt^2}$; e così per tutte le forze che agiscono su ognuno dei corpi del sistema. Ma nei problemi dove si tiene conto della massa dei corpi e dove X, Y, Z esprimono le forze che agiscono su ogni punto della massa finita m, e sono di conseguenza forze acceleratrici, bisognerà mettere semplicemente al posto di X, Y, Z le quantità $X + \frac{d^2x}{dt^2}$, $Y + \frac{d^2y}{dt^2}$, $Z + \frac{d^2z}{dt^2}$; e così a seguire.

In questo modo le equazioni trovate per l'equilibrio, daranno immediatamente quelle del moto, e gli stessi problemi si troveranno risolti sia per la condizione di riposo che per quella di moto. È vero che nel caso del moto, essendo le equazioni differenziali del secondo ordine, richiedono integrazioni relative alle diverse variabili t, x, y, z, x', y', ecc; ma se ne incarica il calcolo integrale; e la Dinamica ha svolto tutto il proprio compito, fornendo le equazioni fondamentali.

Tuttavia, siccome queste equazioni possono avere diverse forme più o meno semplici, e soprattutto più o meno adatte all'integrazione, non è indifferente sotto quale forma esse si presentano; ed è forse uno dei principali vantaggi del nostro metodo, fornire sempre le equazioni di ogni problema nella forma più semplice rispetto alle variabili introdotte, e di mettere in condizione di valutare quali sono le variabili il cui impiego può facilitare di più l'integrazione.

Introduciamo qui per questo motivo alcuni principi generali, dei quali si vedrà in seguito l'applicazione nella soluzione di diversi problemi.

2. È chiaro dalle formule introdotte nella precedente sezione, che i termini differenziali delle equazioni per il moto di un sistema qualsiasi di corpi, derivano unicamente dalla quantità T che esprime la somma di tutte le $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}m$ rispetto ai diversi corpi; ogni variabile finita, come ξ, che entrerà nell'espressione di T dando il termine $-\frac{\delta T}{\delta \xi}$, e ogni variabile differenziale, come $d\xi$, dando il termine $d.\frac{\delta T}{\delta d\xi}$. Da ciò si vede che i termini in questione non potranno contenere altre funzioni delle variabili tranne quelle che si troveranno nella stessa espressione di T; di conseguenza, se impiegando seni e coseni degli angoli, cosa che si applica naturalmente nella soluzione di numerosi problemi, si ottiene che i seni e coseni si eliminano dalla funzione T, ed essa conterrà allora solo i differenziali di questi angoli, e i termini in questione conterranno pure solo questi stessi differenziali. Così si avrà sempre da guadagnare in semplicità nelle equazioni del problema impiegando questo tipo di sostituzioni.

Per esempio, se al posto di due coordinate x, y, si impiega il raggio vettore ρ condotto dal centro delle stesse coordinate, e formante con l'asse x l'angolo ϕ, si avrà $x = \rho\cos\phi$, $y = \sin\phi$, e differenziando $dx = \cos\phi d\rho - \rho\sin\phi d\phi$, $dy = \sin\phi d\rho + \rho\cos\phi d\phi$; pertanto $dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$, espressione molto semplice non contenente né seni, né coseni di ϕ, ma solo il suo differenziale $d\phi$. In questo modo la quantità $dx^2 + dy^2 + dz^2$, si troverà modificata in $\rho^2 d\phi^2 + d\rho^2 + dz^2$.

Si potrebbe ancora sostituire invece di ρ e z, un nuovo raggio vettore r con l'angolo ψ che questo raggio forma con ρ che ne è la proiezione; ciò darebbe $\rho = r\cos\psi$, $z = r\sin\psi$, e di conseguenza $d\rho^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2$; di modo che la quantità $dx^2 + dy^2 + dz^2$ sarà trasformata in $r^2\left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right) + dr^2$. Qui è chiaro che r sarà il raggio condotto dal centro delle coordinate al punto dello spazio dove si trova il corpo m, ψ sarà l'inclinazione di questo raggio sul piano x, y, e ϕ l'angolo della proiezione di questo raggio sullo stesso piano con l'asse delle x; e si avrà $x = r\cos\psi + \cos\phi$, $y = r\cos\psi\sin\phi$, $z = r\sin\psi$.

Si potranno infine impiegare a piacere altre sostituzioni; e quando il sistema è composto di più corpi, li si potrà riferire immediatamente gli uni agli altri con coordinate relative; le circostanze di ogni problema indicheranno sempre quelle che saranno le più adatte. Si potrà pure, dopo aver trovato con una sostituzione, uno o alcune delle equazioni del problema, dedurre le altre da altre sostituzioni; ciò fornirà nuovi mezzi per diversificare queste equazioni, e per trovare le più semplici e le più facili da integrare.

3. Gli altri termini delle equazioni del moto dipendono dalle forze acceleratrici che si suppongono agire sui corpi, e dalle equazioni di condizione che devono valere tra le variabili relative alla posizione dei corpi nello spazio.

Quando le forze P, Q, R, ecc, tendono a centri fissi o a corpi dello stesso sistema, e sono proporzionali a funzioni qualsiasi delle distanze, come in natura, la quantità V che esprime la somma delle quantità $m\int(Pdp + Qdq + Rdr + ecc)$ per tutti i corpi m del sistema, sarà una funzione algebrica delle distanze, e fornirà per ogni variabile ξ di cui si troverà composta, un termine finito del tipo $\frac{\delta V}{\delta \xi}$.

Allo stesso modo le equazioni di condizione $L = 0$, $M = 0$, ecc, daranno per la stessa variabile ξ i termini $\lambda\frac{\delta L}{d\xi}$, $\mu\frac{\delta M}{\delta \xi}$, ecc, e così per le altre. Si modo che basterà aggiungere al valore di V le quantità $\lambda L, \mu M$, ecc; considerando poi λ, μ, ecc, come costanti nelle differenziazioni rispetto a δ.

Se, quindi, alcune delle variabili che entrano nella funzione T, non entrano nella V né nelle L, M, ecc; le equazioni relative a queste variabili conterranno solo termini differenziali, e l'integrazione sarà più semplice, soprattutto se quelle variabili si trovano in T solo nella forma differenziale. È quanto si verifica quando i corpi sono attratti verso il centro e si considereranno le distanze da questi centri e gli angoli descritto attorno ad essi come coordinate.

4. Un'integrazione che si avrà sempre quando le forze sono funzioni delle distanze, e le funzioni T, V, L, M, ecc, non contengono la variabile finita t, è quella che dà il principio della conservazione delle forze vive. Sebbene abbiamo già dimostrato come questo principio deriva dalla nostra formula generale della Dinamica (sez. 3, art. 10), non sarà inutile mostrare che le equazioni particolari dedotte da questa formula, forniscono sempre un'equazione integrabile che è quella della conservazione delle forze vive.

Queste equazioni saranno ciascuna della forma

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi} + \lambda\frac{\delta L}{\delta \xi} + \mu\frac{\delta M}{\delta \xi} + ecc = 0$$

se le si sommano dopo aver moltiplicato per i rispettivi differenziali $d\xi$, ecc, e se si osserva che le quantità T, V, L, M, ecc, sono por ipotesi delle funzioni algebriche delle variabili ξ, ecc, senza t, è chiaro che si avrà l'equazione

$$\left(d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi}\right)d\xi + ecc + dV + \lambda dL + \mu dM + ecc = 0$$

ma $L = 0$, $M = 0$, ecc, essendo le equazioni di condizione, si avrà in genere $dL = 0$, $dM = 0$, ecc; di conseguenza l'equazione precedente si ridurrà a

$$\left(d.\frac{\delta T}{\delta d\xi}-\frac{\delta T}{\delta \xi}\right)d\xi+ecc+dV=0$$

o

$$d\xi d.\frac{\delta T}{\delta d\xi}=d.\left(\frac{\delta T}{\delta d\xi}d\xi\right)-\frac{\delta T}{\delta d\xi}d^2\xi$$

e siccome T è una funzione algebrica delle variabili ξ, ecc, e dei loro differenziali $d\xi$, ecc, senza t, si avrà $dT=\frac{\delta T}{\delta \xi}d\xi+\frac{\delta T}{\delta d\xi}d^2\xi+ecc$; pertanto l'equazione diverrà

$$d.\left(\frac{\delta T}{\delta d\xi}d\xi+ecc\right)-dT+dV=0$$

la quale è evidentemente integrabile e il cui integrale è

$$\frac{\delta T}{\delta d\xi}d\xi+ecc-T+V=cost$$

Poiché $T=S\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}m$, è chiaro che per quante variabili si sostituiscono a x,y,z la funzione risultante sarà necessariamente omogenea e a due dimensioni rispetto alle differenze di queste variabili; pertanto dal teorema noto si avrà $\frac{\delta T}{\delta d\xi}d\xi+ecc=2T$.

L'integrale trovato, quindi, sarà semplicemente $T+V=cost$, il quale contiene il principio di conservazione delle forze vive (sez. 3, art. 10).

Se la quantità V non fosse una funzione algebrica, non si avrebbe $dV=\frac{\delta V}{\delta \xi}d\xi+ecc$; e se le quantità T,L,M, ecc, contenessero pure la variabile t, allora i loro differenziali dT,dL,dM, ecc, conterranno pure i termini $\frac{\delta T}{\delta t}dt$, $\frac{\delta L}{\delta t}dt$, $\frac{\delta M}{\delta t}dt$, ecc; quindi le riduzioni che hanno reso l'equazione integrabile non varrebbero più, né di conseguenza il principio di conservazione delle forze vive.

5. Sebbene il teorema sulle funzioni omogenee che abbiamo utilizzato, sia dimostrato in diverse opere, e lo si possa, di conseguenza, supporre come noto, la dimostrazione è così semplice che non credo di doverla eliminare. Se F è una funzione omogenea di diverse variabili x,y, ecc, e di dimensione n; è chiaro che ponendo ax,ay, ecc, al posto di x,y, ecc, diverrà necessariamente a^nF, qualunque sia la quantità a. Pertanto ponendo $a=1+\alpha$ e considerando α come una quantità infinitamente piccola, l'incremento infinitamente piccolo di F dovuto agli incrementi infinitamente piccoli $\alpha x,\alpha y$, ecc, di x,y, ecc, sarà $n\alpha F$. Ma facendo variare x,y,ecc, di $\alpha x,\alpha y$, si ha in generale per la variazione di F, $\frac{\delta F}{\delta x}\alpha x+\frac{\delta F}{\delta y}\alpha y+ecc$. Eguagliando queste due espressioni dell'incremento di F, e dividendo per α si avrà

$$nF=\frac{\delta F}{\delta x}x+\frac{\delta F}{\delta y}y+ecc$$

6. L'integrale relativo alla *conservazione delle forze vive*, è di grande utilità nella soluzione dei problemi di Meccanica, soprattutto quando la funzione T contiene solo il differenziale di una variabile che non si trova nella funzione V; questo integrale servirà allora ad determinare questa stessa variabile e ad eliminare delle equazioni differenziali.

Riguardo agli integrali che si riferiscono alla *conservazione del moto del centro di gravità e al principio delle aree*, e che abbiamo già incontrato in modo generale nella terza sezione, essi si presenteranno nella soluzione di ogni problema, purché si abbia cura nella scelta delle variabili di separare il moto assoluto del sistema dai moti relativi dei corpi tra loro, così come abbiamo fatto nella sezione citata (art. 15).

Ma questi diversi integrali non bastano per la soluzione completa del problema, se non quando il loro numero è pari a quello delle variabili. In tutti gli altri casi sarà necessario cercare ancora nuovi integrali. Vi è tuttavia un caso che ammette sempre una soluzione completa; è quello in cui il sistema compie solo oscillazioni molto piccole attorno alla sua condizione di equilibrio. Poiché questa soluzione si deduce facilmente dalle nostre formule, inizieremo per presentarla qui, aggiungendo nuovi e importanti commenti.

2.5.1 Soluzione generale del problema delle oscillazione molto piccole di un sistema qualunque di corpi.

7. Siano a,b,c i valori delle coordinate perpendicolari x,y,z di ogni corpo m del sistema proposta nella posizione di equilibrio. Poiché si suppone che il sistema nel suo moto si allontani molto poco dalla sua condizione di equilibrio, si avrà in generale $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$, $z=c+\gamma$, essendo le variabili α,β,γ sempre molto piccole; e basterà, di conseguenza, considerare il primo grado di queste quantità nelle equazioni differenziali del moto. La stessa cosa per le altre quantità analoghe, che si distingueranno per uno, due, ecc, apici rispetto ai diversi corpi m',m'', ecc, dello stesso sistema.

Consideriamo dapprima le equazioni di condizione che devono valere per la natura del sistema, e che si possono rappresentare con $L=0$, $M=0$, ecc; essendo L,M, ecc, funzioni algebriche date di coordinate x,y,z,x',y', ecc. Poiché la posizione di equilibrio è una di quelle che il sistema può avere, ne segue che le stesse equazioni $L=0$, $M=0$, ecc, devono valere, supponendo che x,y,z,x', ecc, divengano a,b,c,a', ecc, da cui è facile concludere che queste equazioni non potranno contenere il tempo t.

Siano ora A, B, ecc, quelle che divengono L, M,ecc, quando x, y, z, x', ecc, diventano a, b, c, a', ecc; è chiaro che sostituendo per x, y, z, x', ecc, i loro valori $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma$, $a'+\alpha'$, ecc, si avrà a causa della piccolezza di $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'$, ecc,

$$\begin{aligned} L &= A + \frac{dA}{da}\alpha + \frac{dA}{db}\beta + \frac{dA}{dc}\gamma + \frac{dA}{da'}\alpha' + ecc \\ M &= B + \frac{dB}{da}\alpha + \frac{dB}{db}\beta + \frac{dB}{dc}\gamma + \frac{dB}{da'}\alpha' + ecc \end{aligned}$$

e così di seguito.

Pertanto 1°, si avrà $A = 0$, $B = 0$, ecc, relativamente all'equilibrio; 2° si avranno le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dA}{da}\alpha + \frac{dA}{db}\beta + \frac{dA}{dc}\gamma + \frac{dA}{da'}\alpha' + ecc &= 0 \\ \frac{dB}{da}\alpha + \frac{dB}{db}\beta + \frac{dB}{dc}\gamma + \frac{dB}{da'}\alpha' + ecc &= 0 \end{aligned}$$

le quali daranno la relazione che deve valere tra le variabili $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'$, ecc.

Trascurando dapprima le quantità molto piccole del secondo ordine e degli ordini superiori, si avranno equazioni lineari tramite le quali si determineranno i valori di alcune di queste variabili tramite le altre; poi con questi primi valori se ne troverà di più esatti, tenendo conto delle seconde potenze, e delle potenze maggiori. Si avranno così i valori di alcune delle variabili $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'$, ecc. espressi per mezzo di funzioni in serie di altre variabili; e le variabili restanti saranno allora assolutamente indipendenti tra loro.

Del resto, si potrà spesso, considerando le condizioni del problema, ridurre le coordinate immediatamente con delle sostituzioni, in funzioni razionali e intere di altre variabili indipendenti e molto piccole, il cui valore sia nullo in condizioni di equilibrio.

Supporremo in generale che si abbia

$$\begin{aligned} x &= a + a_1\xi + a_2\psi + a_3\phi + ecc + a_1'\xi^2 + ecc \\ y &= b + b_1\xi + b_2\psi + b_3\phi + ecc + b_1'\xi^2 + ecc \\ z &= c + c_1\xi + c_2\psi + c_3\phi + ecc + c'\xi^2 + ecc \end{aligned}$$

e così altre coordinate x', y', ecc, le quantità a, b, c, a_1, b_1, c_1 sono costanti e le quantità ξ, ψ, ϕ, ecc sono variabili, molto piccole e nulle all'equilibrio.

8. Si tratterà quindi soltanto di operare queste sostituzioni nei valori di T e v (artt. 2 e 3); e basterà tener conto dei secondi gradi per avere equazioni differenziali lineari. Ed è chiaro che il valore di T avrà la forma

$$T = \frac{(1)\,d\xi^2 + (2)\,d\psi^2 + (3)\,d\phi^2 + ecc}{2dt^2} + \frac{(1,2)\,d\xi d\psi + (1,3)\,d\xi d\phi + (2,3)\,d\psi d\phi + ecc}{dt^2}$$

supponendo per abbreviare

$$\begin{aligned} (1) &= S\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right) m \\ (2) &= S\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right) m \\ (3) &= S\left(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2\right) m \\ ecc & \\ (1,2) &= S\left(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2\right) m \\ (1,3) &= S\left(a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3\right) m \\ (2,3) &= S\left(a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3\right) m \\ ecc & \end{aligned}$$

dove il simbolo S denota integrazioni o sommatorie relative a tutti i diversi corpi m del sistema, e indipendenti dalle variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, così come dal tempo t.

Se si indica poi con F la funzione algebrica $\int (Pdp + Qdq + Rdr + ecc)$, ponendo a, b, c al posto di x, y, z, è chiaro che il valore generale di $\int (Pdp + Qdq + Rdr + ecc)$ sarà così rappresentato

$$\begin{gathered} F + \tfrac{dF}{da}\left(a_1\xi + a_2\psi + a_3\phi + ecc\right) + \tfrac{dF}{db}\left(b_1\xi + b_2\psi + b_3\phi + ecc\right) \\ + \tfrac{dF}{dc}\left(c_1\xi + c_2\psi + c_3\phi + ecc\right) + \tfrac{d^2F}{2da^2}\left(a_1\xi + a_2\psi + a_3\phi + ecc\right)^2 \\ + \tfrac{d^2F}{dadb}\left(a_1\xi + a_2\psi + a_3\phi + ecc\right)\left(b_1\xi + b_2\psi + b_3\phi + ecc\right) \\ + \tfrac{d^2F}{2db^2}\left(b_1\xi + b_2\psi + b_3\phi + ecc\right)^2 + ecc \end{gathered}$$

dove basta considerare i secondi gradi di ξ, ψ, ϕ, ecc.

Moltiplicando, pertanto, questa funzione per m e integrando con il segno S, si avrà in generale

$$\begin{aligned} V &= H + H_1\xi + H_2\psi + H_3\phi + ecc + \frac{[1]\,\xi^2 + [2]\,\psi^2 + [3]\,\phi^2 + ecc}{2} \\ &\quad + [1,2]\,\xi\psi + [1,3]\,\xi\phi + [2,3]\,\psi\phi + ecc \end{aligned}$$

supponendo

$$\begin{aligned} H &= SFm \\ H_1 &= S\left(\frac{dF}{da}a_1 + \frac{dF}{db}b_1 + \frac{dF}{dc}c_1\right)m \\ H_2 &= S\left(\frac{dF}{da}a_2 + \frac{dF}{db}b_2 + \frac{dF}{dc}c_2\right)m \\ H_3 &= S\left(\frac{dF}{da}a_3 + \frac{dF}{db}b_3 + \frac{dF}{dc}c_3\right)m \\ ecc & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1] &= S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_1^2 + \frac{d^2F}{db^2}b_1^2 + \frac{d^2F}{dc^2}c_1^2\right. \\ &\quad \left. +2\frac{d^2F}{dadb}a_1b_1 + 2\frac{d^2F}{dadc}a_1c_1 + 2\frac{d^2F}{dbdc}b_1c_1\right)m \\ [2] &= S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_2^2 + \frac{d^2F}{db^2}b_2^2 + \frac{d^2F}{dc^2}c_2^2\right. \\ &\quad \left. +2\frac{d^2F}{dadb}a_2b_2 + 2\frac{d^2F}{dadc}a_2c_2 + 2\frac{d^2F}{dbdc}b_2c_2\right)m \\ [3] &= S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_3^2 + \frac{d^2F}{db^2}b_3^2 + \frac{d^2F}{dc^2}c_3^2\right. \\ &\quad \left. +2\frac{d^2F}{dadb}a_3b_3 + 2\frac{d^2F}{dadc}a_3c_3 + 2\frac{d^2F}{dbdc}b_3c_3\right)m \\ ecc & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1,2] &= S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_1a_2 + \frac{d^2F}{db^2}b_1b_2 + \frac{d^2F}{dc^2}c_1c_2\right. \\ &\quad \left. +\frac{d^2F}{dadb}(a_1b_2 + a_2b_1) + \frac{d^2F}{dadc}(a_1c_2 + a_2c_1) + \frac{d^2F}{dbdc}(b_1c_2 + b_2c_1)\right) \\ [1,3] &= S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_1a_3 + \frac{d^2F}{db^2}b_1b_3 + \frac{d^2F}{dc^2}c_1c_3\right. \\ &\quad +\frac{d^2F}{dadb}(a_1b_3 + a_3b_1) + \frac{d^2F}{dadc}(a_1c_3 + a_3c_1) + \frac{d^2F}{dbdc}(b_1c_3 + b_3c_1) \\ [2,3] &= S\left(\frac{d^2F}{da^2}a_2a_3 + \frac{d^2F}{db^2}b_2b_3 + \frac{d^2F}{dc^2}c_2c_3\right. \\ &\quad +\frac{d^2F}{dadb}(a_2b_3 + a_3b_2) + \frac{d^2F}{dadc}(a_2c_3 + a_3c_2) + \frac{d^2F}{dbdc}(b_2c_3 + b_3c_2) \end{aligned}$$

Avendo così i valori di T e V espressi in funzione delle variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, indipendenti tra loro, non vi saranno più equazioni di condizione da impiegare, e siccome la quantità T contiene solo i differenziali delle variabili, si avranno per il moto del sistema le seguenti equazioni

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi} = 0 \quad d.\tfrac{\delta T}{\delta d\psi} + \tfrac{\delta V}{\delta \psi} = 0 \quad d.\frac{\delta T}{\delta d\phi} + \frac{\delta V}{\delta \phi} = 0,\ ecc$$

il cui numero sarà, come si vede, uguale a quello delle variabili.

Queste equazioni devono valere anche nella condizione di equilibrio, poiché il sistema trovandovisi una volta vi resterà sempre da solo; nell'equilibrio si ha costantemente $x = a$, $y = b$, $z = c$, $x' = a'$, ecc, per ipotesi; quindi $\xi = 0$, $\psi = 0$, $\phi = 0$, ecc, così che $\frac{d\xi}{dt} = 0$, $\frac{d\psi}{dt} = 0$, ecc, e $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$, ecc. Pertanto, i termini $d.\frac{\delta T}{\delta d\xi}$, $d.\frac{\delta T}{\delta d\psi}$, ecc, saranno nulli, e i termini $\frac{\delta V}{\delta \xi}$, $\frac{\delta V}{\delta \psi}$, $\frac{\delta V}{\delta \phi}$, ecc, si ridurranno a H_1, H_2, H_3, ecc. Di conseguenza si avrà $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$, ecc; queste sono le condizioni necessarie affinché a, b, c, a', ecc, siano i valori di x, y, z, x', ecc, per la condizione di equilibrio, come si è supposto.

Infatti, è chiaro che $dV = S\,(Pdp + Qdq + Rdr + ecc)\, m$ esprime la somma dei momenti di tutte le forze Pm, Qm, Rm, ecc. applicate a tutti i corpi m del sistema e che devono eliminarsi reciprocamente nella condizione di equilibrio; pertanto dalla formula generale data nella seconda sezione del primo Capitolo, basterà avere $dV = 0$, rispetto ad ognuna delle variabili indipendenti; di conseguenza $\frac{\delta V}{\delta \xi} = 0$, $\frac{\delta V}{\delta \psi} = 0$, $\frac{\delta V}{\delta \phi} = 0$, ecc, saranno le condizioni dell'equilibrio, il quale essendo supposto corrispondere a $\xi = 0$, $\psi = 0$, $\phi = 0$, ecc, si avrà $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$, ecc. Di modo che i primi gradi delle variabili ξ, ψ, ϕ,ecc, nell'espressione di V si elimineranno sempre.

Sostituendo quindi nelle equazioni generali i valori di T e V, e ponendo H_1, H_2, H_3,ecc, nulli, si avrà per il moto del sistema

$$\begin{aligned} 0 &= (1)\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + (1,2)\,\frac{d^2\psi}{dt^2} + (1,3)\,\frac{d^2\phi}{dt^2} + ecc + [1]\,\xi + [1,2]\,\psi + [1,3]\,\phi + ecc \\ 0 &= (2)\,\frac{d^2\psi}{dt^2} + (1,2)\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\,\frac{d^2\phi}{dt^2} + ecc + [2]\,\psi + [1,2]\,\xi + [2,3]\,\phi + ecc \\ 0 &= (3)\,\frac{d^2\phi}{dt^2} + (1,3)\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\,\frac{d^2\psi}{dt^2} + ecc + [3]\,\xi + [1,3]\,\psi + [2,3]\,\phi + ecc \\ & \quad ecc \end{aligned}$$

equazioni che essendo lineari con coefficienti costanti, possono essere integrate rigorosamente e generalmente con i metodi noti.

10. Si può supporre che le variabili in questi tipi di equazioni abbiano tra loro rapporti costanti; cioè, che si abbia $\psi = f\xi$, $\phi = g\xi$, ecc; con queste sostituzioni diverranno

$$\begin{aligned} ((1) + (1,2)\,f + (1,3)\,g + ecc)\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + ([1] + [1,2]\,f + [1,3]\,g + ecc)\,\xi &= 0 \\ ((2)\,f + (1,2) + (2,3)\,g + ecc)\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + ([2]\,f + [1,2] + [2,3]\,g + ecc)\,\xi &= 0 \\ ((3)\,g + (1,3) + (2,3)\,f + ecc)\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + ([3]\,g + [1,3] + [3,3]\,f + ecc)\,\xi &= 0 \end{aligned}$$

le quali danno $\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\xi = 0$, ponendo

$$\begin{aligned} K &= \frac{[1] + [1,2]\,f + [1,3]\,g + ecc}{(1) + (1,2)\,f + (1,3)\,g + ecc} \\ &= \frac{[2]\,f + [1,2] + [2,3]\,g + ecc}{(2)\,f + (1,2) + (2,3)\,g + ecc} \\ &= \frac{[3]\,g + [1,3] + [3,3]\,f + ecc}{(3)\,g + (1,3) + (3,3)\,f + ecc} \end{aligned}$$

Il numero di queste equazioni è, come si vede, uguale a quello delle incognite f, g,ecc, K; di conseguenza esse determinano esattamente queste incognite; e siccome considerando come primo membro il termine K e moltiplicandolo rispettivamente per il denominatore del secondo, si hanno equazioni lineari in f, g, ecc, sarà facile eliminarle con i metodi noti, e non è difficile vedere dalle formule generali di eliminazione, che la risultante in K sarà di un grado uguale a quello delle equazioni e, di conseguenza, uguale a quello delle equazioni differenziali proposte; di modo che si avrà per K un uguale numero di diversi valori, ognuno dei quali, sostituito nelle espressioni di f, g, ecc, darà i corrispondenti valori di queste quantità.

L'equazione $\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\xi = 0$, da mediante l'integrazione $\xi = E\sin\left(tVK + \varepsilon\right)$,essendo E, ε costanti arbitrarie; così siccome si è supposto $\psi = f\xi$, $\phi = g\xi$, ecc, si hanno anche i valori di ψ, ϕ, ecc. Questa soluzione è solo particolare, ma è nello stesso tempo doppia, tripla, ecc, secondo il numero dei valori di K; di conseguenza unendole insieme, si avrà la soluzione generale, poiché da un lato la somma dei valori particolari di ξ, ψ, ϕ, ecc soddisferà ugualmente alle equazioni differenziali, a causa delle loro forma lineare e dall'altro questa somma conterrà due volte tante costanti arbitrarie quante equazioni e, di conseguenza, quanti integrali completi possono ammettere.

Indicando quindi con $K', K", K'"$, ecc, i diversi valori di K, cioè, le radici dell'equazione in K e con $f', g', ecc, f", g", ecc, f'", g'"$ ecc, i corrispondenti valori di f, g, ecc; e prendendo un ugual numero di coefficienti arbitrari $E', E", E'"$, ecc, e pure di angoli arbitrari $\varepsilon', \varepsilon", \varepsilon'"$, ecc; si avranno questi valori completi di ξ, ψ, ϕ,ecc,

$$\begin{aligned} \xi &= E'\sin\left(t\sqrt{K'} + \varepsilon'\right) + E"\sin\left(t\sqrt{K"} + \varepsilon"\right) + E'"\sin\left(t\sqrt{K'"} + \varepsilon'"\right) + ecc \\ \psi &= f'E'\sin\left(t\sqrt{K'} + \varepsilon'\right) + f"E"\sin\left(t\sqrt{K"} + \varepsilon"\right) + f'"E'"\sin\left(t\sqrt{K'"} + \varepsilon'"\right) + ecc \\ \phi &= g'E'\sin\left(t\sqrt{K'} + \varepsilon'\right) + g"E"\sin\left(t\sqrt{K"} + \varepsilon"\right) + g'"E'"\sin\left(t\sqrt{K'"} + \varepsilon'"\right) + ecc \end{aligned}$$

nelle quali gli arbitrari $E', E", E'"$, ecc, $\varepsilon', \varepsilon", \varepsilon'"$, ecc, dipenderanno dai valori iniziali di ξ, ψ, ϕ, ecc, e $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\phi}{dt}$, ecc.

Poiché la soluzione precedente è basata sull'ipotesi che le variabili ξ, ψ, ϕ, ecc siano molto piccole, è necessario affinché sia legittima che tale ipotesi sia verificata; ciò richiede che le radici $K', K"$,ecc, siano tutte reali, positive e diverse, affinché il tempo t che cresce all'infinito, sia sempre racchiuso nel seno. Se alcune di queste radici divenissero negative o immaginarie, esse introdurrebbero nei corrispondenti seni esponenziali reali e se divenissero uguali, introdurrebbero potenze algebriche dell'arco; di questo ci si può assicurare mettendo nel primo caso, al posto del seno, le loro espressioni esponenziali immaginarie, e supponendo nel secondo che le radici uguali differiscano tra loro di quantità infinitamente piccole e indeterminate; ma poiché lo sviluppo di questo caso è inutile per lo scopo attuale, ci fermeremo qui.

Se la condizione di realtà e ineguaglianza dei coefficienti di t vale, è chiaro che il maggior numero dei valori di ξ, di ψ, ecc, saranno minore della somme di $E', E", E'"$, ecc, di $f'E', f"E", f'"E'"$, ecc, prendendo tutte queste quantità per positive; di conseguenza se sono molto piccole, si sarà assicurato che i valori delle variabili saranno sempre così.

Ma siccome i coefficienti $E', E", E'"$, ecc sono arbitrarie e dipendono unicamente dallo spostamento iniziale del sistema, è possibile che le variabili ξ, ψ, ecc, rimangano molto piccole, anche quando tra le quantità $\sqrt{K'}, \sqrt{K"}$, ecc, ve ne saranno di immaginarie o uguali; per questo basta che le corrispondenti quantità $E', E"$, ecc, siano nulle, e ciò farà scomparire i termini che cresceranno con il tempo t.

12. Quanto alla determinazione delle costanti arbitrarie $E', E"$, ecc, $\varepsilon', \varepsilon", \varepsilon'"$, ecc, dipende, come già detto, dalla condizione iniziale del sistema. Infatti, se nelle espressioni trovate di ξ, ψ, ϕ, ecc, si pone $t = 0$, e si suppongono assegnati i valori di ξ, ψ, ϕ, ecc, si avranno equazioni lineari tra le incognite $E' \sin\varepsilon', E" \sin\varepsilon"$, ecc, dalle quali si potrà determinare ognuna di queste incognite. Analogamente se si pone $t = 0$ nei differenziali delle stesse espressioni, e si considerano pure come assegnati i valori di $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\phi}{dt}$, ecc, si avrà un secondo sistema di equazioni lineari tra $E' \cos\varepsilon', E" \cos\varepsilon"$, ecc, le quali serviranno alla loro determinazione. Da ciò si dedurranno facilmente i valori di $E', E"$,ecc, così come di $\tan\varepsilon', \tan\varepsilon"$, ecc; e infine quelli degli stessi angoli $\varepsilon', \varepsilon"$, ecc.

Ma ecco un metodo molto semplice per determinare queste incognite direttamente e senza la necessità dell'eliminazione.

Osservo che sommando le equazioni differenziali dell'art. 9, dopo aver moltiplicato la seconda per f, la terza per g e così di seguito e ponendo, per sintesi,

$$\begin{aligned} p &= (1) + (1,2)\,f + (1,3)\,g + ecc \\ P &= [1] + [1,2]\,f + [2,3]\,g + ecc \\ q &= (2)\,f + (1,2) + (2,3)\,g + ecc \\ Q &= [2]\,f + [1,2] + [2,3]\,g + ecc \\ r &= (3)\,g + (1,3) + (2,3)\,f + ecc \\ R &= [3]\,g + [1,3] + [2,3]\,f + ecc \\ ecc & \end{aligned}$$

si ha l'equazione

$$0 = p\frac{d^2\xi}{dt^2} + q\frac{d^2\psi}{dt^2} + r\frac{d^2\phi}{dt^2} + ecc + P\xi + Q\psi + R\phi + ecc$$

Ma dalle equazioni di condizione dell'art. 10, si ha$P = Kp$, $Q = Kq$, $R = Kr$, ecc. Pertanto, sostituendo nell'equazione precedente, essa assumerà la forma

$$0 = \frac{d^2\,(p\xi + q\psi + r\phi + ecc)}{dt^2} + (p\xi + q\psi + r\phi + ecc)\,K$$

il cui integrale è

$$p\xi + q\psi + r\phi + ecc = L\sin\left(t\sqrt{K} + \lambda\right)$$

essendo L e λ due costanti arbitrarie.

Questa equazione deve valere pure per tutti i diversi valori di K che risultano dalle stesse equazioni di condizione, e che abbiamo indicato con $K', K"$, ecc. così, indicando pure con $p', p"$, ecc, $q', q"$, ecc, ecc, i corrispondenti valori di p, q, ecc, e prendendo diverse costanti arbitrarie $L', L"$, ecc, $\lambda', \lambda"$, ecc, si avranno le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} p'\xi + q'\psi + r'\phi + ecc &= L'\sin\left(t\sqrt{K'} + \lambda'\right) \\ p"\xi + q"\psi + r"\phi + ecc &= L"\sin\left(t\sqrt{K"} + \lambda"\right) \\ p'"\xi + q'"\psi + r'"\phi + ecc &= L'"\sin\left(t\sqrt{K'"} + \lambda'"\right) \\ ecc & \end{aligned}$$

Queste equazioni serviranno anche a determinare i valori di ξ, ψ, ϕ, ecc, ed è chiaro che essi dovranno coincidere con quelli trovati in precedenza (art. 10), poiché risultano entrambi dalle stesse equazioni differenziali. Così sostituendo questi stessi valori dell'articolo citato nelle equazioni precedenti, esse dovranno divenire identiche.

Da ciò è facile concludere che per la prima equazione, si avrà

$$\begin{gathered} \lambda' = \varepsilon' \\ L' = (p' + f'q' + g'r' + ecc)\,E'\,e\,p' + f"q' + g"r' + ecc = 0 \\ p' + f'"q' + g'"r' + ecc = 0 \end{gathered}$$

e allo stesso modo per la seconda equazione

$$\begin{gathered}\lambda" = \varepsilon" \\ L" = (p" + f"q" + g"r" + ecc)\, E'\, e\, p" + f'q" + g'r" + ecc = 0 \\ p" + f'"q" + g'"r" + ecc = 0\end{gathered}$$

e così per le altre.

Sostituendo, quindi, nelle equazioni qui sopra $\lambda', L', \lambda", L"$, $\lambda'", L'"$, ecc, i valori trovati, si avranno queste

$$\begin{aligned} E' \sin\left(t\sqrt{K'} + \varepsilon'\right) &= \frac{p'\xi + q'\psi + r'\phi + ecc}{p' + q'f' + r'g' + ecc} \\ E" \sin\left(t\sqrt{K"} + \varepsilon"\right) &= \frac{p"\xi + q"\psi + r"\phi + ecc}{p" + q"f" + r"g" + ecc} \\ E' \sin\left(t\sqrt{K"'} + \varepsilon'"\right) &= \frac{p'"\xi + q'"\psi + r'"\phi + ecc}{p'" + q'"f'" + r'"g'" + ecc} \\ ecc \end{aligned}$$

che sono le reciproche di quelle dell'art. 10.

Ora la determinazione delle arbitrarie $E', E", E'"$, ecc, $\varepsilon', \varepsilon"$, ecc, non presenta più difficoltà; poiché, 1° supponendo $t = 0$, i primi membri delle equazioni precedenti divengono $E' \sin\varepsilon'$, $E" \sin\varepsilon"$, ecc e i secondi sono tutti noti, supponendo i valori di ξ, ψ, ϕ, ecc, dati all'istante iniziale. 2° Differenziando le stesse equazioni e supponendo poi $t = 0$, i primi membri saranno $\sqrt{K'}E' \cos\varepsilon'$, $\sqrt{K"}E" \cos\varepsilon"$, ecc, e i secondi saranno pure tutti noti, considerando come date le quantità $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\phi}{dt}$ ecc, quando $t = 0$. Quindi, ecc.

13. La soluzione del problema si riduce quindi unicamente alla determinazione delle quantità K, f, g, h, ecc; e abbiamo visto nell'art. 10 che questa determinazione dipende dalla risoluzione delle equazioni $pK - P = 0$, $qK - q = 0$, $rK - r = 0$, ecc, conservando le espressioni di p, q, r, ecc, P, Q, R, ecc, dell'art. 12.

Se si rappresenta ora con A ciò che diviene la quantità T cambiando $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\phi}{dt}$ ecc, in e, f, g, ecc, e con B ciò che diviene la parte della quantità V, dove le variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, formano insieme due dimensioni, cambiando anche queste variabili in e, f, g, ecc; è facile vedere, e ci si potrebbe convincere anche a priori che si avrà $p = \frac{dA}{de}$, $q = \frac{dA}{df}$, $r = \frac{dA}{dg}$, ecc, $P = \frac{dB}{de}$, $Q = \frac{dB}{df}$, $R = \frac{dB}{dg}$, ecc, ponendo poi $e = 1$.

In generale, quindi, se si pone $AK - B = \Delta$, le equazioni per la determinazione delle incognite K, f, g, ecc, saranno $\frac{d\Delta}{de} = 0$, $\frac{d\Delta}{df} = 0$, $\frac{d\Delta}{dg} = 0$, ecc, supponendo $e = 1$.

Siccome la quantità Δ si forma immediatamente dalle quantità T e V, sarà anche possibile trovare direttamente le equazioni in questione, senza bisogno di dedurle dalle equazioni differenziali del moto del sistema.

Sottolineo ora che poiché Δ è una funzione omogenea di due dimensioni di e, f, g, ecc, si avrà per la proprietà di questo tipo di funzioni dimostrata nell'art. 5,

$$2\Delta = e\frac{d\Delta}{de} + d\frac{d\Delta}{df} + g\frac{d\Delta}{dg} + ecc$$

Si avrà pertanto $\Delta = 0$; di conseguenza le incognite f, g, h, ecc, devono essere tali che non solo la quantità Δ sia nulla, ma che lo sia anche ognuno dei suoi differenziali relativi a queste incognite; da ciò segue che la quantità K vista come una funzione di queste incognite dipendente dall'equazione $\Delta = 0$, dovrà essere un *massimo* o un *minimo*.

Se si pone dapprima $e = 1$, e si sostituisce con $\Delta = 0$ l'equazione $\frac{d\Delta}{de} = 0$, si avranno per la determinazione delle incognite, f, g, h, ecc, le equazioni $\Delta = 0$, $\frac{d\Delta}{df} = 0$, $\frac{d\Delta}{dg} = 0$, ecc; se quindi si ricava dapprima il valore di f dall'equazione $\frac{d\Delta}{df} = 0$ e lo si sostituisce in $\Delta = 0$, si cambia questa equazione in $\Delta' = 0$, e sostituire analogamente lo stesso valore di g ricavato da quest'ultima equazione in $\Delta' = 0$; allora chiamando $\Delta" = 0$ l'equazione risultante, ci sarà di nuovo $\frac{d\Delta"}{dh} = 0$ e così di seguito. In questo modo si giungerà a un'equazione finale che non conterrà più le incognite f, g, h, ecc, ma solo la quantità K e che sarà l'equazione cercata in K, le cui radici sono state chiamate $K', K", K'"$, ecc.

S può pure ridurre questa equazione in una formula generale, considerando che poiché le quantità f, g, h, ecc rappresentano insieme nel valore di Δ solo due dimensioni, la quantità $\frac{2\Delta d^2\Delta - d\Delta^2}{df^2}$ sarà necessariamente senza f, essendo il suo differenziale relativo a f $\frac{2\Delta d^2\Delta}{df^2}$ e di conseguenza nullo. Si potrà, quindi, porre $\Delta' = \frac{2\Delta d^2\Delta - d\Delta^2}{df^2}$; e siccome in questa quantità Δ' le incognite rimanenti g, h, ecc, non raggiungono che la seconda dimensione, si potrà porre anche $\Delta" = \frac{2\Delta' d^2\Delta' - d\Delta'^2}{dg^2}$; e così di seguito. L'ultima delle quantità $\Delta, \Delta', \Delta"$, ecc, essendo uguagliata a zero, sarà l'equazione cercata in K. È vero che questa equazione potrà salire a un grado maggiore di quanto basta, a causa dei fattori estranei introdotti nelle equazioni $\Delta" = 0$, $\Delta'" = 0$, ecc; ma se sviluppando queste equazioni, si ha cura di eliminare successivamente questi fattori, e di prendere per i valori di $\Delta, \Delta', \Delta"$, ecc solo i loro primi membri così semplificati, l'equazione finale si troverà ridotta alla forma e al grado voluto.

Quanto ai valori di f, g, ecc, li si determinerà in seguito dalle equazioni $\frac{d\Delta}{df} = 0$, $\frac{d\Delta'}{dg} = 0$, ecc, iniziando dall'ultima e risalendo alla prima con la successiva sostituzione dei valori trovati.

14. si è visto nell'art. 11 che la soluzione non è valida in generale se non quando le radici dell'equazione in K sono tutte reali, positive e diverse. Vi sono dei metodi per riconoscere se un'equazione data di qualsiasi grado ha tutte le radici reali oppure no, e per valutare nel caso della realtà, il loro segno e la loro diversità, ma essendo l'applicazione

di questi metodi piuttosto laboriosa, ecco alcune caratteristiche semplici e generali che serviranno a valutare la forma delle radici in un grande numero di casi.

Prendendo l'equazione $\Delta = 0$, o $AK - B = 0$, (art. precedente), si ha $K = \frac{B}{A}$; è facile convincersi che la quantità A assume sempre necessariamente un valore positivo, finché f, g, ecc, sono quantità reali; poiché la funzione T da cui deriva cambiando $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\phi}{dt}$, ecc, in i, f, g, ecc, è composta dalla somma di numerosi quadrati moltiplicati da coefficienti necessariamente positivi. Pertanto se la quantità B p pure positiva, condizione vera quando la parte della funzione V, dove le variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, formano insieme due dimensioni, è riducibile alla stessa forma della funzione T; si è così sicuri che i valori di K, cioè, le radici dell'equazione in K saranno sempre positive tutte le volte che saranno reali. Al contrario, se la quantità B è sempre negativa, se composta di numerosi quadrati moltiplicati per coefficienti negativi, i valori di K saranno tutti negativi. In quest'ultimo caso la soluzione non potrà essere valida, poiché le radici dell'equazione in K possono essere solo immaginarie o reali negative; e le espressioni delle variabili ξ, ψ,ecc, conterranno necessariamente il tempo t fuori dai simboli di seno e coseno.

Nel primo caso si vede solo che se le radici sono reali, sono necessariamente positive; e sarebbe forse difficile dimostrare direttamente che devono anche essere reali; ma ci si può convincere in un altro modo che deve essere così. Infatti, l'integrale $T + V = cost$, valgono necessariamente, poiché T e V sono funzioni senza t; se si indica con V' la parte di V che contiene i termini di due dimensioni, di modo che $V = H + V'$ a causa di $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$, ecc (art. 8,9), si avrà $T + H + V' = cost = (T) + H + (V')$ indicando con (T) e (V') i valori di T e V' all'istante iniziale; pertanto $T + V' = (T) + (V')$. Pertanto, essendo T per la sua forma una quantità sempre positiva, e V' per ipotesi, ne segue che si avrà necessariamente $V' > 0$, e $< (T) + (V')$; pertanto il valore di V' e di conseguenza anche quelli delle variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, saranno compresi entro limiti dati e dipendenti unicamente dalla condizione iniziale. Queste variabili non potranno quindi contenere il tempo t fuori dai simboli del seno e coseno, poiché in tal caso potrebbero tendere all'infinito. Le radici dell'equazione in K saranno, pertanto, necessariamente tutte reali, positive e diverse (art. 11).

15. È in questo modo che abbiamo dimostrato alla fine della terza sezione della Statica, che quando la funzione Φ è un *minimo* nella condizione di equilibrio, questo stato è stabile, cioè, che il sistema può compiere solo piccole oscillazioni. È chiaro, infatti, che la funzione detta Φ nell'art. 13 della sezione citata, è la stessa che rappresentiamo qui con V, poiché l'una e l'altra è l'integrale della totalità dei momenti delle forze che agiscono sui diversi corpi del sistema, totalità che deve essere nulla all'equilibrio. Siccome si ha $V = H + V'$ e V' non contiene le variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, solo di secondo grado, ne segue che V sarà un *minimo* o un *massimo*, a seconda che il valore di V sarà positivo o negativo dando a queste variabili valori qualsiasi. Ponendo $\psi = f\xi$, $\phi = g\xi$ ecc, il valore di V' diviene $= \xi^2 B$ (art. 13); pertanto V o Φ saranno un *minimo* quando B sarà una quantità sempre positiva e un *massimo* quando B sarà sempre una quantità negativa. Di conseguenza nel primo caso le espressioni delle variabili conterranno il tempo t solo nei simboli del seno e coseno, e l'equilibrio sarà stabile; nel secondo conterranno necessariamente termini in cui t sarà fuori da questi simboli e l'equilibrio non potrà essere stabile, ma il sistema, essendo spostato anche di poco, tenderà ad allontanarsi sempre di più. Questa seconda parte del teorema enunciato nell'ambito citato della Statica, non avrebbe potuto essere dimostrato in assenza dei principi necessari; ne abbiamo posticipato la dimostrazione nella Dinamica, e quanto presentato non lascia più nulla a desiderare.

Del resto, tra questi due condizioni di stabilità e di non stabilità assoluta, nelle quali l'equilibrio alterato in modo qualsiasi, tende a ristabilirsi da solo, o ad alterarsi sempre più, vi sono condizioni di stabilità condizionale e relativa, nelle quali il ristabilimento dell'equilibrio dipenderà dallo spostamento iniziale del sistema. Se alcuni dei valori di $\sqrt{K}$ sono immaginari, i corrispondenti termini nei valori delle variabili conterranno archi di cerchio e l'equilibrio non sarà in generale stabile; ma se i coefficienti di questi termini diventano nulli, e ciò dipende dalle condizioni iniziali del sistema, gli archi di cerchio scompariranno e l'equilibrio potrà ancora essere visto come stabile, almeno rispetto a questo stato particolare.

16. La soluzione data, richiede che le coordinate possono essere espresse mediante funzioni in serie di variabili molto piccole, e che siano nulle all'equilibrio, così come supposto nell'art. 7.

Ciò è sempre possibile, come abbiamo visto, quando le equazioni di condizione ridotte in serie contengono le prime potenze delle variabili supposte molto piccole, poiché questi termini forniscono dapprima equazioni risolvibili per via razionale e in seguito è sempre possibile, con il metodo delle serie, avere soluzioni razionali sempre più esatte.

Può tuttavia succedere che i termini di primo grado manchino in una o più equazioni di condizione, e ciò si avrà, per esempio, se nell'equazione $L = 0$, i valori delle coordinate per l'equilibrio sono tali da rendere non solo L nullo, ma anche ognuna delle sue differenze prime; si avrà allora $\frac{dA}{da} = 0$, $\frac{dB}{db} = 0$, ecc, e l'equazione $L = 0$, conterrà solo le seconde potenze e le successive di $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'$, ecc, (art. 7). In questo caso se si riducono le coordinate in funzione di variabili indipendenti, queste funzioni non potranno più essere razionali e le equazioni differenziali non saranno né lineari, né tanto meno razionali. Così l'ipotesi di moti molto piccoli del sistema non servirà allora a semplificare la soluzione del problema, o almeno non la renderà più gestibile con il metodo generale che abbiamo esposto.

Per risolvere queste significative questioni nel modo più semplice, si trascureranno dapprima le equazioni di condizione, dove i primi gradi delle variabili non si troveranno; si giungerà così a espressioni di T e di V della forma ottenuta nell'art. 8. Si aggiungeranno poi a questo valore di V i primi membri delle equazioni di condizione non ancora considerate, moltiplicate ciascuna per un coefficiente indeterminato e supposto costante nelle differenziazioni rispetto a δ; e basterà in questi termini ottenuti dalle equazioni di condizione, tener conto dei gradi inferiori delle variabili molto piccole. Si troveranno così le equazioni differenziali e si tratterà di eliminarne i coefficienti indeterminati.

Se le equazioni di condizione fossero di secondo grado e i coefficienti indeterminati si potessero ritenere costanti, il valore di V sarebbe ancora della stessa forma della soluzione generale; di conseguenza lo si potrebbe ancora applicare a questo caso; si determinerebbero poi i coefficienti in modo che le equazioni di condizione risultino soddisfatte. Si potrà quindi sempre cominciare con l'adottare tale ipotesi, e si vedrà poi se i valori che ne risultano per le variabili, possono soddisfare alle equazioni di condizione, nel qual caso l'ipotesi sarà legittima e la soluzione esatta; in caso contrario bisognerà cercare di integrare le equazioni differenziali con metodi particolari.

2.5.2 II. Moto di un corpo attratto verso uno più centri

17. Supponiamo in primo luogo che il corpo sia attratto verso un solo centro fisso da una forza R, funzione della distanza r del corpo dal centro. Prendiamo questo centro come origine delle coordinate e la retta r come raggio vettore; sia inoltre ψ l'inclinazione di r sul piano delle x, y e ϕ l'angolo della proiezione di r su questo piano, con l'asse delle x; si avrà quindi, come visto in precedenza, (art. 2), $x = r\cos\psi\cos\phi$, $y = r\cos\psi\sin\phi$, $z = r\sin\psi$; e quindi

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2\left(\cos\psi d\phi^2 + d\psi^2\right) + dr^2$$

Avendo così un solo corpo, la cui massa può essere presa come unitaria, la quantità T sarà semplicemente uguale a

$$\frac{r^2\left(\cos\psi d\phi^2 + d\psi^2\right) + dr^2}{2dt^2}$$

Riguardo alla quantità V, essa si ridurrà a $\int Rdr$.

Poiché non vi è, quindi, alcuna condizione particolare da soddisfare ed essendo le tre variabili ψ, ϕ, r indipendenti, si avrà per ciascuna di esse un'equazione della forma

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta\psi} + \frac{\delta V}{\delta\psi} = 0$$

fornendo così le tre equazioni (con dt costante)

$$\frac{d.r^2 d\psi}{dt^2} + \frac{r^2\sin\psi\cos\psi d\phi^2}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d.r^2\cos\psi^2 d\phi}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right)}{dt^2} + R = 0$$

La seconda è integrabile e il suo integrale è

$$\frac{r^2\cos\psi^2 d\phi}{dt} = A$$

da cui si ricava

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{A}{r^2\cos\psi^2}$$

sostituendo questo valore nella prima, essa diverrà pure integrabile se la si moltiplica per $r^2 d\psi$ e l'integrale sarà

$$\frac{r^4 d\psi^2}{dt^2} + \frac{A^2}{\cos\psi^2} = B^2$$

dove A e B sono due costanti arbitrarie.

Qualche osservazione su questo integrale. Se si suppone che ψ e $\frac{d\psi}{dt}$ sono contemporaneamente nulli in un istante, lo saranno necessariamente sempre; poiché ponendo $\psi = 0$ e $d\psi = 0$, si avrà $B^2 = A^2$ e l'equazione diverrà allora $\frac{r^4 d\psi^2}{dt^2} + A^2\tan\psi^2 = 0$, che può valere solo ponendo ψ e $\frac{d\psi}{dt}$ nulli. L'ipotesi avanzata ritorna a fare in modo che il corpo si muove in un istante nel piano x, y; ciò è sempre possibile, poiché la posizione di tale piano è arbitraria. Il corpo continuerà, quindi, a muoversi in questo piano; di conseguenza descriverà necessariamente un'orbita piana o una linea a semplice curvatura. Ciò è dimostrabile anche direttamente mediante l'integrazione dell'equazione.

Infatti, se si sostituisce per dt il suo valore $\frac{r^2\cos\psi^2 d\phi}{A}$ tratto dalla precedente, si avrà

$$\frac{A^2 d\psi^2}{\cos\psi^4 d\phi^2} + \frac{A^2}{\cos\psi^2} = B^2$$

cioè quando $\psi = 0$, $\frac{d\psi}{d\phi} = \tan\alpha$, si avrà $B^2 = A^2 + A^2\tan\alpha^2$, e l'equazione diverrà $\frac{d\psi^2}{\cos\psi^4 d\phi^2} = \tan\alpha^2 - \tan\psi^2$, da cui si ricava $d\phi = \frac{d\psi}{\cos\psi^2\sqrt{\tan\alpha^2 - \tan\psi^2}}$, la quale a causa di $\frac{d\psi}{\cos\psi^2} = d.\tan\psi$, avrà come integrale $\phi - \beta = \arcsin\frac{\tan\psi}{\tan\alpha}$, cioè, $\frac{\tan\psi}{\tan\alpha} = \sin(\phi - \beta)$, essendo β il valore arbitrario di ϕ quando $\psi = 0$.

Questa equazione mostra che $\phi - \beta$ e ψ sono i due lati di un triangolo sferico retto, nel quale α è l'angolo opposto al lato ψ. Poiché l'arco $\phi - \beta$ è preso sul piano x, y e che l'arco ψ è sempre perpendicolare a questo piano, ne segue che l'arco che unisce questi due, e che forma l'ipotenusa del triangolo, formerà con la base $\phi - \beta$ un angolo costante α; di conseguenza lo stesso arco passerà per le estremità di tutti gli archi ψ, e tutti i raggi r si troveranno nel piano di questo arco, il quale sarà anche il piano stesso dell'orbita del corpo, la cui inclinazione sul piano x, y sarà espressa dall'angolo costante α.

18. L'equazione finita che si trova tra ϕ e ψ, potrebbe servire ad eliminare una di queste incognite dalle altre equazioni; ma poiché è assicurato che l'orbita del corpi è tutta in un piano fisso, si semplificherà sempre il calcolo prendendo questo piano per quello x, y, e ciò darà $\psi = 0$ e $d\psi = 0$.

Allora la terza equazione diverrà $\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{rd\phi^2}{dt^2} + R = 0$; ma l'integrale della seconda dà $d\phi = \frac{Adt}{r^2}$; sostituendo, pertanto, questo valore di $d\phi$ e moltiplicando poi per dr, si avrà un'equazione integrabile, il cui integrale sarà $\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{A^2}{r^2} + \int Rdr = C$, dalla quale si ricava

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{C - \int Rdr - \frac{A^2}{r^2}}}$$

e poi

$$d\phi = \frac{Adr}{r^2\sqrt{C - \int Rdr - \frac{A^2}{r^2}}}$$

equazioni separate e la cui integrazione farà conoscere i valori di ϕ e t in r. La seconda di queste equazioni fornirà la figura dell'orbita e la prima la posizione del corpo in ogni istante.

19. Per applicare questa soluzione al moto dei Pianeti attorno al Sole, si farà $R = \frac{F}{r^2}$, essendo F la forza attrattiva del Sole sul pianeta alla distanza 1 e ciò darà $\int Rdr = -\frac{F}{r}$,

Sostituendo questo valore nelle equazioni precedenti, si vede che la quantità sotto il simbolo diverrà $C + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2}$, che si può mettere sotto la forma $C + \frac{F^2}{4A^2} - \left(\frac{F}{2A} - \frac{A}{r}\right)^2$; allora il valore di $d\phi$ si troverà uguale al differenziale dell'angolo, il cui coseno sarà

$$\frac{\frac{F}{2A} - \frac{A}{r}}{\sqrt{\left(C + \frac{F^2}{4A^2}\right)}}$$

di modo che si avrà integrando e introducendo una costante arbitraria γ,

$$\frac{F}{2A} - \frac{A}{r} = \sqrt{\left(C + \frac{F^2}{4A^2}\right)} \times \cos(\phi - \gamma)$$

e ponendo

$$p = \frac{2A^2}{F} \qquad e = \sqrt{\left(1 + \frac{4A^2C}{F^2}\right)}$$

si avrà

$$r = \frac{p}{1 - e\cos(\phi - \gamma)}$$

Si vede da questa formula che i valori più grandi e più piccoli di r corrispondono a $\phi = \gamma$ e a $\phi = \gamma + 180°$, e che essi sono su una stessa retta. Il più piccolo valore sarà $= \frac{p}{1+e}$ e il più grande sarà $\frac{p}{1-e}$, la cui semisomma o il valore medio sarà $\frac{p}{1-e^2}$ e la semi differenza sarà $\frac{pe}{1-e^2}$; di modo che è sarà il rapporto tra la semi differenza tra questi valori e la loro semisomma. Se si fa in modo che $\phi = \gamma + 90°$, nel quale caso la direzione di r sarà perpendicolare alla linea dei valori più piccoli e più grandi, si avrà $r = p$.

Per conoscere la natura della curva basta riferire a due coordinate x, y, prese dal centro dei raggi vettori e di cui x sia nella direzione del raggio maggiore. si avrà così, poiché $\phi - \gamma$ è l'angolo tra r e questo raggio, $x = r\cos(\phi - \gamma)$, $y = r\sin(\phi - \gamma)$; e l'equazione $r - er\cos(\phi - \gamma) = p$ diverrà $\sqrt{(x^2 + y^2)} - ex = p$, la quale, eliminando l'irrazionalità, diviene di secondo grado, e dà una sezione conica. Pertanto $\frac{p}{1-e^2}$ sarà il semiasse maggiore della sezione che indicheremo con a ed e sarà l'eccentricità o il rapporto della distanza tra uno dei fuochi e il centro, con il semiasse maggiore, di conseguenza $\sqrt{(a^2 - a^2e^2)}$o $a\sqrt{(1 - e^2)}$ sarà il semiasse minore e $\frac{a^2(1-e^2)}{a}$ o $a\left(1 - e^2\right)$, cioè, p sarà il semi parametro. Ma Dall'equazione tra x e y, si ha quando $x = 0$, $p = y$; quindi l'origine delle coordinate è in uno dei fuochi in cui fa in modo che l'ordinata sia uguale al semi parametro.

Così le orbite dei Pianeti sono sezioni coniche, che hanno il Sole in uno dei loro fuochi e la loro equazione generale è

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 - e\cos(\phi - \gamma)}$$

essendo a la distanza media, e l'eccentricità, r il raggio vettore che forma con la retta dell'afelio l'angolo $\phi - \gamma$.

20. Per determinare il tempo impiegato a descrivere un angolo qualsiasi, bisogna integrare ancora l'altra equazione

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\left(C + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2}\right)}}$$

ma prima sostituiremo per A e C i valori in a e e; o $p = \frac{2A^2}{f}$, e $e = \sqrt{\left(1 + \frac{4A^2C}{F^2}\right)}$, pertanto $A^2 = \frac{Fp}{2} == \frac{Fa\left(1-e^2\right)}{2}$, $C = \frac{\left(e^2-1\right)F^2}{4A^2} = -\frac{F}{2a}$; con queste sostituzioni l'equazione diverrà

$$dt = \sqrt{\frac{2a^3}{F}} \times \frac{rdr}{\sqrt{\left(a^2c^2 - (r-a)^2\right)}}$$

Poniamo $\frac{r-a}{ae} = \cos\theta$ e si ottiene $r = a\,(1 + e\cos\theta)$; si avrà

$$dt = \sqrt{\frac{2a^3}{F}} \times (1 + e\cos\theta)\,d\theta$$

e integrando

$$t - \lambda = \sqrt{\frac{2a^3}{F}} \times (\theta + e\sin\theta)$$

Confrontando ora le due espressioni di r, si ha

$$\frac{1-e^2}{1 - e\cos(\phi - \gamma)} = 1 + e\cos\theta$$

da cui si ricava

$$\cos\theta = \frac{\cos(\phi-\gamma) - e}{1 - e\cos(\phi-\gamma)}$$

ed eliminando θ, si avrà t in funzione di $\phi - \gamma$; e per facilitare questa eliminazione, si osserverà che

$$1 \pm \cos\theta = \frac{(1 \mp e)\,(1 \pm \cos(\phi-\gamma))}{1 - e\cos(\phi-\gamma)}$$

di modo che, con questa combinazione

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1+e}{1-e} \times \frac{1-\cos(\phi-\gamma)}{1+\cos(\phi+\gamma)}$$

si avrà

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \cdot \tan\frac{\phi-\gamma}{2}$$

21. In Astronomia, l'angolo $\phi - \gamma$, è detto anomalia vera, l'angolo $(t-\lambda)\sqrt{\frac{F}{2a^3}}$ l'anomalia media, e l'angolo ausiliare θ l'angolo eccentrico; e il problema di determinare $\phi - \gamma$ con $t - \lambda$ è noto sotto il nome di problema di Kepler. Si vede dalle formule precedenti, che non è possibile una risoluzione rigorosa; ma supponendo l'eccentricità e molto piccola, come in effetti è nelle orbite di tutti i pianeti, si possono avere soluzioni con approssimazione a piacere.

Si inizierà con il ricavare dall'equazione $\tan\frac{\phi-\gamma}{2} = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \cdot \tan\frac{\theta}{2}$ il valore di $\phi - \gamma$ in θ; e ciò si otterrà facilmente per mezzo delle espressioni esponenziali immaginarie note. Infatti, ponendo $\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} = h$ e prendendo i per il numero il cui logaritmo iperbolico è l'unità, si avrà questa trasformata

$$\frac{i^{\frac{\phi-\gamma}{2}\sqrt{-1}} - i^{-\frac{\phi-\gamma}{2}\sqrt{-1}}}{i^{\frac{\phi-\gamma}{2}\sqrt{-1}} + i^{-\frac{\phi-\gamma}{2}\sqrt{-1}}} = h\frac{i^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}} - i^{-\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}}{i^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}} + i^{\frac{\theta}{-2}\sqrt{-1}}}$$

che si riduce a

$$\frac{i^{(\phi-\gamma)\sqrt{-1}} - 1}{i^{(\phi-\gamma)\sqrt{-1}} + 1} = h\frac{i^{\theta\sqrt{-1}} - 1}{i^{\theta\sqrt{-1}} + 1}$$

da cui si ricava

$$i^{(\phi-\gamma)\sqrt{-1}} = \frac{(1+h)\,i^{\theta\sqrt{-1}} + 1 - h}{(1-h)\,i^{\theta\sqrt{-1}} + 1 + h}$$

oppure ponendo

$$\frac{1-h}{1+h} = E \qquad i^{(\phi-\gamma)\sqrt{-1}} = i^{\theta\sqrt{-1}} \times \frac{1 + Ei^{-\theta\sqrt{-1}}}{1 + Ei^{\theta\sqrt{-1}}}$$

e passando ai logaritmi, si avrà

$$\phi - \gamma = \theta + \frac{1}{\sqrt{-1}} l\left(1 + Ei^{-\theta\sqrt{-1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{-1}} l\left(1 + Ei^{\theta\sqrt{-1}}\right)$$

riducendo questi logaritmi in serie, e sostituendo poi al posto degli esponenziali immaginari i seni reali corrispondenti, si avrà infine

$$\phi - \gamma = \theta - 2E\sin\theta + \frac{2E^2}{2}\sin 2\theta - \frac{2E^3}{3}\sin 3\theta + ecc$$

espressioni molto semplice, nella quale

$$E = \frac{\sqrt{(1+e)} - \sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)} + \sqrt{(1-e)}}$$

oppure

$$E = \frac{e}{1 + \sqrt{(1-e^2)}}$$

Si tratterà ora solo di sostituire al posto di θ il suo valore in $t - \lambda$ dato dall'equazione $(t-\lambda)\sqrt{\frac{F}{2a^3}} = \theta + e\sin\theta$.

Dal teorema che ho dimostrato, se si ha un'equazione della forma $u = \theta + f.\theta$, essendo $f.\theta$ una funzione qualunque di θ, si avrà

$$\theta = u - f.u + \frac{d.(f.u)^2}{2du} - \frac{d^2.(f.u)^3}{2\cdot 3du^2} + ecc$$

e se $\Phi'.\theta$ indica una funzione qualsiasi di θ e si pone $\Phi'\theta = \frac{d.\Phi.\theta}{d.\theta}$, si avrà pure

$$\Phi.\theta = \Phi.u - f.u \times \Phi.u + \frac{d.(f.u)^2 \times \Phi^2.u}{2du} - \frac{d^2.(f.u)^3 \times \Phi'.u}{2\cdot 3du^2} + ecc$$

Basterà quindi supporre,

$$u = \frac{t-\lambda}{\sqrt{\left(\frac{2a^3}{F}\right)}}$$
$$f.\theta = e\sin\theta$$
$$\Phi.\theta = \theta - 2E\sin\theta + \tfrac{2E^2}{2}\sin 2\theta - \tfrac{2E^3}{3}\sin 3\theta + ecc$$

di conseguenza cambiando θ in u,

$$f.u = e\sin u$$
$$\Phi.u = u - 2E\sin u + \tfrac{2E^2}{2}\sin 2u - \tfrac{2E^3}{3}\sin 3u + ecc$$

e sostituendo questi valori nella formula precedente, si otterrà l'espressione di Φ, θ, cioè, quella di $\phi - \gamma$ in u.

Ponendo per abbreviare

$$V = 1 - 2E\cos u + 2E^2\cos 2u + 2E^3\cos 3u + ecc$$

si avrà

$$\begin{aligned}\phi - \lambda \quad &= \quad u - 2E\sin u + \frac{2E^2}{2}\sin 2u - \frac{2E^3}{3}\sin 3u + ecc \\ &\quad -eV\sin u + e^e\frac{d.\left(V\sin u^2\right)}{2du} - e^3\frac{d^2.\left(V\sin u^3\right)}{2\cdot 3du^2} + ecc\end{aligned}$$

da cui basterà svolgere le differenziazioni indicate.

22. Supponiamo in secondo luogo che il corpo sia attratto contemporaneamente verso due centri fissi da forze proporzionali a funzioni qualsiasi delle distanze.

Sia come nel problema precedente, uno dei centri nell'origine delle coordinate e R la forza attrattiva; e per l'altro centro supponiamo che la posizione sia determinata dalla coordinate a, b, c, parallele alle x, y, z; sia inoltre Q la sua forza attrattiva e q la distanza del corpo da questo centro, è chiaro che si avrà

$$q = \sqrt{\left((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right)}$$

cioè, sostituendo a x, y, z i valori in r, ψ, ϕ (art. 13),

$$q = \sqrt{(r^2 - 2r\left((a\cos\phi + b\sin\phi)\cos\psi + c\sin\psi\right) + h^2)}$$

ponendo $h = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$, distanza tra i due centri.

È chiaro che il valore di T sarà lo stesso del problema precedente (art. 17) ma il valore di V si troverà aumentato del termine $\int Qdq$; e siccome Q è funzione di q, e q funzione di r, ϕ, ψ, questo termine darà nei differenziali $\frac{\delta V}{\delta\psi}$, $\frac{\delta V}{\delta\phi}$, $\frac{\delta V}{\delta r}$, questi $Q\frac{dq}{\delta\psi}$, $Q\frac{dq}{\delta\phi}$, $Q\frac{dq}{\delta r}$; che bisognerà di conseguenza aggiungere rispettivamente ai primi membri delle equazioni differenziali dell'articolo citato.

Si avranno quindi per il moto del corpo attratto verso due centri dalle forze R, Q, le seguenti equazioni

$$\frac{d.r^2d\psi}{dt^2} + \frac{r^2\sin\psi\cos\psi d\phi^2}{dt^2} + Q\frac{dq}{\delta\psi} = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{d.r^2\cos\psi^2 d\phi}{dt^2} + Q\frac{dq}{\delta\phi} = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right)}{dt^2} + R + Q\frac{dq}{\delta r} = 0 \qquad (3)$$

E se il corpo fosse attratto nello stesso tempo verso un altro centro, basterebbe aggiungere a queste equazioni termini simili per ognuno di questi centri.

Abbiamo già mostrato in generale (art. 4), che quando T e V non contengono t, si ha sempre l'integrale $T+V = cost$, il quale contiene la conservazione delle forze vive.

Nel caso trattato sarà

$$\frac{r^2\left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right) + dr^2}{2dt^2} + \int Rdr + \int Qdq = 2A \qquad (4)$$

ed è chiaro, infatti, che le tre equazioni precedenti moltiplicate rispettivamente per $d\psi, d\phi, dr$ e sommate, danno un'equazione integrabile, e il cui integrale è quello che presentiamo.

Si ricava da questa equazione

$$\frac{r^2\left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right)}{dt^2} = 4A - 2\int Rdr - 2\int Qdq - \frac{dr^2}{dt^2}$$

e una volta sostituito nella equazione (3), moltiplicata per r, la riduce a

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} + Rr + 2\int Rdr + Qr\frac{dq}{dr} + 2\int Qdq = 4A$$

Poiché $q^2 = r^2 + h^2 - 2r\left((a\cos\phi + b\sin\phi)\cos\psi + c\sin\psi\right)$, si avrà, facendo variare r,

$$q\frac{dq}{dr} = r - (a\cos\phi + b\sin\phi)\cos\psi - c\sin\psi = r - \frac{r^2+h^2-q^2}{2r} = \frac{r^2+q^2-h^2}{2r}$$

pertanto, sostituendo questo valore di $\frac{dq}{dr}$, si avrà infine

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} + Rr + 2\int Rdr + Q\frac{r^2+q^2-h^2}{2q} + 2\int Qdq = 4A \qquad (5)$$

Questa equazione ha il vantaggio di contenere solo le due variabili r, q, e indica nello stesso tempo che si deve avere una equazione simile tra q e r, cambiando semplicemente r e q, così come R e Q tra loro; poiché è indifferente riferire il moto del corpo a uno all'altro dei due centri fissi ed è chiaro che riferendolo al centro delle forze Q, si troverebbe con un'analisi simile alla precedente

$$\frac{d^2.q^2}{2dt^2} + Qq + 2\int Qdq + R\frac{r^2+q^2-h^2}{2r} + 2\int Rdr = 4A \qquad (6)$$

così si potrà, con queste due equazioni, determinare direttamente i due raggi r e q.

Sottolineo ora che si può senza perdere in generalità, supporre le due coordinate a e b del centro delle forze Q, nulle, ponendo l'asse delle coordinate Q sulla linea che unisce i due centri. Con questa ipotesi, si avrà $c = h$, e la quantità q diverrà $\sqrt{(r^2 - hr\sin\psi + h^2)}$, la quale non contiene più ϕ e si avrà $\frac{dq}{d\phi} = 0$. D conseguenza l'equazione (2) si ridurrà a $\frac{d.r^2\cos\psi^2 d\phi}{dt^2} = 0$, il cui integrale è $\frac{r^2\cos\psi^2 d\phi}{dt} = B$; da cui si ottiene $\frac{d\phi}{dr} = \frac{B}{r^2\cos\phi^2}$; ma si ha $\sin\psi = \frac{r^2+h^2-q^2}{2hr}$; pertanto

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{(4h^2r^2 - (r^2+h^2-q^2))}}{2hr}$$

di conseguenza sostituendo questo valore, si avrà

$$\frac{dq}{dt} = \frac{4Bh^2}{4h^2r^2 - (r^2+h^2-q^2)} \qquad (7)$$

di modo che, conoscendo r e q in t, si avrà anche ϕ in t.

Poiché $\sin\psi$ e $\frac{dq}{dt}$ sono già dati in r e q, è chiaro che si può ridurre l'equazione (4) a contenere solo r e q e allora essa sarà necessariamente, in virtù della costante arbitraria E, un integrale completo delle due equazioni (5) e (6). Infatti, si avrà

$$r^2 d\psi^2 = \frac{\left(r^2+q^2-h^2\right)dr - 2rqdq}{4h^2r^2 - (r^2+h^2-q^2)}$$

aggiungendo dr^2, e riducendo, si avrà

$$r^2 d\psi^2 + dr^2 = 4\frac{q^2r^2dr^2 + r^2q^2dq^2 - \left(r^2+q^2-h^2\right)rqdrdq}{4h^2r^2\left(r^2+h^2-q^2\right)^2}$$

Si avrà, inoltre,

$$\frac{r^2\cos\psi^2 d\phi^2}{dt^2} = \frac{4B^2}{4h^2r^2 - \left(r^2+h^2-q^2\right)^2}$$

Operando questa sostituzione nell'equazione (4), e togliendo il denominatore, si avrà

$$\begin{gathered}2\frac{q^2r^2dr^2+r^2q^2dq^2-\left(r^2+q^2-h^2\right)rqdrdq}{dt^2}+2B^2\\+\left(4h^2r^2-\left(r^2+q^2-h^2\right)^2\right)\left(\int Rdr+\int Qdq-2A\right)=0\quad(8)\end{gathered}$$

È facile vedere ora dalla forma di questa equazione che essa deriva dalle equazioni (5) e (6) moltiplicate rispettivamente per $2qd.r^2-\left(r^2+q^2-h^2\right)d.q^2$, $2r^2d.q^2-\left(r^2+q^2-h^2\right)d.r^2$, sommate e poi integrate; ma sarebbe stato assai difficile scoprire questo integrale *a priori*.

23. Per ottenere la soluzione, bisogna avere ancora un altro integrale delle stesse equazioni; ma si potrebbe giungere solo attraverso valori particolari di R e Q.

Se si suppone, che è il caso della natura, $R=\frac{\alpha}{r^2}$, $Q=\frac{\beta}{q^2}$, si trova allora che l'equazione (5) moltiplicata per $d.q^2$ e sommata all'equazione (6) moltiplicata per $d.r^2$ da una somma integrale, il cui integrale è

$$\frac{d.r^2\times d.q^2}{2dt^2}-\frac{\alpha\left(3r^2+q^2-h^2\right)}{r}-\frac{\beta\left(3q^2+r^2-h^2\right)}{q}=4A\left(r^2+q^2\right)+2c\quad(9)$$

Moltiplicando questa equazione per $r^2+q^2-h^2$ e sommandola all'integrale (8) trovato in precedenza, dà nell'ipotesi attuale una ridotta della forma

$$\begin{gathered}\frac{q^2\left(d.r^2\right)^2+r^2\left(d.q^2\right)^2}{2dt^2}-2\alpha r\left(r^2+3q^2-h^2\right)-2\beta q\left(r^2+3q^2-h^2\right)=\\2A\left(r^4+q^4+6r^2q^2-h^4\right)+2C\left(r^2+q^2-h^2\right)-2B^2\qquad(10)\end{gathered}$$

E moltiplicando la stessa equazione per $2rq$ e poi sommandola o sottraendola a questa, si avrà questa doppia equazione

$$\begin{gathered}\frac{\left(qd.r^2+rd.q^2\right)^2}{4dt^2}-\alpha\left((r\pm q)^3-h^2(r\pm q)\right)-\beta\left((q\pm r)^3-h^2(q\pm r)\right)=\\A\left((r\pm q)^4-h^4\right)+C(r\pm q)^2-B^2\qquad(11)\end{gathered}$$

Di modo che ponendo $r+q=s$, $r-q=u$, si avranno queste due

$$\begin{aligned}\frac{\left(s^2-u^2\right)ds^2}{16dt^2}-(\alpha+\beta)s^3+h^2(\alpha+\beta)s&=A\left(s^4-h^4\right)+Cs^2-B^2\\\frac{\left(s^2-u^2\right)ds^2}{16dt^2}-(\alpha-\beta)u^3+h^2(\alpha-\beta)u&=A\left(u^4-h^4\right)+Cu^2-B^2\end{aligned}$$

da cui si ricava questa equazione

$$\begin{aligned}&\frac{ds}{\sqrt{\left(As^4+(\alpha+\beta)s^3+Cs^2-h^2(\alpha+\beta)s-Ah^4-B^2\right)}}\\&=\frac{du}{\sqrt{\left(Au^4+(\alpha-\beta)u^3+Cu^2-h^2(\alpha-\beta)u-Ah^4-B^2\right)}}\end{aligned}$$

poi

$$\begin{aligned}dt=&\frac{s^2ds}{4\sqrt{\left(As^4+(\alpha+\beta)s^3+Cs^2-h^2(\alpha+\beta)s-Ah^4-B^2\right)}}\\&-\frac{u^2du}{4\sqrt{\left(Au^4+(\alpha-\beta)u^3+Cu^2-h^2(\alpha-\beta)u-Ah^4-B^2\right)}}\end{aligned}$$

infine l'equazione (7) diverrà, usando le stesse sostituzioni

$$\frac{d\phi}{dt}=-\frac{4Bh^2}{\left(s^2-h^2\right)\left(u^2-h^2\right)}=\frac{4Bh^2}{s^2-u^2}\left(\frac{1}{s^2-h^2}-\frac{1}{u^2-h^2}\right)$$

e di conseguenza darà

$$\begin{aligned}d\phi&=\frac{Bh^2ds}{\left(s^2-h^2\right)\sqrt{\left(As^4+(\alpha+\beta)s^3+Cs^2-h^2(\alpha+\beta)s-Ah^4-B^2\right)}}\\&-\frac{Bh^2du}{\left(u^2-h^2\right)\sqrt{\left(Au^4+(\alpha-\beta)u^3+Cu^2-h^2(\alpha-\beta)u-Ah^4-B^2\right)}}\end{aligned}$$

Se si potesse integrare questi diversi differenziali, si avrebbe dapprima un'equazione tra s e u, poi si avrebbe t e ϕ in funzione di s e u; quindi avrebbe q e poi t, e ϕ in funzione di r; e siccome $\sin\psi=\frac{r^2+h^2-q^2}{2hr}$, si avrebbe anche ψ in r. Ma questi differenziali si riferiscono alla rettificazione delle sezioni coniche, e si possono integrare solo per approssimazione e il metodo migliore è quello che ho introdotto per l'integrazione di tutti i differenziali che contengono un radicale quadrato dove la variabile raggiunge il quarto grado sotto il simbolo.

Se oltre le due forze $\frac{\alpha}{r^2}$ e $\frac{\beta}{q^2}$ che attraggono verso i due centri fissi, vi fosse una terza forza proporzionale alla distanza che li attrae verso il punto media della linea che unisce i due centri, è chiaro che questa forza potrebbe scomporsi in due tendenti allo stesso punto e proporzionali pure alle distanze. In questo caso quindi si avrebbe $R = \frac{\alpha}{r^2} + 2\gamma r$, $Q = \frac{\alpha}{q^2} + 2\gamma q$; e si troverebbe che l'integrale (9) varrebbe pure in questo caso; bisognerebbe solo aggiungere al suo primo membro i termini (292)

$$\gamma \left(5r^2q^2 + \frac{3}{2}\left(r^4+q^4\right) - h^2\left(r^2+q^2\right)\right)$$

e poi basterebbe aggiungere al primo membro dell'equazione (10), i termini

$$\frac{\gamma}{2}\left(r^6+q^6+15r^2q^2\left(r^2+q^2\right) - h^2\left(r^4+q^4+6r^2q^2\right)\right)$$

e di conseguenza, al primo membro dell'equazione (11) i termini

$$\frac{\gamma}{4}\left((r\pm q)^6 - h^2(r\pm q)^4\right)$$

Di modo che rimarrà solo da aumentare i polinomi in s e u sotto il segno di radicale dei rispettivi termini

$$-\frac{\gamma}{4}\left(s^6-h^2s^4\right) \qquad -\frac{\gamma}{4}\left(u^6-h^2u^4\right)$$

ciò che non rende la soluzione più complicata.

24. Sebbene sia impossibile integrare in generale l'equazione trovata tra s e u e, di conseguenza, ottenere una relazione finita tra queste due variabili, si può tuttavia ottenere due integrali particolari rappresentati da $s = cost$ e $u = cost$. Infatti, se si rappresenta in generale questa equazione con $\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{du}{\sqrt{U}}$, è chiaro che essa varrà anche ponendo ds o du nulli, purché i denominatori $\sqrt{S}$ e $\sqrt{U}$ siano contemporaneamente nulli, e dello stesso ordine. Per determinare le condizioni necessarie in questo caso, si farà $s = f + \omega$, con f costante e ω una quantità infinitamente piccola, e indicando con F ciò che diviene S quando si cambia s in f, il membro $\frac{ds}{\sqrt{S}}$ diverrà $\frac{d\omega}{\sqrt{\left(F+\frac{dF}{df}\omega+\frac{d^2F}{2df^2}\omega^2+ecc\right)}}$; affinché si abbia lo stesso numero di gradi di ω verso l'alto e il basso servirà che sia $F = 0$ e $\frac{dF}{df} = 0$; allora a causa di ω infinitamente piccolo, il differenziale si ridurrà a $\frac{d\omega}{\omega\sqrt{\left(\frac{d^2F}{2df^2}\right)}}$; il cui integrale è $\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2F}{2df^2}\right)}} \times l\frac{\omega}{k}$; essendo k una costante arbitraria. Se quindi si ha $\omega = 0$ e si assume nello stesso tempo anche $k = 0$, è chiaro che il valore di $l\frac{\omega}{k}$ diverrà indeterminato; e l'equazione potrà sempre sostituire qualunque sia il valore che potrà avere l'altro membro $\int \frac{du}{\sqrt{U}}$. Si sa, ed è chiaro per se stesso che $F = 0$ e $\frac{dF}{df} = 0$, sono le condizioni che rendono f una radice doppia dell'equazione $F = 0$. Da ciò segue in generale che se il polinomio S ha una o più radici doppie, ognuna di queste radici fornirà un valore particolare di s; sarà così anche per il polinomio U.

Ora è chiaro che l'equazione $s = f$ o $r + q = f$ rappresenta un ellisse, i cui due fuochi sono nei due centri dei raggi r e q, e il cui asse maggiore è uguale a f. Anche l'equazione $u = g$ o $r - q = g$ rappresenta un'iperbole i cui fuochi sono negli stessi centri e il cui asse è g.

Così le soluzioni particolari indicate danno ellissi o iperbole descritte attorno ai centri delle forze $\frac{\alpha}{r^2}, \frac{\beta}{r^2}$ presi come fuochi. E siccome i polinomi S e V contengono le tre costanti arbitrarie A, B, C dipendenti dalla direzione e dalla velocità iniziale del corpo, è chiaro che si potrà sempre prendere questi elementi in modo tale che il corpo descriva un ellisse o un'iperbole data attorno ai fuochi assegnati. Così la stessa sezione conica che può essere descritta in virtù di una forza tendente a uno dei fuochi in ragione inversa dei quadrati delle distanze, o tendente al centro in ragione diretta delle distanze, può esserlo ancora in virtù di tre forze simili tendenti ai due fuochi e al centro; e ciò è alquanto significativo.

25. Se il centro delle forze Q la cui posizione è stata determinata in generale dalle coordinate a, b, c (art. 22), non è fisso, ma ha un movimento noto, allora queste quantità a, b, c non saranno più costanti, ma diverranno funzioni del tempo t. Tuttavia è chiaro che le equazioni (1), (2), (3) varranno lo stesso, poiché la quantità V resterà la stessa, così come i suoi differenziali relativi a r, ψ, ϕ; ma l'integrale (4) non varrà più come abbiamo già evidenziato nell'art. 4.

Non sarà lo stesso se si volesse che il centro delle forze R, al quale riferiamo il moto del corpo, fosse esso stesso in movimento. Allora per avere le coordinate x, y, z del moto assoluto del corpo, bisognerebbe prendere la somma di quelle di questo centro riferito a un punto fisso nello spazio, e di quelle del corpo riferito a questo stesso centro.

Indicando così con X, Y, Z le coordinate per il centro delle forze R, e rappresentando come sopra il moto del corpo attorno a questo centro per mezzo del raggio r e i due angoli ψ e ϕ, si avrebbe nel caso attuale

$$x = X + r\cos\psi\cos\phi \quad y = Y + r\cos\psi\sin\phi \quad z = Z + r\sin\psi$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} dx^2+dy^2+dz^2 &= dX^2+dY^2+dZ^2 \\ &+2dXd.\left(r\cos\psi\cos\phi\right) + 2dYd.\left(r\cos\psi\sin\phi\right) \\ &+2dZd.\left(r\sin\psi\right) + r^2\left(\cos\psi^2d\phi^2+d\psi^2\right)+dr^2 \end{aligned}$$

Di modo che basterà aggiungere al valore di T dell'art. 17, la quantità

$$\frac{dX^2+dY^2+dZ^2}{2dt^2}+\frac{dXd.(r\cos\psi\cos\phi)}{dt^2}$$
$$+\frac{dYd.(r\cos\psi\sin\phi)}{dt^2}+\frac{dZd.(r\sin\psi)}{dt^2}$$

la quale essendo indicata con T', sarà necessario aggiungere alle tre equazioni dell'articolo citato, o più generalmente a quelle dell'art. 22, i termini

$$d.\frac{\delta T'}{\delta d\psi}-\frac{\delta T'}{\delta\psi}\quad d.\frac{\delta T'}{\delta d\phi}-\frac{\delta T'}{\delta\phi}\quad d.\frac{\delta T'}{\delta dr}-\frac{\delta T'}{\delta r}$$

Per quanto riguarda il valore di V, esso rimarrà lo stesso, purché si continui a prendere il centro delle forze R per l'origine comune delle coordinate a, b, c degli altri centri.

Considerando ora il moto del centro come noto, le sue coordinate X, Y, Z devono essere considerate come funzioni date di t. Così la parte $\frac{dX^2+dY^2+dZ^2}{2dt^2}$ dell'espressione T' sarà una semplice funzione di t e sparirà nella differenziazione rispetto a δ. Basterà quindi prendere per T' gli altri termini e, in base alla nota fatta nell'art. 7 della sez. 4, si troverà facilmente che i termini da aggiungere rispettivamente ai primi membri delle equazioni (1), (2), (3) dell'art. 22 saranno

$$\frac{d^2X}{dt^2}\times -r\sin\psi\cos\phi+\frac{d^2Y}{dt^2}\times -r\sin\psi\sin\phi+\frac{d^2Z}{dt^2}\times r\cos\psi$$
$$\frac{d^2X}{dt^2}\times -r\cos\psi\sin\phi+\frac{d^2Y}{dt^2}\times r\cos\psi\cos\phi$$
$$\frac{d^2X}{dt^2}\times\cos\psi\cos\phi+\frac{d^2Y}{dt^2}\times\cos\psi\sin\phi+\frac{d^2Z}{dt^2}\times\sin\psi$$

Se il moto del centro fosse uniforme e rettilineo, si avrebbe allora $\frac{d^2Z}{dt^2}=0$, $\frac{d^2Y}{dt^2}=0$, $\frac{d^2Z}{dt^2}=0$; e i termini precedenti svanirebbero. In tutti gli altri casi questi termini renderanno le equazioni del moto del corpi più complicate e difficili da integrare; e siccome l'espressione di T racchiuderà sempre il tempo t, a causa delle quantità $\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}$, l'integrale $T+V=cost$, non varrà mai.

26. Abbiamo supposto fin qui che il corpo fosse interamente libero. Se fosse vincolato a muoversi su una data superficie curva, il raggio r sarebbe allora una funzione nota di ϕ e ψ, che conterrebbe anche t, nel caso in cui la superficie stessa fosse variabile, o soltanto mobile secondo una legge data. Dovremmo solo sostituire questo valore di r nelle espressioni di T e di V, e far variare poi le due variabili ψ e ϕ; si avrebbero così due equazioni in grado di determinare il moto del corpo.

Se r è uguale a una costante o a una semplice funzione di t senza ψ né ϕ, le variazioni di questa quantità relative al simbolo δ saranno nulle, e si avranno allora semplicemente le equazioni (1) e (2) dell'art. 22, nelle quali basterà sostituire a r il suo valore dato.

Questo caso racchiude in genere la teoria dei pendoli di lunghezza costante o variabile. Immaginiamo infatti un pendolo semplice la cui lunghezza sia r e che sia sospeso al centro dei raggi r. Supponiamo le forze R dirette verso il centro, nulle; e le forze Q parallele, in allontanamento da loro centro all'infinito. Prendiamo infine per maggiore semplicità, l'asse delle ordinate z verticale e diretto dall'alto in basso e le forze Q nella stessa direzione, si avrà $a=0$, $b=0$, $c=h=\infty$; pertanto $q=\sqrt{(h^2-2hr\sin\psi+r^2)}=h-r\sin\psi$; e le equazioni (1) e (2) dell'articolo citato diverranno

$$\frac{d.r^2d\psi}{dt^2}+\frac{r^2\sin\psi\cos\psi d\phi^2}{dt\grave{\imath}2}-Qr\cos\psi=0$$
$$\frac{d.r^2\cos\psi^2d\phi}{dt^2}=0$$

L'angolo ψ esprimerà l'inclinazione del pendolo all'orizzonte e l'angolo ϕ sarà quello che esso descrive ruotando attorno alla verticale.

La seconda equazione dà dapprima

$$\frac{r^2\cos\psi^2d\phi}{dt}=A$$

da cui

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{A}{r^2\cos\psi^2}$$

e sostituendo questo valore nella prima, si ha

$$\frac{d.r^2d\psi}{dt^2}+\frac{A^2\sin\psi}{r^2\cos\psi^2}-Qr\cos\psi=B$$

da cui si ricava

$$dt=\frac{r^2\cos\psi d\psi}{\sqrt{(A^2+2Br^2\cos\psi^2+2Qr^3\cos\psi^2\sin\psi)}}$$

e poi

$$d\phi=\frac{Ad\psi}{\cos\psi\sqrt{(A^2+2Br^2\cos\psi^2+2Qr^3\cos\psi^2\sin\psi)}}$$

Ma questi differenziali in ψ non sono integrabili a meno di supporre che le variazioni di ψ non siano molto piccole. Si può tuttavia dimostrare con un ragionamento simile a quello dell'art. 24, che il valore di ψ può essere costante, purché renda la quantità sotto il simbolo nulla, così come il suo differenziale; è il caso in cui il pendolo descrive la superficie di un cono retto.

Se il raggio r è variabile, siccome, quando si richiede il moto di un peso sospeso ad un filo che si accorcia o si allunga secondo una legge data, l'equazione non è più integrabile in generale; ma essa lo sarà nel caso immaginario in cui la forza Q sarà reciprocamente proporzionale al cubo della distanza al piano orizzontale che passa per il punto di sospensione. Poiché ponendo $Q = \frac{K}{r^3 \sin\psi^3}$ e moltiplicando tutta l'equazione per $r^2 d\psi$, si avrà l'integrale

$$\frac{\left(r^2 d\psi\right)}{dt^2} - \frac{A^2}{\cos\psi^2} + \frac{K}{\sin\psi^2} = B$$

da cui si ricaverà dt e poi $d\phi$in funzioni differenziali di ψ.

In generale se si rappresenta con $L = 0$, la superficie sulla quale il corpo deve muoversi, essendo L una funzione data di r, ψ, ϕ, t, basterà considerare questa equazione come una equazione di condizione che deve valere tra le variabili r, ψ, ϕ e aggiungere di conseguenza ai primi membri delle equazioni (1), (2), (3) dell'art. 22, i termini $\lambda\frac{dL}{d\psi}$, $\lambda\frac{dL}{d\phi}$, $\lambda\frac{dL}{dr}$; essendo λ una quantità indeterminata che si dovrà eliminare, di modo che resteranno solo due equazioni che combinate con l'equazione $L = 0$, serviranno a determinare completamente la curva e il moto del corpo.

Ma se la curva stessa sulla quale il corpo deve muoversi fosse data, si avrebbero allora due equazioni, $L = 0$ e $M = 0$, e bisognerebbe aggiungere rispettivamente ai primi membri delle equazioni differenziali, (1), (2), (3), i termini $\lambda\frac{dL}{d\psi} + \mu\frac{dM}{d\psi}$, $\lambda\frac{dL}{d\phi} + \mu\frac{dM}{d\phi}$, $\lambda\frac{dL}{dr} + \mu\frac{dM}{dr}$, essendo le due quantità λ e μ indeterminate e che dovranno poi essere eliminate.

Quando L e M non contengono t, si avrà all'istante integrale $T + V = cost$, che è nello stesso tempo privo di λ e μ; ma questo integrale non varrà quando il termine t entrerà nelle equazioni della superficie o curva data.

In questo modo si troveranno molto facilmente le equazioni per il moto di un corpo in un tubo mobile secondo una legge qualsiasi, problema la cui soluzione con i metodi ordinari è alquanto complessa.

2.5.3 Sul moto di parecchi corpi che agiscono gli uni sugli altri, sia con forze attrattive, sia collegati con fili o leve

27. Indicheremo con $m, m', m"$, ecc, le masse dei diversi corpi del sistema, considerati puntiformi, x, y, z le coordinate del corpo m, x', y', z' quelle del corpo m' e così via, essendo tali coordinate tutte riferite agli stessi assi fissi nello spazio; e per meglio fissare le idee, supporremo sempre gli assi x e y orizzontali e gli assi z verticali e diretti dall'alto in basso. Impiegheremo dapprima queste coordinate nelle formule generali, ma le trasformeremo poi in altre più appropriate alla natura dei sistemi proposti.

Si avrà quindi in generale

$$T = m\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2dt^2} + ecc$$

Indicheremo inoltre con P, Q, ecc le forze acceleratrici con le quali ogni punto della massa m tende verso centri dati fissi oppure no, prendendo, se si vuole, la forza acceleratrice della gravità come unitaria; e supporremo queste forze proporzionali a funzioni qualsiasi delle rispettive distanze p, q, r, ecc, dal corpo m a questi centri. Le stesse lettere indicate con un apice rappresenteranno quantità analoghe relativamente al corpo m' e così di seguito.

Si avrà così

$$V = m\int (Pdp + Qdq + ecc) + m'\int (P'dp' + Q'dq' + ecc) + ecc$$

E se i corpi sono animati da una forza verticale e costante π, come quella di gravità, allora P, P', ecc, saranno $= \pi$ e dp, dp', ecc, diverranno $-dz$, $-dz'$, ecc, poiché le z diminuiscono salendo. Di conseguenza si avrà

$$V = -\pi\left(mz + m'z' + m"z" + ecc\right)$$

Quanto alle attrazioni reciproche, è chiaro che se R esprime l'attrazione assoluta o la forza acceleratrice con la quale ogni punto della massa m è attirato da ogni punto della massa m', la forza totale con la quale ogni punto m tende verso il corpo o centro m' sarà espressa da $m'R$. Così indicando con r la distanza tra questi due corpi, si avrà $mm'\int Rdr$ per il termine dovuto a questa attrazione nel valore di V; e così per gli altri.

Infine se dopo aver introdotto nelle funzioni T e V nuove variabili ξ, ψ, ecc, ognuna di esse indipendenti da tutte le altre, si avranno, relativamente a queste diverse variabili, equazioni della forma $d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{d\xi} - \frac{\delta V}{d\xi} = 0$; ma se queste variabili devono ancora soddisfare le equazioni $L = 0$, $M = 0$, ecc, allora ogni variabile ξ darà per il moto del corpo l'equazione differenziale

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{d\xi} + \frac{\delta V}{d\xi} + \lambda\frac{\delta L}{\delta d\xi} + \mu\frac{\delta M}{d\xi} + ecc = 0$$

essendo le quantità λ, μ, ecc, indeterminate da eliminare.

E se si ricorderà che se le funzioni T, V, L, M, ecc non racchiudono il tempo t, si avrà sempre l'integrale $T+V = cost$, il quale racchiude il principio delle forze vive; ma questo integrale cesserà di valere, se la variabile finita t entra in una delle funzioni.

28. Ciò posto, consideriamo dapprima due corpi m e m' che si attraggono reciprocamente con una forza assoluta R e supponiamo che si richieda solo il moto del corpo m' attorno al corpo m. Indicando con ξ, η, ζ le coordinate del

corpo m' rispetto al corpo m preso come centro, essendo queste coordinate riferite ad assi paralleli a x, y, z e passanti per il corpo m, si avrà $x' = x + \xi$, $y' = y + \eta$, $z' = z + \zeta$. Pertanto, si avrà 1°

$$T = (m + m')\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2d\xi^2} + m'\frac{dxd\xi dyd\eta dzd\zeta}{2dt^2} + m'\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + di\zeta^2}{2dt^2}$$

e 2° si avrà

$$V = mm'\int Rdr$$

e ponendo

$$r = \sqrt{\left((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\right)} = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$$

Siccome le variabili x, y, z sono indipendenti tra loro e dalle altre ξ, η, ζ, ognuna di queste variabili fornirà un'equazione e queste saranno

$$\begin{aligned}
(m + m')\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2\xi}{dt^2} &= 0\\
(m + m')\frac{d^2y}{dt^2} + m'\frac{d^2\eta}{dt^2} &= 0\\
(m + m')\frac{d^2z}{dt^2} + m'\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= 0
\end{aligned}$$

da cui si ottiene, integrando

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\frac{m'}{m+m'}\left(\frac{d\xi}{dt} + a\right)\\
\frac{dy}{dt} &= -\frac{m'}{m+m'}\left(\frac{d\eta}{dt} + b\right)\\
\frac{dz}{dt} &= -\frac{m'}{m+m'}\left(\frac{d\zeta}{dt} + c\right)
\end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nell'espressione generale di T, diverrà

$$T = \frac{mm'}{m+m'} \times \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + di\zeta^2}{2dt^2} + \frac{m'^2}{m+m'} \times \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

così T e V contengono solo le variabili ξ, η, ζ dell'orbita di m' attorno a m.

Se si indica, pertanto, con r il raggio vettore di questa orbita, ψ l'inclinazione di questo raggio sul piano ξ, η e ϕ l'angolo della sua proiezione su questo piano con l'asse ξ, si avrà, come già mostrato,

$$\begin{aligned}
\xi &= r\cos\psi\cos\phi\\
\eta &= r\cos\psi\sin\phi\\
\zeta &= r\sin\psi
\end{aligned}$$

e da ciò

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = r^2\left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right) + dr^2$$

Così ponendo

$$T = \frac{mm'}{m+m'} \times \frac{r^2\left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right) + dr^2}{2dt^2}$$

(ometto la costante, poiché scompare nelle differenziazioni) e

$$V = mm'\int Rdr$$

le variazioni di ψ, ϕ, r daranno, dopo aver diviso tutti i termini per $\frac{mm'}{m+m'}$

$$\begin{aligned}
\frac{d.r^2d\psi}{dt^2} + \frac{r^2\sin\psi\cos\psi d\phi^2}{dt^2} &= 0\\
\frac{d.r^2\cos\psi^2 d\phi}{dt^2} &= 0\\
\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right)}{dt^2} + (m+m')R &= 0
\end{aligned}$$

equazioni che si vede essere simili a quelle che abbiamo già trovato e risolto per il moto di un corpo attirato verso un centro fisso (art. 17); di modo che il moto sarà lo stesso nei due casi, supponendo la forza diretta verso il centro fisso, espressa da $(m + m')\,R$.

29. Supponiamo poi tre corpi $m, m', m"$ che si attraggono mutuamente; cioè m, m' con la forza acceleratrice R, $m, m"$ con la forza R' e $m', m"$ con la forza $R"$; e si ricerca il moto relativo di questi corpi.

Conservando le denominazioni dell'articolo precedente relative ai corpi m, m', siano inoltre, per il corpo $m"$ $\xi', \eta'\zeta'$ le coordinate riferite al corpo m come centro; si avrà $x" = x + \xi'$, $y" = y + \eta'$, $z" = z + \zeta'$.

Pertanto 1°

$$\begin{aligned} T &= (m + m' + m")\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + m'\frac{dxd\xi + dyd\eta + dzd\zeta}{2dt^2} + \\ &\quad + m'\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2} + m"\frac{dxd\xi' + dyd\eta' + dzd\zeta'}{dt^2} + \\ &\quad + m"\frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{2dt^2} \quad (a) \end{aligned}$$

2°

$$v = mm'\int Rdr + mm"\int R'dr' + mm"\int R"dr"$$

ponendo

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \\ r' &= \sqrt{(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)} \\ r" &= \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2} \end{aligned}$$

Poiché le variabili x, y, z sono indipendenti, sia tra loro sia dalle altre variabili, le loro variazioni forniranno dapprima equazioni della forma

$$\left.\begin{aligned} (m + m' + m")\,\tfrac{d^2x}{dt^2} + m'\tfrac{d^2\xi}{dt^2} + m"\tfrac{d^2\xi'}{dt^2} &= 0 \\ (m + m' + m")\,\tfrac{d^2y}{dt^2} + m'\tfrac{d^2\eta}{dt^2} + m"\tfrac{d^2\eta'}{dt^2} &= 0 \\ (m + m' + m")\,\tfrac{d^2z}{dt^2} + m'\tfrac{d^2\zeta}{dt^2} + m"\tfrac{d^2\zeta'}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

da cui si ricava, integrando

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= -\left(m'\tfrac{d\xi}{dt} + m"\tfrac{d\xi'}{dt} + a\right) : (m + m' + m") \\ \tfrac{dy}{dt} &= -\left(m'\tfrac{d\eta}{dt} + m"\tfrac{d\eta'}{dt} + b\right) : (m + m' + m") \\ \tfrac{dz}{dt} &= -\left(m'\tfrac{d\zeta}{dt} + m"\tfrac{d\zeta'}{dt} + c\right) : (m + m' + m") \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nell'espressione generale di T, essa si ridurrà a

$$\begin{aligned} T &= \frac{m'\,(m + m")}{m + m' + m"} \times \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2} - \frac{m'm"}{m + m' + m"} \times \frac{d\xi d\xi' + d\eta d\eta' + d\zeta d\zeta'}{dt^2} \\ &\quad + \frac{m"\,(m + m')}{m + m' + m"} \times \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{2dt^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\,(m + m' + m")} \qquad (c) \end{aligned}$$

la quale contiene solo le variabili $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ che entrano nella funzione V e che esprimono i moti relativi di m' e $m"$ attorno a m.

Poiché queste sei variabili sono indipendenti tra loro, si potrebbe dapprima facendole variare separatamente avere sei equazioni differenziali tra di esse; si potrebbe anche ridurre l'espressione T in funzione dei raggi vettori r, r' e degli angoli ψ, ϕ e ψ', ϕ' con le sostituzioni di $\xi = r\cos\psi\cos\phi$, $\eta = r\cos\psi\sin\phi$, $\zeta = r\sin\psi$, $\zeta' = r\cos\psi'\cos\phi'$, ecc; si avrebbero allora equazioni tra queste nuove variabili.

Ma è facile prevedere che queste equazioni non si presenteranno nella forma più semplice, almeno per i termini differenziali, a causa della mescolanza delle variabili nell'espressione di T. Per separare queste variabili, assegnerò a T questa forma

$$\begin{aligned} T &= \frac{mm'}{m + m'} \times \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2} + \frac{m"\,(m + m')}{m + m' + m"} \times \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{2dt^2} \\ &\quad + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\,(m + m' + m")} \end{aligned}$$

e ponendo

$$\alpha = \xi' - \frac{m'}{m + m'}\xi \quad \beta = \eta' - \tfrac{m'}{m+m'}\eta \quad \gamma = \zeta' - \frac{m'}{m + m'}\zeta$$

Sostituendo così in r', r" al posto di ξ', η', ζ' i loro valori

$$\alpha+\frac{m'}{m+m'}\xi \quad \beta+\frac{m'}{m+m'}\eta \quad \gamma+\frac{m'}{m+m'}\zeta$$

si avranno T e V espresse in funzione di $\xi,\eta,\zeta,\alpha,\beta,\gamma$; ed essendo queste variabili pure indipendenti tra loro, forniranno altrettante equazioni differenziali.

Introduciamo ora invece di ξ,η,ζ il raggio r e gli angoli ψ,ϕ, secondo le formule date in precedenza, la parte $\frac{mm'}{m+m'}\times\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{2dt^2}$ del valore di T diverrà $\frac{mm'}{m+m'}\times\frac{r^2\left(\cos\psi^2 d\phi^2+d\psi^2\right)+dr^2}{2dt^2}$ ed è la sola che fornirà termini nelle equazioni dipendenti dalle variazioni di r,ψ,ϕ. Considerando quindi anche r', r" come funzioni di queste stesse variabili, si avranno dapprima queste tre equazioni

$$\begin{aligned}
\frac{mm'}{m+m'}\left(\frac{d.r^2d\psi}{dt^2}+\frac{r^2\sin\psi\cos\psi d\phi^2}{dt^2}\right)+mm\text{"}R'\frac{\delta r'}{\delta\psi}+m'm\text{"}R\text{"}\frac{\delta r\text{"}}{\delta\psi} &= 0\\
\frac{mm'}{m+m'}\times\frac{d.r^2\cos\psi^2d\phi}{dt^2}+mm\text{"}R'\frac{\delta r'}{\delta\phi}+m'm\text{"}R\text{"}\frac{\delta r\text{"}}{\delta\phi} &= 0\\
\frac{mm'}{m+m'}\left(\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{r\left(\cos\psi^2d\phi^2+d\psi^2\right)}{dt^2}\right)+mm'R+mm\text{"}R'-\frac{\delta r'}{\delta\psi}+mm\text{"}R\text{"}\frac{\delta r\text{"}}{\delta r} &= 0
\end{aligned}$$

E per ottenere i valori di $\delta r', \delta r$" in $\delta\psi,\delta\phi,\delta r$, basta considerare che

$$\begin{aligned}
r'\delta r' &= \xi'\delta\xi'+\eta'\delta\eta'+\zeta'\delta\zeta'\\
r\text{"}\delta r\text{"} &= (\xi'-\xi)(\delta\xi'-\delta\xi)+(\eta'-\eta)(\delta\eta'-\delta\eta)+(\zeta'-\zeta)(\delta\zeta'-\delta\zeta)
\end{aligned}$$

e che astraendo dalla variazione di α,β,γ, si ha

$$\begin{aligned}
\delta\xi' &= \frac{m'}{m+m'}\delta\xi\\
\delta\eta' &= \frac{m'}{m+m'}\delta\eta\\
\delta\zeta' &= \frac{m'}{m+m'}\delta\zeta
\end{aligned}$$

di modo che si avrà

$$\begin{aligned}
r'\delta r' &= \frac{m'}{m+m'}(\xi'\delta\xi+\eta'\delta\eta+\zeta'\delta\zeta)\\
r\text{"}\delta r\text{"} &= -\frac{m'}{m+m'}((\xi'-\xi)\delta\xi+(\eta'-\eta)\delta\eta+(\zeta'-\zeta)\delta\zeta)\\
&= \frac{m'}{m\pm m'}(r\delta r-\xi'\delta\xi-\eta'\delta\eta-\zeta'\delta\zeta)
\end{aligned}$$

Sostituendo a ξ,η,ζ i loro valori e introducendo dei valori simili al posto di ξ',η',ζ', cioè, rappresentante analogamente il moto del corpo m" attorno a m con il raggio vettore r' e con gli angoli ψ',ϕ', si trova

$$\xi'\delta\xi+\eta'\delta\eta+\zeta'\delta\zeta=\Psi\delta\psi+\Phi\delta\phi+\Pi\delta r$$

supponendo

$$\begin{aligned}
\Psi &= rr'(\sin\psi'\cos\psi-\cos\psi'\sin\psi\cos(\phi'-\phi))\\
\Phi &= rr'\cos\psi\cos\psi'\sin(\phi'-\phi)\\
\Pi &= r'(\sin\psi'\sin\psi+\cos\psi'\cos\psi\cos(\phi'-\phi))
\end{aligned}$$

di modo che si avrà

$$\begin{aligned}
\delta r' &= \frac{m'}{m+m'}\times\frac{\Psi\delta\psi+\Phi\delta\phi+\Pi\delta r}{r'}\\
\delta r\text{"} &= -\frac{m'}{m+m'}\times\frac{\Psi\delta\psi+\Phi\delta\phi+(\Pi-r)\delta r}{r\text{"}}
\end{aligned}$$

Le equazioni precedenti diverranno quindi, dividendo per $\frac{mm'}{m+m'}$

$$\begin{aligned}
\frac{d.r^2d\psi}{dt^2}+\frac{r^2\sin\psi\cos\psi d\phi^2}{dt^2}+m\text{"}\left(\frac{R'}{r'}-\frac{R\text{"}}{r\text{"}}\right)\Psi &= 0\\
\frac{d.r^2\cos\psi^2d\phi}{dt^2}+m\text{"}\left(\frac{R'}{r'}-\frac{R\text{"}}{r\text{"}}\right)\Phi &= 0\\
\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{r\left(\cos\psi^2d\phi^2+d\psi^2\right)}{dt^2}+(m+m')R+m\text{"}\left[\left(\frac{R'}{r'}-\frac{R\text{"}}{r\text{"}}\right)\Pi+\frac{rR\text{"}}{r\text{"}}\right] &= 0
\end{aligned}$$

le quali hanno, per i termini differenziali, la stessa forma di quelle del moto di un corpo attratto verso un centro fisso.

Si possono trovare allo stesso modo tre equazioni simili per il moto del corpo m" attorno a m; e anche siccome nelle espressioni di T e V, le quantità relative ai corpi m', m" sono tra loro permutabili, basterà cambiare nelle equazioni precedenti le quantità r, ψ, ϕ, R, m' in r', ψ', ϕ', R', m" e reciprocamente queste in quelle; la quantità r" rimarrà la stessa, poiché appartiene ai due corpi di cui esprime la distanza.

Se si avessero più di tre corpi che si attraggono mutuamente, si risolverebbe sempre il problema allo stesso modo, e si troverebbero equazioni simili alle precedenti, ma con un maggior numero di termini a causa delle attrazioni di tutti gli altri corpi.

Ponendo in queste equazioni $R = \frac{1}{r^2}$, $R' = \frac{1}{r'^2}$, $R" = \frac{1}{r"^2}$, ecc, si ha il caso del moto dei Pianeti, in quanto essi si attraggono mutuamente, e sono attratti dal Sole. E se si prende m per la Terra, m' per la Luna e m" per il Sole, le tre equazioni trovate diverranno quelle del problema noto come problema dei tre corpi, del quale i matematici si sono molto occupati in questi ultimi tempi. La circostanza delle orbite della Luna e del Sole quasi circolari, le rende risolvibili per approssimazione, e si possono vedere nelle opere che la trattano, gli artifici immaginati per rendere l'approssimazione la più esatta possibile.

30. Immaginiamo ora che i tre corpi m, m', m", invece di attrarsi tra loro, siano pesanti e uniti da un filo inestensibile, di modo che m', m" siano attaccati alle due estremità del filo e che m lo sia in un punto intermedio qualsiasi e che anche le distanze tra m, m' e tra m, m", rimangano invariate.

Ponendo $x' = +\xi$, $y' = y + \eta$, $z' = z + \zeta$ e $x" = x + \xi'$, $y" = y + \eta'$, $z" = z + \zeta'$, si troverà per T la stessa espressione (a) dell'art. precedente. E il valore di V sarà come nell'art. 27, esprimendo con π la forza acceleratrice della gravità

$$V = -\pi\left(m + m' + m"\right) z - \pi m'\zeta - \pi m"\zeta'$$

Poiché la sola condizione del problema consiste nell'invariabilità delle distanze tra m e m' e tra m e m" e nel fatto che le distanze dipendono solo dalle variabili $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$, è chiaro che le variabili x, y, z sono tra loro indipendenti e anche da tutte le altre; di conseguenza, facendole variare separatamente, si avranno dapprima tre equazioni che saranno le stesse delle equazioni (b) dell'art. precedente, se non che la terza conterrà inoltre i termini costanti $-\pi\left(m + m' + m"\right)$. Da ciò si ricaveranno per $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ le stesse espressioni mettendo al posto di c la quantità $c - \pi\left(m + m' + m"\right)t$. Si avrà, quindi, per T la stessa trasformata (c), avendo cura di diminuire la quantità c di $\pi\left(m + m' + m"\right)$.

Se si pone $\xi = r\cos\psi\cos\phi$, $\eta = r\cos\psi\sin\phi$, $\zeta = r\sin\psi$ e anche $\xi' = r'\cos\psi'\cos\phi'$, $\eta' = r'\cos\psi'\sin\phi'$, $\zeta' = r'\sin\psi'$, è chiaro che i raggi vettori r, r' delle orbite di m', m" attorno a m, cioè, le loro distanze da m, dovranno essere costanti per la natura del problema; operando queste sostituzioni, vi saranno solo quattro variabili ψ, ψ', ϕ, ϕ', che essendo indipendenti, forniranno pure quattro equazioni.

31. Non avendo presentato la ricerca di queste equazioni particolari difficoltà, esse richiedono soltanto un calcolo puramente meccanico; ci limitiamo al caso in cui i tre corpi si muovono in uno stesso piano orizzontale, il quale ha il vantaggio di ammettere una soluzione completa.

Si porrà in questo caso z, z', z" tutti uguali a zero; di conseguenza saranno nulli anche ζ e ζ'. Si avrà così $V = 0$ e

$$\begin{aligned} T &= \frac{m'\left(m + m"\right)}{m + m' + m"} \times \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{2dt^2} - m'm" \times \frac{d\xi d\xi' + d\eta d\eta'}{dt^2} \\ &+ \frac{m'\left(m + m"\right)}{m + m' + m"} \times \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2}{2dt^2} + \frac{a^2 + b^2}{2\left(m + m' + m"\right)} \end{aligned}$$

Sia $\xi = r\cos\phi$, $\eta = r\sin\phi$ $\xi' = r'\cos\phi'$, $\eta' = r'\sin\phi'$, poiché ψ e ψ' sono nulli; il valore di T diverrà, essendo dr e dr' nulli,

$$\begin{aligned} T &= \frac{m'\left(m + m"\right)}{m + m' + m"} \times \frac{r^2 d\phi^2}{2dt^2} - \frac{m'm"}{m + m' + m"} \times \frac{rr'\cos\left(\phi' - \phi\right)d\phi' d\phi}{dt^2} \\ &+ \frac{m"\left(m + m'\right)}{m + m' + m"} \times \frac{r'^2 d\phi'^2}{2dt^2} + \frac{a^2 + b^2}{2\left(m + m' + m"\right)} \end{aligned}$$

Ed essa darà, in virtù delle variazioni di ϕ e ϕ', queste due equazioni differenziali, da cui dipende la soluzione del problema

$$\begin{aligned} m'\left(m + m"\right) r^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} - m'm"rr'\left(\frac{d.\cos\left(\phi' - \phi\right)d\phi'}{dt^2} - \frac{\sin\left(\phi' - \phi\right)d\phi' d\phi}{dt^2}\right) &= 0 \\ m"\left(m + m'\right) r'^2 \frac{d^2\phi'}{dt^2} - m'm"rr'\left(\frac{d.\cos\left(\phi' - \phi\right)d\phi}{dt^2} - \frac{\sin\left(\phi' - \phi\right)d\phi' d\phi}{dt^2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

È chiaro che la somma di queste due equazioni è integrabile e che il suo integrale è

$$m'\left(m + m"\right) r^2 \frac{d\phi}{dt} - m'm"rr' \times \frac{\cos\left(\phi' - \phi\right)\left(d\phi' - d\phi\right)}{dt} + m"\left(m + m'\right) r'^2 \frac{d\phi}{dt} = cost$$

Poiché T non contiene t e $V = 0$, si avrà l'integrale $T = cost$; di modo che per questi due integrali il problema è già ridotto alle differenze prime.

Ma poiché le indeterminate sono ancora mescolate tra loro, per separarle, si porrà $\phi' + \phi = s$ e $\phi' - \phi = u$; cioè $\phi' = \frac{s+u}{2}$ e $\phi = \frac{s-u}{2}$; i due integrali diverranno allora

$$m'\left(m + m"\right) r^2 \left(ds - du\right) + m"\left(m + m'\right) r'^2 \left(ds + du\right) - 2m'm"rr' \cos u ds = Adt$$
$$m'\left(m + m"\right) r^2 \left(ds - du\right)^2 + m"\left(m + m'\right) r'^2 \left(ds + du\right)^2 - 2m'm"rr' \cos u \left(ds^2 - du^2\right) = Bdt$$

essendo A, B due costante arbitrarie.

Si ponga

$$\begin{aligned} M &= m"\left(m + m'\right) r'^2 + m'\left(m + m"\right) r^2 \\ N &= m"\left(m + m'\right) r'^2 - m'\left(m + m"\right) r^2 \end{aligned}$$

si avrà

$$\left(M - 2m'm"rr' \cos u\right) ds + Ndu = Adt$$
$$\left(M - 2m'm"rr' \cos u\right) ds^2 + \left(M + 2m'm"rr' \cos u\right) du^2 + 2Ndsdu = Bdt^2$$

La prima dà

$$ds = \frac{Adt - Ndu}{M - 2m'm"rr' \cos u}$$

e sostituendo questo valore nella seconda, si avrà

$$\left(Adt - Ndu\right)^2 + \left(M^2 - 4m'^2 m"^2 r^2 r'^2 \cos u^2\right) du^2 +$$
$$+ 2N\left(Adt - Ndu\right) du = B\left(M - 2m'm"rr' \cos u\right) dt^2$$

cioè, riducendo

$$\left(M^2 - N^2 - 4m'^2 m"^2 r^2 r'^2 \cos u^2\right) du^2 = \left(BM - A^2 - 2m'^2 m"^2 r^2 r'^2 \cos u^2\right)$$

da cui si ricava

$$dt = du\sqrt{\left(\frac{M^2 - N^2 - 4m'^2 m"^2 r^2 r'^2 \cos u^2}{BM - A^2 - 2m'^2 m"^2 r^2 r'^2 \cos u^2}\right)}$$

e mettendo questo valore di dt nell'espressione precedente di ds si avrà anche ds espresso in u e du.

In tal modo il problema è risolto, o almeno dipende solo dall'integrazione o costruzione di differenziali a una sola variabile.

32. Se il corpo m potesse scorrere lungo il filo, si avrebbe sempre la stessa espressione di T della formula (c) dell'art. 29; ma nelle sostituzioni di $r \cos\psi \cos\phi$, $r' \cos\psi' \cos\phi'$, $r \cos\psi \sin\phi$, ecc, al posto di ξ, ξ', η, ecc, i raggi r, r' che esprimono le differenze dei corpi $m', m"$ rispetto a m, non sarebbero più entrambe costanti, ma solo la loro somma $r + r'$ che è uguale alla lunghezza del filo con il quale i due corpi $m', m"$ sono uniti. Indicando, quindi, con a questa lunghezza, si avrà $r' = a - r$, e, dopo le sostituzioni, si avranno cinque variabili indipendenti, $r, \psi, \phi, \psi', \phi'$, ognuna delle quali fornirà una equazione differenziale, secondo la formula generale.

33. Ma se si supponesse il corpo m fortemente fissato, di modo che il filo che unisce i due corpi m' e $m"$ debba passare per una specie di anello fisso nello spazio, prendendo, per semplicità, questo punto come origine delle coordinate, nelle formule precedenti x, y, z saranno nulli; e l'espressione (a) di T diverrà

$$T = m'\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2} + m"\frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{2dt^2}$$

la quale, con le sostituzioni precedenti, si cambierà in

$$T = m'\frac{r^2\left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right) + dr^2}{2dt^2} + m"\frac{\left(a - r\right)^2\left(\cos\psi'^2 d\phi'^2 + d\psi'^2\right) + dr^2}{2dt^2} \qquad (d)$$

Per il valore di V, si avrà, come nell'art. 30, supponendo i corpi pesanti,

$$V = -\pi\left(m'\zeta + m"\zeta'\right)$$

oppure

$$V = -\pi m' r \sin\psi - \pi m"\left(a - r\right) \sin\psi'$$

E si avranno di nuovo cinque equazioni per le cinque variabili, $r, \psi, \phi, \psi', \phi'$, cioè

$$\begin{aligned}
m'\frac{d^2 r - r\left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right)}{dt^2} + m"\frac{dr^2 + (a-r)\left(\cos\psi'^2 d\phi'^2 + d\psi'^2\right)}{dt^2} - \pi m' \sin\psi - \pi m" \sin\psi' &= 0 \\
\frac{d.\left(r^2 d\psi\right) + r^2 \cos\psi \sin\psi d\phi^2}{dt^2} - \pi r \cos\psi &= 0 \\
\frac{d.(a-r)^2 d\psi' - (a-r)^2 \cos\psi' \sin\psi' d\phi'^2}{dt^2} + \pi\left(a - r\right)\cos\psi' &= 0 \\
\frac{d.\left(r^2 \cos\psi^2 d\phi\right)}{dt^2} &= 0 \\
\frac{d.(a-r)^2 \cos\psi'^2 d\phi'}{dt^2} &= 0
\end{aligned}$$

Le ultime due sono integrabili e danno

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{A}{r^2\cos\psi^2}\qquad\frac{d\phi}{dt}=\frac{B}{(a-r)^2\cos\psi'^2}$$

valori che sostituiti nella seconda e terza le trasformano in

$$\begin{aligned}\tfrac{d.r^2d\psi}{dt^2}+\tfrac{A^2\sin\psi}{r^2\cos\psi^2}-\pi r\cos\psi &= 0\\ \tfrac{d.(a-r)^2d\psi'}{dt^2}+\tfrac{B^2\sin\psi'}{(a-r)^2\cos'^2}+\pi(a-r)\cos\psi' &= 0\end{aligned}$$

la cui integrazione non possibile in generale.

Esse lo saranno se si trascurasse il peso dei corpi; supponendo $\pi=0$, allora le equazioni, moltiplicate, la prima per $r^2d\psi$ e la seconda per $(a-r)\,d\psi'$, si avrebbero gli integrali

$$\begin{aligned}\frac{r^4d\psi^2}{dt^2}+\frac{A^2}{\cos\psi^2} &= C^2\\ \frac{(a-r)^4\,d\psi'^2}{\cos\psi'^2}+\frac{B^2}{\cos\psi'^2} &= D^2\end{aligned}$$

dalle quali si ricava

$$\begin{aligned}\frac{dt}{r^2} &= \frac{d\psi}{\sqrt{\left(C^2-\frac{A^2}{\cos\psi^2}\right)}}\\ \frac{dt}{(a-r)^2} &= \frac{d\psi}{\sqrt{\left(D^2-\frac{B^2}{\cos\psi'^2}\right)}}\end{aligned}$$

si ha allora l'integrale $T+V=cost$, il quale, a causa di $V=0$, diviene, dopo la sostituzione dei valori precedenti di $d\phi,d\phi',d\psi,d\psi'$

$$m'\left(\frac{C^2}{r^2}+\frac{dr^2}{dt^2}\right)+m"\left(\frac{D^2}{(a-r)^2}+\frac{dr^2}{dt^2}\right)=E^2$$

e di conseguenza

$$dt=\frac{dr\sqrt{(m+m')}}{\sqrt{\left(E^2-\frac{m'C^2}{r^2}-\frac{m"D^2}{(a-r)^2}\right)}}$$

Sostituendo questo valore di dt nei quattro integrali precedenti, si avranno equazioni separate, dalle quali si potrà, mediante quadrature, determinare t,ψ,ψ',ϕ,ϕ'.

Del resto, se lo stesso corpo m, invece di essere fisso, come supposto, potesse scorrere liberamente su una superficie, o su una linea data, allora le coordinate x,y,z non sarebbero nulle, ma una di esse sarebbe una funzione data delle altre due, o due di queste coordinate sarebbe date in funzione della terza; e bisognerebbe fare queste sostituzioni nelle stesse espressione di T e V, tenendo poi conto della variazione di queste coordinate.

34. Se il filo, fissato rigidamente ad una delle sue estremità, è caricato con due corpi pesanti m,m', di cui il primo sia il più vicino al punto fisso, si porrà $x'=x+\xi$, $y'=y+\eta$, $z'=z+\zeta$ e le espressioni di T e V diverranno

$$\begin{aligned}T &= (m+m')\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}+m'\frac{dxd\xi+dyd\eta+dzd\zeta}{dt^2}+m"\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{dt^2}\\ V &= -\pi(m+m')z-\pi m'\zeta\end{aligned}$$

Indicando poi con r la parte del filo tra il punto fisso e il corpo m e con r' la porzione tra questo corpo e il successivo m', sarà $x=r\cos\psi\cos\phi$, $y=r\cos\psi\sin\phi$, $z=r\sin\psi$, $\xi=r'\cos\psi'\cos\phi'$, $\eta=r'\cos\psi'\sin\phi'$, $\zeta=r'\sin\psi'$ e considerando r e r' come costanti, si troveranno quattro equazioni per le quattro variabili ψ,ϕ,ψ',ϕ'. Ma queste equazioni non sono in generale integrabili, e la sola soluzione completa si ha nel caso in cui i corpi si muovono su un piano orizzontale. In questo caso ψ,ψ' saranno nulli e $V=0$ e

$$T=(m+m')\frac{r^2d\phi^2}{2dt^2}+m'\frac{rr'\cos(\phi-\phi')\,d\phi'd\phi}{dt^2}+m"\frac{r'^2d\phi'^2}{2dt^2}$$

Questa espressione di T è, come si vede, della stessa forma di quella dell'art. 31; essa fornirà, pertanto, equazioni simili, a parte i coefficienti, e che si integreranno di conseguenza allo stesso modo.

Si troveranno con un procedimento simile, le equazioni del moto di un filo caricato da un numero di corpi a piacere; ma la difficoltà consisterà nella loro integrazione; e conosco solo un caso in cui sia possibile in generale; è quello in cui si suppone che i corpi si allontanino poco dalla verticale, poiché, essendo la posizione verticale del filo è quella del suo equilibrio, questo caso sarà affrontabile con il metodo generale esposto nella primo paragrafo di questa sezione.

35. Quando i corpi si allontanano poco dalla verticale, che è rappresentata dall'asse z, le coordinate x, y, x', y', ecc, sono molto piccole; è per questo che converrà conservare queste coordinate nel calcolo. Indicando quindi con r, r', r", ecc, le parti del filo tra il punto fisso e il primo corpo m, tra questo e il successivo m', tra questo e il corpo m", e così di seguito, si avrà $r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, $r' = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$, ecc, da cui si ricava $z = \sqrt{(r^2-x^2-y^2)}$, $z'-z = \sqrt{\left(r'^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2\right)}$,ecc; cioè, a causa della piccolezza di x, x', y, y', ecc,

$$\begin{aligned} z &= r - \frac{x^2+y^2}{2r} \\ z'-z &= r' - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'} \end{aligned}$$

ecc; così i valori di z, z', z", ecc, saranno

$$\begin{aligned} z &= r - \frac{x^2+y^2}{2r} \\ z' &= r + r' - \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'} \\ z" &= r + r' + r" - \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'} - \frac{(x"-x')^2+(y"-y')^2}{2r"} \end{aligned}$$

ecc.

Sostituendole nelle espressioni generali di T e V dell'art. 27, e ponendo r, r', r", ecc, costanti, e trascurando i termini in cui le variabili x, y, x', y', ecc, supereranno il secondo grado, si avrà

$$\begin{aligned} T &= m\frac{dx^2+dy^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2+dy'^2}{2dt^2} + m"\frac{dx"^2+dy"^2}{dt^2} + ecc \\ V &= -\pi(m+m'+m"+ecc)\,r - \pi(m'+m"+ecc)\,r' - \pi(m"+ecc) - ecc \\ &\quad +\pi(m+m'+m"+ecc)\frac{x^2+y^2}{2r} + \pi(m'+m"+ecc)\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'} \\ &\quad +\pi(m"+ecc)\frac{(x"-x')^2+(y"-y')^2}{2r"} + ecc \end{aligned}$$

Si vede che in queste espressioni le variabili x, x', ecc, sono separate dalle variabili y, y', y", ecc e che le une e le altre intervengono allo stesso modo; da cui si può concludere che si avranno due sistemi di equazioni differenziali indipendenti e simili tra loro, una tra $x, x', x", ecc$, e l'altra tra y, y', y", ecc; di modo che basterà considerarne uno solo e ci si potrà pure dispensare, poiché si avranno immediatamente i valori finiti di x, x', x", ecc, da espressioni come quelle di ξ, ψ, ϕ, ecc, date nell'art. 10, e anche i valori di y, y', y", ecc saranno della stessa forma, e differiranno solo per le costanti arbitrarie.

L'espressione di V nella quale la parte variabile è composta di quadrati tutti positivi, fa vedere che i valori di x, x', x", ecc, e di y, y', y", ecc, non potranno contenere archi di cerchio, ma solo seni e coseni reali, di modo che i corpi potranno compiere solo piccole oscillazioni attorno alla verticale, come abbiamo dimostrato in generale nell'art. 14. Ci si è già assicurato che i valori dei coefficienti $\sqrt{k}, f, g, h$, ecc, saranno tutti reali; e si tratterà solo di determinarli con i metodi dell'art. 13.

Poiché questi valori sono gli stessi per le espressioni di x, x', x", ecc, e di y, y', y", ecc, basterà tener conto delle primitive di queste variabili, nella formazione delle quantità A e B. Si cambieranno quindi in T e V le quantità $\frac{dx}{dt}, \frac{dx'}{dt}, \frac{dx"}{dt}$, ecc, così come x, x', x", ecc, in e, f, g, ecc. e eliminando tutti i termini, si avrà

$$\begin{aligned} A &= m\frac{e^2}{2} + m'\frac{f^2}{2} + m"\frac{g^2}{2},\ ecc \\ B &= (m+m'+m"+ecc)\frac{e^2}{2r} + \pi(m'+m"+ecc)\frac{(f-e)^2}{2r'} + \pi(m"+ecc)\frac{(g-f)^2}{2r"} + ecc \end{aligned}$$

da cui, ponendo $AK - B = \Delta$ e poi

$$\frac{d\Delta}{de} = 0 \quad \frac{d\Delta}{df} = 0 \quad \frac{d\Delta}{dg} = 0,\ ecc,$$

si ricaveranno queste equazioni, da cui si avrà che $e = 1$,

$$\begin{aligned} mek - \pi(m+m'+m"+ecc)\tfrac{e}{r} + \pi(m'+m"+ecc)\tfrac{f-e}{r'} &= 0 \\ m'fk - \pi(m'+m"+ecc)\tfrac{f-e}{r'} + \pi(m"+ecc)\tfrac{g-f}{r"} &= 0 \\ m"'gk - \pi(m"+ecc)\tfrac{g-f}{r"} + \pi(m'"+ecc)\tfrac{h-g}{r'"} &= 0 \end{aligned}$$

ecc.

Il numero di queste equazioni sarà uguale a quello delle variabili $x, x', x"$, ecc, cioè a quello dei pesi $m, m', m"$, ecc, attaccati al filo; e di conseguenza uguale al numero delle quantità e, f, g, ecc; di modo che, poiché $e = 1$, resterà sempre un'equazione per la determinazione di k. Ponendo così $e = 1$, la prima equazione darà f, la seconda g, ecc, in polinomi di k del primo, secondo, ecc, grado, e l'ultimo conterrà solo k, e sarà di grado uguale al suo ordine.

Ma si faciliterà questa determinazione iniziando con l'ultima equazione e risalendo successivamente a quelle che precedono. Per questo indicheremo con $\mu, \mu', \mu"$, ecc, $\rho, \rho', \rho"$, ecc, $a, a', a"$, ecc, le quantità $m, m', m"$, ecc, $r, r', r"$, ecc, e, f, g, ecc, prese all'inverso, saranno

$$\begin{aligned}
\mu a k - \pi\mu\frac{a-a'}{\rho} &= 0\\
\mu' a' k - \pi\left(\mu+\mu'\right)\frac{a'-a"}{\rho'} + \pi\mu\frac{a-a'}{\rho} &= 0\\
\mu" a" k - \pi\left(\mu+\mu'+\mu"\right)\frac{a"-a'"}{\rho"} + \pi\left(\mu+\mu'\right)\frac{a'-a"}{\rho'} &= 0
\end{aligned}$$

ecc.

Indicando con n il numero dei pesi, si avrà $a^{n-1} = e = 1$, inoltre si vede dalla prima delle equazioni sopra, la quale si trova qui per ultima, che il termine che precederebbe e nella serie e, f, g,ecc, deve essere nullo; di conseguenza bisognerà porre $a^n = 0$; e questa condizione fornirà l'equazione in k. Infatti, se si ricavano successivamente dalle equazioni precedenti i valori di $a', a", a'"$, ecc, essi avranno la forma $a' = (1)\,a$, $a" = (2)\,a$, $a'" = (3)\,a$, ecc, dove $(1), (2), (3)$, ecc, indicano polinomi in k di primo, secondo, terzo, ecc, grado. Così la condizione $a^{n-1} = 1$, darà $(n-1)\,a = 1$, da cui si ricava $a = \frac{1}{(n-1)}$; e poi la condizione $a^n = 0$ darà $(n) = 0$; è l'equazione in k, di cui si sa già che le radici devono essere tutte reali, positive e diverse.

Se i pesi sono tutti uguali tra loro, così come le loro distanza sul filo, si avrà allora $\mu = \mu' = \mu"$, ecc, e $\rho = \rho' = \rho"$, e $c = r$; ponendo, quindi, $\frac{rk}{\pi} = c$, le equazioni diverranno

$$\begin{aligned}
a\left(c-1\right) + a' &= 0\\
a'\left(c-3\right) + 2a" + a &= 0\\
a"\left(c-5\right) + 3a'" + 2a' &= 0
\end{aligned}$$

ecc. da cui si ricava $a' = (1)\,a$, $a" = (2)\,a$, ecc, ponendo

$$\begin{aligned}
(1) &= 1-c\\
(2) &= 1-2c+\frac{c^2}{2}\\
(3) &= 1-3c+\frac{3c^2}{2}-\frac{c^2}{2\cdot 3}
\end{aligned}$$

ecc, e in generale

$$(q) = 1 - qc + \frac{q\left(q-1\right)}{4}c^2 - \frac{q\left(q-1\right)\left(q-2\right)}{4\cdot 9}c^3 + ecc$$

L'equazione in k sarà quindi

$$1 - nrk + \frac{n\left(n-1\right)}{4}r^2k^2 - \frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{4\cdot 9}r^3k^3 + ecc = 0$$

ma la risoluzione generale di questa equazione non è ancora nota.

Del resto, siccome l'ultimo termine di questa equazione si trova diviso per $1, 2, 3...n$, se la si moltiplica tutta per questo numero e la si dispone in ordine inverso, essa diviene

$$r^nk^n - n^2r^{n-1}k^{n-1} + \frac{n^2\left(n-1\right)^2}{2}r^{n-1}k^{n-1} - \frac{n^2\left(n-1\right)^2\left(n-2\right)^2}{2\cdot 3}r^{n-1}k^{n-1} + ecc = 0$$

ma non è facile da risolvere.

36. Se si prolunga il filo oltre il peso più in basso, facendolo passare poi in un anello posto sulla verticale, e con un ulteriore peso M attaccato alla sua estremità allo scopo di tenderlo, basta solo aggiungere alle espressioni di T e V i termini dovuti all'azione di questo nuovo peso. Siccome per il tipo di problema questo peso non può salire o scendere, rimanendo sempre sulla stessa verticale che abbiamo preso per asse z, è chiaro che chiamando ζ la distanza dal punto fisso che abbiamo supposto essere il centro delle coordinate, basterà aggiungere a T il termine $M\frac{d\zeta^2}{2dt^2}$ e a V il termine $-\pi M\zeta$ (art. 27); e si avrà ζ espresso in funzione di x, y, x', y', ecc.

A questo scopo basta considerare l'anello e il peso M come due nuovi pesi attaccati al filo, dove il primo può scorrere lungo il filo, rimanendo sempre a una stessa distanza γ dal punto fisso del filo e sulla stessa verticale; allora

γ e ζ saranno i due ultimi termini della serie $z, z', z"$, ecc, e saranno, di conseguenza, espressi dalle stesse formule, osservando che i corrispondenti termini nelle serie $x, x', x"$, ecc $y, y', y"$, ecc, devono essere nulli. Si avrà così

$$\begin{aligned}\gamma &= r + r' + r" + ecc + r^n - \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'} \\ &\quad - \frac{(x"-x')^2+(y"-y')^2}{2r"} - ecc - \frac{\left(x^{n-1}\right)^2+\left(y^{n-1}\right)^2}{2r^n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta &= r + r' + r" + ecc + r^{n+1} - \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'} \\ &\quad - \frac{(x"-x')^2+(y"-y')^2}{2r"} - ecc - \frac{\left(x^{n-1}\right)^2+\left(y^{n-1}\right)^2}{2r^n}\end{aligned}$$

(gli esponenti $n-1$ e n indicano, come si vede, l'ordine e non delle potenze), essendo n il numero dei pesi attaccati al filo tra il punto di sospensione e l'anello. Ora $r + r' + r" + ecc + r^{n+1}$ è la lunghezza di tutto il filo dal punto fisso fino al peso M, la quale è data e di conseguenza costante, e che indicheremo con b; e $r + r' + r" + ecc + r^{n-1}$ è la lunghezza del filo dal punto di sospensione fino all'ultimo dei pesi m, m', ecc, m^{n-1}, la quale è pure assegnata e che indicheremo con λ. Così la prima equazione darà il valore di r^n parti del filo comprese tra il peso m^{n-1} e l'anello; e questo valore sarà, in confronto alle quantità molto piccole di secondo grado, uguale a $\gamma - \lambda$. Di modo che si avrà

$$\zeta = b - \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'} - \frac{(x"-x')^2+(y"-y')^2}{2r"} - ecc - \frac{\left(x^{n-1}\right)^2+\left(y^{n-1}\right)^2}{2(\gamma-\lambda)}$$

Poiché si trascurano in T e V i termini molto piccoli di un ordine superiore al secondo, è chiaro che la quantità $M\frac{d\zeta^2}{2dt^2}$ da aggiungere a T sarà nulla; di modo che il valore di T, e di conseguenza anche quello di A che ne è derivato, diminuirà come nell'art. precedente. Quanto al valore di V, al quale si deve aggiungere la quantità $-\pi M\zeta$, si vede che basterà aumentare di πM i coefficienti di $\frac{x^2+y^2}{2r"}$, $\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2'r}$, ecc, nell'espressione di V dello stesso articolo e aggiungere inoltre i termini $-\pi Ml + \pi M\frac{\left(x^{n-1}\right)^2+\left(y^{n-1}\right)^2}{2(\gamma-\lambda)}$. Così la quantità B diverrà, indicando con i l'ultimo termine della serie, e, f, g, ecc,

$$\begin{aligned}B &= \pi(M+m'+m"+ecc)\frac{e^2}{2r} + \pi(M+m'+m"+ecc)\frac{(f-e)^2}{2r'} \\ &\quad + \pi(M+m"+ecc)\frac{(g-f)^2}{2r"} + ecc + \pi M\frac{i^2}{2(\gamma-\lambda)}\end{aligned}$$

Indichiamo, come prima, con $\mu, \mu', \mu"$, ecc, $\rho, \rho', \rho"$, ecc, $a, a', a"$, ecc, le quantità $m, m', m"$, ecc, $r, r', r"$, ecc, e, f, g, ecc, i prese all'inverso, è chiaro che i valori di A e B espressi da queste quantità saranno

$$\begin{aligned}A &= \mu\frac{a^2}{2} + \mu'\frac{a'^2}{2} + \mu"\frac{a"^2}{2} + ecc \\ B &= \pi M\frac{a^2}{2(\gamma-\lambda)} + \pi(M+\mu)\frac{(a-a')^2}{2\rho} + \pi(M+\mu+\mu')\frac{(a'-a")^2}{2\rho'} + ecc\end{aligned}$$

Così le equazioni tra a, a', ecc, saranno $\frac{d\Delta}{da} = 0$, $\frac{d\Delta}{da'} = 0$, ecc, ponendo $\Delta = Ak - B$, cioè

$$\begin{aligned}\mu ak - \pi M\frac{a}{\gamma-\lambda} - \pi(M+\mu)\frac{a-a'}{\rho} &= 0 \\ \mu' a' k - \pi(M+\mu)\frac{a-a'}{\rho} + \pi(M+\mu+\mu')\frac{a'-a"}{\rho'} &= 0 \\ \mu" a" k + \pi(M+\mu+\mu')\frac{a'-a"}{\rho'} - \pi(M+\mu+\mu'+\mu")\frac{a"-a'"}{\rho"} &= 0\end{aligned}$$

ecc., nelle quali a^{n-1} dovrà essere $= 1$ e $a^n = 0$.

Si procederà alla risoluzione di queste equazioni nel modo descritto nell'art. precedente, e basterà sostituire i valori trovati nelle formule generali dell'art. 10. Ma siccome queste equazioni sono ancora più complesse di quelle, si può incoraggiare la ricerca di una soluzione generale almeno nel caso in cui il peso M che tende il filo sia infinitamente maggiore di tutti i pesi m, m', ecc, che caricano il filo; in tale caso le equazioni si semplificano e divengono

$$\begin{aligned}\mu ak - \pi M\left(\frac{a}{\gamma-\lambda} + \frac{a-a'}{\rho}\right) &= 0 \\ \mu' a' k - \pi M\left(\frac{a-a'}{\rho} - \frac{a'-a"}{\rho'}\right) &= 0 \\ \mu" a" k - \pi M\left(\frac{a'-a"}{\rho'} - \frac{a"-a'"}{\rho"}\right) &= 0\end{aligned}$$

ecc.

Supponiamo inoltre le distanze $\rho, \rho', \rho"$, ecc, tra i pesi uguali, così come i pesi μ, μ', $\mu"$, ecc, e con $\frac{\mu}{\pi M}\rho k = c$, si avrà

$$\begin{aligned} a\left(c-1-\frac{\rho}{\gamma-\lambda}\right) &= 0 \\ a'(c-2)+a+a" &= 0 \\ a"(c-2)+a'+a'" &= 0 \end{aligned}$$

ecc., dove si vede che le quantità $a', a", a'"$, ecc, formano una serie ricorrente, il cui termine generale a' sarà del tipo $Aa' + B\zeta'$, e indicando con α e β le due radici dell'equazione $x^2 + (c-2)x + 1 = 0$.

Sia $1 - \frac{c}{2} = \cos\omega$, le due radici dell'equazione saranno $\cos\omega \pm \sin\omega\sqrt{-1}$, e cambiando le costanti A, B in altre C, D, si avrà $a' = C\cos\nu\omega + D\sin\nu\omega$, dove ancora $a' = E\sin(\nu\omega + \varepsilon)$, essendo E e ε due costanti indeterminate.

È necessario dapprima che questa espressione soddisfi alla prima equazione che è di forma diversa dalle altre. Ponendo $\nu = 0$ e $\nu = 1$, si ha $a = E\sin\varepsilon$, $a' = E\sin(\omega+\varepsilon)$, e siccome $c = 2 - 2\cos\omega$, la prima equazione diverrà

$$\left(1-\frac{\rho}{\gamma-\lambda}-2\cos\omega\right)\sin\varepsilon+\sin(\omega+\varepsilon)=0$$

da cui si ricava

$$\tan\varepsilon = \frac{\sin\omega}{\cos\omega - 1 + \frac{\rho}{\gamma-\lambda}}$$

Serve poi che si abbia $\nu^{n-1} = 1$ e $\nu^n = 0$; pertanto

$$\begin{aligned} E\sin((n-1)\omega\pm\varepsilon) &= 1 \\ E\sin(n\omega+\varepsilon) &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\sin((n-1)\omega+\varepsilon)} \\ n\omega+1 &= 180^\circ \times s \end{aligned}$$

essendo s un numero intero qualsiasi.

Quest'ultima equazione servirà a determinare ω, che sarà di conseguenza sempre un angolo reale; e ponendo successivamente $s = 0, 1, 2, ecc, n-1$, si avranno n valori diversi di ω che daranno le n radici di k mediante le formule

$$\begin{aligned} k &= \frac{eM}{\mu\rho} \\ c &= 2-2\cos\omega = 4\sin\frac{\omega^2}{2} \end{aligned}$$

Se si prendesse s più grande di n, si ritroverebbero gli stessi valori di c. In tal modo tutto è determinato e si ha il vantaggio in questo caso di avere espressioni generali, tanto per k quanto per $a, a', a"$, ecc, cioè, per i coefficienti f, g, ecc, $= a^{n-2}, a^{n-3}$, ecc.

Questa soluzione si semplifica quando $\rho = \gamma - \lambda$, cioè quando la parte di filo compresa tra gli ultimi pesi $m, m', m"$, ecc, e l'anello fisso è uguale all'intervallo comune ρ degli stessi pesi; ciò si ha quando tutti i pesi dividono in parti uguali la porzione di filo compresa tra il punto fisso e l'anello. In questo caso si avrà $\tan\varepsilon = \tan\omega$, e di conseguenza $\varepsilon = \omega$. Quindi $\omega = \frac{180^\circ \cdot s}{n+1}$, e $a' = \frac{\sin(\nu+1)\omega}{\sin n\omega}$, o (a causa di $(n+1)\omega = 180^\circ \cdot s$), $a' = \frac{\sin(n-\nu)\omega}{\sin\omega}$, e da ciò $f = \frac{\sin 2\omega}{\sin\omega}$, $g = \frac{\sin 3\omega}{\sin\omega}$ ecc.

Quest'ultimo caso è quello di una corda vibrante caricata di un numero qualsiasi n di piccoli pesi uguali e posti a distanze uguali tra loro, e che essendo fissata ad un'estremità, è tesa da una forza M che agisce all'altra estremità, sia che questa forza derivi da un peso attaccato al filo, sia a una molla, o anche conseguenza dell'elasticità del filo supposto in grado di estendersi e contrarsi. Così la soluzione che risulta dalle formule precedenti, è in accordo con quella che abbiamo dato altre volte con un'analisi diversa.

37. Quanto detto sull'identità degli effetti della tensione prodotta da un peso o dall'elasticità del filo, sembra evidente da sé, almeno fintanto che le oscillazioni sono molto piccole. Tuttavia siccome il problema del moto di un filo inestensibile è diverso da quello delle oscillazioni di un filo estensibile ed elastico, diamo la soluzione diretta di quest'ultimo.

Non vi sono in questo caso equazioni di condizione da soddisfare, ma si deve tener conto della forza elastica del filo, il cui effetto è di accorciare ogni porzione $r, r', r"$, ecc. Siano quindi $R, R', R"$, ecc, le rispettive elasticità delle parti del filo $r, r', r"$, ecc, che uniscono i diversi corpi, elasticità che tendono a diminuire le linee $r, r', r"$,ecc e che si possono supporre espresse da funzioni di queste stesse linee; nel valore di V si avranno i nuovi termini $\int Edr + \int E'dr' + \int E"dr" + ecc$; e basterà sostituire a $r, r', r"$, ecc, i loro valori in x, y, z, x', y', ecc, e di trattare poi tutte queste coordinate come variabili indipendenti.

Così nel caso in cui il filo è fisso nell'origine delle coordinate ed è caricato dei pesi $\pi m, \pi m', \pi m"$, ecc, si avrà in generale

$$\begin{aligned} T &= m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}+m'\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{2dt^2}+ecc \\ V &= -\pi mz-\pi m'z'-ecc+\int Edr+\int E'dr'+ecc \end{aligned}$$

da cui

$$\delta V=-\pi\left(m\delta z+m'\delta z'+ecc\right)+R\delta r+R'\delta r'+ecc$$

e basterà mettere per $\delta r, \delta r'$, i loro valori ricavati dalle formule $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, $r'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$, ecc; poi ognuna delle variabili x, y, ecc, darà un'equazione differenziale della forma generale $d.\frac{\delta T}{\delta dx}-\frac{\delta T}{\delta x}+\frac{\delta V}{\delta x}=0$.

Nel caso in cui i corpi si allontanano molto poco dalla verticale che è qui l'asse delle coordinate z, i valori delle altre coordinate x, y, x', y', ecc, sono molto piccoli e quelli delle quantità r, r', ecc, z, z', ecc, differiscono molto poco da quelle che si hanno nella condizione di equilibrio dove x, y, x', y', ecc, sono nulle.

Supponiamo allora che si abbia $r=p$, $r'=p'$, $r"=p"$, ecc, $z=q'$, $z'=q'$, $z"=q"$, ecc, e sia in generale $r=p+\rho$, $r'=p'+\rho'$, ecc; $z=q+\zeta$, $z'=q'+\zeta'$, ecc. Si avrà pertanto $p=q$, $p'=q'-q$, $p"=q"-q'$, ecc; poi $p+\rho=\sqrt{\left(x^2+y^2+(q+\zeta)^2\right)}$, $p'=\sqrt{\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+(q'-q+\zeta'+\zeta)^2\right)}$, ecc, da cui si ricava trascurando le potenze delle quantità molto piccole x, y, ζ, x', y', ecc, superiori al secondo grado,

$$\begin{aligned} \rho &= \zeta+\frac{x^2+y^2}{2p} \\ \rho' &= \zeta'+\zeta+\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2p'} \\ \rho" &= \zeta"-\zeta'+\frac{(x"-x')^2+(y"-y')^2}{2p'} \end{aligned}$$

ecc.

Siano ora P, P', ecc, i valori di R, R', ecc, quando r, r', ecc, sono p, p', ecc, cioè, le elasticità dei fili quando le loro lunghezze sono ridotte a p, p', ecc; si avrà dalle formule note, mettendo $p+\rho$ al posto di r, $\int Rdr=\int Pdp+P\rho+\frac{dP}{2dp}\rho^2+ecc$, e così per le altre funzioni $\int R'dr'$, ecc. Operando, pertanto, queste sostituzioni, e trascurando i termini dove le quantità molto piccole, supereranno il secondo grado, si avrà

$$\begin{aligned} T &= m\tfrac{dx^2+dy^2+d\zeta'^2}{2dt^2}+m'\tfrac{dx'^2+dy'^2+d\zeta'^2}{2dt^2}+m"\tfrac{dx"+dy"^2+d\zeta"^2}{2dt^2}+ecc \\ V &= \int Pdp-\pi mq+\int P'dp'-\pi m'q'+\int P"dp".\pi m"q"+ecc \\ &\quad +(P-\pi m)\zeta+P'(\zeta'-\zeta)-\pi m'\zeta'+P"(\zeta"-\zeta')-\pi m"\zeta"+ecc \\ &\quad +P\tfrac{x^2+y^2}{2p}+\tfrac{dP}{2dp}\zeta^2+P'\tfrac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2p'}+\tfrac{dP'}{2dp'}(\zeta'-\zeta)^2 \\ &\quad +P"\tfrac{(x"-x')^2+(y"-y')^2}{2p"}+\tfrac{dP"}{2dp"}(\zeta"-\zeta')^2+ecc \end{aligned}$$

Affinché vi sia equilibrio nella situazione in cui le quantità molto piccole x, y, ζ, x', y', ecc, sono nulle, bisogna, come visto nell'art. 9, che le prime dimensioni di queste quantità scompaiano nell'espressione di V; così uguagliando a zero i coefficienti di $\zeta, \zeta', \zeta"$, ecc, si avranno queste equazioni

$$P-\pi m-P'=0 \quad P'-\pi m'-P"=0 \quad P"-\pi m"-P'"=0,\ ecc$$

le quali danno

$$P'=P-\pi m \quad P"=P-\pi(m+m') \quad P'"=P-\pi(m+m'+m")\ ecc$$

Confrontando ora queste espressioni di T e V con quelle del problema dell'art. 36, si vede che esse sono della stessa forma, almeno per la parte contenente le variabili x, y, x', y', ecc, e che devono essere identiche da una parte all'altra ponendo $P=\pi(M+m+m'+m"+ecc)$; di modo che i valori di queste variabili saranno necessariamente gli stessi nei due problemi. Quanto alle altre variabili ζ, ζ', ecc, anch'esse avranno valori simili, cambiando solo le quantità $\frac{P}{p}, \frac{P'}{p'}$, ecc, in $\frac{dP}{dp}, \frac{dP'}{dp'}$, ecc, come si vede dalle espressioni precedenti di T e V. Così non ci arrendiamo di fronte a questo problema.

38. I casi esaminati, danno tutti soluzioni complete, poiché l'ipotesi dei moti molto piccoli rende le equazioni differenziali semplicemente lineari e, di conseguenza, integrabili, come visto nel secondo paragrafo. Vi possono tuttavia essere delle circostanze che annullano i vantaggi di questa ipotesi. Per esempio, se il filo fosse fissato alle due estremità e anche inestensibile, incapace di contrazione, o piuttosto se i corpi fossero uniti da aste dirette tenute assieme da cerniere, e la prima e l'ultima delle quali ruotassero attorno a due punti fissi; allora supponendo sempre che i corpi si allontanino molto poco dalla verticale, si avrebbero per T e V gli stessi valori dell'art. 35, ma con la differenza che le variabili x, y, x', y', ecc, invece di essere del tutto indipendenti tra loro, dovranno soddisfare l'equazione risultante

dalla condizione che l'estremità inferiore del filo sia pure fissa. Indicando con γ la distanza verticale tra questo punto fisso e quello fisso superiore, si avrà, come nell'art. 36,

$$\begin{aligned}\gamma &= r + r' + r" + ecc + r^n - \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'} \\ &\quad - \frac{(x"-x')^2+(y'-y)^2}{2r"} - ecc - \frac{\left(x^{n-2}\right)^2+\left(y^{n-1}\right)^2}{2r"}\end{aligned}$$

dove tutte le quantità $r, r', r2$, ecc, r^n sono dati, poiché queste sono le lunghezze dei diversi fili o aste, che uniscono i corpi in modo che la loro somma $r + r' + r" + ecc + r^n$ esprime la lunghezza totale del filo tra i due punti fissi e, di conseguenza, $r + r' + r" + ecc + r^n - \gamma$ è l'eccesso della lunghezza del filo sulla parte dell'asse al quale corrisponde. Indicando quindi con c^2 questo eccesso che è noto, si avrà l'equazione

$$c^2 = \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'} + \frac{(x"-x')^2+(y'-y)^2}{2r"} + ecc + \frac{\left(x^{n-2}\right)^2+\left(y^{n-1}\right)^2}{2r"}$$

nella quale si vede che le variabili formano dappertutto due dimensioni, di modo che risulta impossibile determinarne una qualunque senza impiegare i radicali.

Si ha quindi qui il caso di cui si tratta in generale nell'art. 16, e che sfugge al metodo generale per la determinazione di moti molto piccoli; ciò che è tanto più singolare supponendo i fili o le aste altrettanto poco estensibili e contraibili è che il problema ha nuovamente una soluzione completa, come visto prima. L'aspetto curioso è che nessuno l'ha ancora fatto.

Per rendere ancora più evidente questa verità, risolviamo il caso precedente nell'ipotesi che vi siano solo due pesi m, m' attaccati al filo e che i moti si svolgano nello stesso piano. Basterà determinare due variabili x, x', essendo tutte le altre nulle per ipotesi.

L'equazione di condizione sarà in questo caso

$$c^2 = \frac{x^2}{2r} + \frac{(x'-x)^2}{2r'} + \frac{x'^2}{2r"}$$

e i valori di T e V saranno come nell'art. 35,

$$\begin{aligned}T &= m\frac{dx^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2}{2dt^2} \\ V &= -\pi(m+m')r - \pi m'r' + \pi(m+m')\frac{x^2}{2r} + \pi m'\frac{(x'-x)^2}{2r'}\end{aligned}$$

Si può, per maggiore semplicità, impiegare l'integrale generale $T + V = cost$, il quale vale in questo caso, poiché l'equazione di condizione non contiene t (art. 4). Si avrà quindi

$$m\frac{dx^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2}{2dt^2} + \pi(m+m')\frac{x^2}{2r} + \pi m'\frac{(x'-x)^2}{2r'} = b^2$$

essendo b una costante arbitraria; e questa equazione combinata con la precedente equazione di condizione, servirà a determinare x, x'.

Supponiamo, per semplificare, i due pesi m, m' uguali, cosi come le lunghezze $r, r', r"$ delle tre aste e $\pi = 1$; e poniamo $x = \xi\sin\phi$; $x' = \xi\cos\phi$, l'equazione di condizione darà

$$\frac{rc^2}{\xi^2} = 1 - \sin\phi\cos\phi = 1 - \frac{\sin 2\phi}{2}$$

e l'equazione differenziale diverrà

$$r\xi^2\frac{d\phi^2}{dt^2} + 2\sin\phi^2 + (\sin\phi - \cos\phi)^2 = \frac{2rb^2}{m}$$

da cui si ricava, sostituendo a ξ^2 il valore ottenuto dalla precedente equazioni

$$dt = \frac{d\phi\sqrt{r}}{\sqrt{\left(\left(\frac{b^2}{mc^2} - 1\right)(2 - \sin 2\phi) + \cos 2\phi\right)}}$$

differenziale la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle sezioni coniche. In tal modo, anche nel caso più semplice, il problema è di un ordine superiore alle funzioni logaritmiche e circolari.

39. Conservando l'ipotesi dei corpi uniti da aste diritte e inflessibili, immaginiamo ora che le cerniere che tengono unite queste aste siano elastiche, cioè, dotate di forze che tendono a rimettere tutti questi lati del poligono in linea retta gli uni con gli altri; basterà introdurre nell'espressione di V i termini dovuti a queste diverse forze, il cui effetto consiste nel diminuire gli angoli di contingenza [N.d.T: angoli che formano una retta con una curva che interseca

o che formano due curve che passano per uno stesso punto; angoli che formano due tangenti a una curva in punti infinitamente vicini] del poligono.

Siano $E, E', E"$, ecc, le forze elastiche che agiscono negli angoli di giunzione delle aste r, r', e $r", r'$, $r", r'"$, ecc, nelle quali sono posti i corpi $m, m', m"$, ecc; e siano $e, e', e"$, ecc, i supplementari di tali angoli, cioè, gli angoli di contingenza del poligono, di cui $r, r', r"$, ecc, sono i lati successivi; i termini da aggiungere a V saranno $\int Ede + \int E'de' + \int E"de" + ecc$, considerando, cosa possibile, $E, E', E"$, ecc come funzioni date di $e, e', e"$, ecc. Si determineranno questi angoli in funzione delle coordinate, come abbiamo fatto nel secondo paragrafo della quinta sezione del primo Capitolo; infatti, è chiaro che se si immagina una retta p che unisce le estremità di due lati contigui r, r', si avrà nel triangolo, di cui r, r', p sono i tre lati, e $180° - e$ è l'angolo opposto al lato p, si avrà, $\cos e = -\frac{r^2+r'^2-p^2}{2rr'}$ e analogamente si avrà $\cos e' = -\frac{r'^2+r"-p'^2}{2r'r"}$, prendendo p' per il terzo lato del triangolo, di cui r, r' sono i primi due e così di seguito. Inoltre è facile vedere che si avrà

$$p = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$$
$$p' = \sqrt{(x" - x')^2 + (y" - y')^2 + (z" - z')^2}$$
$$p" = \sqrt{(x'" - x")^2 + (y'" - y")^2 + (z'" - z")^2}$$

Poiché quindi

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$
$$r' = \sqrt{(x' - x')^2 + (y' - y')^2 + (z' - z')^2}$$
$$r" = \sqrt{(x" - x')^2 + (y" - y')^2 + (z" - z')^2}$$

si avrà

$$\cos e = \frac{x(x'-x)+y(y'-y)+z(z'-z)}{rr'}$$
$$\cos e' = \frac{(x'-x)(x"-x')+(y'-y)(y"-y')+(z'-z)(z"-z')}{r'r"}$$
$$\cos e" = \frac{(x"-x')(x'"-x")+(y"-y')(y'"-y")+(z"-z')(z'"-z")}{r"r'"}$$

ecc.

Si suppone comunemente che la forza elastica nelle lamine a molla è proporzionale all'angolo stesso di contingenza, ma la si può supporre anche proporzionale al seno di questo angolo, poiché nell'infinitamente piccolo, il seno si confonde con l'angolo stesso; sembra anche che questa ipotesi è più conforme al modo in cui si può pensare che la forza elastica è prodotta nella curvatura della molla. Comunque sia, si pone

$$E = H \sin e \quad E' = H' \sin e' \quad E" = H" \sin e", \ ecc$$

essendo H un coefficiente costante, si avrà

$$\int Ede = H(1 - \cos e) \quad \int E'de' = H(1 - \cos e') \quad ecc$$

e basterà sostituire ad e, $\cos e, \cos e'$,ecc, i valori precedenti e procedere poi come di consueto.

Quando le coordinate $x, x', x"$, ecc, $y, y', y"$, ecc, sono molto piccole, come supposto nell'art. 35 e segg., allora si ha, come visto in questo articolo,

$$z = r - \frac{x^2+y^2}{2r}$$
$$z' - z = r' = \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'}$$
$$z" - z' = r" = \frac{(x"-x')^2+(y"-y')^2}{2r"}$$

e così di seguito; sostituendo quindi questi valori nelle espressioni di $\cos e, \cos e', \cos e"$, ecc, e trascurando i termini in cui $x, x', x"$, ecc, $y, y', y"$, ecc, formeranno insieme dimensioni superiori alla seconda, si avrà

$$\cos e = 1 - \frac{x^2+y^2}{2r^2} - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'^2} + \frac{x(x'-x)+y(y'-y)}{rr'}$$
$$\cos e' = 1 - \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2r'^2} - \frac{(x"-x')^2+(y"-y')^2}{2r"^2} + \frac{(x'-x)(x"-x')+(y'-y)(y"-y')}{r'r"}$$

ecc.

Così i termini dovuti all'elasticità nell'espressione di V, saranno

$$\frac{K}{2}\left(\left(\frac{x}{r} + \frac{x'-x}{r'}\right)^2 + \left(\frac{y}{r} + \frac{y'-y}{r'}\right)^2\right) + \frac{K}{2}\left(\left(\frac{x'-x}{r'} + \frac{x"-x'}{r"}\right)^2 + \left(\frac{y'-y}{r'} + \frac{y"-y'}{r"}\right)^2\right)$$
$$+\frac{K}{2}\left(\left(\frac{x"-x'}{r"} + \frac{x'"-x"}{r'"}\right)^2 + \left(\frac{y"-y'}{r'} + \frac{y'"-y"}{r'"}\right)^2\right) + ecc$$

Aggiungendo, pertanto, questi termini al valore di V dell'art. 35, e svolgendo poi il calcolo allo stesso modo, si avrà il movimento di un filo elastico fissato ad una delle sue estremità e caricato da un numero qualsiasi di pesi.

Tutti i problemi che si potrebbero ancora proporre sul moto di numerosi corpi che sono collegati con fili o aste, si risolveranno sempre facilmente applicando le nostre formule generali e non crediamo di dover insistere oltre su questa materia che è solo una pura curiosità.

40. Del resto, la soluzione di questo tipo di problemi si semplifica molto, quando si considera il filo o l'asta che unisce i diversi corpi, come inflessibile e di figura data. Allora vi sono solo le variabili che dipendono dal movimento del filo nello spazio e dal moto dei corpi lungo il filo; e si avranno le formule più semplici esprimendo con queste variabili anche i valori delle coordinate, e introducendo questi valori nelle espressioni generali di T e V, poiché ogni variabile ξ darà sempre un'equazione del tipo

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi} = 0$$

come abbiamo dimostrato.

Supponiamo, per dare un esempio più semplice, che un'asta diritta ruotante attorno ad un punto fisso, sia caricata di un numero di pesi a piacere m, m', m", ecc, e che siano o fissamente attaccati o liberi di scorrere lungo l'asta. Prendendo il punto fisso come origine delle coordinate, si indicheranno con r, r', r", ecc, le distanze variabili o costanti dei corpi m, m', m", ecc, da questo punto, e ξ, ϕ, gli angoli dell'asta con il piano orizzontale x, y, e della sua proiezione su questo piano con l'asse x; è chiaro che le coordinate x, y, z, saranno espresse come nell'art. 17, da $r \cos\psi \cos\phi$, $r \cos\psi \sin\phi$, $r \sin\psi$ e che le altre coordinate x', y', z', x", y", ecc, saranno espresse allo stesso modo, cambiando solo r in r', r", ecc, poiché gli angoli ψ, ϕ sono gli stessi per tutti i raggi r, r', ecc; di conseguenza si avrà

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= r^2 \left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right) + dr^2 \\ dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 &= r'^2 \left(\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2\right) + dr'^2 \end{aligned}$$

ecc, supponendo tutti i corpi m, m', ecc, a loro volta mobili. Così considerando la loro pesantezza o forza costante e verticale π, si avrà (art. 27)

$$\begin{aligned} T &= \left(mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right) \times \frac{\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2}{2dt^2} \\ &\quad + m\frac{dr^2}{2dt^2} + m'\frac{dr'^2}{2dt^2} + m"\frac{dr"^2}{2dt^2} + ecc \end{aligned}$$

$$V = -\pi \left(mr + m'r' + m"r" + ecc\right) \sin\psi$$

e siccome le variabili r, r', r", ecc, ϕ, ψ, sono indipendenti, ognuna di esse fornirà un'equazione differenziale.

Facendo dapprima variare ϕ, si avrà l'equazione differenziale

$$\frac{d.\left(mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right)\cos\psi^2 d\phi}{dt^2} = 0$$

il cui integrale è

$$\frac{\left(mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right)\cos\psi^2 d\phi}{dt} = A$$

Facendo variare poi ψ, si avrà quest'altra equazione differenziale

$$\frac{d.\left(mr^2+m'r'^2+m"r"^2+ecc\right)d\psi}{dt^2} - \frac{\left(mr^2+m'r'^2+m"r"^2+ecc\right)\sin\psi\cos\psi d\phi^2}{dt^2} - \pi\left(mr + m'r' + m"r" + ecc\right)\cos\psi = 0$$

la quale sostituendo per $\frac{d\phi}{dt}$ il suo valore ricavato dall'integrale precedente, diviene

$$\frac{d.\left(mr^2+m'r'^2+m"r"^2+ecc\right)d\psi}{dt^2} - \frac{A^2 \sin\psi}{\left(mr^2+m'r'^2+m"r"^2+ecc\right)\cos\psi^2} - \pi\left(mr + m'r' + m"r" + ecc\right)\cos\psi = 0$$

Questa sarà integrabile, essendo moltiplicata per $\left(mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right)d\psi$, se la quantità $\pi \left(mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + e\right.$ fosse costante o nulla o una funzione di ψ.

Il primo caso vale in generale quando tutte le quantità r, r', r", ecc, sono costanti, cioè, quando i corpi sono fissamente attaccati alle aste. In questo caso è chiaro che le due equazioni in ϕ, ψ, e di conseguenza anche le oscillazioni dell'asta saranno le stesse di un solo corpo M posto ad una distanza R dal punto fisso, di modo che si abbia

$$\begin{aligned} MR^2 &= mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc \\ MR &= mr + m'r' + m"r" + ecc \end{aligned}$$

Il valore di R sarà quindi la distanza dal centro di oscillazione e quella di M sarà la massa da porre in questo centro, perché lo stesso impulso produce lo stesso movimento sia nel pendolo semplice sia in quello composto.

Il caso in cui $\pi \left(mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right)\left(mr + m'r' + m"r" + ecc\right)$ sarà una funzione di ψ, è puramente immaginario e non lo esamineremo. Ci accontenteremo quindi di discutere l'altro caso, in cui questa quantità è nulla, o almeno si elimina con l'ipotesi di $\pi = 0$, caso in cui si trascura il peso dei corpi e che, di conseguenza, il valore di V è nullo.

Eliminando quindi nell'ultima equazione in ψ i termini $\pi\left(mr + m'r' + m"r" + ecc\right)\cos\psi$, e moltiplicando tutta l'equazione per $\pi\left(mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right)d\psi$, essa diviene integrabile e l'integrale è

$$\frac{\left(mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right)d\psi^2}{dt^2} - \frac{A^2}{\cos\psi^2} = B$$

Sia

$$dt = \pi\left(mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right)d\theta$$

si avrà $\frac{d\psi^2}{d\theta^2} - \frac{A}{\cos\psi^2} = B$, da cui si ricava

$$d\theta = \frac{\cos\psi d\psi}{\sqrt{(A^2 + B\cos\psi^2)}} = \frac{d.\sin\psi}{\sqrt{(A^2 + B - B\sin\psi^2)}}$$

e integrando, si avrà

$$\sqrt{\frac{B}{A^2 + B}} \times \sin\psi = \sin\left(\theta\sqrt{B} + \alpha\right)$$

essendo α una costante arbitraria cosi come A e B.

Si avrà poi $d\phi = \frac{Ad\theta}{\cos\psi^2}$; di modo che siccome si conosce già $\sin\psi$ in funzione di θ, si avrà anche, sostituendo e integrando, ϕ in funzione di θ.

Rimangono ancora da determinare i valori delle distanze $r, r', r"$, ecc. Per la massima generalità, supporremo che tra i corpi caricati sull'asta, uno o più di uno siano fissi, di modo che le loro distanza dal centro rimangono costanti; e indicheremo con MR^2 la somma dei prodotti delle masse di questi corpi con il quadrato delle loro distanze. Considerando in tal modo le masse $m, m', m"$, ecc, come mobili, basterà aggiungere alla somma dei termini $mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc$ la costante MR^2.

In questo modo il valore di T diverrà, introducendo $u = \frac{\cos\psi^2 d\phi^2 + d\psi^2}{dt^2} = u^2$,

$$\begin{aligned} T &= \left(MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right)u^2 \\ &\quad + m\frac{dr^2}{2dt^2} + m'\frac{dr'^2}{2dt^2} + m"\frac{dr"^2}{2dt^2} + ecc \end{aligned}$$

e la variabilità di $r, r', r"$, ecc, darà (a causa di $V = 0$) queste equazioni

$$\frac{d^2r}{dt^2} - ru^2 = 0 \quad \frac{d^2r^2}{dt^2} - r'u^2 = 0 \quad \frac{d^2r"}{dt^2} - r"u^2 = 0$$

ecc, le quali danno eliminando u^2

$$\frac{rd^2r^2 - r'd^2r}{dt^2} = 0 \qquad \frac{rd^2r" - r"d^2r}{dt^2} = 0$$

ecc, e integrando

$$\frac{rdr' - r'dr}{dt} = a \qquad \frac{rdr' - r"dr}{dt} = b$$

ecc, essendo a, b, ecc, costanti arbitrarie.

Sia $r' = pr$, $r" = p'r$, ecc, si avrà quindi $r^2dp = adt$, $r^2dp' = bdt$, ecc; quindi $dp' = \frac{bdp}{a}$, $p' = \frac{bp}{a} + \beta$ e analogamente $p" = \frac{cp}{a} + \gamma$, ecc, essendo β, γ altre costanti arbitrarie.

Prendo ora l'integrale generale $T + V = cost$, il quale a causa di $V = 0$, si riduce alla forma

$$\left(MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right)u^2 + m\frac{dr^2}{2dt^2} + m'\frac{dr'^2}{2dt^2} + m"\frac{dr"^2}{2dt^2} + ecc = C^2$$

e sostituendo per $r^2u^2, r'^2u^2, r"^2u^2$, ecc, i valori $\frac{rd^2r}{dt^2}$, $\frac{r'd^2r^2}{dt^2}$, $\frac{r"d^2r"}{dt^2}$, ecc, ricavati dalle equazioni $\frac{d^2r}{dt^2} - ru^2 = 0$, $\frac{d^2r^2}{dt^2} - r'u^2 = 0$ ecc, la riduco alla forma

$$\frac{d^2.\left(MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc\right)}{4dt^2} = C^2$$

la quale dà, con una doppia integrazione

$$MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc = 2Ct^2 + Dt + E$$

essendo D, E due nuove costanti.

Sia per abbreviare

$$MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + m"r"^2 + ecc = z$$

si avrà $z = 2C^2 + Dt + E$, da cui si ricava t in funzione di z; indicheremo questa funzione con Z, si modo che $t = Z$, e differenziando $dt = dZ$; ma abbiamo supposto $dt = zd\theta$, (aggiungendo MR^2 ai termini $mr^2 + m'r'^2 + ecc$, come introdotto sopra) pertanto $zd\theta = dZ$, $d\theta = \frac{dZ}{z}$, e integrando $\theta = \int \frac{dZ}{z}$. Avendo così θ in funzione di z, si avrà reciprocamente z in funzione di θ e indicheremo con Θ questa funzione, di modo che $z = 0$. Di conseguenza di avrà dapprima $dt = \Theta d\theta$, e integrando $t = \int \Theta d\theta$; di modo che si avrà anche t in funzione di θ.

Se nel valore di z si sostituiscono per $r'^2, r"^2$, ecc, i loro valori $pr^2, p'r^2$, ecc, e poi $\frac{bp}{a} + \beta$, ecc, al posto di p', ecc, è chiaro che si avrà $z = MR^2 + r^2P$, essendo P una funzione di p, razionale, intera e del secondo grado. Quindi $r^2 = \frac{Z - MR^2}{P}$ e sostituendo questo valore così come quello di dt nell'equazione differenziale $r^2dp = adt$, si avrà$\frac{z-MR^2}{P}dp = a\Theta d\theta$ cioè, $\frac{dp}{P} = \frac{a\Theta d\theta}{z-MR^2} = \frac{a\Theta d\theta}{\Theta - MR^2}$, equazione separata, la cui integrazione darà p in funzione di θ. E questo valore di p, sostituito nella precedente di r^2, cioè, $r^2 = \frac{z-MR^2}{P} = \frac{\Theta - MR^2}{P}$, si avrà pure r in funzione di θ; e da ciò, poiché $r' = pr$, $r" = p'r = \left(\frac{bp}{a} + \beta\right) r$, ecc, si avranno ancora $r', r"$, ecc, in funzione di θ.

Tutte le variabili $\phi, \psi, t, r, r', r"$, ecc, saranno, pertanto, note in funzione di θ, ed eliminando θ, per mezzo del valore di t in θ, si avranno $\phi, \psi, r, r', r"$, ecc, in funzione di t; ciò darà la posizione dell'asta e quella di ciascuno dei corpi mobili in ogni istante.

Poiché il termine costante MR^2 esprime la somma delle masse dei corpi attaccati all'asta, moltiplicata per i quadrati delle loro distanze dal centro di rotazione, è chiaro che se si vuole tener conto della massa stessa dell'asta, basterà supporre il numero di questi corpi infiniti, e allora MR^2 sarà la somma dei prodotti di ogni particella dell'asta per il quadrato della sua distanza dal centro di rotazione. Così il problema non è più complesso rispetto a quando si trascura la massa dell'asta.

41. In generale quando si vuole tener conto la massa e la forma di questi corpi mobili, basta considerare ogni corpo come l'insieme di una infinità di particelle che conservano tra loro la stessa condizione di un corpo solido, o che possono variare secondo certe leggi, quando il corpo è flessibile o fluido; e abbiamo mostrato al termine della sezione precedente (art. 12 e segg.) come si possa ridurre questa considerazione in calcolo, con differenziazioni e integrazioni relative alla forma del corpo. Tratteremo in sezioni particolari del moto dei corpi solidi e fluidi, poiché questa materia da origine a ricerche importanti e curiose; e ci accontenteremo di dare un esempio del metodo sul moto delle corde vibranti.

Supponiamo il caso dell'art. 37, nel quale il filo è pesante ed estensibile, e indichiamo con Dm la massa di un elemento qualsiasi del filo la cui lunghezza sia Ds; prendendo il simbolo S a rappresentare le integrazioni relative alle differenze indicate con il simbolo D, e mantenendo quelli dello stesso articolo, è chiaro che i valori di T e V si ridurranno alla forma

$$T = S\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2}Dm \qquad V = S\left(-\pi z Dm + \int RdDs\right)$$

essendo R l'elasticità o la forza di contrazione dell'elemento Ds, la quale si può sempre supporre funzione di questo stesso elemento.

Siccome non vi è alcuna equazione di condizione da soddisfare, si avrà, secondo la formula dell'art. 15 della sezione citata, questa equazione generale per il moto del filo o della corda,

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) Dm - \pi S\delta z Dm + SR\delta Ds = 0$$

È chiaro ora che l'elemento Ds della curva è rappresentato da $\sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$; pertanto, differenziando secondo δ, si avrà $\delta Ds = \frac{Dx\delta Dx}{Ds} + \frac{Dy\delta Dy}{Ds} + \frac{Dz\delta Dz}{Ds}$ e di conseguenza

$$SR\delta DS = SR\frac{Dx\delta Dx}{Ds} + SR\frac{Dy\delta Dy}{Ds} + SR\frac{Dz\delta Dz}{Ds}$$

basterà eliminare le doppie differenze indicate da δD sotto il simbolo S, come abbiamo mostrato nell'art. 16 della stessa sezione.

Così si cambierà il termine $SR\frac{Dx\delta Dx}{Ds}$ in $R"\frac{Dx"\delta x"}{Ds"} - R'\frac{Dx'\delta x'}{Ds'} - S\delta x D.\frac{RDx}{Ds}$, indicando con un apice le quantità che si riferiscono all'inizio dell'integrale, cioè. all'estremità superiore del filo, e con due quelle che si riferiscono all'ultimo punto dell'integrale, cioè, all'estremità inferiore del filo.

Si opererà allo stesso modo sui termini simili, e si avranno questa trasformata, nelle quali si trovano sotto il simbolo S solo le semplici variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$.

$$\begin{gathered} S\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}Dm - D.\frac{RDx}{Ds}\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2}Dm - D.\frac{RDy}{Ds}\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2}Dm - \pi Dm - D.\frac{RDz}{Ds}\right)\delta z\right] \\ +R"\left(\frac{Dx"}{Ds"}\delta x" + \frac{Dy"}{Ds"}\delta y" + \frac{Dz"}{Ds"}\delta z"\right) - R'\left(\frac{Dx'}{Ds'}\delta x' + \frac{Dy'}{Ds'}\delta y' + \frac{Dz'}{Ds'}\delta z\right) = 0 \end{gathered}$$

Poiché queste variazioni sono tra loro indipendenti, si avranno dapprima queste tre equazioni indefinite per tutti i punti del filo

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}Dm - D.\frac{RDx}{Ds} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2}Dm - D.\frac{RDy}{Ds} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2}Dm - \pi Dm - D.\frac{RDz}{Ds} &= 0 \end{aligned}$$

Quanto ai termini comprendenti $\delta x', \delta y', \delta z', \delta x", \delta y", \delta z"$, si sottolineerà che se il filo è fissato alle sue due estremità, queste variazioni saranno di per sé nulle, e i termini scompariranno; di modo che in questo caso la soluzione del problema dipenderà unicamente dalle tre equazioni precedenti.

Ma se il filo è fissato solo alla sua estremità superiore e ha quella inferiore libera, allora vi saranno solo le tre variazioni $\delta x', \delta y', \delta z'$ nulle, e per annullare le altre, basterà supporre $R" = 0$. Così in questo caso si dovrà ancora soddisfare alla condizione che R sia nullo all'estremità inferiore del filo.

Per quanto riguarda i valori di Ds e di Dm, è chiaro che Ds, elemento della curva del filo, è $= \sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$ e che Dm, massa di questo elemento, è $= \varepsilon Ds$, essendo ε lo spessore di questo elemento.

42. Se si suppone che il filo si distacchi molto poco dalla forma rettilinea, cioè dall'asse delle z, e di conseguenza anche Dx, Dy di fronte a Dz, si avrà per le quantità del secondo ordine circa $Ds = Dz$. E se si suppone inoltre che il filo sia molto poco estensibile, di modo che le lunghezze s siano quasi costanti nel tempo, si avrà $\frac{d.Ds}{dt}$, e di conseguenza anche $\frac{d.Dz}{dt}$, quasi nulli. L'ultima equazione si ridurrà quindi a $\pi Dm + DR = 0$, da cui si ricava integrando, $R = cost - \pi S\varepsilon Ds$, poiché $Dm = \varepsilon Ds$.

Nella teoria ordinaria delle corde vibranti, si trascura il peso delle loro particelle e le si suppone fissate alle due estremità. Ponendo, quindi, in questo caso $\pi = 0$, si avrà R costante e prendendo pure l'elemento Ds o Dz come costante, si avranno queste due equazioni alle differenze parziali

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{R}{\varepsilon} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{R}{\varepsilon}\frac{D^2y}{Dz^2} = 0$$

il cui integrale completo è, nel caso di ε costante,

$$x, y = f\left(z + t\sqrt{\frac{R}{\varepsilon}}\right) - F\left(z - t\sqrt{\frac{R}{\varepsilon}}\right)$$

indicando con f, F due funzioni arbitrarie.

Questa formula contiene tutta la teoria delle vibrazioni delle corde sonore, come si può vedere nelle Memorie dell'Accademia di Berlino, di Pietroburgo e di Torino.

Nel caso di una catena pesante vibrante, essendo l'estremità inferiore libera, bisogna che R sia nullo; di conseguenza se si iniziano le integrazioni rappresentate dal simbolo S all'estremo superiore della catena dove $z = 0$, si avrà $R = \pi\,(A - S\varepsilon Ds)$, essendo A il valore dell'integrale $S\varepsilon Ds$ per l'intera lunghezza della catena.

Introducendo questa sostituzione nelle prime due equazioni, si avrà, a causa di $Dm = \varepsilon Ds$, e prendendo Ds costante,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \pi\frac{D.\,(A - S\varepsilon Ds)\,Dx}{\varepsilon Ds^2} &= 0 \\ \frac{d^2xy}{dt^2} - \pi\frac{D.\,(A - S\varepsilon Ds)\,Dy}{\varepsilon Ds^2} &= 0 \end{aligned}$$

ma non sono integrabili con alcuni metodi finora noti.

43. Se si volesse considerare il filo come inestensibile, bisognerebbe eliminare nell'espressione di V il termine $S\int RdDs$, e di conseguenza nell'equazione generale il termine $SR\delta Ds$; ma bisognerebbe anche tener conto dell'invariabilità degli elementi Ds, la quale fornisce l'equazione di condizione $Ds - cost = 0$; da cui risulterà il termine $S\lambda\delta Ds$ da aggiungere al primo membro della stessa equazione (art. 13, sez. precedente). Di modo che, siccome questo nuovo termine è del tutto simile a quelle che deve essere eliminato, prendendo λ al posto di R, si avranno sempre le stesse formule.

Ma bisogna notare per le corde vibranti che nel caso di inestensibilità, non si possono supporre le due estremità fisse come in quello dell'estensibilità; affinché la corda sia tesa, una delle due estremità deve essere tirata da una forza che tende a muoverla; e l'ipotesi più semplice da immaginare, come nell'art. 36, è che la corda passi in un anello fisso, e sostiene poi un peso dato πM. In questo modo si avrà per l'estremità inferiore della corda $x", y"$ nulli, e di conseguenza $\delta x" = 0$, $\delta y" = 0$; ma $z"$ sarà variabile ed esprimerà la distanza verticale del peso πM, dall'origine delle coordinate z. E per considerare l'azione di questo peso, bisognerà aggiungere al valore di V il termine $-\pi M z"$, poiché l'azione del peso tende ad aumentare $z"$, e di conseguenza al primo membro dell'equazione generale, il termine differenziale $-\pi M\delta z"$. Poiché $\delta z"$ non è nullo qui come nel caso dell'art. 42, deve rimanere nell'equazione generale il termine $x"\frac{Dz"}{Ds"}\delta z"$, mettendo λ al posto di R nella formula dell'art. 41. Questo termine, una volta aggiunto al precedente, dà

$\left(\lambda" \frac{Dz"}{Ds"} - \pi M\right) \delta z"$, quantità che deve essere nulla indipendentemente da $\delta z"$; da ciò si ha $\lambda" \frac{Dz"}{Ds"} - \pi M = 0$, o anche, a causa di $Dz" = Ds"$, $\lambda" = \pi M$, Così come R, e di conseguenza anche λ è una quantità costante nel caso delle oscillazioni molto piccole, e trascurando il peso della corda, si avrà in generale $\lambda = \pi M$. Da ciò si vede che la forza di tensione πM è nel caso dell'inestensibilità uguale alla forza di contrazione R del filo supposto estensibile.

44. Questi diversi esempi contengono quasi tutti i problemi che i Matematici hanno risolto sul moto di un corpo o di un sistema di corpi; noi li abbiamo scelti di proposito, perché si possa meglio valutare i vantaggi del nostro metodo, confrontando le nostre soluzione con quelle che si trovano nelle opere di MM. Euler, Clairaut, d'Alembert, ecc, e nelle quali si giunge alle equazioni differenziali solo con ragionamenti, costruzioni e analisi spesso assai lunghi e complessi. L'uniformità e la rapidità del percorso di questo metodo sono ciò che lo distingue principalmente da tutti gli altri ed è ciò che vogliamo soprattutto mostrare in queste applicazioni.

2.6 Sulla rotazione dei Corpi

L'importanza e la difficoltà di questa questione mi obbliga a definire una sezione a parte e a trattarla a fondo. Darò dapprima le formule più generali e nello stesso tempo le più semplici per rappresentare il moto di rotazione di un corpo o di un sistema di corpi attorno a un punto. Dedurrò poi da queste formule, con i metodi della quarta sezione, le equazioni necessarie a determinare il moto di rotazione di un corpo soggetto a forze qualsiasi. Infine, presenterò diverse applicazioni di queste equazioni.

Sebbene questo argomento sia stato già trattato da numerosi matematici, la teoria che presentiamo, sarà comunque utile. Da una parte fornirà nuovi metodi risolutivi del celebre problema della rotazione dei corpi di forma qualsiasi; dall'altro servirà a raggruppare sotto uno stesso punto di vista, le soluzioni già date di questo problema, e che sono tutte basate su diversi principi e presentate in diverse forme. Questi raffronti sono sempre istruttivi e sono utili al progresso dell'analisi; si può anche dire che sono necessari nelle condizioni in cui essa si trova oggi, poiché questa scienza si ampia arricchendosi di nuovi metodi divenendo più complessa; e la semplificazione passa attraverso la generalizzazione e la riduzione a metodi che possono offrire tali vantaggi.

2.6.1 Formule generali relative al Moto di rotazione

1. Le formule differenziali trovate nel primo capitolo (art. 55, sez. 5) per esprimere le variazioni delle coordinate di un sistema qualsiasi di punti, le cui distanze sono invariabili, si applicano naturalmente alla ricerca in questione.

Questa ipotesi fa annullare i termini che deriveranno dalle variazioni delle distanze tra i diversi punti, di modo che i termini restanti esprimono ciò che nel moto del sistema vi è di generale e comune a tutti i punti, trascurando i loro moti relativi; è precisamente questo moto comune e assoluto che ci proponiamo di esaminare.

2. Cambiando nelle formule introdotte, il simbolo δ in d, si avranno per il moto assoluto del sistema, queste tre equazioni

$$\begin{aligned} dx &= d\lambda + zdM - ydN \\ dy &= d\mu + xdN - zdL \\ dz &= d\nu + ydL - xdM \end{aligned}$$

nelle quali x, y, z rappresentano le coordinate di ogni punto del sistema rispetto ai tre assi fissi e tra loro perpendicolari; e dove $d\lambda, d\mu d\nu, dL, dM, dN$ sono quantità indeterminate, le stesse per tutti i punti e che dipendono solo dal moto del sistema in generale.

3. Siano x', y', z', le coordinate di un punto determinato del sistema, si avrà quindi anche

$$\begin{aligned} dx' &= d\lambda + z'dM - y'dN \\ dy' &= d\mu + x'dN - z'dL \\ dz' &= d\nu + y'dL - x'dM \end{aligned}$$

di conseguenza se si sottraggono queste formule dalle precedenti, e si pone $x - x' = \xi$, $y - y' = \eta$, $z - z' = \zeta$, si avranno le seguenti equazioni differenziali

$$\begin{aligned} d\xi &= \zeta dM - \eta dN \\ d\eta &= \xi dN - \zeta dL \\ d\zeta &= \eta dL - \xi dM \end{aligned}$$

nelle quali le variabili ξ, η, ζ, rappresenteranno le coordinate dei diversi punti del sistema, prese da un punto determinato dello stesso sistema, punto che chiameremo da ora in poi il centro del sistema.

4. Essendo queste equazioni lineari e del primo ordine soltanto, segue dalla teoria nota per questo tipo di equazioni, che se si indica con $\xi', \xi", \xi'"$ tre valori particolari di ξ, e con $\eta', \eta", \eta'"$, e $\zeta', \zeta", \zeta'"$ i corrispondenti valori di η e ζ, si avranno gli integrali completi

$$\begin{aligned} \xi &= a\xi' + b\xi" + c\xi'" \\ \eta &= a\eta' + b\eta" + c\eta'" \\ \zeta &= a\zeta' + b\zeta" + c\zeta'" \end{aligned}$$

essendo a, b, c tre costanti arbitrarie.

È chiaro che ξ', η', ζ', sono le coordinate di un punto qualsiasi dato del sistema e che anche $\xi", \eta", \zeta"$ e $\xi'", \eta'", \zeta'"$, sono le coordinate di altri due punti del sistema pure assegnati a piacere; queste coordinate avranno la loro origine comune nel centro del sistema.

Conoscendo, così, le coordinate di tre punti dati, si avranno, dalle formule precedenti, i valori delle coordinate per tutti gli altri punti, valori che saranno funzioni lineari simili delle coordinate date.

Ma bisogna determinare le costanti a, b, c.

Per questo noto che poiché nelle equazioni differenziali si sono prese come invariabili le distanze tra i diversi punti del sistema, queste distanze devono essere funzioni delle costanti introdotte dall'integrazione; così basterà prendere qualcuna di queste distanze come date, allo scopo di poter determinare le costanti richieste.

Sia quindi

$$\begin{aligned}
\xi^2+\eta^2+\zeta^2 &= A^2\\
\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2 &= A'^2\\
\xi"^2+\eta"^2+\zeta"^2 &= A"^2\\
\xi'"^2+\eta'"^2+\zeta'"^2 &= A'"^2\\
(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2 &= B'^2\\
(\xi-\xi")^2+(\eta-\eta")^2+(\zeta-\zeta")^2 &= B"^2\\
(\xi-\xi'")^2+(\eta-\eta'")^2+(\zeta-\zeta'")^2 &= B'"^2\\
(\xi'-\xi")^2+(\eta'-\eta")^2+(\zeta'-\zeta")^2 &= C'^2\\
(\xi'-\xi'")^2+(\eta'-\eta'")^2+(\zeta'-\zeta'")^2 &= C"^2\\
(\xi"-\xi'")^2+(\eta"-\eta'")^2+(\zeta"-\zeta'")^2 &= C'"^2
\end{aligned}$$

essendo assegnate $A, A', A", A'", B', B", B'"$, ecc; e ponendo

$$F'=\frac{A^2+A'^2+B'^2}{2}\quad F"=\frac{A^2+A"^2+B"^2}{2}\quad F'"=\frac{A^2+A'"^2+B'"^2}{2}$$
$$G'=\frac{A'^2+A"^2+C'^2}{2}\quad G"=\frac{A'^2+A'"^2+C"^2}{2}\quad G'"=\frac{A"^2+A'"^2+C'"^2}{2}$$

si avrà, al posto delle ultime sei equazioni, queste più semplici

$$\begin{aligned}
\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta' &= F'\\
\xi\xi"+\eta\eta"+\zeta\zeta" &= F"\\
\xi\xi'"+\eta\eta'"+\zeta\zeta'" &= F'"\\
\xi'\xi"+\eta'\eta"+\zeta'\zeta" &= G'\\
\xi'\xi'"+\eta'\eta'"+\zeta'\zeta'" &= G"\\
\xi"\xi'"+\eta"\eta'"+\zeta"\zeta'" &= G'"
\end{aligned}$$

Se nelle prime tre di queste equazioni si sostituiscono i valori di ξ, η, ζ dell'art. precedente, si avrà, in virtù della altre equazioni, le tre seguenti,

$$\begin{aligned}
aA'^2+bG'+cG" &= F'\\
aG'+bA"^2+cG'" &= F"\\
aG"+bG'"+cA'" &= F'"
\end{aligned}$$

da cui si ricaveranno facilmente i valori di a, b, c.

5. Se i tre punti del sistema che abbiamo preso come assegnati (art. 3) sono disposti in modo da formare triangoli rettangoli attorno al centro, il quale ne sarà il vertice comune, cioè, questi punti siano presi sulle tre rette passanti per il centro e formanti tra loro angoli retti, è chiaro che si avrà allora $G'=0$, $G"=0$, $G'"=0$; e le tre equazioni sopra daranno

$$a=\frac{F'}{A'^2}\quad b=\frac{F"}{A"^2}\quad c=\frac{F'"}{A'"^2}$$

6. Del resto, sebbene i tre punti siano a piacere, se si considerano come dati le sei quantità $A', A", A'", G', G", G'"$, è chiaro che le coordinate di uno qualunque di questi punti saranno determinate da quelle delle altre due; per esempio, le coordinate $\xi'", \eta'", \zeta'"$, saranno determinate dalle tre equazioni

$$\begin{aligned}
\xi'\xi'"+\eta'\eta'"+\zeta'\zeta'" &= G"\\
\xi"\xi'"+\eta"\eta'"+\zeta"\zeta'" &= G'"\\
\xi'"^2+\eta'"^2+\zeta'"^2 &= A'"^2
\end{aligned}$$

le quali, nel caso di $G' = 0$, $G" = 0$, $G'" = 0$ danno

$$\begin{aligned}
\xi'" &= (\eta'\zeta" - \zeta'\eta")\,\frac{A'"}{A'A"}\\
\eta'" &= (\zeta'\xi" - \xi'\zeta")\,\frac{A'"}{A'A"}\\
\zeta'" &= (\xi'\eta" - \eta'\xi")\,\frac{A'"}{A'A"}
\end{aligned}$$

7. Sebbene l'analisi precedente sia molto diretta, si può tuttavia giungere agli stessi risultati per un nuova via, partendo da questa considerazione geometrica, che la posizione di un punto qualsiasi nello spazio, è interamente determinata dalle sue distanze da tre punti dati.

Infatti, supponiamo che le coordinate di questi punti siano x', y', z' per le prime, $x2, y", z"$ per le seconde, e $x'2, y'", z'"$ per le terze, e che x, y, z siano in generale le coordinate di un altro punto qualsiasi le cui distanze da questi tre punti siano rappresentate da l, m, n; è chiaro che si avranno queste tre equazioni

$$\begin{aligned}
(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 &= l^2\\
(x - x")^2 + (y - y")^2 + (z - z")^2 &= m^2\\
(x - x'")^2 + (y - y'")^2 + (z - z'")^2 &= n^2
\end{aligned}$$

mediante le quali si potrà determinare x, y, z in funzione di $x', y', z', x"$, ecc.

8. Per facilitare questa determinazione, chiameremo inoltre f, g, h le distanze tra i tre punti dati, cioè, i tre lati del triangolo formato da questi punti; ciò fornirà queste tre equazioni, (358)

$$\begin{aligned}
(x" - x')^2 + (y" - y')^2 + (z" - z')^2 &= f^2\\
(x'" - x')^2 + (y'" - y')^2 + (z'" - z')^2 &= g^2\\
(x'" - x")^2 + (y'" - y")^2 + (z'" - z")^2 &= h^2
\end{aligned}$$

Semplificando

$$\begin{array}{ccc}
x - x' = \xi & y - y' = \eta & z - z' = \zeta\\
x" - x' = \xi' & y" - y' = \eta' & z" - z' = \zeta'\\
x'" - x' = \xi" & y'" - y' = \eta" & z'" - z' = \zeta"
\end{array}$$

e con queste sostituzioni le equazioni precedenti, così come quelle dell'art. precedente, diverranno

$$\begin{gathered}
\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = f^2\\
\xi"^2 + \eta"^2 + \zeta"^2 = g^2\\
(\xi" - \xi')^2 + (\eta" - \eta')^2 + (\zeta" - \zeta')^2 = h^2\\
\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2\\
(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 = m^2\\
(\xi - \xi")^2 + (\eta - \eta")^2 + (\zeta - \zeta")^2 = n^2
\end{gathered}$$

le quali possono divenire queste più semplici

$$\begin{gathered}
\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = f^2\\
\xi"^2 + \eta"^2 + \zeta"^2 = g^2\\
\xi'\xi" + \eta'\eta" + \zeta'\zeta" = \tfrac{f^2+g^2-h^2}{2}\\
\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2\\
\xi'\xi + \eta'\eta + \zeta'\zeta = \tfrac{f^2+l^2-m^2}{2}\\
\xi"\xi + \eta"\eta + \zeta"\zeta = \tfrac{g^2+l^2-n^2}{2}
\end{gathered}$$

9. La difficoltà consiste ora nel trovare le incognite ξ, η, ζ nelle ultime tre equazioni; ponendo

$$\frac{f^2 + l^2 - m^2}{2} = \mu \qquad \frac{g^2 + l^2 - n^2}{2} = r$$

si ricaverà dapprima dalle ultime due

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{\mu\eta" - \nu\eta' - (\zeta'\eta" - \zeta"\eta')\,\zeta}{\xi'\eta" - \xi"\eta'}\\
\eta &= \frac{\mu\xi" - \nu\xi' - (\zeta'\xi" - \zeta"\xi')\,\zeta}{\eta'\xi" - \eta"\xi'}
\end{aligned}$$

e sostituendo questi valori nell'equazione $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=l^2$, si avrà, dopo aver ordinato i termini,

$$\begin{gathered}\left((\eta'\zeta"-\zeta'\eta")^2+(\zeta'\xi"-\xi'\eta")^2+(\xi'\eta"+\eta'\xi")^2\right)\zeta^2+\\ +2\left((\eta'\zeta"-\zeta'\eta")(\mu\eta"-\nu\eta')-(\zeta'\xi"-\xi'\eta")(\mu\xi"-\nu\xi')\right)\zeta=\\ =(\xi'\eta"-\eta'\xi")^2 l^2-(\mu\xi"-\nu\xi')^2-(\mu\eta"-\nu\eta')^2\end{gathered}$$

Rappresentiamo con A il coefficiente di ζ^2, con $2B$ quello di ζ, e con C i due termini $(\mu\xi"-\nu\xi')^2+(\mu\eta"-\nu\eta')^2$, si avrà

$$A\zeta^2+2B\zeta=(\xi'\eta"-\eta'\zeta")^2 l^2-C$$

la quale dà

$$A\zeta+B=\sqrt{\left((\xi'\eta"-\eta'\xi")^2 l^2A+B^2-AC\right)}$$

Si ha

$$\begin{gathered}B^2-AC=(\eta'\zeta"-\zeta'\eta")^2(\mu\eta"-\nu\eta')^2-2(\eta'\zeta"-\zeta'\eta")(\zeta'\xi"-\xi'\zeta")(\mu\eta"-\nu\eta')(\mu\xi"-\nu\xi')\\ +(\zeta'\xi"-\xi'\zeta")(\mu\xi"-\nu\xi')-\left((\eta'\zeta"-\zeta'\eta")^2+(\zeta'\xi"-\xi'\zeta")^2\right)\\ +(\xi'\eta"-\eta'\xi")^2\left((\mu\xi"-\nu\xi')^2+(\mu\eta"-\nu\eta')^2\right)=\\ -2(\eta'\zeta"-\zeta'\eta")(\zeta'\xi"-\xi'\zeta")(\mu\eta"-\nu\eta')(\mu\xi"-\nu\xi')\\ -\left((\zeta'\xi"-\xi'\zeta")^2+(\xi'\eta"-\eta'\xi")^2\right)(\mu\eta"-\nu\eta')^2\\ =-\left((\zeta'\xi"-\xi'\zeta")(\mu\eta"-\nu\eta')+(\eta'\zeta"-\zeta'\eta")(\mu\xi"-\nu\xi')\right)^2\\ -(\xi'\eta"-\eta'\xi")^2\left((\mu\eta"-\nu\eta')^2+(\mu\xi"-\nu\xi')^2\right)\\ =-(\xi'\eta"-\eta'\xi")^2\left((\mu\zeta"-\nu\zeta')^2+(\mu\eta"-\nu\eta')^2+(\mu\xi"-\nu\xi')^2\right)\end{gathered}$$

di modo che ponendo ancora

$$(\mu\zeta"-\nu\zeta')^2+(\mu\eta"-\nu\eta')^2+(\mu\xi"-\nu\xi')^2=D$$

si avrà

$$A\zeta+B=(\xi'\eta"-\eta'\xi")\sqrt{(Al^2-D)}$$

Ma i valori di A,B,D si riducono facilmente alle seguenti espressioni

$$\begin{aligned}A&=\left(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2\right)\left(\xi"^2+\eta"^2+\zeta"^2\right)-(\xi'\xi"+\eta'\eta"+\zeta'\zeta")^2\\ &=f^2g^2-\left(\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\right)-\nu\left(\left(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2\right)\zeta"-(\xi'\xi"+\eta'\eta"+\zeta'\zeta")\zeta'\right)\\ &=\mu^2\left(\xi"^2+\eta"^2+\zeta"^2\right)+\nu^2\left(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2\right)-2\mu\nu(\xi'\xi"+\eta'\eta"+\zeta'\zeta")\\ &=\mu^2g^2+\nu^2f^2-\mu\nu\left(f^2+g^2+h^2\right)\end{aligned}$$

se quindi si sostituiscono questi valori e si pone per semplicità

$$\begin{aligned}a&=\frac{\mu g^2-\nu\frac{f^2+g^2-h^2}{2}}{f^2g^2-\left(\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\right)^2}\\ b&=\frac{\nu f^2-\mu\frac{f^2+g^2-h^2}{2}}{f^2g^2-\left(\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\right)^2}\\ c&=\frac{\sqrt{\left(f^2g^2l^2-\left(\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\right)l^2-\mu^2g^2-\nu^2f^2+\mu\nu\left(f^2+g^2-h^2\right)\right)}}{f^2g^2-\left(\frac{f^2+g^2-h^2}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

si avrà

$$\zeta=a\zeta'+b\zeta"+c(\xi'\eta"-\eta'\xi")$$

Per avere i valori di ξ e di η, basterà notare che le equazioni iniziali rimangono le stesse cambiando rispettivamente le quantità $\zeta,\zeta',\zeta"$ in $\eta,\eta',\eta"$, o in $\xi,\xi',\xi"$; le quantità a,b essendo funzioni razionali di f^2,g^2,h^2,l^2,m^2,n^2 devono pure rimanere le stesse; e la quantità c essendo espressa da una funzione radicale delle stesse quantità f,g, ecc, potrà cambiare di segno; è per questo che si avrà in generale

$$\begin{aligned}\eta&=a\eta'+b\eta"\pm c(\xi'\xi"-\zeta'\zeta")\\ \xi&=a\xi'+b\xi"\pm c(\zeta'\eta"-\eta'\zeta")\end{aligned}$$

Per determinare, inoltre, i segni di c, basterà considerare le due equazioni $\xi'\xi+\eta'\eta+\zeta'\zeta=\mu$, $\xi"\xi+\eta"\eta'+\zeta"\zeta=\nu$; e sostituendo i valori precedenti di ζ,η,ξ, si vedrà che la per soddisfare queste equazioni sarà necessario prendere i segni inferiori di c nelle espressioni di η e di ξ.

si avrà infine

$$\begin{aligned}\xi &= a\xi'+b\xi 2+c\left(\eta'\zeta"-\zeta'\eta"\right)\\ \eta &= a\eta'+b\eta"+c\left(\zeta'\xi"-\xi'\zeta"\right)\\ \zeta &= a\zeta'+b\zeta"+c\left(\xi'\eta"-\eta'\xi"\right)\end{aligned}$$

10. È chiaro che in queste espressioni, le quantità a,b,c essendo funzioni delle distanze f,g,h,l,m,n, dipendono solo dalla rispettiva posizione dei diversi punti gli uni rispetto agli altri; di modo che se si considera questa posizione come invariabile, come nel caso del corpo solido, servirà che a,b rimangano costanti mentre il corpo si muove; e queste quantità solo variabili da un punto del corpo all'altro, al posto delle quantità $\xi',\eta',\zeta',\xi",\eta",\zeta"$, che si riferiscono a punti determinati del corpo, saranno le stesse relativamente a tutti gli altri punti, e varieranno da un momento all'altro durante il moto del corpo.

Per farsi un'idea più precisa di queste diverse quantità rispetto ad un corpo qualsiasi, si considererà che se dal punto dato del corpo che corrisponde alle coordinate x',y',z' e che abbiamo indicato prima come il primo punto, ma che da ora in poi indicheremo come centro del corpo, se da questo punto si tracciano tre assi paralleli agli assi delle coordinate x,y,z, le differenze $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, cioè le quantità ξ,η,ζ non saranno diverse dalle coordinate di un punto qualsiasi del corpo rispetto a questi stessi assi; analogamente le quantità ξ',η',ζ' e $\xi",\eta",\zeta"$ saranno le coordinate di altri due punti dati riferiti agli stessi assi.

Siccome la posizione di questi punti nel corpo è arbitraria, si può supporre per maggiore semplicità, che le loro distanze dal centro del corpo siano $=1$, e che inoltre le rette tracciate dal centro e dai due punti, formano tra loro un angolo retto; dopodiché si avrà $f=1$, $g=1$, e $h^2=f^2+g^2=2$ e ciò semplificherà molto i valori di a,b,c.

Se si immagina ora che il corpo sia posto in modo che le due rette coincidono con gli assi coordinati ξ,η, in modo da avere in questo caso $\xi'=1$, $\eta'=0$, $\zeta'=0$, $\xi"=0$, $\eta"=1$, $\zeta"=0$, e le formule dell'art. 9 daranno $\xi=a$, $\eta=b$, $\zeta=c$.

Da ciò segue che a,b,c non sono diversi dalle coordinate perpendicolari di un punto qualsiasi del corpo, riferite a tre assi passanti per il suo centro, e fissi al suo interno, uno dei quali passa per il punto che corrisponde alle coordinate ξ',η',ζ', l'altro per il punto relativo alle $\xi",\eta",\zeta"$, e il terzo sia ad essi perpendicolare.

11. Si avrà quindi per ogni punto del corpo il sistema di coordinate

$$x=x'+\xi \quad y=y'+\eta \quad z=z'+\zeta$$

nelle quali

$$\begin{aligned}\xi &= a\xi'+b\xi"+c\xi'"\\ \eta &= a\eta'+b\eta"+c\eta'"\\ \zeta &= a\zeta'+b\zeta"+c\zeta'"\end{aligned}$$

e, semplificando,

$$\xi'"=\eta'\zeta 2-\zeta'\eta" \quad \eta'"=\zeta'\xi"-\xi'\zeta" \quad \zeta'"=\xi'\eta"-\eta'\xi"$$

ma bisognerà che le quantità $\xi',\eta',\zeta',\xi",\eta",\zeta"$ soddisfino queste tre equazioni di condizione (art. 8),

$$\begin{aligned}\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2 &= 1\\ \xi"^2+\eta"^2+\zeta"^2 &= 1\\ \xi'\xi"+\eta'\eta"+\zeta'\zeta" &= 0\end{aligned}$$

di modo che si avranno solo sei variabili dipendenti dal cambiamento di situazione del corpo, cioè, le tre x',y',z' che determinano la posizione del centro nello spazio, e tre delle fisse $\xi',\eta',\zeta',\xi"$, ecc. Queste variabili saranno le stesse relativamente a tutti i punti; al contrario le tra quantità a,b,c saranno diverse per ogni punto e dipenderanno solo dalla posizione rispettiva dei punti gli uni rispetto agli altri.

È bene sottolineare, del resto, che le tre quantità $\xi'",\eta'",\zeta'"$ sono anche tali che

$$\begin{aligned}\xi'"^2+\eta"'^2+\zeta"'^2 &= 1\\ \xi'\xi'"+\eta'\eta'"+\zeta'\zeta'" &= 0\\ \xi"\xi'"+\eta"\eta'"+\zeta"\zeta'" &= 0\end{aligned}$$

la prima di queste equazioni segue da

$$\begin{aligned}&\left(\eta'\zeta"-\zeta'\eta"\right)^2+\left(\zeta'\xi"-\xi'\zeta"\right)^2+\left(\xi'\eta"-\eta'\xi"\right)^2=\\ &=\left(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2\right)\left(\xi"^2+\eta"^2+\zeta"^2\right)-\left(\xi\xi"+\eta'\eta"+\zeta'\zeta"\right)^2=1\end{aligned}$$

e le altre due seguono evidentemente da esse stesse.

Così si avrà tra le nove variabili $\xi', \eta', \zeta', \xi", \eta", \zeta", \xi'", \eta'", \zeta'"$, sei equazioni di condizione tutte simili rendendo queste quantità tra loro permutabili.

12. Le formule ricavate con considerazioni particolari, si possono dedurre immediatamente anche dalla semplice considerazione delle coordinate perpendicolari. Infatti, poiché ξ, η, ζ sono le coordinate di un punto qualsiasi del corpo o sistema rispetto a tre assi che si intersecano perpendicolarmente nel centro, e che a, b, c sono pure le coordinate dello stesso punto, ma rispetto ad altri tre assi che si incontrano similmente in questo stesso punto; ne segue, 1°. che ξ, η, ζ si possono esprimere in funzione di a, b, c. 2°. che queste funzioni potranno essere solo lineari; se si suppone tra un'equazione lineare rappresentante un piano qualsiasi, bisognerà che la trasformata in a, b, c sia pure lineare, poiché si sa che l'equazione di un piano è sempre di primo grado, per qualsiasi tipo di coordinate. Così le espressione di ξ, η, ζ in a, b, c possono avere solo la forma seguente

$$\begin{aligned}
\xi &= a\xi' + b\xi" + c\xi'" \\
\eta &= a\eta' + b\eta" + b\eta'" \\
\zeta &= a\zeta' + b\zeta" + c\zeta'"
\end{aligned}$$

essendo le quantità $\xi', \xi", \xi'"$, ecc, le stesse per tutti i punto del corpo, e dipendenti unicamente dalla posizione degli assi di a, b, c rispetto a quelli di ξ, η, ζ.

13. Siccome le coordinate ξ, η, ζ e a, b, c hanno la stessa origine e corrispondono ad uno stesso punto qualsiasi, è chiaro che la distanza di questo punto dall'origine nota delle coordinate, sarà espressa pure da $\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$ e da $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$; serve quindi che le due quantità $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ e $a^2 + b^2 + c^2$ siano identiche e che, di conseguenza, la prima divenga la seconda, sostituendo i valori di ξ, η, ζ in a, b, c.

Facendo queste sostituzioni e confrontando i termini simili, si avranno le sei equazioni di condizione

$$\begin{array}{ccc}
\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1 & \xi"^2 + \eta"^2 + \zeta"^2 = 1 & \xi'"^2 + \eta'"^2 + \zeta'"^2 = 1 \\
\xi'\xi" + \eta'\eta" + \zeta'\zeta" = 0 & \xi'\xi'" + \eta'\eta'" + \zeta'\zeta'" = 0 & \xi"\xi'" + \eta"\eta'" + \zeta"\zeta'" = 0
\end{array}$$

tramite le quali le nove variabili $\xi', \eta', \zeta', \xi"$, ecc, si ridurranno a tre indeterminate; e queste equazioni sono in accordo, come si vede, con quelle dell'art. 11.

14. In generale se si considerano due punti qualsiasi, di cui uno corrisponde alle coordinate ξ, η, ζ e l'altro alle coordinate $\xi 1, \eta 1, \zeta 1$ e che $a, b, c, a1, b1, c1$ siano le altre coordinate corrispondenti agli stessi punti, è chiaro che la distanza tra questi due punti, sarà espressa analogamente da

$$\sqrt{\left((\xi - \xi 1)^2 + (\eta - \eta 1)^2 + (\zeta - \zeta 1)^2\right)}$$

e da

$$\sqrt{\left((a - a1)^2 + (b - b1)^2 + (c - c1)^2\right)}$$

di modo che basterà che si valga sempre questa equazione

$$(\xi - \xi 1)^2 + (\eta - \eta 1)^2 + (\zeta - \zeta 1)^2 = (a - a1)^2 + (b - b1)^2 + (c - c1)^2$$

Ma è chiaro che per avere $\xi 1, \eta 1, \zeta 1$ basterà cambiare a, b, c in $a1, b1, c1$ nelle espressioni generali di ξ, η, ζ; e per avere i valori di $\xi - \xi 1$, $\eta - \eta 1$, $\zeta - \zeta 1$ basterà mettere nelle stesse espressioni $a - a1$, $b - b1$, $c - c1$ al posto di a, b, c. Sostituendo poi questi valori nell'equazione precedente, e confrontando i termini, si avranno le stesse equazioni di condizione prima trovate.

Da ciò si può concludere che queste equazioni sono le sole necessarie per fare in modo che la posizione rispettiva dei diversi punti del sistema sia determinata unicamente dalle quantità a, b, c e non dipenda in alcun modo dalle quantità $\xi', \eta', \zeta', \xi"$, ecc.

15. Con lo stesso metodo è possibile trovare anche altre relazioni significative tra le stesse quantità $\xi', \eta', \zeta', \xi"$, ecc che possono essere utili in numerose occasioni.

E se si sommano le tre formule dell'art. 12, dopo averle moltiplicate rispettivamente per ξ', η', ζ' o per $\xi", \eta", \zeta"$, o per $\xi"', \eta"', \zeta"'$, si avranno, in virtù delle equazioni di condizione dell'articolo precedente, queste formule inverse

$$\begin{aligned}
a &= \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' \\
b &= \xi\xi" + \eta\eta" + \zeta\zeta" \\
c &= \xi\xi"' + \eta\eta"' + \zeta\zeta"'
\end{aligned}$$

sostituendo, quindi, questi valori di a, b, c nell'equazione $a^2 + b^2 + c^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, si avranno per il confronto dei termini, queste nuove equazioni di condizione

$$\begin{array}{ccc}
\xi'^2 + \xi"^2 + \xi'"^2 = 1 & \eta'^2 + \eta"^2 + \eta'"^2 = 1 & \zeta'^2 + \zeta"^2 + \zeta'"^2 = 1 \\
\xi'\eta' + \xi"\eta" + \xi'"\eta'" = 0 & \xi'\zeta' + \xi"\zeta" + \xi"'\zeta'" = 0 & \eta'\zeta' + \eta"\zeta" + \eta'"\zeta'" + \zeta"\zeta'" = 0
\end{array}$$

le quali sono necessariamente una conseguenza di quelle dell'art. precedente, poiché derivano dalla stessa identità.

16, Ma se si cercano direttamente i valori di a, b, c dalla risoluzione delle equazioni dell'art. 12, si avrà, secondo le formule note

$$\begin{aligned} a &= \frac{\xi(\eta"\zeta'"-\eta'"\zeta")+\eta(\zeta"\xi'"-\zeta'"\xi")+\zeta(\xi"\eta'"-\eta"\xi'")}{k} \\ b &= \frac{\xi(\zeta'\eta'"-\zeta'"\eta')+\eta(\xi'\zeta'"-\xi'"\zeta')+\zeta(\eta'\xi'"-\eta'"\xi')}{k} \\ c &= \frac{\xi(\eta\zeta"-\eta"\zeta')+\eta(\zeta'\xi"-\zeta"\xi')+\zeta(\xi'\eta"-\eta'\xi")}{k} \end{aligned}$$

supponendo

$$k = \xi'\eta"\zeta'" - \eta'\xi"\zeta'" - \xi'\zeta"\eta'" + \eta'\zeta"\xi'" - \zeta'\eta"\xi'"$$

Queste espressioni devono essere, pertanto, identiche a quelle dell'art. precedente; confrontando, così, i coefficienti delle quantità ξ, ζ, η si avranno le seguenti equazioni

$$\begin{array}{ccc} \eta"\zeta'" = k\xi' & \zeta"\xi'" - \zeta'"\xi" = k\eta' & \xi"\eta'" - \eta"\xi'" = k\zeta' \\ \zeta'\eta'" - \zeta'"\eta' = k\xi" & \xi'\zeta'" - \xi'"\zeta' = k\eta' & \eta'\xi'" - \eta'"\xi' = k\zeta" \\ \eta'\zeta" - \eta"\zeta' = k\xi'" & \zeta'\xi" - \zeta"\xi' = k\eta'" & \xi'\eta" - \xi"\eta' = k\xi'" \end{array}$$

Se si sommano i quadrati delle prime tre si ha

$$(\eta"\zeta'" - \eta'"\zeta")^2 + (\zeta"\xi'" - \zeta'"\xi")^2 + (\xi"\eta'" - \eta"\xi'")^2 = k^2\left(\xi"^2 + \eta"^2 + \zeta"^2\right)$$

il primo membro si può riscrivere nella forma

$$\left(\xi"^2 + \eta"^2 + \zeta"^2\right) + \left(\xi'"^2 - \eta'"^2 + \zeta'"^2\right) - (\xi"\xi'" - \eta"\eta'" + \zeta"\zeta'")^2$$

pertanto, dalle equazioni di condizione dell'art. 13, questa equazione si riduce a $1 = k^2$, dalla quale $k = \pm 1$.

Per determinare il segno da prendere, basta considerare il valore di k in un caso particolare; il caso più semplice è quello in cui i tre assi delle coordinate a, b, c coincideranno con i tre assi coordinati ξ, η, ζ, nel qual caso si avrebbe $\xi = a$, $\eta = b$, $\zeta = c$ e di conseguenza dalle formule dell'art. 12, $\xi' = 1$, $\eta" = 1$, $\zeta'" = 1$, e tutte le altre quantità $\xi", \xi'"$, ecc, nulli. Con queste sostituzioni nell'equazione generale di k, essa diviene $= 1$. Pertanto si avrà sempre $k = 1$.

Del resto, si vede che le ultime tre equazioni sono le stesse di quelle supposte nell'art. 11; e le altre sei si deducono naturalmente per analogia.

17 Se si volessero ridurre le nuove quantità $\xi', \eta", \xi'", \eta'$, ecc, a tre indeterminate, basterebbe ridurre le sei $\xi', \xi", \eta', \eta", \zeta', \zeta"$, per mezzo delle tre equazioni di condizione

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1 \quad \xi"^2 + \eta"^2 + \zeta"^2 = 1 \quad \xi'\xi" + \eta'\eta" + \zeta'\zeta" = 0$$

poiché le altre tre $\xi'", \eta'", \zeta'"$ sono già note in funzione di queste.

Prendendo, per esempio, ξ', η' e $\xi"$ come indeterminate, la prima equazione darà

$$\zeta' = \sqrt{(1 - \xi'^2 - \eta'^2)}$$

e basterà determinare $\eta", \zeta"$ dalle due equazioni

$$\eta"^2 + \zeta"^2 = 1 - \xi"^2 \quad \eta'\eta" + \zeta'\zeta" = -\xi'\xi"$$

Si ha ora l'equazione identica

$$(\eta'\eta" + \zeta'\zeta")^2 + (\eta'\zeta" - \zeta'\eta")^2 = \left(\eta'^2 + \zeta'^2\right)\left(\eta"^2 + \zeta"^2\right)$$

pertanto

$$\begin{aligned} (\eta'\zeta" + \zeta'\eta")^2 &= \left(\eta'^2 + \zeta'^2\right)\left(\eta"^2 + \zeta"^2\right) - (\eta'\eta" + \zeta'\zeta")^2 \\ &= \left(1 - \xi'^2\right)\left(1 - \xi"^2\right) - \xi'^2\xi"^2 = 1 - \xi'^2 - \xi"^2 \end{aligned}$$

Combinando così le due equazioni

$$\eta' \ \eta" + \zeta'\zeta" = -\xi'\xi" \quad \eta'\zeta" + \zeta'\eta" = \sqrt{(1 - \xi'^2 - \xi"^2)}$$

si avrà

$$\begin{aligned} \eta" &= -\frac{\xi'\xi"\eta' + \zeta'\sqrt{(1 - \xi'^2 - \xi"^2)}}{\eta'^2 + \zeta'^2} \\ \zeta" &= -\frac{\xi'\xi"\zeta' - \eta'\sqrt{(1 - \xi'^2 - \xi"^2)}}{\eta'^2 + \zeta'^2} \end{aligned}$$

Ne segue che le ultime tre formule dell'articolo precedente daranno

$$\xi''' = \eta'\zeta'' - \eta''\zeta' \quad \eta''' = \zeta'\xi'' - \zeta''\xi' \quad \zeta''' = \xi'\eta'' - \xi''\eta'$$

18. Per ridurre tutte queste espressioni a una forma razionale e intera, basterà fare $\xi' = \cos\lambda$, $\eta' = \sin\lambda\cos\mu$, $\xi'' = \sin\lambda\cos\nu$, e ciò darà $\zeta' = \sin\lambda\sin\mu$,

$$\begin{aligned}
\eta'' &= -\cos\lambda\cos\mu\cos\nu - \sin\mu\sin\nu \\
\zeta'' &= -\cos\lambda\sin\mu\cos\nu + \cos\mu\sin\nu \\
\xi''' &= \sin\lambda\sin\nu \\
\eta''' &= \sin\mu\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu\sin\nu \\
\zeta''' &= -\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda\sin\mu\sin\nu
\end{aligned}$$

Non è difficile pensare dopo quanto detto nell'art. 10, che λ sarà l'angolo che l'asse delle coordinate a forma con quello delle ξ, che μ sarà quello che il piano, passante per questi due assi, forma con il piano delle coordinate ξ e ζ, e che infine, ν sarà l'angolo che il piano delle coordinate a, b forma con il piano passante per gli assi delle coordinate ξ, a. Di modo che se si considera l'asse delle coordinate a, che deve passare sempre dagli stessi punti del sistema, come un asse di rotazione del sistema; λ sarà l'inclinazione di questo asse con l'asse fisso delle coordinate ξ; μ sarà l'angolo che lo stesso asse di rotazione descrive ruotando attorno a questo asse fisso, e λ sarà l'angolo che il sistema stesso descrive ruotando attorno al suo asse di rotazione. Ma daremo in seguito un modo più semplice e naturale di impiegare la considerazione di questi angoli.

19. Quando si tratta di un corpo solido, le quantità a, b, c, devono rimanere costanti, mentre il corpo cambia collocazione nello spazio; poiché la condizione della solidità consiste nel fatto che tutti i punti del corpo mantengono invariabilmente le stesse distanze tra loro. In questo caso gli assi delle coordinate a, b, c, devono essere considerati fissi nell'interno del corpo, ma mobili rispetto agli assi delle altre coordinate ξ, η, ζ, assi che sono supposti fissi nello spazio.

Qualunque sia la variazione di posizione del corpo attorno al suo centro, si può dimostrare che vi sarà sempre una retta passante per questo centro, la quale conserverà la stessa posizione e per la quale le coordinate ξ, η, ζ saranno le stesse.

Poiché si hanno in generale, per una posizione qualsiasi del corpo, le formule $\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi'''$, $\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta'''$, $\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta'''$, se si suppone che in un'altra collocazione qualsiasi del corpo, le quantità $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$, ecc, divengono $\xi 1, \eta 1, \zeta 1, \xi' 1, \eta' 1, \zeta' 1$, ecc, si avrà sempre per questa nuova condizione, $\xi 1 = a\xi' 1 + b\xi'' 1 + c\xi''' 1$, $\eta 1 = a\eta' 1 + b\eta'' 1 + c\eta''' 1$, $\zeta 1 = a\zeta' 1 + b\zeta'' 1 + c\zeta''' 1$; e se vi sono nel corpo punti che non cambiano posizione, è chiaro che si avranno per ciascuno di questi punti le condizioni $\xi = \xi 1$, $\eta = \eta 1$, $\zeta = \zeta 1$.

Di modo che tutti i punti di questo tipo si troveranno determinati da queste tre equazioni $\xi - \xi 1 = 0$, $\eta - \eta 1 = 0$, $\zeta - \zeta 1 = 0$; cioè

$$\begin{aligned}
a(\xi' - \xi 1) + b(\xi'' - \xi'' 1) + c(\xi''' - \xi''' 1) &= 0 \\
a(\eta' - \eta' 1) + b(\eta'' - \eta'' 1) + c(\eta''' - \eta''' 1) &= 0 \\
a(\zeta' - \zeta' 1) + b(\zeta'' - \zeta'' 1) + c(\zeta''' - \zeta''' 1) &= 0
\end{aligned}$$

Così i valori di a, b, c, ricavati da queste equazioni, forniranno la posizione di questi stessi punti nel corpo; ma è chiaro che eliminando due qualsiasi delle tre incognite a, b, c, la terza se ne andrà pure; basterà quindi che l'equazione risultante abbia validità di per sé; ed essa vale, infatti, come si mostrerà.

20. Sommo le tre equazioni precedenti, dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\xi' + \xi' 1$, $\eta' + \eta' 1$, $\zeta' + \zeta' 1$; e considerando le equazioni di condizione dell'art. 13, così come le equazioni simili che devono valere per $\xi' 1, \eta' 1$, ecc, si avrà

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& b(\xi''\xi' 1 + \eta''\eta' 1 + \zeta''\zeta' 1 - \xi'\xi'' 1 - \eta'\eta'' 1 - \zeta'\zeta'' 1) \\
+\;& c(\xi'''\xi' 1 + \eta'''\eta' 1 + \zeta'''\zeta' 1 - \xi'\xi''' 1 - \eta'\eta''' 1 - \zeta'\zeta''' 1)
\end{aligned}$$

Se si sommano le stesse equazioni, anche dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\xi'' + \xi'' 1$, $\eta'' + \eta'' 1$, $\zeta'' + \zeta'' 1$, si troverà allo stesso modo

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& a(\xi'\xi'' 1 + \eta'\eta'' 1 + \zeta'\zeta'' 1 - \xi''\xi' 1 - \eta''\eta' 1 - \zeta''\zeta' 1) \\
+\;& c(\xi'''\xi'' 1 + \eta'''\eta'' 1 + \zeta'''\zeta'' 1 - \xi''\xi''' 1 - \eta''\eta''' 1 - \zeta''\zeta''' 1)
\end{aligned}$$

Infine le stesse equazioni, moltiplicate rispettivamente per $\xi''' + \xi''' 1$, $\eta''' + \eta''' 1$, $\zeta''' + \zeta''' 1$, e poi sommate, daranno

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& a(\xi'\xi''' 1 + \eta'\eta''' 1 + \zeta'\zeta''' 1 - \xi'''\xi' 1 - \eta'''\eta' 1 - \zeta'''\zeta' 1) \\
+\;& b(\xi''\xi''' 1 + \eta''\eta''' 1 + \zeta''\zeta''' 1 - \xi'''\xi'' 1 - \eta'''\eta'' 1 - \zeta'''\zeta'' 1)
\end{aligned}$$

Queste trasformate equivalgono chiaramente alle equazioni proposte; così, semplificando

$$\begin{aligned}
2P &= \xi'''\xi'' 1 + \eta'''\eta'' 1 + \zeta'''\zeta'' 1 - \xi''\xi''' 1 - \eta''\eta''' 1 - \zeta''\zeta''' 1 \\
2Q &= \xi'\xi''' 1 + \eta'\eta''' 1 + \zeta'\zeta''' 1 - \xi'''\xi' 1 - \eta'''\eta' 1 - \zeta'''\zeta' 1 \\
2R &= \xi''\xi' 1 + \eta''\eta' 1 + \zeta''\zeta' 1 - \xi'\xi'' 1 - \eta'\eta'' 1 - \zeta'\zeta'' 1
\end{aligned}$$

si dovranno risolvere queste tre equazioni

$$\begin{aligned} bR - cQ &= 0 \\ cP - aR &= 0 \\ aQ - bP &= 0 \end{aligned}$$

la terza delle quali, come si vede, è la conseguenza delle prime due. Queste danno $\frac{b}{c} = \frac{Q}{R}$, $\frac{a}{c} = \frac{P}{R}$. Da ciò si ricava

$$a = hP \quad b = hQ \quad c = hR$$

prendendo per h una quantità arbitraria.

21. Questi sono quindi i valori delle coordinate a, b, c, per tutti i punti del corpo che si ritroveranno nella stessa posizione dopo la rotazione del corpo attorno al suo centro supposto immobile; è chiaro che queste coordinate corrispondono a una retta passante per questo centro, e formante rispettivamente con i loro assi angoli i cui coseni sono

$$\frac{P}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}} \quad \frac{Q}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}} \quad \frac{R}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}$$

Così la rotazione del corpo, comunque composto, sarà in ultima istanza, equivalente a una rotazione semplice che avverrà attorno alla retta in esame, supposta fissa; e di conseguenza, si potrà chiamare questa stessa retta, l'asse di *rotazione* del corpo.

22. Si può quindi determinare la posizione di questo asse, relativamente agli assi delle coordinate a, b, c, per mezzo delle tre quantità P, Q, R, come mostrato; ma se si volesse rapportare questa posizione agli assi delle coordinate ξ, η, ζ, basterà sostituire nelle espressioni di queste coordinate (art. 12) al posto di a, b, c, i loro valori hP, hQ, hR; e ciò darà $\xi = hL$, $\eta = hM$, $\zeta = hN$, ponendo

$$\begin{aligned} L &= \xi'P + \xi''Q + \xi'''R \\ M &= \eta'P + \eta''Q + \eta'''R \\ N &= \zeta'P + \zeta''Q + \zeta'''R \end{aligned}$$

Questi valori di ξ, η, ζ corrispondono quindi a tutti i punti dell'asse di rotazione; di conseguenza questo asse forma con quelli delle coordinate ξ, η, ζ, angoli i cui coseni sono rappresentati rispettivamente da

$$\frac{L}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}} \quad \frac{Q}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}} \quad \frac{R}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$$

Di modo che le quantità L, M, N sono del tutto analoghe alle quantità P, Q, R con la differenza che, mentre queste si riferiscono agli assi mobili delle coordinate a, b, c, quelle si riferiscono agli assi mobili delle coordinate ξ, η, ζ. E si noterà che $L^2 + M^2 + N^2 = P^2 + Q^2 + R^2$, che segue dalla relazione generale $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Del resto, se nelle espressioni di L, M, N, si sostituiscono i valori di P, Q, R (art. 20). e si applicano le riduzioni dell'art. 16, si avrà

$$\begin{aligned} 2L &= \eta'\zeta'1 + \eta''\zeta''1 + \eta'''\zeta'''1 - \zeta'\eta'1 - \zeta''\eta''1 - \zeta'''\eta'''1 \\ 2M &= \zeta'\xi'1 + \zeta''\eta''1 + \zeta'''\eta'''1 - \xi'\zeta'1 - \xi''\zeta''1 - \xi'''\zeta'''1 \\ 2N &= \xi'\eta'1 + \xi''\eta''1 + \xi'''\eta'''1 - \eta'\xi'1 - \eta''\xi''1 - \eta'''\xi'''1 \end{aligned}$$

23. Se si considera solo il moto del corpo in un istante, l'asse di rotazione sarà fisso in questo istante, e il corpo ruoterà realmente e spontaneamente attorno a questo asse, il quale sarà, di conseguenza, *l'asse spontaneo di rotazione* del corpo, come comunemente indicato.

Per determinare tale asse, si supporrà che le quantità $\xi'1, \eta'1, \zeta'1, \xi''1$, ecc, siano infinitamente poco diverse da $\xi', \eta', \zeta', \xi''$, ecc, di modo che si abbia $\xi'1 = \zeta' + d\xi'$, $\eta'1 = \eta' + d\eta'$, $\zeta'1 = \zeta' + d\zeta'$, $\xi''1 = \xi'' + d\xi''$, ecc; e ciò darà (art. 10)

$$\begin{aligned} 2P &= \xi'''d\xi'' + \eta'''d\eta'' + \zeta'''d\zeta'' - \xi''d\xi''' - \eta''d\eta''' - \zeta''d\zeta''' \\ 2Q &= \xi'd\xi''' + \eta'd\eta''' + \zeta'd\zeta''' - \xi'''d\xi' - \eta'''d\eta' - \zeta'''d\zeta' \\ 2R &= \xi''d\xi' + \eta''d\eta' + \zeta''d\zeta' - \xi'd\xi'' - \eta'd\eta'' - \zeta'd\zeta'' \end{aligned}$$

Ma le ultime tre equazioni di condizione dell'art. 13, differenziate, danno

$$\begin{aligned} \xi'd\xi'' + \eta'd\eta'' + \zeta'd\zeta'' &= -\xi''d\xi' - \eta''d\eta' - \zeta''d\zeta' \\ \xi'''d\xi' + \eta'''d\eta' + \zeta'''d\zeta' &= -\xi'''d\xi''' - \eta'd\eta''' - \zeta'd\zeta''' \\ \xi''d\xi''' + \eta''d\eta''' + \zeta''d\zeta''' &= -\xi'''d\xi'' - \eta'''d\eta'' - \zeta'''d\zeta'' \end{aligned}$$

sostituendo, quindi, questi valori e cambiando, per mantenere l'omogeneità P, Q, R, in dP, dQ, dR, si avrà

$$\begin{aligned} dP &= \xi'" d\xi" + \eta'" d\eta" + \zeta'" d\zeta" \\ dQ &= \xi' d\xi'" + \eta' d\eta'" + \zeta' d\zeta'" \\ dR &= \xi" d\xi' + \eta" d\eta' + \zeta" d\zeta' \end{aligned}$$

Così,

$$\frac{dP}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}} \quad \frac{dQ}{\sqrt{(dP^2+dQ^2+dR^2)}} \quad \frac{dR}{\sqrt{(dP^2 + dQ^2 + dR^2)}}$$

saranno i coseni degli angoli che l'asse spontaneo di rotazione formerà con gli assi delle coordinate a, b, c (art. 21).

24. Se si fanno le stesse sostituzioni nelle espressioni di L, M, N dell'art. 22, e se si considerano le ultime tre equazioni di condizione dell'art. 15, differenziate, si avranno, cambiando L, M, N in dL, dM, dN, queste formule

$$\begin{aligned} dL &= \eta' d\zeta' + \eta" d\zeta" + \eta'" d\zeta'" \\ dM &= \zeta' d\xi' + \zeta" d\xi" + \zeta'" d\xi'" \\ dN &= \xi' d\eta' + \xi" d\eta" + \xi'" d\eta'" \end{aligned}$$

dalle quale si potrà determinare la posizione dell'asse spontaneo di rotazione rispetto agli assi delle coordinate ξ, η, ζ; il primo di questi assi formerà con i tre altri angoli, i cui coseni saranno espressi da

$$\frac{dL}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}} \quad \frac{dM}{\sqrt{(dL^2+dM^2+dN^2)}} \quad \frac{dN}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}}$$

E se si vogliono far dipendere i valori di dL, dM, dN da quelli di dP, dQ, dR, si avranno, come nello stesso art. 22, le formule

$$\begin{aligned} dL &= \xi' dP + \xi" dQ + \xi'" dR \\ dM &= \eta' dP + \eta" dQ + \eta'" dR \\ dN &= \xi\zeta' dP + \zeta" dQ + \zeta'" dR \end{aligned}$$

le quali danno all'istante, in virtù delle equazioni di condizione dell'art. 13,

$$dL^2 + dM^2 + dN^2 = dP^2 + dQ^2 + dR^2$$

25. Le quantità dL, dM, dN hanno ancora un'altra utilità nella determinazione del moto del corpo; servono ad esprimere in modo molto semplice i differenziali delle coordinate ξ, η, ζ. Infatti, se si differenziano le formule dell'art. 12, considerando sempre a, b, c, costanti, dalla natura dei corpi solidi; si ha

$$\begin{aligned} d\xi &= ad\xi' + bd\xi" + cd\xi'" \\ d\eta &= ad\eta' + bd\eta" + cd\eta'" \\ d\zeta &= ad\zeta' + bd\zeta" + cd\zeta'" \end{aligned}$$

se poi si sostituiscono in queste formule le espressioni di a, b, c trovate nell'art. 15, e si considerano le equazioni di condizione di questo stesso articolo differenziate, si avrà all'istante (art. 24)

$$\begin{aligned} d\xi &= \zeta dM - \eta dN \\ d\eta &= \xi dN - \zeta dL \\ d\zeta &= \eta dL - \xi dM \end{aligned}$$

equazioni del tutto simili a quelle dell'art. 3, e che mostrano, di conseguenza, che le quantità dL, dM, dN sono le stesse da una parte all'altra.

26. Queste formule sono anche della stessa forma di quelle trovate nell'art. 7 della terza sezione del primo Capitolo, dalla considerazione delle rotazioni particolari attorno ai tre assi delle coordinate; da ciò si può concludere immediatamente, 1° che le quantità dL, dM, dN rappresentano gli angoli elementari descritti dal corpo attorno agli assi delle coordinate ξ, η, ζ; e siccome le quantità dP, dQ, dR sono rispetto agli assi delle coordinate a, b, c, ciò che dL, dM, dN sono per gli assi ξ, η, ζ, ne segue che dP, dQ, dR sono gli angoli elementari descritti attorno agli assi a, b, c. 2°. che queste particolari rotazioni si compongono in una sola attorno a un asse, formante con quelli delle coordinate ξ, η, ζ, o a, b, c angoli i cui coseni sono

$$\frac{dL}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}} \quad \frac{dM}{\sqrt{(dL^2+dM^2+dN^2)}} \quad \frac{dN}{\sqrt{(dL^2 + dM^2 + dN^2)}}$$

o

$$\frac{dP}{\sqrt{(dP^2+dQ^2+dR^2)}}\frac{dQ}{\sqrt{(dP^2+dQ^2+dR^2)}}\frac{dR}{\sqrt{(dP^2+dQ^2+dR^2)}}$$

come visto prima. 3°. che l'angolo elementare descritto attorno a questo asse, sarà espresso da $\sqrt{(dL^2+dM^2+dN^2)}$, o da $\sqrt{(dP^2+dQ^2+dR^2)}$;essendo queste due quantità uguali per l'art. 24.

27. Per esprimere i differenziali $d\xi, d\eta, d\zeta$ in modo più semplice dalle quantità dL, dM, dN, si può pure utilizzare le quantità dP, dQ, dR; e per questo basta sostituire al loro posto i loro valori dati dalle ultime formule dell'art. 24.

Si avranno così queste trasformate

$$\begin{aligned}
d\xi &= (\zeta\eta' - \eta\zeta')\,dP + (\zeta\eta" - \eta\zeta")\,dQ + (\zeta\eta'" - \eta\zeta'")\,dR\\
d\eta &= (\xi\zeta' - \zeta\xi')\,dP + (\xi\zeta" - \zeta\xi")\,dQ + (\xi\zeta'" - \zeta\xi'")\,dR\\
d\zeta &= (\eta\xi' - \xi\eta')\,dP + (\eta\xi" - \xi\eta")\,dQ + (\eta\xi'" - \xi\eta'")\,dR
\end{aligned}$$

le quali, inserendo per ξ, η, ζ, i loro valori (art. 12), e utilizzando le riduzioni dell'art. 16, si riducono a questa forma

$$\begin{aligned}
d\xi &= (b\xi"' - c\xi")\,dP + (c\xi' - a\xi"')\,dQ + (a\xi" - b\xi')\,dR\\
d\eta &= (b\eta"' - c\eta")\,dP + (c\eta' - a\eta"')\,dQ + (a\eta" - b\eta')\,dR\\
d\zeta &= (b\zeta"' - c\zeta")\,dP + (c\zeta' - a\zeta"')\,dQ + (a\zeta" - b\zeta')\,dR
\end{aligned}$$

E siccome queste espressioni devono essere identiche a quelle che risulteranno dalla differenziazione immediata delle stesse formule dell'art. 12, si avrà per confronto con i termini riguardanti a, b, c,

$$\begin{aligned}
d\xi' &= \xi"dR - \xi'"dQ\\
d\xi" &= \xi'"dP - \xi'dR\\
d\xi'" &= \xi'dQ - \xi"dP\\
d\eta' &= \eta"dR - \eta'"dQ\\
d\eta" &= \eta'"dP - \eta'dR\\
d\eta'" &= \eta'dQ - \eta"dP\\
d\zeta' &= \zeta"dR - \zeta'"dQ\\
d\zeta" &= \zeta'"dP - \zeta'dR\\
d\zeta'" &= \zeta'dQ - \zeta"dP
\end{aligned}$$

28. Le precedenti espressioni di $d\xi, d\eta, d\zeta$, sono state trovate supponendo a, b, c costanti; se le si considerasse variabili, basterebbe aggiungere a queste espressioni i termini dovuti alle differenze di a, b, c; e si vedrebbe dalle formule dell'art. 12, che questi termini saranno $\xi' da + \xi" db + \xi'" dc$, $\eta' da + \eta" db + \eta'" dc$, $\zeta' da + \zeta" db + \zeta'" dc$; si avrebbe così per i valori completi di $d\xi, d\eta, d\zeta$

$$\begin{aligned}
d\xi &= \xi'\,(cdQ - bdR + da) + \xi"\,(adR - cdP + db) + \xi'"\,(bdP - adQ + dc)\\
d\eta &= \eta'\,(cdQ - bdR + da) + \eta"\,(adR - cdP + db) + \eta'"\,(bdP - adQ + dc)\\
d\zeta &= \zeta'\,(cdQ - bdR + da) + \zeta"\,(adR - cdP + db) + \zeta'"\,(bdP - adQ + dc)
\end{aligned}$$

Queste formule sono molto significative per la loro semplicità e uniformità e in particolare le quantità ξ', η', ecc non sono più presenti nella quantità $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$; grazie alle equazioni di condizione dell'art. 13, si avrà semplicemente

$$\begin{aligned}
d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 &= (cdQ - bdR + da)^2\\
&+ (adR - cdP + db)^2 + (bdP - adQ + dc)^2
\end{aligned}$$

espressione che ci sarà molto utile.

29. Abbiamo già mostrato nell'art. 18 come si possono esprimere in modo razionale tutte le quantità $\xi', \eta', \zeta', \xi"$, ecc, con seni e coseni dei tre angoli indeterminati; ma vi è un modo più diretto e naturale di giungere a queste stesse riduzioni, impiegando le trasformazioni note delle coordinate.

Infatti, poiché ξ, η, ζ sono le coordinate di un punto qualsiasi del corpo, rispetto a tre assi tracciati dal suo centro parallelamente agli assi fissi delle coordinate x, y, z e che a, b, c sono le coordinate dello stesso punto rispetto ad altri tre assi passanti per lo stesso centro, ma fissi dentro il corpo, e di conseguenza di posizioni variabili rispetto agli assi ξ, η, ζ; ne segue che per avere le espressioni di ξ, η, ζ in a, b, c, basterà trasformare nel modo più generale queste ultime coordinate nelle altre.

Per questo chiameremo ω l'angolo che il piano delle a, b, c forma con quello delle ξ, η, ζ; e ψ l'angolo che l'intersezione di questi due piani forma con l'asse delle ξ; infine indicheremo con ϕ l'angolo che l'asse di a forma con la stessa retta di intersezione; queste tre quantità ω, ψ, ϕ, serviranno a determinare la posizione degli assi delle coordinate a, b, c rispetto agli assi delle coordinate ξ, η, ζ; e di conseguenza, si potrà, tramite loro, esprimere queste ultime mediante le altre.

Se, per fissare le idee, si immagina che il corpo sia la terra, che il piano di a, b sia quello dell'equatore, e che l'asse a passi per un meridiano dato; che, inoltre, il piano delle ξ, η, sia quello dell'eclittica, e che l'asse delle ξ sia diretto verso il primo punto di Ariete; è chiaro che l'angolo ω diverrà l'obliquità dell'eclittica, l'angolo ψ sarà la longitudine dell'equinozio d'autunno, o del nodo ascendente dell'equatore sull'eclittica, e che ϕ sarà la distanza dal meridiano dato da questo equinozio.

In generale ϕ sarà l'angolo che il corpo descrive ruotando attorno all'asse delle coordinate c, asse che si potrà chiamare semplicemente *l'asse del corpo*, $90° - \omega$, sarà l'angolo di inclinazione di questo asse sul piano fisso delle coordinate ξ, η, e $\psi - 90°$ sarà l'angolo che la proiezione di questo stesso asse forma con l'asse delle coordinate ξ.

30. Ciò posto, supponiamo dapprima che si cambino le due coordinate a, b con altre due a', b', poste nello stesso piano, in modo tale che l'asse a' sia nell'intersezione dei due piani e che quello di b' sia perpendicolare a questa intersezione; si avrà

$$a' = a\cos\phi - b\sin\phi \qquad b' = b\cos\phi + a\sin\phi$$

Supponiamo poi che le due coordinate b', c siano cambiate in altre due $b", c'$, dove $b"$ sia sempre perpendicolare all'intersezione dei piani, ma posta nel piano di ξ, η e c' sia perpendicolare a quest'ultimo piano; si troverà analogamente

$$b" = a\cos\omega - b\sin\omega \qquad c' = c\cos\omega - b'\sin\omega$$

Supponiamo infine che si cambino le coordinate $a', b"$, che sono già nel piano ξ, η, in altre due $a", b'"$, poste nello stesso piano, ma tali che l'asse $a"$ coincida con l'asse ξ; si troverà allo stesso modo

$$a" = a'\cos\psi - b"\sin\psi \qquad b'" = b"\cos\psi + a'\sin\psi$$

È chiaro che le tre coordinate $a", b'", c'$ saranno le stesse delle coordinate ξ, η, ζ, poiché esse sono riferite agli stessi assi; di modo che sostituendo successivamente i valori si $a', b", b'$, si avranno le espressioni di ξ, η, ζ in a, b, c, le quali si troveranno nella stessa forma di quelle dell'art. 12, supponendo

$$\begin{aligned}
\xi' &= \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\omega \\
\xi" &= -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi\cos\omega \\
\xi'" &= \sin\psi\cos\omega \\
\eta' &= \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi\cos\omega \\
\eta" &= -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\cos\omega \\
\eta'" &= -\cos\psi\sin\omega \\
\zeta' &= \sin\phi\sin\omega \\
\zeta" &= \cos\phi\sin\omega \\
\zeta'" &= \cos\omega
\end{aligned}$$

Questi valori soddisfano anche alle sei equazioni di condizione dell'art. 13, così come a quelle dell'art. 15 e risolvono queste equazioni, poiché contengono tre variabili indeterminate ϕ, ψ, ω.

31. Se ora si sostituiscono questi valori nelle espressione delle quantità dP, dQ, dR dell'art. 23, si avrà, dopo le consuete riduzioni dei seni e coseni

$$\begin{aligned}
dP &= \sin\phi\sin\omega d\psi + \cos\phi d\omega \\
dQ &= \cos\phi\sin\omega d\psi - \sin\phi d\omega \\
dR &= d\phi + \cos\omega d\psi
\end{aligned}$$

Con le stesse sostituzioni nelle espressioni delle quantità dL, dM, dN dell'art. 24, si troverà

$$\begin{aligned}
dL &= \sin\psi\sin\omega d\phi + \cos\psi d\omega \\
dM &= -\cos\psi\sin\omega d\phi + \sin\psi d\omega \\
dN &= \cos\omega d\phi + d\psi
\end{aligned}$$

Si potrà così, tramite queste formule, determinare gli elementi della rotazione istantanea del corpo attorno all'asse spontaneo, conoscendo la rotazione del corpo attorno al suo asse, e la posizione di questo asse nello spazio.

32. È necessario distinguere bene questi due assi e i moti di rotazione che ad esso si riferiscono.

Rappresentiamo il moto del corpo attorno al suo centro con i tre angoli ψ, ϕ, ω, dove ϕ esprime l'angolo descritto dal corpo, ruotando attorno a una retta o asse che passa per questo centro, e che ha una posizione costante rispetto a diversi punti del corpo, ma che si muove con esso; l'angolo ω serve a determinare l'inclinazione di questo asse sul piano delle coordinate ξ, η, la cui direzione è supposta data e fissa nello spazio e questa inclinazione è espressa dall'angolo $90° - \omega$; infine l'angolo ψ determina la posizione della proiezione dello stesso asse su questo piano, formando tale proiezione con l'asse delle ascisse ξ, un angolo $= \psi - 90°$.

Ma questo asse di rotazione muovendosi con il corpo, non è il vero asse attorno al quale il corpo ruota realmente in ogni istante; quest'ultimo è quello che abbiamo chiamato asse spontaneo di rotazione e la cui posizione nello spazio dipende dalle quantità dL, dM, dN (art. 24). Avendo prima trovato i valori di queste quantità in ϕ, ψ, ω, è facile determinare pure la posizione di questo stesso asse e l'angolo di rotazione attorno ad esso mediante gli angoli analoghi agli angoli ϕ, ψ, ω, e che indicheremo con ϕ', ψ', ω'. Infatti, le espressioni di dL, dM, dN in ϕ, ψ, ω essendo generali per tale posizione dell'asse del corpo, varranno anche per l'asse spontaneo di rotazione, cambiando ϕ, ψ, ω in ϕ', ψ', ω'; ma siccome la proprietà di quest'ultimo asse è quella di essere immobile per un istante, bisognerà che i differenziali $d\psi', d\omega'$ dovuti al cambiamento di posizione di questo asse siano nulli. Di modo che si avrà rispetto a questo asse

$$\begin{aligned} dL &= \sin\psi' \sin\omega' d\phi' \\ dM &= -\cos\psi' \sin\omega' d\phi' \\ dN &= \cos\omega' d\phi' \end{aligned}$$

Confrontando queste nuove espressioni di dL, dM, dN con le prime, si avranno queste tre equazioni

$$\begin{aligned} \sin\psi' \sin\omega' d\phi' &= \sin\psi \sin\omega d\phi + \cos\psi d\omega \\ \cos\psi' \sin\omega' d\phi' &= \cos\psi \sin\omega d\phi - \sin\psi d\omega \\ \cos\omega' d\phi' &= \cos\omega d\phi + d\psi \end{aligned}$$

le quali serviranno a determinare gli elementi relativi all'asse spontaneo di rotazione tramite quelli che si riferiscono all'asse stesso del corpo, o reciprocamente questi per quelli; e ciò può essere utile in diverse occasioni.

2.6.2 Equazioni per il moto di rotazione di un corpo solido, di forma qualsiasi, animato da forze qualsiasi

33. Abbiamo visto nella precedente sezione, che qualsiasi movimento possa avere un corpo solido, questo moto può dipendere solo da sei variabili, tre dei quali si riferiscono al moto di un punto unico del corpo, che abbiamo chiamato il centro del corpo, e gli altri tre servono a determinare il moto di rotazione del corpo attorno a questo centro. Da ciò segue che le equazioni che si devono trovare non possono che essere sei o più; è chiaro che queste equazioni possono di conseguenza dedursi da quelle che abbiamo già dato nella sezione terza (artt. 2,6,8), le quali sono generali per l'intero sistema del corpo. Ma per questo bisogna distinguere due casi, uno quando il corpo è completamente libero, l'altro quando è vincolato a muoversi attorno ad un punto fisso.

34. Consideriamo dapprima un corpo solido assolutamente libero; prendiamo il centro del corpo nel suo centro di gravità e indicando con x', y', z' le tre coordinate perpendicolari di questo centro, m la massa totale del corpo, dm ognuno dei suoi elementi, X, Y, Z le forze acceleratrici che agiscono su ogni punto di questo elemento lungo le direzioni delle stesse coordinate, avremo in primo luogo queste tre equazioni (sez. 3, art. 3).

$$\begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2}m + SXdm &= 0 \\ \frac{d^2y'}{dt^2}m + SYdm &= 0 \\ \frac{d^2z'}{dt^2}m + SZdm &= 0 \end{aligned}$$

nelle quali il simbolo S denota integrali totali relativi all'intera massa del corpo; e queste equazioni serviranno, come si vedrà, a determinare il moto del centro di gravità.

In secondo luogo, se si indicano con ξ, η, ζ le coordinate di ogni elemento dm, prese dal centro di gravità e parallele agli stessi assi delle coordinate x', y', z' di questo centro. si avranno queste altre tre equazioni (sez. 3, art. 8).

$$\begin{aligned} S\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi Y - \eta X\right)dm &= 0 \\ S\left(\xi\frac{d^2\xi}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi Z - \zeta X\right)dm &= 0 \\ S\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta Z - \zeta Y\right)dm &= 0 \end{aligned}$$

Noi abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente che i valori delle quantità ξ, η, ζ, sono sempre della forma

$$\begin{aligned} \xi &= a\xi' + b\xi" + c\xi'" \\ \eta &= a\eta' + b\eta" + c\eta'" \\ \zeta &= a\zeta' + b\zeta" + c\zeta'" \end{aligned}$$

e abbiamo visto che per i corpi solidi, le quantità a, b, c sono necessariamente costanti nel tempo, e variabili unicamente rispetto ai diversi elementi dm, poiché queste quantità rappresentano le coordinate di ognuno di questi elementi, riferite ai tre assi che si intersecano nel centro del corpo e che sono fissati al suo interno; che, al contrario, le quantità $\xi', \xi"$, ecc, sono variabili nel tempo e costanti per tutti gli elementi del corpo, essendo queste quantità funzioni di tre angoli ϕ, ψ, ω, che determinano i diversi moti di rotazione del corpo attorno al suo centro. Se quindi si introducono, nelle precedenti equazioni, queste diverse sostituzioni, avendo cura di portare fuori dal segno S le variabili ϕ, ψ, ω e le loro differenze, si avranno tre equazioni differenziali del secondo ordine tra queste stesse variabili e il tempo t, le quali serviranno a determinarle tutte in funzione di t.

Queste equazioni saranno simili a quelle che M. d'Alembert ha trovato per primo per il moto di rotazione di un corpo di forma qualsiasi, e che ha utilizzato nelle sue ricerche sulla precisione degli equinozi.

Per questo motivo e poiché la forma di queste equazioni non è così semplice come si potrebbe desiderare, non entreremo nei dettagli; ma risolviamo piuttosto direttamente il problema con il metodo generale della sez. 4, il quale fornirà immediatamente le equazioni più semplici e più comode per il calcolo.

35. Per impiegare qui questo metodo nel modo più generale e semplice, si supporrà che ogni particella Dm del corpo sia attratta da forze $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$, ecc, proporzionali a funzioni qualsiasi delle distanze $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$, ecc, tra la particella e i centri di queste forze, e si formerà in tal modo la quantità algebrica,

$$\Pi = \int \left(\overline{P} d\overline{p} + \overline{Q} d\overline{q} + \overline{R} d\overline{r} + ecc\right)$$

Si considereranno poi le due quantità

$$T = S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2}\right) Dm \qquad V = S\Pi Dm$$

riferendo il simbolo integrale S unicamente agli elementi Dm del corpo e alle quantità relative alla posizione di questi elementi nel corpo.

Si ridurranno queste due quantità in funzione di variabili qualsiasi, ξ, ψ, ϕ, ecc, relative ai diversi moti del corpo e si formerà la seguente formula generale (sez. 4, art. 9),

$$0 \;=\; \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi}\right)\delta\xi + \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} + \frac{\delta V}{\delta \psi}\right)\delta\psi + \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\phi} - \frac{\delta T}{\delta \phi} + \frac{\delta V}{\delta \phi}\right)\partial\delta$$

Se le variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, sono per il tipo di problema tra loro indipendenti (e le si può sempre assumere come se lo fossero) si uguaglieranno separatamente a zero le quantità moltiplicate per ognuna delle variazioni indeterminate $\delta\xi, \delta\psi, \delta\phi$, ecc, e si avranno così tante equazioni tra le variabili ξ, ψ, ϕ, ecc, e queste variabili.

Se le variabili non sono completamente indipendenti, ma sono legate da una o più equazioni di condizione, si avranno per differenziazione di queste equazioni, tante equazioni di condizione tra le variabili $\delta\xi, \delta\psi, \delta\phi$, ecc, per mezzo delle quali si potranno ridurre queste variazioni ad un numero minore.

Eseguite queste sostituzioni nella formula generale, si eguaglierà a zero ognuno dei coefficienti delle restanti variazioni e le equazioni che ne deriveranno, unite a quelle di condizione date, basteranno a risolvere il problema.

In questo caso, basterà usare le trasformazioni presentate nella sezione precedente. Si sostituiranno dapprima $x' + \xi$, $y' + \eta$, $z + \zeta'$ al posto di x, y, z, poi $a\xi' + b\xi" + c\xi'"$, $a\eta' + b\eta" + c\eta'"$. $a\zeta' + b\zeta" + c\zeta'"$, al posto di ξ, η, ζ (art. 11); infine, mettendo per ξ', η', ecc, i loro valori in ϕ, ψ, ω dell'art. 30, si avranno le quantità T, V espresse in funzione delle sei variabili indipendenti $x', y', z', \phi, \psi, \omega$, al posto delle quali si potrà ancora, se lo si ritiene opportuno, introdurne altre equivalenti; e ognuna di esse fornirà per la determinazione del moto del corpo, una equazione di questa forma

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\alpha} - \frac{\delta T}{\delta \alpha} + \frac{\delta V}{\delta \alpha} = 0$$

essendo α una di queste variabili.

36. Iniziamo col mettere nell'espressione di T, al posto di x, y, z, queste nuove variabili $x' + \xi$, $y' + \eta$, $z' + \zeta$; e portando fuori dal simbolo S le x', y', z' che sono le stesse per tutti i punti del corpo, poiché queste sono le coordinate del centro del corpo; la funzione T diverrà

$$\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2dt^2} m + S\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2}\right) dm + \frac{dx' Sd\xi dm + dy' Sd\eta dm + dz' Sd\zeta dm}{dt^2}$$

Questa espressione è composta, come si vede, di tre parti, la prima delle quali contiene le sole variabili x', y', z' ed esprime il valore di T nel caso in cui il corpo è considerato puntiforme. Se queste variabili sono indipendenti dalle altre variabili ξ, η, ζ, caso che si presenta quando il corpo è libero di ruotare in tutti i sensi attorno al suo centro, la formula dovrà essere trattata separatamente, e fornirà per il moto di questo centro, le stesse equazioni di un corpo concentrato; così questa parte del problema rientra in quella che abbiamo risolto nella sezione precedente, e alla quale rinviamo.

La terza parte dell'espressione precedente, quella contenente le differenze dx', dy', dz', moltiplicate per le differenze $d\xi, d\eta, d\zeta$, scompaiono in due casi; quando il centro del corpo è fisso, cosa evidente, poiché allora le differenze dx', dy', dz' delle coordinate del centro sono nulle; e quando questo centro è supposto collocato nel centro stesso di gravità del corpo, poiché allora gli integrali $Sd\xi dm, Dd\eta dm, Sd\zeta dm$, diventano pure nulle. Infatti, sostituendo a $d\xi, d\eta, d\zeta$ i loro valori $ad\xi' + bd\xi" + cd\xi'"$, $ad\eta' + bd\eta" + cd\eta'"$, $ad\zeta' + bd\zeta" + cd\zeta'"$ (art. prec.) e portando fuori dal segno S le quantità $d\xi', d\eta', d\zeta'$, ecc, che sono indipendenti dalla posizione delle particelle dm nel corpo, ogni termine di questi integrali si troverà moltiplicato per una di queste tre quantità, $Sadm, Sbdm, Scdm$; queste quantità non sono altro che le somme dei prodotti di ogni elemento dm, moltiplicato per la sua distanza da tre piani passanti per il centro del corpo e perpendicolari agli assi delle coordinate a, b, c; esse sono quindi nulle, quando questo centro coincide con quello di gravità dell'intero corpo, per le proprietà note di quest'ultimo centro. Anche i tre integrali $Sd\xi dm, Sd\eta, dm, Sd\zeta dm$ saranno in tale caso nulli.

In entrambi i casi, rimarrà solo da considerare nell'espressione di T, la formula

$$S\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2}\right) dm$$

che è unicamente relativa al moto di rotazione che il corpo può avere attorno al suo centro, e che servirà, di conseguenza, a determinare le leggi di questo moto, indipendentemente da quello che il centro stesso può avere nello spazio.

Per rendere la soluzione più semplice possibile, è utile far uso delle espressioni di $d\xi, d\eta, d\zeta$ dell'art. 28, le quali danno ponendo $da = 0$, $db = 0$, $dc = 0$

$$\begin{aligned} d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 &= (cdQ - bdR)^2 + (adR - cdP)^2 + (bdP - adQ)^2 \\ &= \left(b^2 + c^2\right) dP^2 + \left(a^2 + c^2\right) dQ^2 + \left(a^2 + b^2\right) dR^2 \\ &\quad -2bcdQdR - 2acdPdR - 2abdPdQ \end{aligned}$$

Essendo le quantità a, b, c le sole variabili, rispetto alla posizione delle particelle Dm nel corpo, ne segue che per avere il valore di $S\left(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2\right) Dm$, basterà moltiplicare ogni termine della quantità precedente per Dm e integrare poi rispetto al simbolo S, portando fuori da questo segno di integrale le quantità dP, dQ, dR che ne sono indipendenti. Così la quantità

$$S\left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dt^2}\right) Dm$$

diverrà

$$\frac{AdP^2 + BdQ^2 + CdR^2}{2dt^2} - \frac{FdQdR + GdPdR + HdPdQ}{dt^2}$$

e abbreviando con

$$\begin{array}{ccc} A = S\left(b^2 + c^2\right) Dm & B = S\left(a^2 + c^2 Dm\right) & C = S\left(a^2 + b^2\right) Dm \\ F = SbcDm & G = SacDm & H = SabDm \end{array}$$

Queste integrazioni sono relative all'intera massa del corpo, di modo che A, B, CF, G, H, devono essere ormai considerati e trattati come costanti assegnate dalla figura del corpo.

37. Se si pone $\frac{dP}{dt} = p$, $\frac{dQ}{dt} = q$, $\frac{dR}{dt} = r$ si avrà, considerando nella funzione T solo i termini relative al moto di rotazione

$$T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) - Fqr - Gpr - Hpq$$

ed essendo T funzione solo di p, q, r si avrà differenziando rispetto a δ

$$\delta T = \frac{dT}{dp}\delta p + \frac{dT}{dq}\delta q + \frac{dT}{dr}\delta r$$

Dalle formule dell'art. 31, si ha

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sin\phi \sin\omega d\psi + \cos\phi d\omega}{dt} \\ q &= \frac{\cos\phi \sin\omega d\psi - \sin\phi d\omega}{dt} \\ r &= \frac{d\phi + \cos\omega d\psi}{dt} \end{aligned}$$

pertanto (essendo dt sempre costante)

$$\begin{aligned} \delta T = &\left(\tfrac{dT}{dp}q - \tfrac{dT}{dq}p\right)\delta\phi + \tfrac{dT}{dr} \times \tfrac{\delta d\phi}{dt} + \left(\tfrac{dT}{dp}\sin\phi\sin\omega + \tfrac{dT}{dq}\cos\phi\sin\omega + \tfrac{dT}{dr}\cos\phi\right)\tfrac{\delta d\psi}{dt} \\ &+ \left(\tfrac{dT}{dp}\sin\phi\cos\omega + \tfrac{dT}{dq}\cos\phi\cos\omega - \tfrac{dT}{dr}\sin\omega\right)\tfrac{d\psi d\omega}{dt} + \left(\tfrac{dT}{dp}\cos\phi - \tfrac{dT}{dq}\sin\phi\right)\tfrac{\delta d\omega}{dt} \end{aligned}$$

da cui si avranno immediatamente, per il moto di rotazione del corpo, queste tre equazioni del secondo ordine

$$\begin{aligned} \frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} - \frac{dT}{dp}q + \frac{dT}{dq}p + \frac{\delta V}{\delta\phi} &= 0 \\ \frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\sin\phi\sin\omega + \frac{dT}{dq}\cos\phi\sin\omega + \frac{dT}{dr}\cos\omega\right)}{dt} + \frac{\delta V}{\delta\psi} &= 0 \\ \frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\cos\phi - \frac{dT}{dq}\sin\phi\right)}{dt} - \left(\frac{dT}{dp}\sin\phi\cos\omega + \frac{dT}{dq}\cos\phi\cos\omega - \frac{dT}{dr}\sin\omega\right)\frac{d\psi}{dt} + \frac{\delta V}{\delta\omega\psi} &= 0 \end{aligned}$$

Rispetto alla quantità V, poiché essa dipende dalle forze esercitate sul corpo, sarà nulla se il corpo non è soggetto ad alcuna forza; così in questo caso le tre quantità $\frac{\delta V}{\delta\phi}, \frac{\delta V}{\delta\psi}, \frac{\delta V}{\delta\omega}$, saranno pure nulle; e la seconda delle tre equazioni precedenti sarà pure integrabile; ma l'integrazione generale di tutte queste equazioni resterà ancora molto difficile.

In generale, poiché $V = S\Pi Dm$, e Π è una funzione algebrica delle distanze $\overline{p}, \overline{q}$, ecc (art. 35), di cui ognuna è espressa da $\sqrt{\left((x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2\right)}$ indicando con f, g, h, le coordinate del centro fisso di forze; basterà fare nella funzione Π le stesse sostituzioni sopra indicate e dopo aver integrato sull'intera massa del corpo, si avrà l'espressione finale di V in ϕ, ψ, ω, da cui si ricaveranno per differenziazione i valori di $\frac{\delta V}{\delta\phi}, \frac{\delta V}{\delta\psi}, \frac{\delta V}{\delta\omega}$, che sono gli stessi di $\frac{dV}{d\phi}, \frac{dV}{d\psi}, \frac{dV}{d\omega}$. Non presentando questo particolari difficoltà, non ci soffermeremo; sottolineiamo solo che le equazioni precedenti riconducono a quelle che ho dato altre volte nelle mie precedenti ricerche sulla *Librazione della Luna*.

38. Sebbene l'impiego degli angoli ϕ, ψ, ω, appaia essere quanto di più semplice per trovare con il nostro metodo le equazioni della rotazione del corpo, si può, tuttavia, giungere ancora più direttamente allo scopo, e ottenere anche formule più eleganti e comode per il calcolo in numerosi casi, considerando immediatamente le variazioni delle quantità $\xi', \xi", \xi'", \eta'$, ecc, e riducendo poi queste diverse variazioni a tre indeterminate, mediante formule analoghe a quelle dell'art. 27.

Così, poiché $p = \frac{dp}{dt} = \frac{\xi'" d\xi" + \eta'" d\eta" + \zeta'" d\zeta"}{dt}$, (art. 23), si avrà differenziando rispetto a δ (con dt costante),

$$\delta p = \frac{\xi'" \delta d\xi" + \eta'" \delta d\eta" + \zeta'" \delta d\zeta"}{dt} + \frac{d\xi" \delta\xi'" + d\eta" \delta\eta'" + d\zeta" \delta\zeta'"}{dt}$$

pertanto il termine $\frac{dT}{dp}\delta p$ del valore di δT restituirà nella formula generale dell'art. 35, i termini

$$\frac{d.\frac{(dT)}{dp}}{dt}(\xi'" \delta\xi" + \eta'" \delta\eta" + \zeta'" \delta\zeta") + \frac{dT}{dp} \times \frac{d\xi'" \delta\xi" + d\eta'" \delta\eta" + d\zeta'" \delta\zeta" - d\xi" \delta\xi'" - d\eta" \delta\eta'" - d\zeta" \delta\zeta'"}{dt}$$

Analogamente il termine $\frac{dT}{dq}\delta q$ restituirà nella stessa formula i termini

$$\frac{d.\frac{(dT)}{dq}}{dt}(\xi' \delta\xi'" + \eta' \delta\eta'" + \zeta' \delta\zeta'") + \frac{dT}{dq} \times \frac{d\xi' \delta\xi'" + d\eta' \delta\eta'" + d\zeta' \delta\zeta'" - d\xi'" \delta\xi' - d\eta'" \delta\eta' - d\zeta'" \delta\zeta'}{dt}$$

e infine il termine $\frac{dT}{dr}\delta r$ darà questi

$$\frac{d.\frac{(dT)}{dr}}{dt}(\xi" \delta\xi' + \eta" \delta\eta' + \zeta" \delta\zeta') + \frac{dT}{dr} \times \frac{d\xi" \delta\xi' + d\eta" \delta\eta' + d\zeta" \delta\zeta' - d\xi' \delta\xi" - d\eta' \delta\eta" - d\zeta' \delta\zeta"}{dt}$$

Avendo ora trovato in generale

$$\begin{array}{ll} d\xi' = \xi" dR - \xi'" dQ & d\xi" = \xi'" dP - \xi' dR \\ d\xi'" = \xi' dQ - \xi" dP & d\eta' = \eta" dR - \eta'" dQ \, ecc \end{array}$$

(art. 27), essendo dP, dQ, dR quantità indeterminate, è chiaro che si possono dare anche alle variazioni $\delta\xi', \delta\xi", \delta\xi'", \delta\eta'$, ecc, la stessa forma cambiando d in δ; così si avrà

$$\begin{array}{ll} \delta\xi' = \xi" \delta R - \xi'" \delta Q & \delta\xi" = \xi'" \delta P - \xi' \delta R \\ \delta\xi'" = \xi' \delta Q - \xi" \delta P & \delta\eta' = \eta" \delta R - \eta'" \delta Q \, ecc \end{array}$$

essendo le tre quantità $\delta P, \delta Q, \delta R$ pure indeterminate e tra loro indipendenti.

Con queste sostituzioni e considerando le equazioni di condizione dell'art. 13, si troverà

$$\begin{array}{rcl} \xi'" \delta\xi" + \eta'" \delta\eta" + \zeta'" \delta\zeta" & = & \delta P \\ \xi' \delta\xi'" + \eta' \delta\eta'" + \zeta' \delta\zeta'" & = & \delta Q \\ \xi" \delta\xi' + \eta" \delta\eta' + \zeta" \delta\zeta' & = & \delta R \end{array}$$

espressioni analoghe a quelle di dP, dQ, dR (art. 23); e inoltre

$$\begin{array}{rcl} d\xi" \delta\xi' + d\eta" \delta\eta' + d\zeta" \delta\zeta' & = & -dP\delta Q \\ d\xi'" \delta\xi' + d\eta'" \delta\eta' + d\zeta'" \delta\zeta' & = & -dP\delta R \\ d\xi' \delta\xi" + d\eta' \delta\eta" + d\zeta' \delta\zeta" & = & -dQ\delta P \\ d\xi'" \delta\xi" + d\eta'" \delta\eta" + d\zeta'" \delta\zeta" & = & -dQ\delta R \\ d\xi' \delta\xi"' + d\eta' \delta\eta"' + d\zeta' \delta\zeta"' & = & -dR\delta P \\ d\xi" \delta\xi"' + d\eta" \delta\eta"' + d\zeta" \delta\zeta'" & = & -dR\delta Q \end{array}$$

Pertanto le quantità trovate sopra risultanti dai termini $\frac{dT}{dp}\delta p$, $\frac{dT}{dq}\delta q$, $\frac{dT}{dr}\delta r$ del valore di δT, diverranno mettendo p, q, r al posto di $\frac{dP}{dp}$, $\frac{dQ}{dt}$, $\frac{dR}{dt}$,

$$\begin{gathered}
\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\right)}{dt}\delta P + \frac{dT}{dp}\left(r\delta Q - q\delta R\right) \\
\frac{d.\left(\frac{dT}{dq}\right)}{dt}\delta Q + \frac{dT}{dq}\left(p\delta R - r\delta P\right) \\
\frac{d.\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dt}\delta R + \frac{dT}{dr}\left(q\delta P - p\delta Q\right)
\end{gathered}$$

la cui somma sarà di conseguenza il risultato dei termini dovuti alla variazione di T, nell'equazione generale.

Quanto ai termini relativi alla variazione di V, poiché V diviene una funzione algebrica di $\xi', \xi", \xi'", \eta'$, ecc, dopo la sostituzione di $x' + a\xi' + b\xi" + c\xi'"$, $y' + a\eta' + b\eta" + c\eta'"$, $z' + a\zeta' + b\zeta" + c\zeta'"$, al posto di x, y, z, il simbolo di integrale S, essendo riferito alle sole quantità a, b, c, dovrà essere differenziato rispetto a δ, e sostituendo poi ai valori $\delta\xi', \delta\xi"$, ecc, i loro valori in $\delta P, \delta Q, \delta R$; così poiché $\frac{\delta V}{\delta\xi'} = \frac{\delta V}{d\xi'}$, $\frac{\delta V}{\delta\xi"} = \frac{\delta V}{d\xi"}$, ecc, si avranno, nella stessa equazione, i seguenti termini

$$\frac{\delta V}{d\xi'}\left(\xi"\delta R - \xi'"\delta Q\right) + \frac{\delta V}{d\xi"}\left(\xi'"\delta P - \xi'\delta R\right) + \frac{\delta V}{d\xi'"}\left(\xi'\delta Q - \xi"\delta P\right) + \frac{\delta V}{d\eta'}\left(\eta'\delta R - \eta"'\delta Q\right) + ecc$$

Riunendo, infine, tutti i termini moltiplicati per ognuna delle tre quantità $\delta P, \delta Q, \delta R$, si avrà un'equazione generale di questa forma

$$0 = (P)\,\delta P + (Q)\,\delta Q + (R)\,\delta R$$

nella quale

$$\begin{gathered}
(P) = \frac{d.\frac{dT}{dp}}{dt} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq} + \xi'"\frac{\delta V}{d\xi"} + \eta'"\frac{\delta V}{d\eta"} + \zeta'"\frac{\delta V}{d\xi"} - \xi"\frac{\delta V}{d\xi"'} - \eta"\frac{\delta V}{d\eta"'} - \zeta"\frac{\delta V}{d\zeta"'} \\
(Q) = \frac{d.\frac{dT}{dp}}{dt} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr} + \xi'\frac{\delta V}{d\xi'"} + \eta'\frac{\delta V}{d\eta'"} + \zeta'\frac{\delta V}{d\zeta'"} - \xi'"\frac{\delta V}{d\xi'} - \eta"'\frac{\delta V}{d\eta'} - \zeta'"\frac{\delta V}{d\zeta'} \\
(R) = \frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dr} + \xi"\frac{\delta V}{d\xi'} + \eta"\frac{\delta V}{d\eta'} + \zeta"\frac{\delta V}{d\zeta'} - \xi'\frac{\delta V}{d\xi"} - \eta'\frac{\delta V}{d\eta"} - \zeta'\frac{\delta V}{d\zeta"}
\end{gathered}$$

E siccome le tre quantità $\delta P, \delta Q, \delta R$ sono tra loro indipendenti, e nello stesso tempo arbitrarie, si avranno, pertanto, queste tre equazioni particolari $(P) = 0$, $(Q) = 0$, $(R) = 0$, le quali essendo combinate con le sei equazioni di condizione tra le nove variabili $\xi', \xi"$, ecc, (art. 13), serviranno a determinare ognuna di queste variabili.

Si possono mettere, se si vuole, sotto una forma più semplice, i termini di queste equazioni dipendenti dalla quantità V. Poiché $V = S\Pi Dm$, avrà (in simbolo S non riguarda le variabili $\xi', \xi"$, ecc)

$$\xi"\frac{\delta V}{d\xi'} = S\xi"\frac{d\Pi}{d\xi'}Dm \quad \eta"\frac{\delta V}{d\eta'} = S\eta"\frac{d\Pi}{d\eta'}Dm \quad ecc$$

e siccome Π è una funzione algebrica di $a\xi' + b\xi" + c\xi'"$, $a\eta' + b\eta" + c\eta'"$, $a\zeta' + b\zeta" + c\zeta'"$, è facile vedere che facendo variare separatamente a, b, c, si avrà

$$\begin{aligned}
\xi'"\frac{d\Pi}{d\xi"} + \eta'"\frac{d\Pi}{d\eta"} + \zeta'"\frac{d\Pi}{d\zeta"} &= \frac{bd\Pi}{dc} \\
\xi"\frac{d\Pi}{d\xi'"} + \eta"\frac{d\Pi}{d\eta'"} + \zeta"\frac{d\Pi}{d\zeta'"} &= c\frac{d\Pi}{db}
\end{aligned}$$

e così di seguito. Di modo che si avrà

$$\begin{aligned}
\xi'"\frac{dV}{d\xi"} + \eta'"\frac{dV}{d\eta"} + \zeta'"\frac{dV}{d\zeta"} - \xi"\frac{dV}{d\xi'"} + \eta"\frac{dV}{d\eta'"} + \zeta"\frac{dV}{d\zeta'"} &= S\left(b\frac{d\Pi}{dc} - c\frac{d\Pi}{db}\right)Dm \\
\xi'\frac{dV}{d\xi'"} + \eta'\frac{dV}{d\eta'"} + \zeta'\frac{dV}{d\zeta'"} - \xi'"\frac{dV}{d\xi'} + \eta'"\frac{dV}{d\eta'} + \zeta'"\frac{dV}{d\zeta'} &= S\left(c\frac{d\Pi}{da} - a\frac{d\Pi}{dc}\right)Dm \\
\xi"\frac{dV}{d\xi'} + \eta"\frac{dV}{d\eta'} + \zeta"\frac{dV}{d\zeta'} - \xi'\frac{dV}{d\xi"} + \eta'\frac{dV}{d\eta"} + \zeta'\frac{dV}{d\zeta"} &= S\left(a\frac{d\Pi}{db} - b\frac{d\Pi}{da}\right)Dm
\end{aligned}$$

Ma se questa trasformazione semplifica le formule, non semplifica però il calcolo, poiché invece dell'unica integrazione contenuta in V, bisognerà eseguirne tre.

39. quando le distanze tra i centri delle forze e il centro del corpo sono molto grandi rispetto alle dimensioni di questo corpo, è allora possibile ridurre la quantità Π in una serie molto convergente di termini proporzionali alle forze e ai prodotti di a, b, c; di modo che l'integrazione $S\Pi Dm$ non presenterà alcuna difficoltà; è il caso dei Pianeti in quanto essi si attraggono reciprocamente.

Se la forza attrattiva $\overline{P}$ è semplicemente proporzionale alla distanza $\overline{p}$, di modo che $\overline{P} = k\overline{p}$, essendo k un coefficiente costante, il termine $\int \overline{P}d\overline{p}$ della funzione Π (art. 35) diviene $= \frac{k\overline{p}^2}{2}$; e siccome p è espresso in generale da $\sqrt{\left((x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2\right)}$, indicando con f, g, h, le coordinate del centro delle forze; il termine in questione darà questo, $\frac{k}{2}\left((x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2\right)$; pertanto, sostituendo a x, y, z i loro valori $x'+\xi$, $y'+\eta$, $z'+\zeta$, moltiplicando per Dm e integrando rispetto a S, si avranno nel valore di $V = S\Pi Dm$ i termini seguenti

$$\frac{k}{2}\left((x'-f)^2+(y'-g)^2+(z'-h)^2\right)SDm + k\,(x'-f)\,S\xi Dm +$$
$$k\,(y'-g)\,S\eta Dm + k\,(z'-h)\,S\zeta Dm + \frac{k}{2}S\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)Dm$$

Ora $\xi = a\xi' + b\xi" + c\xi'"$, $\eta = a\eta' + b\eta" + c\eta'"$, $\zeta = a\zeta' + b\zeta" + c\zeta'"$; pertanto

$$S\xi Dm = \xi' SaDm + \xi" SbDm + \xi'" ScDm$$

e così per gli altri; e $S\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)Dm = S\left(a^2+b^2+c^2\right)Dm.$ (art. 13) uguale a una costante che indicheremo con E.

Ma se si assume per il centro arbitrario del corpo il suo stesso centro di gravità, si ha allora

$$SaDm = 0 \quad SbDm = 0 \quad ScDm = 0$$

come già visto in precedenza (art. 36). Così in questo caso la quantità V conterrà rispetto alla forza in questione solo i termini

$$\frac{k}{2}\left((x'-f)^2+(y'-g)^2+(z'-h)^2\right)+\frac{k}{2}E$$

di modo che tutte le differenze parziali $\frac{dV}{d\xi'}$, $\frac{dV}{d\xi"}$, ecc, saranno nulle.

Da ciò segue che l'effetto di questa forza sarà nummo rispetto al moto di rotazione attorno al centro di gravità.

E siccome l'espressione precedente V, con $\frac{kE}{2}$ costante, è la stessa del corpo concentrato nel suo centro, nel qual caso $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, si avranno, per il moto progressivo del suo centro, le stesse equazioni del corpo concentrato in un punto; i differenziali parziali di V, relativamente alle variabili x', y', z' saranno gli stessi di quelli in questa ipotesi.

Se si vuole considerare il corpo come pesante, prendendo la forza acceleratrice della gravità come unitaria, e l'asse delle z diretto verticalmente dall'alto in basso, si avrà $\overline{P} = 1$, $\overline{p} = h - z$; pertanto $\int Pdp = h - z = h - z' - a\zeta' - b\zeta" - c\zeta'"$; di modo che la quantità V conterrà a causa della pesantezza del corpo, i termini

$$(h-z')\,SDm - \zeta' SaDm - \zeta" SbDm - \zeta'" ScDm$$

Così, se il centro del corpo è preso nel suo centro di gravità, i termini che contengono le variabili $\zeta', \zeta"$, ecc, scompariranno e, di conseguenza, l'effetto della gravità sulla rotazione sarà nullo, come nel caso precedente. Il valore di V in quanto è dovuto alla gravità, si ridurrà a $(h-z')\,SDm$, cioè, a ciò che sarebbe se il corpo fosse ridotto a un punto, conservando la sua massa SDm; pertanto, anche il moto di traslazione del corpo sarà lo stesso come in questo caso.

2.6.3 Determinazione del moto di un corpo grave di forma qualsiasi

40. Questo problema, per quanto difficile sia, è tuttavia uno dei più semplici che presenta la Meccanica, quando si considerano le cose nello stato naturale e senza astrazione; essendo tutti i corpi essenzialmente pesanti ed estesi, non si può privarli di queste due proprietà senza snaturarli e le questioni nelle quali non si tenesse conto di questi due aspetti, sarebbero solo pura curiosità.

Inizieremo con l'esaminare il moto dei corpi liberi, come quello dei proiettili; esamineremo poi quello dei corpi vincolati in un punto, come i pendoli.

Nel primo caso si prenderà come centro del corpo nel suo centro di gravità, e siccome l'effetto della gravità è nullo sulla rotazione, si determineranno le leggi di questa rotazione con le tre equazioni seguenti (art. 38),

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{d.\frac{dT}{dp}}{dt} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq} & = & 0 \\ \frac{d.\frac{dT}{dq}}{dt} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr} & = & 0 \\ \frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dp} & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (A)$$

e supponendo (art. 37)

$$p = \frac{dP}{dt} \quad q = \frac{dQ}{dt} \quad r = \frac{dR}{dt},\ ecc$$

$$T = \frac{1}{2}\left(Ap^2+Bq^2+Cr^2\right) - Fqr - Gpr - Hpq$$

Nei confronti del centro stesso del corpo, seguirà le leggi note del moto dei proiettili considerati come puntiformi; così la determinazione del suo moto non presenta difficoltà e non ci soffermeremo.

Nel secondo caso si prederà il punto fisso di sospensione per il centro del corpo e, supponendo le ordinate z verticali e dirette dal basso in alto, si avrà (art. 39)

$$V = (h-z')\,SDm - \zeta' SaDm - \zeta" ScDm$$

da cui si ricava

$$\frac{dV}{d\zeta'} = -SaDm \quad \frac{dV}{d\zeta"} = -SbDm \quad \frac{dV}{d\zeta'"} = -ScDm$$

e tutte le altre differenze parziali di V saranno nulle. Di modo che le equazioni per il moto di rotazione saranno (art. 38)

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{d.\frac{dT}{dp}}{dt} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq} - \zeta'"SbDm + \zeta"ScDm & = & 0 \\ \frac{d.\frac{dT}{dq}}{dt} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr} - \zeta'ScDm + \zeta'"SaDm & = & 0 \\ \frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dp} - \zeta"SaDm + \zeta'SbDm & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (B)$$

dove le quantità $SaDm$, $SbDm$, $ScDm$ devono essere considerato costanti determinate dalla forma del corpo e dalla posizione del punto di sospensione.

41. La soluzione del primo caso, nel quale il corpo è supposto è completamente libero e dove si considera solo la rotazione attorno al centro di gravità, dipende unicamente dall'integrazione delle tre equazioni (A).

È facile trovare due integrali di queste equazioni;

1°. se si moltiplica rispettivamente per $\frac{dT}{dp}, \frac{dT}{dq}, \frac{dT}{dr}$ e poi si sommano le tre equazioni, si ottiene un'equazione integrabile. il cui integrale sarà

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 = f^2$$

essendo f^2 una costante arbitraria.

2°. Se si moltiplicano le stesse equazioni per p, q, r e poi le si somma, si avrà

$$pd.\frac{dT}{dp} + qd.\frac{dT}{dp} + rd.\frac{dT}{dp} = 0$$

la quale (poiché T è una funzione unicamente di p, q, r e di conseguenza $dT = \frac{dT}{dp}dp + \frac{dT}{dq}dq + \frac{dT}{dr}dr$ è pure integrabile e il suo integrale sarà

$$p\frac{dT}{dp} + q\frac{dT}{dq} + r\frac{dT}{dr} - T = h^2$$

essendo h^2 una nuova costante arbitraria.

Mettendo in questa equazione al posto di T, $\frac{dT}{dp}, \frac{dT}{dq}, \frac{dT}{dr}$ i loro valori, si avranno due equazioni di secondo grado tra p, q, r, dalle quali si potranno determinare i valori di due di queste variabili in funzione della terza; ed sostituendo poi questi valori in una qualunque delle tre equazioni (A), si avrà un'equazione del primo ordine tra t e la variabile rimasta; si potrà così conoscere in questo modo i valori di p, q, r in t. Ed è quanto andiamo a sviluppare.

Evidenzio dapprima che si può ridurre il secondo dei due integrali trovati in una forma più semplice, osservando che, poiché T è una funzione omogenea di secondo grado di p, q, r, si ha per la proprietà nota per questo tipo di funzioni

$$p\frac{dT}{dp} + q\frac{dT}{dq} + r\frac{dT}{dr} = 2T$$

e ciò riduce l'equazione integrale a $T = h^2$, la quale esprime la conservazione delle forze vive del moto di rotazione.

Evidenzio poi che, siccome la quantità

$$\left(r\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dr}\right)^2 + \left(p\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(q\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dq}\right)^2$$

è equivalente a questa

$$\left(p^2 + q^2 + r^2\right) \times \left(\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2\right) - \left(p\frac{dT}{dp} + q\frac{dT}{dq} + r\frac{dT}{dr}\right)^2$$

la quale diviene $f^2\left(p^2 + q^2 + r^2\right) - 4h^4$, in virtù dei due integrali precedenti, si avrà un'equazione differenziale più semplice, sommando i quadrati dei valori di $d.\frac{dT}{dp}, d.\frac{dT}{dq}, d.\frac{dT}{dr}$ nelle tre equazioni differenziali (A); equazione che si potrà così utilizzare al posto di una qualsiasi di quelle.

In questo modo la determinazione delle quantità p, q, r, in t dipenderà semplicemente da queste tre equazioni

$$\begin{array}{rcl} T & = & h^2 \\ \left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 & = & f^2 \\ \left(d.\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(d.\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(d.\frac{dT}{dr}\right)^2 & = & \left(f^2\left(p^2 + q^2 + r^2\right) - 4h^4\right)dt^2 \end{array}$$

nelle quali

$$T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) - Fqr - Gpr - Hpq$$

42. Questa determinazione è alquanto semplice quando le tre costanti F, G, H sono nulle. Si ha allora semplicemente

$$T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right)$$

pertanto $\frac{dT}{dp} = Ap$, $\frac{dT}{dq} = Bq$, $\frac{dT}{dr} = Cr$; di modo che le tre equazioni da risolvere saranno della forma seguente

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= 2h^2 \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= f^2 \\ \frac{A^2dp^2 + B^2dq^2 + C^2dr^2}{dt^2} &= f^2\left(p^2 + q^2 + r^2\right) - 4h^4 \end{aligned}$$

Se, pertanto, si pone $p^2 + q^2 + r^2 = u$, e si ricavano i valori di p, q, r, da queste tre equazioni

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= u \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= 2h^2 \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= f^2 \end{aligned}$$

si avrà

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{BCu - 2h^2(B + C) + f^2}{(A - B)(A - C)} \\ q^2 &= \frac{ACu - 2h^2(AB + C) + f^2}{(B - A)(B - C)} \\ r^2 &= \frac{ABu - 2h^2(A + B) + f^2}{(C - A)(C - B)} \end{aligned}$$

e dopo aver sostituito questi valori nell'equazione differenziale precedente, il suo primo membro diverrà, dopo le riduzioni

$$\frac{A^2B^2C^2\left(4h^2 - f^2u^2\right)du^2}{4\left(BCu - 2h^2(B + C) + f^2\right)\left(ACu - 2h^2(A + C) + f^2\right)\left(ABu - 2h^2(A + B) + f^2\right)dt^2}$$

e il secondo membro diverrà $f^2u - 4h^4$, di modo che dividendo tutta l'equazione per $f^2u - 4h^4$, e prendendo la radice quadrato, si avrà infine

$$dt = \frac{ABCdu}{\sqrt{-\left(BCu - 2h^2(B + C) + f^2\right)\left(ACu - 2h^2(A + C) + f^2\right)\left(ABu - 2h^2(A + B) + f^2\right)}}$$

da cui si ricaverà mediante l'integrazione t rispetto a u e viceversa.

43. Supponiamo ora che le costanti F, G, H non siano nulle, e vediamo come ci si possa ricondurre al caso precedente mediante qualche sostituzione.

Sostituisco al posto delle variabili p, q, r, delle funzioni di altre variabili x, y, z che non bisognerà confondere con quelle impiegate finora per rappresentare le coordinate dei diversi punti del corpo; e suppongo dapprima queste funzioni tali che si abbia $p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. È evidente che per soddisfare a questa condizione, possono solo essere lineari e di conseguenza del tipo

$$p = p'x + p"y + p'"z \quad q = q'x + q"y + q'"z \quad r = r'x + r"y + r'"z$$

Le quantità $p', p", p'", q'$, ecc, saranno costanti arbitrarie, tra le quali, per l'equazione $p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, basterà avere le sei equazioni di condizione

$$\begin{array}{ccc} p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1 & p"^2 + q"^2 + r"^2 = 1 & p"'^2 + q"'^2 + r"'^2 = 1 \\ p'p" + q'q" + r'r" = 0 & p'p'" + q'q'" + r'r'" = 0 & p"p'" + q"q'" + r"r'" = 0 \end{array}$$

di modo che, poiché le quantità in questione sono in numero di nove, dopo aver soddisfatto a queste sei equazioni, ne rimarranno ancora tre arbitrarie.

Sostituirò ora queste espressioni di p, q, r nel valore di T, e farò in modo, per mezzo dei tre arbitrari detti, che i tre termini che conterranno i prodotti xy, xz, yz scompaiano dal valore di T, in modo che questa quantità si riduca alla forma $\frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{2}$.

Ma, per rendere il calcolo più semplice, sostituirò immediatamente in questa formula i valori di x, y, z in p, q, r, e confrontando poi il risultato con l'espressione di T, determinerò non solo gli arbitrari, ma anche le incognite α, β, γ.

I valori sopra di p, q, r, essendo moltiplicati rispettivamente per p', q', r', per p'', q'', r'' e per p''', q''', r''', sommati poi tra loro, danno immediatamente, grazie alle equazioni di condizione tra i coefficienti p', p'',ecc,

$$x = p'p + q'q + r'r \quad y = p''p + q''q + r''r \quad z = p'''p + q'''q + r'''r$$

e la sostituzione di questi valori nella quantità $\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}{2}$, e il confronto con il valore di T dell'art. 41, darà anche le sei equazioni seguenti

$$\begin{aligned}
\alpha p'^2 + \beta p''^2 + \gamma p'''^2 &= A\\
\alpha q'^2 + \beta q''^2 + \gamma q'''^2 &= B\\
\alpha r'^2 + \beta r''^2 + \gamma r'''^2 &= C\\
\alpha p'q' + \beta p''q'' + \gamma p'''q''' &= -2F\\
\alpha p'r' + \beta p''r'' + \gamma p'''r''' &= -2G\\
\alpha q'r' + \beta q''r'' + \gamma q'''r''' &= -2H
\end{aligned}$$

che serviranno alla determinazione delle sei incognite.

E questa determinazione non presenta alcuna difficoltà; poiché se si somma la prima equazione moltiplicata per p', la quarta moltiplicata per q' e la quinta moltiplicata per r', si ha, per le suddette equazioni di condizione,

$$\alpha p' = Ap' - 2Fq' - 2Gr'$$

sommando la seconda, la quarta e la sesta, moltiplicate rispettivamente per q', p', r', si avrà analogamente

$$\alpha q' = Bq' - 2Fp' - 2Hr'$$

sommando infine la terza, la quinta e la sesta, moltiplicate rispettivamente per r', p', q', si avrà

$$\alpha r' = Cr' - 2Gp' - 2Hq'$$

ed essendo queste tre equazioni combinate con l'equazione di condizione

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1$$

serviranno a determinare le quattro incognite α, p', q', r'.

Le prime due equazioni danno

$$q' = \frac{FG + H(A-\alpha)}{2FH + G(B-\alpha)}p' \qquad r' = \frac{(A-\alpha)(B-\alpha) - 4F^2}{4FH + 2G(B-\alpha)}p'$$

sostituendo questi valori nella terza, si avrà, dopo aver diviso per p', questa equazione in α

$$(\alpha - A)(\alpha - B)(\alpha - C) - 4H^2(\alpha - A) - 4G^2(\alpha - B) - 4F^2(\alpha - C) + 16FGH = 0$$

la quale, essendo di terzo grado, avrà necessariamente una radice reale.

Sostituendo gli stessi valori nella quarta equazione, si ricaveranno quelli di p', q', r' in α, i quali, ponendo per sintesi

$$(\alpha) = \sqrt{\left(\overline{(A-\alpha)(B-\alpha) - 4F^2}^2 + \overline{4FG + 2H}^2 + \overline{4FH + 2G(B-\alpha)}^2\right)}$$

saranno così espressi

$$p' = \frac{4FH + 2G(B-\alpha)}{(\alpha)} \quad q' = \frac{4FG+2H(A-\alpha)}{(\alpha)} \quad r' = \frac{(A-\alpha)(B-\alpha) - 4F^2}{(\alpha)}$$

Se si ripetono le stesse combinazioni delle equazioni precedenti, ma prendendo per moltiplicatori le quantità p'', q'', r'', al posto di p', q', r' si otterranno queste equazioni

$$\begin{aligned}
\beta p'' &= Ap'' - 2Fq'' - 2Gr''\\
\beta q'' &= Bq'' - 2Fp'' - 2Hr''\\
\beta r'' &= Cr'' - 2Gp'' - 2Hq''
\end{aligned}$$

che assieme all'equazione di condizione $p''^2 + q''^2 + r''^2 = 1$ serviranno a determinare le quattro incognite β, p'', q'', r''; e siccome queste equazioni differiscono dalle precedenti solo perché queste incognite sostituiscono le prime α, p', q', r', se ne concluderà immediatamente che l'equazione in β, così come le espressioni in p'', q'', r'' in β saranno le stesse di quelle trovate in α.

Infine, se si reiterano le stesse operazioni, ma prendendo $p'"$, $q'"$, $r'"$ per moltiplicatori, si troveranno ancora le tre equazioni

$$\begin{aligned}\gamma p'" &= Ap'" - 2Fq'" - 2Gr'" \\ \gamma q'" &= Bq'" - 2Fp'" - 2Hr'" \\ \gamma r'" &= Cr'" - 2Gp'" - 2Hq'"\end{aligned}$$

alle quali si aggiungerà l'equazione $p'"^2+q'"^2+r'"^2 = 1$, e siccome queste equazioni sono del tutto simili alle precedenti, se ne trarranno analoghe conclusioni.

Si concluderà, quindi, in generale, che l'equazione in α trovata sopra, avrà come radici valori delle tre quantità α, β, γ e che queste tre radici, sostituite successivamente nelle espressioni di $p', q'.r'$ in α, consentiranno di ottenere i valori di p', q', r', di $p", q", r"$ e di $p'", q'", r'"$; di modo che tutto sarà noto mediante la risoluzione dell'equazione indicata.

Del resto, siccome questa equazione è di terzo grado, avrà sempre una radice reale, che, essendo preso per α, renderà pure reali le tre quantità p', q', r'. Per le altre due radici β e γ, se fossero immaginarie, sarebbero della forma $b+c\sqrt{-1}$ e $b-c\sqrt{-1}$: di modo che le quantità $p", q", r"$ che sono funzioni razionali di β, avranno pure la forma $m+n\sqrt{-1}$, $m'+n'\sqrt{-1}$, $m"+n"\sqrt{-1}$; e le tre quantità $p'", q'", r'"$, che sono funzioni simili di p saranno di forme reciproche $m-n\sqrt{-1}$, $m'-n'\sqrt{-1}$, $m"-n"\sqrt{-1}$; pertanto l'equazione di condizione $p"p'" + q"q'" + r"r'" = 0$, diverrà

$$m^2 + n^2 + m'^2 + n'^2 + m"^2 + n"^2 = 0$$

e, di conseguenza, impossibile finché $m, n, m', n', m", n"$ saranno reali; da ciò segue che β e γ non possono essere immaginari.

Per convincersi direttamente di questa verità, partendo dalla stessa equazione in esame, la riscrivo nella forma

$$\alpha - C = \frac{4H^2(\alpha - A) + 4G^2(\alpha - B) - 16FGH}{(\alpha - A)(\alpha - B) - 4F^2}$$

vi sostituisco successivamente, invece di α, le altre due radici β, γ e sottraggo le due equazioni risultanti tra loro; avrò, dopo le riduzioni e la divisione per $\beta - \gamma$, questa trasformata

$$\begin{gathered}\left((\alpha - A)(\alpha - B) - 4F^2\right)\left((\gamma - A)(\gamma - B) - 4F^2\right) + 4\left(G^2 + H^2\right)\beta\gamma - 4\left(4FGH + H^2A + G^2B\right)(\beta + \gamma) \\ 16F^2\left(G^2 + H^2\right) + 16(A+B)FGH + 4\left(AH^2 + BG^2\right) = 0\end{gathered}$$

la quale è riducibile alla forma

$$\begin{gathered}\left((\beta - a)(\beta - B) - 4F^2\right)\left((\gamma - A)(\gamma - B) - 4F^2\right) + 4(H(\beta - A) - 2FG)(H(\gamma - A) - 2FG) \\ +4(G(\beta - A) - 2FH)(G(\gamma - A) - 2FH) = 0\end{gathered}$$

che si vede essere la stessa dell'equazione $p"p'" + q"q'" + r"r'" = 0$ e che fornisce di conseguenza conclusioni simili.

Pertanto, le tre radici α, β, γ saranno necessariamente tutte reali, e i nove coefficienti $p', q', r', p"$, ecc, che sono funzioni razionali di queste radici, saranno pure reali.

44. Determiniamo ora i valori di questi coefficienti, in modo che si abbia $p^2+q^2+r^2 = x^2+y^2+z^2$ e $T = \frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}{2}$; facendo ora variare successivamente p, q, r, si avrà, poiché x, y, z sono funzioni di queste variabili,

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dp} &= \alpha x\frac{dx}{dp} + \beta y\frac{dy}{dp} + \gamma z\frac{dz}{dp} \\ \frac{dT}{dq} &= \alpha x\frac{dx}{dq} + \beta y\frac{dy}{dq} + \gamma z\frac{dz}{dq} \\ \frac{dT}{dr} &= \alpha x\frac{dx}{dr} + \beta y\frac{dy}{dr} + \gamma z\frac{dz}{dr}\end{aligned}$$

ma $x = p'p + q'q + r'r$, $y = p"p + q"q + r"r$, $z = p'"p + q'"q + r'"r$, come visto in precedenza; pertanto $\frac{dx}{dp} = p'$, $\frac{dx}{dq} = q'$, $\frac{dx}{dr} = r'$, $\frac{dy}{dp} = p"$, $\frac{dy}{dq} = q"$, ecc; sostituendo questi valori, si avrà

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dp} &= p'\alpha x + p"\beta y + p'"\gamma z \\ \frac{dT}{dq} &= q'\alpha x + q"\beta y + q'"\gamma z \\ \frac{dT}{dr} &= r'\alpha x + r"\beta y + r'"\gamma z\end{aligned}$$

Grazie alle equazioni di condizione tra i coefficienti $p', q', r', p"$, ecc, si avrà

$$\begin{aligned}\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dr}\right)^2 &= \alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 \\ \left(d.\frac{dT}{dp}\right)^2 + \left(d.\frac{dT}{dq}\right)^2 + \left(d.\frac{dT}{dr}\right)^2 &= \alpha^2dx^2 + \beta^2dy^2 + \gamma^2dz^2\end{aligned}$$

Di conseguenza, le tre equazioni finali dell'art. 41 si ridurranno a queste

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2 &= 2h^2\\ \alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2 &= f^2\\ \frac{\alpha^2dx^2+\beta^2dy^2+\gamma^2dz^2}{dt^2} &= f^2\left(x^2+y^2+z^2\right)-4h^4\end{aligned}$$

le quali sono, come si vede, del tutto simili a quelle dell'art. 42, corrispondendo le quantità $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ alle quantità p, q, r, A, B, C.

Da ciò segue che se si pone, come nell'art. citato

$$u = p^2+q^2+r^2 = x^2+y^2+z^2$$

si avranno tra le variabili x, y, z, u, t le stesse formule trovate tra p, q, r, u, t cambiando soltanto A, B, C in α, β, γ.

Avendo in tal modo i valori di x, y, z in u o t, si avranno i valori completi di p, q, r dalle formule dell'art. 43.

45. Le quantità p, q, r non bastano a determinare tutte le circostanze del moto di rotazione del corpo,ma servono solo a far conoscere la sua rotazione istantanea. Infatti, poiché $p=\frac{dP}{dt}$, $q=\frac{dQ}{dt}$, $r=\frac{dR}{dt}$, ne segue che, come visto nell'art. 26, l'asse spontaneo di rotazione, attorno al quale ruota in ogni istante, formerà con gli assi delle coordinate a, b, c, angoli i cui coseni saranno rispettivamente

$$\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}} \quad \frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}} \quad \frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$$

e che la velocità angolare attorno a questo asse sarà rappresentata da $\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$,

Per la conoscenza completa della rotazione del corpo, serve ancora determinare i valori di nove quantità $\xi', \eta', \zeta', \xi"$, ecc. da cui dipendono quelli di coordinate ξ, η, ζ, le quali forniscono la posizione assoluta del centro di gravità visto come immobile (art. 34); e ciò richiede ancora tre nuove integrazioni.

Per questo effetto riprendo le formule differenziali dell'art. 27, e mettendo pdt, qdt, rdt, al posto di dP, dQ, dR, ho queste equazioni

$$\left.\begin{aligned}d\xi'+(q\xi'"-r\xi")\,dt &= 0\\ d\xi"+(r\xi'-p\xi'")\,dt &= 0\\ d\xi"'+(p\xi"-q\xi')\,dt &= 0\end{aligned}\right\}\quad (C)$$

e altrettante equazioni simili in $\eta', \eta", \eta'"$, e in $\zeta', \zeta", \zeta'"$, cambiando soltanto ξ in η e in ζ.

Confrontando queste equazioni con le equazioni differenziali (A) dell'art. 40, tra le quantità $\frac{dT}{dp}, \frac{dT}{dq}, \frac{dT}{dr}$, è chiaro che esse sono del tutto simili, di modo che queste quantità corrispondono alle quantità $\xi'\xi", \xi'"$, come anche alle quantità $\eta', \eta", \eta'"$ e alle quantità $\zeta', \zeta", \zeta'"$.

Da ciò concludo che queste ultime variabili possono essere viste come valori particolari delle variabili $\frac{dT}{dp}, \frac{dT}{dq}, \frac{dT}{dr}$; e che anche, poiché le equazioni tra queste variabili sono semplicemente lineari, si avrà, prendendo tre costanti qualsiasi l, m, n, queste tre equazioni complete

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{dT}{dp} &= l\xi'+m\eta'+n\zeta'\\ \tfrac{dT}{dq} &= l\xi"+m\eta"+n\zeta"\\ \tfrac{dT}{dr} &= l\xi'"+m\eta'"+n\zeta'"\end{aligned}\right\}\quad (D)$$

combinando queste tre equazioni con le sei equazioni di condizione tra le stesse variabili ξ', η', ecc, sembra potersi determinare queste variabili, che sono in totale nove; ma considerando inoltre le equazioni precedenti, è facile convincersi che esse non possono realmente valere per due equazioni; poiché sommando i loro quadrati, si ha che tutte le incognite $\xi'\eta', \xi"$, ecc, scompaiono in virtù delle stesse equazioni di condizione (art. 15); di modo che si avrà semplicemente l'equazione

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)^2+\left(\frac{dT}{dq}\right)^2+\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 = l^2+m^2+n^2$$

la quale equivale al primo dei due integrali trovati in precedenza (art. 41); e il confronto tra queste equazioni dà $f^2=l^2+m^2+n^2$, di modo che tra le quattro costanti f, l, m, n ve ne sono solo tre arbitrarie.

Da ciò si deve concludere che la soluzione completa richiede ancora una nuova integrazione, per la quale basterà usare una qualsiasi delle equazioni differenziali precedenti, o una loro qualsiasi combinazione.

46. Ma è possibile rendere il calcolo molto più generale e semplice, cercando direttamente i valori delle coordinate ξ, η, ζ, che determinano immediatamente la posizione assoluta di un punto qualsiasi del corpo, per il quale le coordinate relative agli assi del corpo, sono a, b, c.

Per questo, sommo le tre equazioni integrali (D), dopo aver moltiplicato la prima per a, la seconda per b, la terza per c; ciò dà (art. 12), questa equazione

$$l\xi+m\eta+n\zeta = a\frac{dT}{dp}+b\frac{dT}{dq}+c\frac{dT}{dr}$$

Per la natura delle quantità ξ, η, ζ, (art. 13) si ha già

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2+b^2+c^2$$

Infine si ha anche (art. 28) mettendo pdt, qdt, rdt al posto di dP, dQ, dR e considerando a, b, c costanti

$$\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{dt^2}=(cq-br)^2+(ar-cp)^2+(bp-aq)^2$$

Ecco così tre equazioni dalle quali si potranno ricavare i valori di ξ, η, ζ, mediante una sola integrazione.

Se si volessero poi conoscere separatamente i valori di ξ', η', ζ', ξ", ecc, basterebbe supporre nelle espressioni generali di ξ, η, ζ, le costanti $a=1$, $b=0$, $c=0$, o $a=0$, $b=1$, $c=0$, o $a=0$, $b=0$, $c=1$. Supponiamo per semplificare

$$\begin{aligned} L &= a\frac{dT}{dp}+b\frac{dT}{dq}+c\frac{dT}{dr} \\ M &= a^2+b^2+c^2 \\ N &= (cq-br)^2+(ar-cp)^2+(bp-aq)^2 \end{aligned}$$

sarà necessario, pertanto, risolvere queste tre equazioni

$$\begin{aligned} l\xi+m\eta+n\zeta &= L \\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2 &= M \\ \frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{dt^2} &= N \end{aligned}$$

nelle quali M è una costante data, L, N, sono considerate note in funzione di t, e l, m, n sono costanti arbitrarie.

Osservo dapprima che se l, m fossero contemporaneamente nulli, la prima equazione darebbe $\zeta=\frac{L}{n}$; e sostituendo questo valore nelle altre due, si avrà

$$\xi^2+\eta^2=M-\frac{L}{n^2} \qquad \frac{d\xi^2+d\eta^2}{dt^2}=N-\frac{dL^2}{n^2dt^2}$$

equazioni molto facili da integrare, e ponendo $\xi=\rho\cos\theta$, $\eta=\rho\sin\theta$, si ottiene

$$\rho^2=M-\frac{L}{n^2} \qquad \frac{d\xi^2+d\eta^2}{dt^2}=N-\frac{dL^2}{n^2dt^2}$$

la prima delle quali darà il valore di ρ, e la seconda l'angolo θ dall'integrazione di questa formula

$$d\theta=\frac{dt}{\rho}\sqrt{N-\frac{dL^2}{n^2dt^2}-\frac{d\rho^2}{dt^2}}$$

Supponiamo ora che l, m non siano nulli, e vediamo come sia possibile ridurre questo caso al precedente. È chiaro che se si pone $l\xi+m\eta=x\sqrt{l^2+m^2}$, $m\xi-l\eta=y\sqrt{l^2+m^2}$, si avrà pure

$$\begin{aligned} \xi^2+\eta^2 &= x^2+y^2 \\ d\xi^2+d\eta^2 &= dx^2+dy^2 \end{aligned}$$

così le equazioni proposte si ridurranno dapprima a questa forma

$$\begin{aligned} x\sqrt{l^2+m^2}+n\zeta &= L \\ x^2+y^2+\zeta^2 &= M \\ \frac{dx^2+dy^2+d\zeta^2}{dt^2} &= N \end{aligned}$$

Se si pone poi

$$\begin{aligned} x\sqrt{l^2+m^2}+n\zeta &= z\sqrt{l^2+m^2+n^2} \\ nx-\zeta x\sqrt{l^2+m^2} &= u\sqrt{l^2+m^2+n^2} \end{aligned}$$

si avrà ancora $x^2+\zeta^2=z^2+u^2$ e $dx^2+d\zeta^2=dz^2+du^2$; si avranno quindi queste trasformate

$$\begin{aligned} z\sqrt{l^2+m^2+n^2} &= L \\ u^2+y^2+z^2 &= M \\ \frac{du^2+dy^2+dz^2}{dt^2} &= N \end{aligned}$$

che sono, come si vede, del tutto simili a quelle prima risolte; di modo che si avranno per u, y, z, le stesse espressioni trovate per ξ, η, ζ, cambiando soltanto n in $\sqrt{l^2+m^2+n^2}$.

Essendo questi valori noti, si avranno i valori generali di ξ, η, ζ dalle formule

$$\xi = \frac{lx+my}{\sqrt{l^2+m^2}} \quad \eta = \tfrac{mx-ly}{\sqrt{l^2+m^2}} \quad \zeta = \frac{nu+z\sqrt{l^2+m^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

47. Tale è, se non mi sbaglio, la soluzione più generale e più semplice che si possa dare del famoso problema del moto di rotazione dei corpi liberi; essa è analoga a quella che ho dato nelle Memorie dell'Accademia di Berlino del 1773, ma è nello stesso tempo più diretta e semplice. In quella sono partito da tre equazioni integrali che corrispondono alle equazioni (D) dell'art. 45, equazioni che mi sarebbero state fornite direttamente dal noto principio delle aree e dei momenti, e ai quali avevo legato l'equazione delle forze vive $T = h^2$ (art. 41): Qui ho dedotto l'intera soluzione dalle tre equazioni differenziali iniziali, e credo di aver messo in questa soluzione tutta la chiarezza e (se oso dirlo) e l'eleganza possibile; per questo motivo spero di non essere disapprovato per aver trattato di nuovo questo problema, sebbene non sia molto di pura curiosità, soprattutto, se come non dubito. può essere di qualche utilità allo sviluppo dell'analisi.

Ciò che mi sembra, comunque, più significativo nella soluzione precedente, è l'impiego fattovi delle quantità $\xi', \eta', \zeta', \xi"$, ecc, senza conoscere i loro valori, ma solo le equazioni di condizione che devono soddisfare, quantità che alla fine scompaiono completamente dal calcolo; non dubito che questo genere di analisi possa essere utile anche in altre occasioni.

Del resto, se questa soluzione è un poco lunga, lo si deve imputare solo alla grande generalità che si è voluta conservare; e si sono messi in evidenza due metodi per semplificarla, uno supponendo le costanti F, G, H nulle (art. 42), e l'altro ponendo nulle le costanti l, m (art. 46).

La prima di queste due ipotesi era sempre stata considerata come indispensabile per giungere ad una soluzione completa del problema, fino a che ho dato nella mia Memoire del 1773 il modo di superarla; questa ipotesi consiste, infatti, nel prendere come assi delle coordinate a, b, c, rette, tali che le somme $SabDm$, $SacDm$, $SbcDm$ siano nulle (art. 36); e M. Euler ha dimostrato per primo che ciò è sempre possibile, qualunque sia la forma del corpo, e che gli assi così determinati, sono assi di rotazione naturale, cioè, tali che il corpo può ruotare liberamente attorno a ciascuno di essi. Ma sebbene si possa sempre trovare assi che abbiano la proprietà in questione, e che la posizione degli assi del corpo sia arbitraria, non è indifferente avere una soluzione diretta e indipendente da queste considerazioni particolari.

La seconda delle due ipotesi, dipende dalla posizione degli assi coordinati ξ, η, ζ, nello spazio, posizione che essendo pure arbitraria, può sempre essere supposta tale che le costanti l, m divengano nulle, come ci si può convincere direttamente dalle espressioni generali di ξ, η, ζ che abbiamo trovato.

48. Supponendo F, G, H nulle, si ha, come visto nell'art. 42,

$$\frac{dT}{dp} = Ap \quad \tfrac{dT}{dq} = Bq \quad \frac{dT}{dr} = Cr$$

ed sostituendo questi valori nelle tre equazioni differenziali (A), si ha

$$dp + \frac{C-B}{A}qrdt = 0 \quad dq + \tfrac{A-C}{B}prdt = 0 \quad dp + \frac{B-A}{C}pqdt = 0$$

le quali sono in accordo con quelle che M. Euler ha utilizzato nella soluzione da lui data per primo a questo problema (si vedano le Memorie dell'Accademia di Berlino del 1758); per convincersene, basterà osservare che le costanti A, B, C (art. 36), non sono diverse da quelle che M. Euler chiama i *momenti d'inerzia* del corpo attorno agli assi delle coordinate a, b, c, e che le variabili p, q, r dipendono dal moto istantaneo e spontaneo di rotazione, di modo che se si chiamano α, β, γ, gli angoli che l'asse attorno al quale il corpo ruota spontaneamente in ogni istante, forma con gli assi a, b, c, e con ρ la velocità angolare di rotazione attorno a questo asse, si ha (art. 45)

$$p = \rho\cos\alpha \quad q = \rho\cos\beta \quad r = \rho\cos\gamma$$

Rispetto alle altre equazioni di M. Euler, le quali servono a determinare la posizione degli assi del corpo nello spazio, esse si riferiscono alle nostre equazioni (C) dell'art. 45. Infatti, siccome le nove quantità $\xi', \eta', \zeta', \xi"$, ecc, non sono altro che le coordinate perpendicolari dei tre punti del corpo presi nei suoi tre assi alla distanza 1 dal centro (ciò che segue evidentemente dal fatto che queste quantità derivano dalle tre ξ, η, ζ, ponendo successivamente $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, poi $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, e infine $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$), è chiaro che se si indicano, con M. Euler, con l, m, n i complementari degli angoli di inclinazione di questi assi sul piano fissato delle ξ, η, e da λ, μ, ν, gli angoli che le proiezioni degli stessi assi formano con l'asse fisso delle ξ, si avranno queste espressioni

$$\begin{aligned} \zeta' &= \cos l \quad & \eta' &= \sin l \sin\lambda \quad & \xi' &= \sin l \cos\lambda \\ \zeta'" &= \cos m \quad & \eta' &= \sin m \sin\mu \quad & \xi" &= \sin m \cos\mu \\ \zeta"' &= \cos n \quad & \eta"' &= \sin n \sin\nu \quad & \xi"' &= \sin n \cos\nu \end{aligned}$$

e per mezzo di queste sostituzioni, si troveranno facilmente le equazioni alle quali è giunto M. Euler dalle considerazioni geometriche e trigonometriche.

49. Del resto, adottando contemporaneamente le due ipotesi G, G, H nulle e l, m, n pure nulle, si avrà la soluzione più semplice tramite le tre equazioni (D) dell'art. 45, sostituendo i valori di $\zeta', \zeta", \zeta'"$ e di p, q, r in ϕ, ψ, ω (artt. 30, 37). In questo modo si avranno queste tre equazioni del primo ordine

$$\begin{aligned}
A\frac{\sin\phi\sin\omega d\psi+\cos\phi d\omega}{dt} &= n\sin\phi\sin\omega\\
B\frac{\cos\phi\sin\omega d\psi-\sin\phi d\omega}{dt} &= n\cos\phi\sin\omega\\
C\frac{d\phi+\cos\omega d\psi}{dt} &= n\cos\omega
\end{aligned}$$

le quali si riducono evidentemente a queste

$$\begin{aligned}
ndt-Ad\psi &= \frac{Ad\omega}{\tan\phi\sin\omega}\\
ndt-Bd\psi &= -\frac{B\tan\phi d\omega}{\sin\omega}\\
ndt-Cd\psi &= \frac{Cd\phi}{\cos\omega}
\end{aligned}$$

Se si elimina dt e $d\psi$, sommando tra loro queste tre equazioni, dopo averle moltiplicate rispettivamente per $C-B$, $A-C$, $B-A$, si avrà l'equazione

$$A\left(C-B\right)\frac{d\omega}{\tan\phi\sin\omega}-B\left(A-C\right)\frac{\tan\phi d\omega}{\sin\omega}+C\left(B-A\right)\frac{d\phi}{\cos\omega}=0$$

la quale si riduce a questa forma

$$\frac{\cos\omega d\omega}{\sin\omega}=\frac{C\left(B-A\right)d\phi}{B\left(A-C\right)\tan\phi-\frac{A(C-B)}{\tan\phi}}$$

dove le variabili sono separate.

Il secondo membro di questa equazione si cambia in

$$\frac{C\left(B-A\right)\sin\phi\cos\phi d\phi}{B\left(A-C\right)\sin^2\phi-A\left(C-B\right)\cos^2\phi}$$

o anche in

$$\frac{C\left(B-A\right)\sin 2\phi d\phi}{2AB-C\left(A+B\right)+C\left(A-A\right)\cos 2\phi}$$

pertanto, integrando logaritmicamente, e passando poi dai logaritmi ai numeri, si avrà

$$2AB-C\left(A+B\right)+C\left(B-A\right)\cos 2\phi=\frac{K}{\sin\omega^2}$$

essendo K una costante arbitraria; o

$$\tan\phi=\sqrt{\left(\frac{1-\cos 2\phi}{1+\cos 2\phi}\right)}$$

sostituendo, quindi, il valore precedente, si avrà

$$\tan\phi=\sqrt{\left(\frac{2A\left(B-C\right)\sin\omega^2-K}{2B\left(C-A\right)\sin\omega^2+K}\right)}$$

e mettendo questo valore della $\tan\phi$ nelle prime due equazioni differenziali, si avrà

$$\begin{aligned}
ndt-Ad\psi &= \frac{Ad\omega}{\sin\omega}\sqrt{\left(\frac{2B\left(C-A\right)\sin\omega^2+K}{2A\left(B-C\right)\sin\omega^2-K}\right)}\\
ndt-Bd\psi &= -\sqrt{\left(\frac{2A\left(B-C\right)\sin\omega^2-K}{2B\left(C-A\right)\sin\omega^2+K}\right)}
\end{aligned}$$

equazioni, dove le indeterminate sono separate, e che, integrate, daranno t e ψ in funzione di ω.

Questa soluzione ricorda quella che M. d'Alembert ha dato nel quarto tomo dei suoi Opuscoli.

50. Consideriamo ora il secondo caso nel quale si suppone il corpo grave sospeso per un punto fisso, attorno al quale può ruotare liberamente in tutti i versi. Prendendo questo punto come il centro del corpo, cioè, per l'origine comune delle coordinate $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$, e supponendo le ordinate ζ verticali e dirette dall'alto in basso, si avranno per il moto di rotazione del corpo, le equazioni (B) dell'art. 40. Queste equazioni sono più complicate di quelle del caso

precedente, a causa dei termini moltiplicati per le quantità $SaDm, SbDm, ScDm$, le quali non sono più nulle, quando il centro del corpo la cui posizione è qui data, cade fuori dal suo centro di gravità; si può tuttavia ancora eliminare due di queste quantità, facendo passare per il centro di gravità uno degli assi delle coordinate a, b, c, la cui posizione nel corpo è arbitraria; ciò semplificherà un poco le equazioni.

Supponiamo, pertanto, che l'asse delle coordinate c passi per il centro di gravità del corpo; si avrà allora per le proprietà di questo centro, $SaDm = 0$, $SbDm = 0$, e se si indica con k la distanza tra il centro del corpo, che è il punto di sospensione, e il suo centro di gravità, è chiaro che si avrà anche $S\,(k - c)\,Dm = 0$, quindi, $ScDm = SkDm = kDm = km$, indicando con m la massa del corpo.

Operando queste sostituzioni e mettendo K per km, si avranno le tre seguenti equazioni

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{d.\frac{dT}{dp}}{dt} + q\frac{dT}{dr} - r\frac{dT}{dq} + K\zeta" & = & 0 \\ \frac{d.\frac{dT}{dq}}{dt} + r\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dr} - K\zeta' & = & 0 \\ \frac{d.\frac{dT}{dr}}{dt} + p\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dp} & = & 0 \end{array}\right\} \quad (E)$$

nelle quali

$$T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) - Fqr - Gpr - Hpq$$

51. Si possono dapprima trovare due integrali di queste equazioni sommandole, dopo averle moltiplicate rispettivamente per p, q, r, o per $\zeta', \zeta", \zeta'"$; a causa di $d\zeta' = (\zeta" r - \zeta'" q)\,dt$, $d\zeta" = (\zeta'" p - \zeta' r)\,dt$, $d\zeta'" = (\zeta' q - \zeta" p)\,dt$, (art. 17), si avranno così le due equazioni

$$\begin{array}{rcl} pd.\frac{dT}{dp} + qd.\frac{dT}{dq} + rd.\frac{dT}{dr} - Kd\zeta'" & = & 0 \\ \zeta' d.\frac{dT}{dp} + \zeta" d.\frac{dT}{dq} + \zeta'" d.\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dp}d\zeta' + \frac{dT}{dq}d\zeta" + \frac{dT}{dr}d\zeta'" & = & 0 \end{array}$$

i cui integrali sono

$$\begin{array}{rcl} p\frac{dT}{dp} + q\frac{dT}{dq} + r\frac{dT}{dr} - T - K\zeta'" & = & f \\ \zeta'\frac{dT}{dp} + \zeta"\frac{dT}{dq} + \zeta'"\frac{dT}{dr} & = & h \end{array}$$

essendo f, h due costanti arbitrarie.

Sembra difficile trovare altri integrali e, di conseguenza, risolvere il problema generale. Ma si può giungere, supponendo che la forma del corpo sia sottoposta a condizioni particolari.

Così, supponendo $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$ e, inoltre, $A = B$, si avrà $\frac{dT}{dp} = Ap$, $\frac{dT}{dq} = Aq$, e la terza delle equazioni (E) diverrà $d.\frac{dT}{dr} = 0$, il cui integrale è $\frac{dT}{dr} = cost.$

Questo è il caso in cui l'asse delle ordinate c, cioè, la retta che passa per il punto di sospensione e per il centro di gravità, è un asse naturale di rotazione, e dove i *momenti di inerzia* attorno agli altri due assi sono uguali (art. 48); ciò si ha in generale in tutti i solidi di rivoluzione, quando il punto fisso è preso nell'asse di rivoluzione. La soluzione di questo caso è facile in base ai tre integrali trovati.

Infatti, poiché $T = \frac{A\left(p^2+q^2\right)}{2} + \frac{Cr^2}{2}$, è chiaro che questi tre integrali si ridurranno alla forma

$$\begin{array}{rcl} A\left(p^2 + q^2\right) + Cr^2 - 2K\zeta'" & = & 2f \\ A\left(\zeta' p + \zeta" q\right) + C\zeta'" \quad r & = & h \\ r & = & n \end{array}$$

essendo f, h, n costanti arbitrarie.

Se si sostituisce per $\zeta', \zeta 2, \zeta'"$, e per p, q, r i loro valori in funzione di ϕ, ξ, ω, (artt. 30, 37), si avranno queste tre equazioni

$$\begin{array}{rcl} A\frac{\sin\omega^2 d\psi^2 + d\omega^2}{dt^2} + Cn^2 - 2K\cos\omega & = & 2f \\ A\frac{\sin\omega^2 d\psi}{dt} + Cn\cos\omega & = & h \\ \frac{d\phi + \cos\omega d\psi}{dt} & = & n \end{array}$$

le quali hanno, come si vede, il vantaggio che gli angoli finiti ψ, ϕ non sono presenti.

La seconda dà

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{h - Cn\cos\omega}{A\sin\omega^2}$$

ed sostituendo questo valore nella prima, si avrà

$$dt = \frac{A\sin\omega d\omega}{\sqrt{\left(A\sin\omega^2\left(2f - Cn^2 + 2K\cos\omega\right) - \left(h - Cn\cos\omega\right)^2\right)}}$$

poi la seconda e la terza daranno

$$d\psi = \frac{(h - Cn\cos\omega)d\omega}{\sin\omega\sqrt{\left(A\sin\omega^2(2f - Cn^2 + 2K\cos\omega) - \left(h - (n\cos\omega)^2\right)\right)}}$$
$$d\phi = \frac{\left(An - h\cos\omega + \left(C - An\cos\omega^2\right)d\omega\right)}{\sin\omega\sqrt{\left(A\sin\omega^2(2f - Cn^2 + 2K\cos\omega) - \left(h - (n\cos\omega)^2\right)\right)}}$$

equazioni dove le indeterminate sono separate, ma la cui integrazione dipende in generale dalla rettificazione delle funzioni coniche.

Riprendiamo le equazioni (E) e sostituiamovi i valori di $\frac{dT}{dp}, \frac{dT}{dq}, \frac{dT}{dr}$ in p, q, r, esse diverranno

$$\begin{aligned}
\frac{Adp - Gdr - Hdq}{dt} + (C - B)\,qr + F\left(r^2 - q^2\right) - Gpq + Hpr + K\zeta" &= 0\\
\frac{Bdq - Fdr - Hdp}{dt} + (A - C)\,pr + G\left(p^2 - r^2\right) - Hqr + Fpq + K\zeta' &= 0\\
\frac{Cdr - Fdq - Gdp}{dt} + (B - A)\,pq + HF\left(q^2 - p^2\right) - Fpr + Gqr &= 0
\end{aligned}$$

Nella condizione di riposo del corpo le tre quantità p, q, r, sono nulle, poiché $\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$ è la velocità istantanea di rotazione (art. 45); pertanto si avrà $\zeta' = 0$ e $\zeta" = 0$; e siccome $\zeta'^2 + \zeta"^2 + \zeta"'^2 = 1$ avremo, di conseguenza, $\zeta'" = 1$, l'asse delle coordinate ζ coinciderà con quello delle ordinate c; cioè, che quest'ultimo asse che passa per il centro di gravità del corpo, e che chiameremo d'ora in poi *l'asse del corpo*, sarà verticale; e ciò rappresenta la condizione di equilibrio del corpo; e lo si vede ancora meglio dalle formule dell'art. 30, le quali danno $\sin\phi\sin\omega = 0$, $\cos\phi\sin\omega = 0$ e, di conseguenza, $\omega = 0$, essendo ω l'angolo dei due assi coordinati c, ζ.

Se, supponendo il corpo in movimento, si suppone pure che il suo asse di allontana molto poco dalla verticale, di modo che l'angolo di deviazione ω rimane sempre molto piccolo, allora le quantità $\zeta', \zeta"$ saranno molto piccole, e si avrà il caso in cui il corpo esegue solo piccole oscillazioni attorno alla verticale, avendo nello stesso tempo un movimento qualsiasi di rotazione attorno al suo asse.

Questo caso che non è ancora stato risolto lo può essere facilmente e completamente con le nostre formule. Considerando, infatti, $\zeta', \zeta"$ come molto piccoli del primo ordine, e trascurando le quantità molto piccole del secondo ordine e degli ordini successivi, si trova, dalle equazioni di condizione dell'art. 15 $\zeta"' = 1$, $\xi'" = -\xi'\zeta' - \xi"\zeta"$, $\eta'" = -\eta'\zeta' - \eta"\zeta"$ e $\xi'^2 + \xi"^2 = 1$, $\eta'^2 + \eta"^2 = 1$, $\xi'\eta' + \xi"\eta" = 0$; pertanto $\xi' = \sin\pi$, $\xi" = \cos\pi$, $\eta' = \sin\theta$, $\eta" = \cos\theta$, e $\cos(\pi - \theta) = 0$; da cui $\pi = 90^\circ + \theta$, e di conseguenza $\xi' = \cos\theta$, $\xi" = -\sin\theta$. Sostituendo questi valori nelle espressioni di dP, dQ, dR dell'art. 23, si avrà $dP = \xi' d\theta + d\zeta"$, $dQ = \zeta" d\theta - d\zeta'$, $dR = d\theta$, trascurando sempre le quantità del secondo ordine.

Si avrà pertanto

$$\begin{aligned}
p &= \tfrac{dP}{dt} = \tfrac{\zeta' d\theta + d\zeta"}{dt}\\
q &= \tfrac{dQ}{dt} = \tfrac{\zeta" d\theta - d\zeta'}{dt}\\
r &= \tfrac{dR}{dt} = \tfrac{d\theta}{dt}
\end{aligned}$$

valori che, sostituiti nelle equazioni differenziali sopra, daranno, trascurando le potenze e i prodotti di $\zeta', \zeta"$ delle equazioni lineari per la determinazione di queste variabili.

Ma prima di fare queste sostituzioni, si noterà che supponendo ζ' e $\zeta"$ nulli, le equazioni danno

$$-G\frac{d^2\theta}{dt^2} + F\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad -F\tfrac{d^2\theta}{dt^2} - G\tfrac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad C\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

Poiché, quindi, C non potrebbe divenire nullo a meno che non si riduca ad una linea fisica, essendo $C = S\left(a^2 + b^2\right)Dm$, ne segue che non si può soddisfare a queste equazioni se non facendo $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ e poi o $\frac{d\theta}{dt} = 0$ o $F = 0$ e $G = 0$.

Da ciò è facile concludere che quando $\zeta', \zeta"$ non sono nulli, ma solo molto piccoli, basterà che i valori di $\frac{d\theta}{dt}$, o di F e G siano anch'essi molto piccoli; e ciò determina due casi che richiedono di essere esaminati separatamente.

53. Supponiamo inizialmente che $\frac{d\theta}{dt}$ sia una quantità molto piccola dello stesso ordine di $\zeta', \zeta"$, si avrà, intorno alle quantità del secondo ordine, $p = \frac{d\zeta"}{dt}$, $q = \frac{d\zeta'}{dt}$.

Da queste sostituzioni, trascurando sempre le quantità del secondo ordine, e cambiando per maggiore semplicità le lettere $\zeta', \zeta"$ in s, u, le equazioni differenziali dell'art.precedente, diverranno

$$\begin{aligned}
\frac{Ad^2u - Cd^2\theta + Hd^2s}{dt^2} + Ku &= 0\\
\frac{-Bd^2s - Fd^2\theta - HHd^2u}{dt^2} - Ks &= 0\\
\frac{Cd^2\theta - Fd^2s - Gd^2u}{dt^2} &= 0
\end{aligned}$$

L'ultima dà $\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{Fd^2s+Gd^2u}{Cdt^2}$; sostituendo questo valore nelle prime due, si avrà

$$\begin{aligned}\frac{\left(AC-G^2\right)d^2u+\left(CH-GF\right)d^2s}{dt^2}+CKu &= 0\\ \frac{\left(BC+F^2\right)d^2s+\left(CH+GF\right)d^2u}{dt^2}+CKs &= 0\end{aligned}$$

la cui integrazione è facile con i metodi noti.

Supponendo per questo

$$s=\alpha\sin\left(\rho t+\beta\right)\qquad u=\gamma\sin\left(\rho t+\beta\right)$$

dove α,β,γ,ρ, sono costanti indeterminate; si avrà, dopo queste sostituzioni, queste due equazioni di condizione

$$\begin{aligned}\left(AC-G^2\right)\rho^2+\left(CH-GF\right)\alpha\rho^2-CK\gamma &= 0\\ \left(BC+F^2\right)\alpha\rho^2+\left(CH+GF\right)\gamma\rho^2-AR\alpha &= 0\end{aligned}$$

le quali danno

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\left(CH-GF\right)\rho^2}{CK-\left(AC-G^2\right)\rho^2}=\frac{CK-\left(BC+F^2\right)\rho^2}{\left(CH+GF\right)\rho^2}$$

dalla quale deriva questa equazioni in ρ

$$\frac{C^2K^2}{\rho^4}-\left(\left(A+B\right)C+F^2-G^2\right)\frac{CK}{\rho^2}+\left(AB-H^2\right)C^2+\left(AF^2-BG^2\right)C=0$$

la quale avrà, come si vede, quattro radici uguali a due a due e di segno contrario.

Se, pertanto, si indica in generale con ρ,ρ' le radici diverse di questa equazione, astrazion fatta per il loro segno, e si prendono quattro costanti arbitrarie $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$, si avrà in generale

$$s=\alpha\sin\left(\rho t+\beta\right)+\alpha'\sin\left(\rho' t+\beta'\right)$$

e di conseguenza

$$u=\frac{\left(CH-GF\right)\rho^2\alpha\sin\left(\rho t+\beta\right)}{CK-\left(AC-G^2\right)\rho^2}+\frac{\left(CH-GF\right)\rho'^2\alpha'\sin\left(\rho' t+\beta'\right)}{CK-\left(AC-G^2\right)\rho'^2}$$

Infine, integrando il valore di $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ si avrà

$$\theta=f+ht+\frac{Fs+Gu}{C}$$

Di modo che si conosceranno anche tutte le variabili in funzione di t; e il problema sarà risolto.

Del resto, siccome questa soluzione è fondata sull'ipotesi che $s,u,\frac{d\theta}{dt}$ siano quantità molto piccole, basterà, affinché sia legittimo, 1°. che le costanti α,α',h siano pure molto piccole; 2°. le le radici ρ,ρ' siano reali e diverse, affinché l'angolo t sia sempre sotto il simbolo di seni. Questa seconda condizione esige queste altre

$$\begin{aligned}\left(A+B\right)C+F^2+G^2 &< 0\\ 4\left(\left(AB-H^2\right)C^2+\left(AF^2-BG^2\right)C\right) &< \left(\left(A+B\right)C+F^2-G^2\right)\end{aligned}$$

le quali dipendono unicamente falla forma del corpo e dalla condizione del punto di sospensione.

54. Supponiamo in secondo luogo che le costanti F,G siano pure molto piccole dello stesso ordine di ζ',ζ"; allora trascurando le quantità del secondo ordine e mettendo s,u al posto di ζ',ζ", le equazioni differenziali dell'art. 52 diverranno

$$\begin{aligned}\frac{A\left(d.sd\theta+d^2u\right)}{dt^2}-\frac{Gd^2\theta}{dt^2}-\frac{H\left(d.ud\theta-d^2s\right)}{dt^2}+\frac{\left(C-B\right)\left(ud\theta-ds\right)d\theta}{dt^2}+\frac{Fd\theta^2}{dt^2}+\frac{H\left(sd\theta+du\right)}{dt^2}+Ku &= 0\\ \frac{B\left(d.ud\theta-d^2s\right)}{dt^2}-\frac{Fd^2\theta}{dt^2}-\frac{H\left(d.sd\theta+d^2u\right)}{dt^2}+\frac{\left(A-C\right)\left(sd\theta+du\right)d\theta}{dt^2}-\frac{Cd\theta^2}{dt^2}-\frac{H\left(ud\theta-ds\right)}{dt^2}-Ks &= 0\\ \frac{Cd\theta^2}{dt^2} &= 0\end{aligned}$$

l'ultima dà $\frac{d\theta^2}{dt^2}=0$ e integrando $\frac{d\theta}{dt}=n$, essendo n una costante arbitraria di grandezza qualsiasi.

Sostituendo questo valore di $\frac{d\theta}{dt}$ nelle due equazioni, si avrà

$$\begin{aligned}A\frac{d^2u}{dt^2}+H\frac{d^2s}{dt^2}+\left(A+B-C\right)n\frac{ds}{dt}+\left(C-B\right)n^2u+Fn^2+Hn^2s+Ku &= 0\\ B\frac{d^2s}{dt^2}+H\frac{d^2u}{dt^2}-\left(A+B-C\right)n\frac{du}{dt}+\left(C-A\right)n^2s+Gn^2+Hn^2u+Ks &= 0\end{aligned}$$

la cui integrazione non presenta alcuna difficoltà.

Dividendo per n^2 e rimettendo, per semplicità, $d\theta$ al posto di ndt, ricordandosi che $d\theta$ è ormai costante, si avranno, ordinando i termini, e ponendo $L = \frac{K^2}{n^2} = \frac{Km}{n^2}$ (art. 50),

$$\begin{aligned}(C-A+L)\,s + B\frac{d^2s}{d\theta^2} + (C-A-B)\,\frac{du}{d\theta} + H\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right) + G &= 0\\ (C-B+L)\,u + A\frac{d^2u}{d\theta^2} - (C-A-B)\,\frac{ds}{d\theta} + H\left(s+\frac{d^2s}{d\theta^2}\right) + F &= 0\end{aligned}$$

Per integrare queste equazioni, inizio col far scomparire tutti i termini costanti, supponendo $s = x + f$, $u = y + h$ e determinando le costanti f, h, in modo che i termini F, G scompaiano; ciò restituirà queste due equazioni di condizione

$$\begin{aligned}(C-A+L)\,f + f + Hh + G &= 0\\ (C-B+L)\,h + Hf + F &= 0\end{aligned}$$

da cui si ricaverà

$$\begin{aligned}f &= \frac{FH - G\,(C-B+L)}{(C-B+L)\,(C-A+L) - H^2}\\ h &= \frac{GH - F\,(C-A+L)}{(C-B+L)\,(C-A+L) - H^2}\end{aligned}$$

e si avranno in x, y, θ, le stesse equazioni in s, u, θ, con la sola differenza che i termini costanti G, F non ci saranno più.

Suppongo ora $x = \alpha e^{i\theta}$, $y = \beta e^{i\theta}$, essendo α, β, i costanti indeterminate ed e il numero il cui logaritmo iperbolico è 1; siccome tutti i termini delle equazioni da integrare contengono x e y di primo grado, ne segue che saranno dopo le sostituzioni, tutti divisibili per $e^{i\theta}$ e rimarranno queste due equazioni di condizione

$$\begin{aligned}\left(C-A+L+Bi^2\right)\alpha + \left((C-A-B)\,i + H\left(1+i^2\right)\right)\beta &= 0\\ \left(C-B+L+Ai^2\right)\beta + \left((C-A-B)\,i + H\left(1+i^2\right)\right)\alpha &= 0\end{aligned}$$

le quali danno

$$\alpha = \frac{C-A+L+Bi^2}{(C-A-B)\,i + H\,(1+i^2)} = \frac{(C-A-B)\,i + H\left(1+i^2\right)}{C-B+L+Ai^2}$$

di modo che si avrà. moltiplicando in croce, questa equazione in i

$$\left(C-B+L+Ai^2\right)\left(C-A+L+Bi^2\right) + (C-A-B)^2 - H^2\left(1+i^2\right)^2 = 0$$

la quale, ponendo $1 + i^2 = \rho$, si riduce alla forma

$$\left(AB - H^2\right)\rho^2 + \left((A+B)\,(L-C) + C^2\right)\rho + L^2 - 2L\,(A+B-C) = 0$$

Avendo determinato ρ mediante questa equazione, si avrà

$$\begin{aligned}x &= \alpha e^{\theta\sqrt{(\rho-1)}}\\ y &= \alpha\frac{(A+B-C)\,\sqrt{(\rho-1)} + H\rho}{A+B-C-L-C\rho}e^{\theta\sqrt{(\rho-1)}}\end{aligned}$$

e la costante α rimarrà indeterminata. Siccome l'equazione in ρ ha due radici e il radicale $\sqrt{(\rho-1)}$ può essere preso con segno positivo o negativo, si avranno quattro valori diversi di x, y, i quali raccolti, soddisferanno pure alle equazioni proposte, poiché le variabili x, y sono in forma lineare. Prendendo quindi quattro costanti diverse per α, si avranno in questo modo i valori completi di x, y, poiché essi dipendendo solo da due equazioni differenziali del secondo ordine, non potranno racchiudere più di quattro costanti arbitrarie.

55. Affinché le espressioni non contengano archi di cerchio, è necessario che $\sqrt{(\rho-1)}$ sia immaginario e che anche ρ sia una quantità reale e minore dell'unità.

Denotiamo con ρ e σ le due radici dell'equazione in ρ, supposte reali e minore dell'unità e diamo alle quattro costanti arbitrarie questa forma immaginaria

$$\frac{\alpha e^{\beta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad -\frac{\alpha e^{-\beta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad \frac{\gamma e^{\varepsilon\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad -\frac{\gamma e^{-\varepsilon\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

con questa sostituzione e passando dagli esponenziali ai seni e coseni, si avranno queste espressioni complete e reali di x, y.

$$\begin{aligned}x &= \alpha\sin\left(\theta\sqrt{(1-\rho)}+\beta\right) + \gamma\sin\left(\theta\sqrt{(1-\sigma)}+\varepsilon\right)\\ y &= \tfrac{\alpha(A+B-C)\sqrt{(1-\rho)}}{B-C+A(1-\rho)-L}\cos\left(\theta\sqrt{(1-\rho)}+\beta\right) + \tfrac{\alpha H\rho}{B-C+A(1-\rho)-L}\sin\left(\theta\sqrt{(1-\rho)}+\beta\right)\\ &+ \tfrac{\gamma(A+B-C)\sqrt{(1-\sigma)}}{B-C+A(1-\sigma)-L}\cos\left(\theta\sqrt{(1-\sigma)}+\varepsilon\right) + \tfrac{\gamma H\sigma}{B-C-A(1-\sigma)-L}\sin\left(\theta\sqrt{(1-\sigma)}+\varepsilon\right)\end{aligned}$$

dove $\alpha, \gamma, \beta, \varepsilon$ sono costanti arbitrarie, dipendenti dalle condizioni iniziali del corpo.

Avendo così x, y, si avrà

$$\begin{aligned} s &= x + \frac{FH + C(B-C-L)}{(A-C-L)(B-C-L) - H^2} \\ u &= y + \frac{GH + F(A-C-L)}{(A-C-L)(B-C-L) - H^2} \end{aligned}$$

Prendendo, quindi, per θ un angolo qualsiasi proporzionale al tempo, si avranno (art. 52) questi valori delle nove variabili $\xi', \eta', \zeta', \xi"$, ecc,

$$\begin{array}{rrr} \xi' = \cos\theta & \eta' = \sin\theta & \zeta' = s \\ \xi" = -\sin\theta & \eta" = \cos\theta & \zeta" = u \\ \xi'" = -s\cos\theta + u\sin\theta & \eta'" = -s\sin\theta - u\cos\theta & \zeta'" = 1 \end{array}$$

di modo che si conosceranno le coordinate di ξ, η, ζ di ogni punto del corpo per un istante qualsiasi (art. 12).

Se si confrontano le espressioni precedenti di ξ', η', ecc, con quelle dell'art. 30, se ne dedurranno facilmente i valori degli angoli di rotazione ϕ, ψ, ω; e si troverà $\phi + \psi = \theta$, $\sin\phi\sin\omega = s$, $\cos\phi\cos\omega = u$; da cui si ricava

$$\tan\omega = \sqrt{(s^2+u^2)} \quad \tan\phi = \tfrac{s}{u} \quad \psi = \theta - \phi$$

È facile vedere dalle definizioni dell'art. 29, che ω sarà l'inclinazione, supposta molto piccola, dell'asse del corpo sulla verticale, che ψ sarà l'angolo che questo asse descrive ruotando attorno alla verticale, e che ϕ sarà l'angolo che il corpo stesso descrive ruotando attorno allo stesso asse, potendo essere questi ultimi due di grandezza qualsiasi.

56. Ma è necessario, per l'esattezza di questa soluzione, che le variabili s, u rimangano sempre molto piccole. Così, non solo le costanti α, γ che dipendono dalla condizione iniziale del corpo dovranno essere molto piccole, ma lo dovranno pure essere i valori delle costanti F, G, date dalla forma del corpo; e, inoltre, le radici ρ, σ dovranno essere reali e positive, affinché l'angolo θsia sempre contenuti nei seni e coseni.

Se si suppone $F = 0$, $G = 0$, cioè, $SbcDm = 0$, $SacDm = 0$, si avranno le condizioni necessarie affinché i momenti delle forze centrifughe attorno all'asse del corpo, che è contemporaneamente quello delle coordinate c, si eliminino, in modo che il corpo possa ruotare liberamente e in modo uniforme attorno a questo asse. Si sa che in ogni corpo vi sono tre asse tra loro perpendicolari e passanti per il centro di gravità, le quali hanno questa proprietà, e che si chiamano, secondo M. Euler, gli assi principali del corpo. Pertanto, poiché abbiamo supposto che l'asse del corpo passa anche per il centro di gravità e per il punto di sospensione, ne segue che le quantità F, G saranno nulle, quando il corpo sarà sospeso per un punto qualsiasi preso in uno dei suoi assi principali.

Affinché queste quantità, senza essere assolutamente nulle, siano almeno molto piccole, servirà che il punto di sospensione del corpo sia molto vicino ad uno dei suoi assi principali; è la prima condizione necessaria affinché l'asse del corpo faccia solo piccole oscillazioni attorno alla verticale, avendo, d'altronde, il corpo stesso un moto qualsiasi di rotazione attorno a questo asse.

L'altra condizione necessaria affinché le sue oscillazioni siano sempre molto piccole, dipende dall'equazione in ρ e si riduce a questa

$$\begin{gathered} 4\left((A+B)(L-C) + C^2\right) > \left(AB - H^2\right)\left(L^2 - 2L(A+B-C)\right) \\ \frac{2\left(AB-H^2\right) + (A+B)(L-C) + A^2}{AB - H^2} > 0 \\ \frac{(A-C-L)(B-C-L) - H^2}{AB - H^2} > 0 \end{gathered}$$

le quali dipendono dalla condizione del punto di sospensione e dalla forma del corpo.

57. La soluzione presentata comprende la teoria delle piccole oscillazioni dei pendoli nella massima generalità possibile. Si sa che Huyghens ha fornito per primo la teoria delle oscillazioni circolari; M. Clairaut vi ha in seguito aggiunto quella delle oscillazioni coniche, che si hanno quando il pendolo, spostato dalla sua linea di riposo, riceve un impulso la cui direzione non passa per questa retta. Ma se il pendolo riceve nello stesso tempo un moto di rotazione attorno al suo asse, la forza centrifuga prodotta da questo movimento potrà disturbare molto le oscillazioni, sia circolari, sia coniche; e la determinazione di queste nuove oscillazioni è un problema che non è ancora stato completamente risolto e per pendoli di forma qualsiasi. È il motivo che mi ha spinto ad occuparmene qui.

2.7 Principi dell'Idrodinamica

La determinazione del moto dei fluidi è lo scopo dell'Idrodinamica; quello dell'Idraulica ordinaria si riduce all'arte di dirigere le acque e di utilizzarle per il movimento delle macchine. Quest'abilità è stata coltivata in tutti i tempi, per le necessità che si sono sempre avute; e gli antichi hanno eccelso in questo forse quanto noi, a giudicare da quanto ci hanno lasciato.

Ma l'Idrodinamica è una scienza nata in questo secolo. Newton ha tentato per primo di calcolare con i principi della Meccanica il moto dei fluidi; e M. D'Alembert è il primo che abbia ricondotto le vere leggi del loro moto sotto forma di equazioni analitiche. Archimede e Galileo (l'intervallo che separa questi due grandi geni scomparirà nella storia della Meccanica) si occuparono solo dell'equilibrio dei fluidi.

Torricelli iniziò ad esaminare il movimento dell'acqua che esce da un vaso da un'apertura molto piccola, e a ricercarne una legge. Trovò che dando al getto una direzione verticale, raggiungeva circa il livello dell'acqua nel vaso; e siccome è da presumere che lo raggiungerebbe esattamente senza la resistenza dell'aria e gli attriti, Torricelli ne concluse che la velocità dell'acqua che defluisce è la stessa di quella che avrebbe acquisito in caduta libera dall'altezza del livello, e che questa velocità è, di conseguenza, proporzionale alla radice quadrata della stessa altezza.

Non potendo tuttavia giungere a una dimostrazione rigorosa di questa proposizione, si accontentò di presentarla come un principio basato sull'esperienza, alla fine del suo Trattato *de Motu naturaliter accelerato*, stampato nel 1643. Newton intraprese la dimostrazione nel secondo libro dei Principi matematici che apparvero nel 1687; ma bisogna ammettere che è la parte meno soddisfacente di questa grande Opera.

Se si considera una colonna d'acqua che cade liberamente nel vuoto, è facile convincersi che essa deve assumere la forma di un conoide ottenuto dalla rivoluzione di un'iperbole del quarto ordine attorno all'asse verticale; poiché la velocità di ogni strato orizzontale sta da un lato come la radice quadrata dell'altezza da cui è discesa, e dall'altro deve stare, per la continuità dell'acqua, in ragione inversa della larghezza di questo strato e, di conseguenza, in ragione inversa del quadrato del suo raggio; da cui risulta che la porzione dell'asse o l'ascissa che rappresenta l'altezza, è in ragione inversa della quarta potenza dell'ordinata dell'iperbole generatrice. Se, quindi, si rappresenta un vaso a forma di conoide, e si suppone che il movimento dell'acqua ha raggiunto uno stato permanente, è chiaro che ogni particella d'acqua vi discenderà come se fosse libera, e che essa uscirà, di conseguenza, dall'orifizio, la velocità dovuta all'altezza del vaso dal quale è caduta.

Newton immagina che l'acqua che riempie un contenitore cilindrico verticale, forato nel fondo con un'apertura dalla quale può uscire, si divide naturalmente in due parti, una sola delle quali è in movimento e ha la forma del conoide, detta cataratta; l'altra è a riposo, come se fosse ghiacciata. In questo modo è chiaro che l'acqua deve sfuggire con una velocità uguale a quella che avrebbe acquisito cadendo dall'altezza del contenitore, come Torricelli aveva trovato sperimentalmente. Tuttavia Newton avendo misurato la quantità d'acqua uscita in un tempo dato, e avendola confrontata con la dimensione dell'apertura, ne aveva concluso, nella prima edizione dei Principi, che la velocità all'uscita dal contenitore era dovuta alla metà dell'altezza dell'acqua. Questo errore derivava dal non aver prestato attenzione alla contrazione della vena d'acqua; ne tenne conto nella seconda edizione che apparve nel 1714 dove riconobbe che la sezione più piccola della vena stesse all'apertura del contenitore circa come 1 alla $\sqrt{2}$; di modo che prendendo questa sezione per la effettiva apertura, la velocità deve essere aumentata nella stessa ragione di 1 alla $\sqrt{2}$ e corrispondere, di conseguenza, all'altezza totale dell'acqua. In questo modo la sua teoria si trovò vicina all'esperienza, ma non divenne per questo più esatta; la formazione della cataratta o contenitore fittizio nel quale si suppone muovere l'acqua, mentre l'altra è a riposo, è evidentemente contraria alle leggi note dell'equilibrio dei fluidi; poiché l'acqua che cadrebbe in questa cataratta, con tutta la forza del suo peso, non esercitando alcuna pressione laterale, non potrebbe resistere a quella del fluido stagnante che la circonda.

Venti anni prima Varignon aveva dato all'Accademia delle Scienze di Parigi, una spiegazione più naturale e più plausibile del fenomeno, Avendo notato che, quando l'acqua defluisce da un contenitore cilindrico attraverso una piccola apertura che si trova sul fondo, essa ha nel contenitore solo un moto molto piccolo e sensibilmente uniforme per tutte le particelle, ne concluse che subisse alcuna accelerazione, e che la parte di fluido che fuoriesce in ogni istante, riceve tutto il suo moto dalla pressione prodotta dal peso della colonna di fluido di cui essa è la base. Così questo peso, che è come la larghezza dell'orifizio moltiplicata per l'altezza dell'acqua nel contenitore, deve essere proporzionale alla quantità di moto acquisita nella particella che esce in ogni istante dalla stessa apertura. Questa quantità di moto è, come si sa, proporzionale alla velocità e alla massa e la massa è qui data dal prodotto della larghezza dell'orifizio per il piccolo spazio che la particella percorre nell'istante dato, spazio che è evidentemente proporzionale alla velocità stessa di questa particella; di conseguenza, la quantità di moto sta in ragione della larghezza dell'orifizio moltiplicata per il quadrato della velocità. Pertanto, infine, l'altezza dell'acqua nel contenitore è proporzionale al quadrato della velocità con la quale fuoriesce, che è il teorema di Torricelli.

Questo ragionamento ha tuttavia ancora qualcosa di vago; si suppone tacitamente che la piccola massa che esce in ogni istante dal contenitore, acquisti rapidamente tutta la velocità a causa della pressione della colonna che corrisponde all'apertura. Si sa che una pressione non può produrre di colpo una velocità finita. Ma supponendo, come naturale, che il peso della colonna agisca sulla particella per tutto il tempo che impiega ad uscire dal contenitore, è chiaro che questa particella riceverà un moto accelerato, la cui quantità, dopo un tempo qualunque, sarà proporzionale alla pressione moltiplicata per il tempo. Pertanto, il prodotto del peso della colonna per il tempo di uscita della particella, sarà uguale al prodotto della massa di questa particella per la velocità che avrà acquistato; e siccome la massa è il prodotto della larghezza dell'orifizio per il piccolo spazio che la particella descrive uscendo dal contenitore, spazio che, per la caratteristica dei moti uniformemente accelerati, è dato dal prodotto della velocità per il tempo; ne segue che l'altezza della colonna, sarà di nuovo come il quadrato della velocità acquisita. Questa conclusione è rigorosa, purché concordi con il fatto che ogni particella in uscita è pressata dal peso complessivo dell'intera colonna di fluido avente per base questa particella; è quanto avverrebbe in effetti, se il fluido contenuto fosse stagnante, poiché allora la sua pressione sulla parte del fondo in cui si trova l'apertura, fosse uguale al peso della colonna di cui è la base; ma questa pressione deve essere diversa, quando il fluido è in moto. Tuttavia, è chiaro che più si avvicinerà allo stato di riposo, più la pressione sul fondo si avvicinerà al peso totale della colonna verticale; d'altronde, l'esperienza mostra che il moto del fluido nel contenitore è tanto minore quanto più piccola è l'apertura. Così la teoria precedente si avvicinerà tanto più alla verità quanto le dimensioni del contenitore saranno più grandi rispetto all'apertura attraverso la quale il liquido fuoriesce ed è quanto l'esperienza conferma.

Per un motivo contrario, la stessa teoria diviene insufficiente a determinare il moto dei fluidi che scorrono nei tubi di larghezza molto piccola e varia poco. Bisogna allora considerare contemporaneamente tutti i movimenti delle particelle del fluido ed esaminare come devono essere modificati e alterati dalla forma del canale. L'esperienza insegna che quando il tubo ha una direzione poco diversa dalla verticale, i diversi tratti orizzontali del fluido conservano all'incirca il loro parallelismo, di modo un tratto prende sempre il posto di quello che lo precede; da ciò segue, a causa dell'incomprimibilità del fluido, che la velocità di ogni tratto orizzontale, stimata nel senso verticale, deve essere in ragione inversa della larghezza di questo tratto, larghezza che è data dalla forma del contenitore.

Basta quindi determinare il moto di un solo settore e il problema è in qualche modo analogo a quello del moto del pendolo composto. Così, siccome per la teoria di Bernoulli, i moti acquisiti e persi in ogni istante dai diversi pesi che formano il pendolo, si fanno reciprocamente equilibrio nella leva, vi deve pure essere equilibrio nel tubo tra le diverse parti del fluido animate ognuna dalla velocità acquisita o persa in ogni istante; e da ciò per l'applicazione dei principi già noti dell'equilibrio dei fluidi, si sarebbe potuto determinare il moto di un fluido nel tubo, come si era determinato quello di un pendolo composto. Ma non è mai per le vie più semplici e dirette che l'intelligenza umana giunge alla verità, qualunque essa sia e l'argomento che trattiamo ce ne fornisce un esempio lampante.

Abbiamo esposto nella prima Sezione i diversi passi fatti per giungere alla soluzione del problema del centro di oscillazione; e abbiamo visto che la corretta teoria di questo problema era stata scoperta da Jacques Bernoulli, molto tempo dopo che Huyghens l'aveva risolto con il principio indiretto della conservazione delle forze vive. È così anche per il problema del moto dei fluidi nei contenitori; ed è sorprendente che non si è saputo prima approfittare di quanto da altri già acquisiti.

Lo stesso Principio della conservazione delle forze vive, fornisce ancora la prima soluzione di quest'ultimo problema e serve da base all'Idrodinamica di Daniel Bernoulli, stampata nel 1738, Opera che brilla anche per un'Analisi elegante e semplice nei suoi risultati. Ma l'incertezza di questo principio che non era stato ancora dimostrato in forma generale, doveva ricadere anche sulle proposizioni da esso derivanti, e faceva desiderare una teoria più sicura e basata unicamente sulle leggi fondamentali della Meccanica. Mclaurin e Jean Bernoulli affrontarono questo argomento, uno nel suo Trattato delle Flussioni, l'altro nella sua nuova Idraulica, stampata alla fine delle sue Opere. I loro metodi, sebbene molto diversi, portano agli stessi risultati del principio di conservazione delle forze vive; ma bisogna ammettere che quello di Mclaurin non è molto rigoroso, e sembra arrangiato ai risultati che si vogliono ottenere; quanto al metodo di Jean Bernoulli, senza affrontare per intero le difficoltà che M. d'Alembert gli ha opposto, lascia ancora a desiderare dal lato della chiarezza e della precisione.

Si è visto, nella prima Sezione, come d'Alembert, generalizzando la teoria di Jacques Bernoulli sui pendoli, fosse giunto a un Principio della Dinamica semplice e generale, che riduce le leggi del moto dei corpi a quelle del loro equilibrio. L'applicazione di questo Principio al moto dei fluidi si espone da solo e l'Autore ne diede dapprima una prova alla fine della sua Dinamica, stampata nel 1743; lo ha poi sviluppato nei dettagli nel suo Trattato dei Fluidi che apparve l'anno seguente, e che contiene soluzioni dirette ed eleganti dei principali problemi che si possono proporre sui fluidi che si muovono in contenitori.

Ma queste soluzioni, come quelle di Daniel Bernoulli, erano basate su due ipotesi che non vere in generale. 1°. Le diverse parti del fluido conservano esattamente il loro parallelismo, di modo che una parte prende sempre il posto di quella che la precede. 2°. La velocità di ogni parte non varia in direzione, cioè, tutti i punti di una stessa parte sono supposti avere una velocità uguale e parallela. Quando fluido scorre in contenitori o tubi molto stretti, le ipotesi indicate sono molto plausibili e appaiono confermate dall'esperienza; ma vi sono casi che si allontanano dalla verità e rimane come unico metodo per determinare il moto del fluido, l'esame di quello che ogni particella deve avere.

M. Clairaut aveva dato nella sua Teoria della forma della Terra, stampata nel 1743, le leggi generali dell'equilibrio dei fluidi, in cui tutte le particelle sono animate da forze qualsiasi; si tratterebbe quindi di passare da queste leggi a quelle del loro moto per mezzo del principio al quale M. d'Alembert aveva ridotto, in questo stesso periodo, tutta la Dinamica. Quest'ultimo fece qualche anno dopo questo passo importante in occasione del premio che l'Accademia di Berlino propose nel 1750, sulla Teoria della resistenza dei fluidi; diede per primo, nel 1752, nel suo Saggio su una nuova teoria sulla resistenza dei fluidi, le equazioni rigorose e generali del moto dei fluidi, sia incomprimibili, sia comprimibili ed elastici; equazioni che appartengono alla classe delle differenze parziali, poiché sono tra le diverse parti delle differenze relative a parecchie variabili. Con questa scoperta, tutta la Meccanica dei fluidi si riduce a un solo punto di analisi; e se le equazioni che la racchiudono fossero integrabili, si potrebbe in tutti i casi determinare completamente le circostanze del moto e dell'azione di un fluido mosso da forze qualsiasi; sfortunatamente esse così refrattarie da non consentirne una soluzione se non in casi molto limite.

È, quindi, in queste equazioni e nella loro integrazione che consiste l'intera teoria dell'Idrodinamica. M. d'Alembert impiegò dapprima per trovarle un metodo un poco complesso; ne diede poi uno più semplice; ma questo metodo, essendo fondato sulle leggi dell'equilibrio specifico per i fluidi, fa dell'Idrodinamica una scienza separata dalla Dinamica dei corpi solidi. La riunificazione che abbiamo fatto nella prima Parte di quest'Opera di tutte le leggi dell'equilibrio dei corpi, sia solidi che fluidi in una stessa formula, e la loro applicazione alle leggi del moto, ci portano naturalmente a riunire anche la Dinamica e l'Idrodinamica come due aspetti di un principio unico e come risultati di una sola formula generale.

È l'obiettivo che rimane da raggiungere per completare il nostro lavoro sulla Meccanica e assolvere l'impegno preso nel titolo di quest'Opera.

2.8 Sul moto dei Fluidi incomprimibili

1. Si potrebbero dedurre immediatamente le leggi del moto di questi fluidi da quelle del loro equilibrio, che abbiamo trovato nella sezione sette della prima Parte; dal Principio generale esposto nella seconda sezione, basta aggiungere alle forze acceleratrici reali, le nuove forze acceleratrici $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, dirette lungo le coordinate perpendicolari x, y, z.

Come nelle formule dell'art. 13 e segg. della sezione settima citata, si sono supposte tutte le forze acceleratrici del fluido già ridotte a tre, X, Y, Z, nella direzione delle coordinate x, y, z; per applicare queste formule al moto degli stessi fluidi, basterà sostituire $X + \frac{d^2x}{dt^2}$, $Y + \frac{d^2y}{dt^2}$, $Z + \frac{d^2z}{dt^2}$ al posto di X, Y, Z. Ma crediamo che è più conforme allo scopo di quest'opera applicare direttamente ai fluidi le equazioni generali date nella sezione quarta per il moto di un sistema qualunque di corpi.

2.8.1 Equazioni generali per il moto dei fluidi incomprimibili

2. Si può considerare un fluido incomprimibile come composto di una infinità di particelle che si muovono liberamente tra loro senza variazione di volume; così il problema rientra nel caso dell'art. 12 della sezione sopra citata.

Sia quindi Dm la massa di una particella o elemento qualsiasi del fluido; X, Y, Z le forze acceleratrici che agiscono su tale elemento, ridotte per maggiore semplicità, alle direzioni delle coordinate x, y, z e tendenti a diminuire tali coordinate; $L = 0$ l'equazione della condizione risultante dall'incomprimibilità, o dell'invariabilità del volume di Dm; λ una quantità indeterminata; e S un simbolo integrale corrispondente al simbolo differenziale D e relativo all'intera massa del fluido; si avrà per il moto del fluido questa equazione generale (sez. IV, art. 15).

$$S\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)\delta z\right) Dm + S\lambda\delta L = 0$$

Bisogna ora sostituire in questa equazione i valori di Dm e di δL e dopo aver eliminato le differenze di variazione, se ve ne sono, uguagliare separatamente a zero i coefficienti delle variazioni indeterminate $\delta x, \delta y, \delta z$.

Consideriamo il simbolo D per rappresentare le differenze relative alla condizione istantanea delle particelle contigue, mentre il simbolo d si riferirà unicamente al cambiamento di posizione della stessa particella nello spazio; è chiaro che si può rappresentare il volume della particella Dm con il parallelepipedo $DxDyDz$; così, indicando con Δ la densità di questa particella, si avrà $Dm = \Delta DxDyDz$.

Inoltre, è chiaro che la condizione dell'incomprimibilità sarà contenuta nell'equazione $DxDyDz = cost$; di modo che si avrà $L = DxDyDz - cost$; e di conseguenza, $\delta L = \delta.(DxDyDz)$; per determinare questo differenziale, basta impiegare le stesse considerazioni dell'art. 14 della sez. sette della prima parte; così cambiando soltanto d in d nelle formule di questo punto, si avrà

$$\delta\left(DxDyDz\right) = DxDyDz\left(\frac{D\delta x}{Dx} + \frac{D\delta y}{Dy} + \frac{D\delta z}{Dz}\right)$$

Moltiplicando questa quantità per λ e integrandola rispetto all'intera massa del fluido, si avrà il valore $S\lambda\delta L$, nella quale basterà eliminare i doppi simboli $D\delta$ con gli stessi procedimenti già impiegati nell'art. 13 della sezione citata. Si avrà

$$s\lambda\delta L = S\left(\lambda"\delta x" - \lambda'\delta x'\right)DyDz + S\left(\lambda"\delta y" - \lambda'\delta y'\right)DxDz +$$
$$S\left(\lambda"\delta z" - \lambda'\delta z'\right)DxDy - S\left(\frac{D\lambda}{Dx}\delta x + \frac{D\lambda}{Dy}\delta y + \frac{D\lambda}{Dz}\delta z\right)DxDyDz$$

Operando queste sostituzioni nel primo membro dell'equazione generale, essa conterrà questa formula integrale totale

$$S\left(\left(\Delta\frac{d^2x}{dt^2} + \Delta X - \frac{D\lambda}{Dx}\right)\delta x + \left(\Delta\frac{d^2y}{dt^2} + \Delta Y - \frac{D\lambda}{Dy}\right)\delta y + \left(\Delta\frac{d^2z}{dt^2} + \Delta Z - \frac{D\lambda}{Dz}\right)\delta z\right)DxDyDz$$

nella quale basterà porre separatamente a zero i coefficienti delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ e ciò darà queste tre equazioni indefinite per tutti i punti della massa fluida.

$$\left.\begin{array}{rcl}\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) - \frac{D\lambda}{Dx} & = & 0\\ \Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) - \frac{D\lambda}{Dy} & = & 0\\ \Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) - \frac{D\lambda}{Dz} & = & 0\end{array}\right\} \qquad (A)$$

Rimarrà poi da annullare gli integrali parziali

$$S\left(\lambda"\delta x" - \lambda'\delta x'\right)DyDz + S\left(\lambda"\delta y" - \lambda'\delta y'\right)DxDz + S\left(\lambda"\delta z" - \lambda'\delta z'\right)DxDy$$

i quali si riferiscono alla superficie esterna del fluido; se ne concluderà, come nell'art. 16 della sez. sette, che il valore di λ dovrà essere nullo per tutti i punti della superficie dove il fluido è libero; si proverà inoltre, come negli artt. 20,21 della stessa sezione, che relativamente al posto in cui il fluido sarà contenuto da pareti fisse, i termini degli integrali precedenti si elimineranno mutuamente, e non rimarrà alcuna equazione; in generale si dimostrerà con un ragionamento simile a quello degli artt. 24,25, che la quantità λ riferita alla superficie del fluido esprimerà la pressione che il fluido esercita e che, quando non è nulla, deve essere controbilanciata dalla resistenza o dall'azione delle pareti.

3. Le equazioni contengono quindi le leggi generali del moto dei fluidi incomprimibili; ma bisogna considerare ancora l'equazione che deriva dalla condizione di incomprimibilità del volume $DxDyDz$ mentre il fluido si muove; questa equazione sarà quindi rappresentata da $d.(DxDyDz) = 0$; di modo che cambiando δ in d nell'espressione $\delta, (DxDyDz)$ prima trovata, e uguagliando a zero, si avrà

$$\frac{Ddx}{Dx} + \frac{Ddy}{Dy} + \frac{Ddz}{Dz} = 0 \qquad (B)$$

Questa equazione, combinata con le tre equazioni (A) dell'art. precedente, servirà a determinare le quattro incognite x, y, z, λ.

4. Per avere un'idea precisa della natura di queste equazioni, bisogna considerare che le variabili x, y, z che determinano la posizione di una particella in un istante qualsiasi, devono appartenere contemporaneamente a tutte le particelle di cui è composta la massa fluida; esse devono quindi essere funzioni del tempo t e dei valori che queste stesse variabili hanno avuto all'inizio del moto o in un altro istante dato. Indicando con a, b, c i valori di x, y, z, quando $t = 0$, basterà che i valori di x, y, z siano funzioni di a, b, c, t. In questo modo le differenze indicate con il simbolo D, si riferiranno unicamente alla variabilità di a, b, c; e le differenze indicate con l'altro simbolo d si riferiranno semplicemente alla variabilità di t. Ma siccome nelle equazioni trovate vi sono differenze relative alle stesse variabili x, y, z, bisognerà, per uniformità, ridurre queste alle differenze relative a a, b, c, cosa sempre possibile; si tratta solo di pensare di aver sostituito nelle funzioni prima della differenziazione i valori di x, y, z in a, b, c.

5. Considerando, quindi, le variabili x, y, z, some funzioni di a, b, c, t e rappresentanti i differenziali secondo la notazione ordinaria delle differenze parziali, si avrà

$$\begin{aligned} Dx &= \frac{dx}{da}da + \frac{dx}{db}db + \frac{dx}{dc}dc \\ Dy &= \frac{dy}{da}da + \frac{dy}{db}db + \frac{dy}{dc}dc \\ Dz &= \frac{dz}{da}da + \frac{dz}{db}db + \frac{dz}{dc}dc \end{aligned}$$

e considerando nello stesso tempo la funzione λ come una funzione di x, y, z e come una funzione di a, b, c, si avrà

$$D\lambda = \frac{D\lambda}{Dx}Dx + \frac{D\lambda}{Dy}Dy + \frac{D\lambda}{Dz}Dz = \frac{d\lambda}{da}da + \frac{d\lambda}{db}db + \frac{d\lambda}{dc}dc$$

dovendo queste due espressioni di $D\lambda$ essere identiche, se si sostituiscono nella prima i valori di Dx, Dy, Dz, in da, db, dc, servirà che i coefficienti di da, db, dc, siano gli stessi da entrambe le parti; ciò darà tre equazioni che serviranno a determinare i valori di $\frac{D\lambda}{Dx}, \frac{D\lambda}{Dy}, \frac{D\lambda}{Dz}$ in $\frac{d\lambda}{da}, \frac{d\lambda}{db}, \frac{d\lambda}{dc}$; si avrà la stessa cosa sostituendo nella seconda espressione di $D\lambda$ i valori di da, db, dc in Dx, Dy, Dz ricavati dalle espressioni di queste ultime quantità; allora il confronto dei termini contenenti Dx, Dy, Dz restituirà immediatamente i valori di $\frac{D\lambda}{Dx}$, ecc.

Dalle regole ordinarie dell'eliminazione si ha

$$\begin{aligned} da &= \frac{\alpha Dx + \alpha' Dy + \alpha" Dz}{\theta} \\ db &= \frac{\beta Dx + \beta' Dy + \beta" Dz}{\theta} \\ dc &= \frac{\gamma Dx + \gamma' Dy + \gamma" Dz}{\theta} \end{aligned}$$

supponendo

$$\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{dy}{db} \times \tfrac{dz}{dc} - \tfrac{dy}{dc} \times \tfrac{dz}{db} & \alpha' &= \tfrac{dx}{dc} \times \tfrac{dz}{db} - \tfrac{dx}{db} \times \tfrac{dz}{dc} \\ \alpha" &= \tfrac{dx}{db} \times \tfrac{dy}{dc} - \tfrac{dx}{dc} \times \tfrac{dy}{db} & \beta &= \tfrac{dy}{dc} \times \tfrac{dz}{da} - \tfrac{dy}{da} \times \tfrac{dz}{dc} \\ \beta' &= \tfrac{dx}{da} \times \tfrac{dz}{dc} - \tfrac{dx}{dc} \times \tfrac{dz}{da} & \beta" &= \tfrac{dx}{dc} \times \tfrac{dy}{da} - \tfrac{dx}{da} \times \tfrac{dy}{dc} \\ \gamma &= \tfrac{dy}{da} \times \tfrac{dz}{db} - \tfrac{dy}{db} \times \tfrac{dz}{da} & \gamma' &= \tfrac{dx}{db} \times \tfrac{dz}{da} - \tfrac{dx}{da} \times \tfrac{dz}{db} \\ \gamma" &= \tfrac{dx}{da} \times \tfrac{dy}{db} - \tfrac{dx}{db} \times \tfrac{dy}{da} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{dc} + \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{da} \\ & - \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{da} + \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{db} - \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{db} \end{aligned}$$

Operando queste sostituzioni nell'espressione $\frac{d\lambda}{da}da + \frac{d\lambda}{db}db + \frac{d\lambda}{dc}dc$ e confrontandola poi con l'espressione identica $\frac{D\lambda}{Dx}Dx + \frac{D\lambda}{Dy}Dy + \frac{D\lambda}{Dz}Dz$, si avrà

$$\frac{D\lambda}{Dx} = \frac{\alpha}{\theta} \times \frac{d\lambda}{da} + \frac{\beta}{\theta} \times \frac{d\lambda}{db} + \frac{\gamma}{\theta} \times \frac{d\lambda}{dc}$$

$$\begin{aligned}\frac{D\lambda}{Dx} &= \frac{\alpha'}{\theta}\times\frac{d\lambda}{da}+\frac{\beta'}{\theta}\times\frac{d\lambda}{db}+\frac{\gamma'}{\theta}\times\frac{d\lambda}{dc}\\ \frac{D\lambda}{Dx} &= \frac{\alpha"}{\theta}\times\frac{d\lambda}{da}+\frac{\beta"}{\theta}\times\frac{d\lambda}{db}+\frac{\gamma"}{\theta}\times\frac{d\lambda}{dc}\end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nelle tre equazioni (A) dell'art. 2, assumeranno questa forma, dopo aver moltiplicato per θ

$$\left.\begin{aligned}\theta\Delta\left(\tfrac{d^2x}{dt^2}+X\right)-\alpha\tfrac{d\lambda}{da}-\beta\tfrac{d\lambda}{db}-\gamma\tfrac{d\lambda}{dc} &= 0\\ \theta\Delta\left(\tfrac{d^2y}{dt^2}+Y\right)-\alpha'\tfrac{d\lambda}{da}-\beta'\tfrac{d\lambda}{db}-\gamma'\tfrac{d\lambda}{dc} &= 0\\ \theta\Delta\left(\tfrac{d^2z}{dt^2}+Z\right)-\alpha"\tfrac{d\lambda}{da}-\beta"\tfrac{d\lambda}{db}-\gamma"\tfrac{d\lambda}{dc} &= 0\end{aligned}\right\}\quad(C)$$

dove, come si vede, vi sono solo differenze parziali relative ad a, b, c, t.

In queste equazioni la quantità Δ che esprime la densità, è una funzione data di a, b, c senza t, poiché essa deve restare invariata per ogni particella; e se il fluido è omogeneo, Δ sarà allora una costante indipendente di a, b, c, t. Quanto alle quantità X, Y, Z, che rappresentano le forze acceleratrici, esse saranno date in funzione di x, y, z, t.

6. si può, del resto, ridurre le equazioni precedenti ad una forma più semplice, sommando, dopo averle moltiplicate rispettivamente e successivamente per $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da}$, per $\frac{dx}{db}, \frac{dy}{db}, \frac{dz}{db}$ e per $\frac{dx}{dc}, \frac{dy}{dc}, \frac{dz}{dc}$; poiché dalle espressioni di $\theta, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$, ecc, date in precedenza, è facile vedere che si avrà

$$\theta=\alpha\frac{dx}{da}+\alpha'\frac{dy}{da}+\alpha"\frac{dz}{da}=\beta\frac{dx}{db}+\beta'\frac{dy}{db}+\beta"\frac{dz}{db}=\gamma\frac{dx}{dc}+\gamma'\frac{dy}{dc}+\gamma"\frac{dz}{dc}$$

poi,

$$\begin{aligned}\beta\frac{dx}{da}+\beta'\frac{dy}{da}+\beta"\frac{dz}{da} &= 0\\ \gamma\frac{dx}{da}+\gamma'\frac{dy}{da}+\gamma"\frac{dz}{da} &= 0\\ \alpha\frac{dx}{db}+\alpha'\frac{dy}{db}+\alpha"\frac{dz}{db} &= 0\end{aligned}$$

e così di seguito. Di modo che con queste operazioni e queste riduzioni, si avranno le trasformate

$$\left.\begin{aligned}\Delta\left(\left(\tfrac{d^2x}{dt^2}+X\right)\tfrac{dx}{da}+\left(\tfrac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\tfrac{dy}{da}+\left(\tfrac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\tfrac{dz}{da}\right)-\tfrac{d\lambda}{da} &= 0\\ \Delta\left(\left(\tfrac{d^2x}{dt^2}+X\right)\tfrac{dx}{db}+\left(\tfrac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\tfrac{dy}{db}+\left(\tfrac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\tfrac{dz}{db}\right)-\tfrac{d\lambda}{db} &= 0\\ \Delta\left(\left(\tfrac{d^2x}{dt^2}+X\right)\tfrac{dx}{dc}+\left(\tfrac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\tfrac{dy}{dc}+\left(\tfrac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\tfrac{dz}{dc}\right)-\tfrac{d\lambda}{dc} &= 0\end{aligned}\right\}\quad(D)$$

7. Si trasformeranno, in modo analogo, l'equazione (B) dell'art. 3; e, siccome, per la nota dell'art. 4, i differenziali dx, dy, dz sono relativi solo alla variabile t, le si ridurrà dapprima ai differenziali parziali $\frac{dx}{dt}dt, \frac{dy}{dt}dt, \frac{dz}{dt}dt$; di modo che l'equazione, divisa per dt, assumerà la forma

$$\frac{D.\frac{dx}{dt}}{Dx}+\frac{D.\frac{dy}{dt}}{Dy}+\frac{D.\frac{dz}{dt}}{Dz}=0$$

Dalle formule trovate in precedenza per i valori di $\frac{D\lambda}{Dx}, \frac{D\lambda}{Dy}$, ecc, si avrà analogamente, sostituendo $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, ecc, al posto di λ,

$$\frac{D.\frac{dx}{dt}}{Dx}=\frac{\alpha}{\theta}\times\frac{d.\frac{dx}{dt}}{da}+\frac{\beta}{\theta}\times\frac{d.\frac{dx}{dt}}{db}+\frac{\gamma}{\theta}\times\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dc}$$

e poiché nel secondo membro di questa equazione, la quantità x è considerata funzione di a, b, c, t, si avrà $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{da}=\frac{d^2x}{dadt}$ e così per le altre differenze parziali di x; si avrà, pertanto, semplicemente

$$\frac{D.\frac{dx}{dt}}{Dx}=\frac{\alpha}{\theta}\times\frac{d^2x}{dadt}+\frac{\beta}{\theta}\times\frac{d^2x}{dbdt}+\frac{\gamma}{\theta}\times\frac{d^2x}{dcdt}$$

Si troveranno espressioni simili per i valori di $\frac{d.\frac{dy}{dt}}{dy}, \frac{d.\frac{dz}{dt}}{dz}$ cambiando solo nella formula precedente x in y e z.

Con queste sostituzioni, l'equazione sopra diverrà dopo aver tolto il denominatore comune θ,

$$\alpha\frac{d^2x}{dadt}+\beta\frac{d^2x}{dbdt}+\gamma\frac{d^2x}{dcdt}+\alpha'\frac{d^2y}{dadt}+\beta'\frac{d^2y}{dbdt}+\gamma'\frac{d^2y}{dcdt}+\alpha"\frac{d^2z}{dadt}+\beta"\frac{d^2z}{dbdt}+\gamma"\frac{d^2z}{dcdt}=0$$

Il primo membro di questa equazione non è diverso dal valore di $\frac{d\theta}{dt}$, come confermato dalla differenziazione dell'espressione di θ (art. 5).

Così l'equazione diviene $\frac{d\theta}{dt}=0$, il cui integrale è $\theta=f(a, b, c)$.

Supponiamo in questa equazione $t = 0$ e sia K ciò che diventa la quantità θ, si avrà $K = f(a, b, c)$; di conseguenza, l'equazione sarà $\theta = K$.

Noi abbiamo supposto che quando $t = 0$, si ha $x = a$, $y = b$, $z = c$; pertanto, si avrà allora $\frac{dx}{da} = 1$, $\frac{dx}{db} = 0$, $\frac{dx}{dc} = 0$, $\frac{dy}{da} = 0$, $\frac{dy}{db} = 1$, $\frac{dy}{dc} = 0$, $\frac{dz}{da} = 0$, $\frac{dz}{db} = 0$, $\frac{dz}{dc} = 1$. Sostituendo questi valori nell'espressione di θ (art. 5), si ha $\theta = 1$, pertanto $K = 1$.

Rimettendo per θ il suo valore, l'equazione assumerà la forma

$$\frac{dx}{da} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{dc} + \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{da} - \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{da} + \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{db} - \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{db} = 1 \quad (E)$$

Questa equazione, combinata con le tre (C) o (D) degli artt. 5,6, servirà a determinare i valori di λ, x, y, z in funzione di a, b, c, t.

8. Siccome le equazioni sono a differenze parziali, l'integrazione vi introdurrà necessariamente diverse funzioni arbitrarie; e la determinazione di queste funzioni dovrà essere dedotta in parte dalla condizione iniziale del fluido, che si deve supporre data, e in parte dalla considerazione della superficie esterna del fluido, che è pure assegnata se il fluido è racchiuso in un contenitore e che deve essere rappresentata dall'equazione $\lambda = 0$, quando il fluido è libero (art. 2).

Infatti, nel primo caso se si rappresenta con $A = 0$ l'equazione delle pareti del contenitore, essendo A una funzione data delle coordinate x, y, z di queste pareti, e introducendo per queste variabili i loro valori in a, b, c, t, si avrà un'equazione tra le coordinate iniziali a, b, c e il tempo t, la quale rappresenterà, di conseguenza, la superficie che formeranno nella condizione iniziale le stesse particelle che dopo il tempo t formano la superficie rappresentata dall'equazione data $A = 0$, Se si vuole che le stesse particelle che sono alla superficie vi rimangano sempre, condizione che appare necessaria affinché il fluido non si divida, e che è contenuta nella teoria dei fluidi, servirà che l'equazione non contenga il tempo t; di conseguenza, la funzione A di x, y, z dovrà essere tale che t non compaia dopo la sostituzione dei valori di x, y, z in a, b, c.

Per lo stesso motivo l'equazione $\lambda = 0$ della superficie libera dovrà contenere t; così il valore di λ dovrà essere una semplice funzione di a, b, c e senza t.

Del resto, vi sono casi nel moto di un fluido che scorre da un contenitore, in cui la condizione non vale; allora le determinazioni che risultano da questa condizione non sono più necessarie.

9. Tali sono le equazioni per le quali è possibile determinare direttamente il moto di un fluido qualsiasi incomprimibile. Ma queste equazioni sono in una forma un poco complessa ed è possibile ridurle ad una più semplice, prendendo come incognite, al posto delle coordinate x, y, z, le velocità $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ nella direzione delle coordinate e considerando tali velocità come funzioni di x, y, z, t.

Infatti, da un lato è chiaro che, poiché x, y, z sono funzioni di a, b, c, t, le quantità $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, saranno pure funzioni delle stesse variabili a, b, c, t; pertanto, se si pensa di sostituire in queste funzioni i valori di a, b, c in x, y, z ricavati da quelli di x, y, z in a, b, c si avrà $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ espresse in funzione di x, y, z, t.

Dall'altro lato, è chiaro che per la conoscenza effettiva del moto del fluido, basta conoscere in ogni istante il moto di una particella qualsiasi che occupa una posizione nello spazio, senza che sia necessario conoscere le sue condizioni precedenti; di conseguenza basta avere i valori delle velocità $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ in funzione di x, y, z, t.

Essendo però questi valori noti, se li si indica con p, q, r, si avranno le equazioni $dx = pdt$, $dy = qdt$, $dz = rdt$, tra x, y, z, t; le quali, una volta integrate, in modo che x, y, z divengano a, b, c, quando $t = 0$, restituiranno i valori di x, y, z in a, b, c, t.

Del resto, se si elimina dt da queste equazioni differenziali, si avranno queste due $pdy = qdx$, $pdz = rdx$, le quali esprimono la natura delle diverse curve nelle quali l'intero fluido si muove in ogni istante, curve che cambiano posto e forma da un istante all'altro.

10. Riprendiamo le equazioni fondamentali (A) e (B) degli articoli 2 e 3, e introducendovi le variabili $p = \frac{dx}{dt}$, $q = \frac{dy}{dt}$, $r = \frac{dz}{dt}$, viste come funzioni di x, y, z, t.

È chiaro che le quantità $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ possono essere messe nella forma $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}, \frac{d.\frac{dy}{dt}}{dt}, \frac{d.\frac{dz}{dt}}{dt}$ dove le quantità $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sono presunte funzioni di a, b, c, t.

Considerandole quindi come tali, si avrà per la differenza completa di $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}dt + \frac{d.\frac{dx}{dt}}{da}da + \frac{d.\frac{dx}{dt}}{db}db + \frac{d.\frac{dx}{dt}}{dc}dc$ e così per le altre; ma considerandole come funzioni di x, y, z, t e indicandole tramite p, q, r, le loro differenze complete saranno $\frac{dp}{dt}dt + \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz$ e così per le altre differenze; se, quindi, in queste ultime espressioni si mettono per dx, dy, dz i loro valori in a, b, c, t, bisognerà che esse divengano identiche alle prime; ma, essendo considerato x come funzione di a, b, c, t, si ha $dx = \frac{dx}{dt}dt + \frac{dx}{da}da + \frac{dx}{db}db + \frac{dx}{dc}dc$, dove $\frac{dx}{dt}$ è evidentemente $= p$, supponendo che si introducano in p i valori di x, y, z in a, b, c, t.

Così si avrà $dx = pdt + \frac{dx}{da}da + ecc$; e analogamente $dy = qdt + \frac{dy}{da} + ecc$, $dz = rdt + \frac{dy}{da} + ecc$.

Sostituendo questi valori nell'espressione della differenza completa di $\frac{dx}{dt}$, i termini comprendenti dt saranno $\left(\frac{dp}{dt} + \frac{dp}{dx}p + \frac{dp}{dy}q + \frac{dp}{dz}r\right)$ i quali dovendo essere identici al termine corrispondente $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}dt$ oppure a $\frac{d^2x}{dt^2}dt$, si avrà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz}$$

e si troverà allo stesso modo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dy} + r\frac{dr}{dz}$$

Si faranno quindi queste sostituzioni nelle equazioni (A); e poiché in queste stesse equazioni i termini $\frac{d\lambda}{Dx}, \frac{d\lambda}{Dy}, \frac{d\lambda}{Dz}$ rappresentano differenze parziali di λ, relativamente a x, y, z, con t costante, si potrà cambiare il simbolo D in d.

Si avranno così le trasformate

$$\left.\begin{aligned} \Delta\left(\tfrac{dp}{dt} + p\tfrac{dp}{dx} + q\tfrac{dp}{dy} + r\tfrac{dp}{dz} + X\right) - \tfrac{d\lambda}{dx} &= 0 \\ \Delta\left(\tfrac{dq}{dt} + p\tfrac{dq}{dx} + q\tfrac{dq}{dy} + r\tfrac{dq}{dz} + Y\right) - \tfrac{d\lambda}{dy} &= 0 \\ \Delta\left(\tfrac{dr}{dt} + p\tfrac{dr}{dx} + q\tfrac{dr}{dy} + r\tfrac{dr}{dz} + Z\right) - \tfrac{d\lambda}{dz} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (F)$$

Per l'equazione (B) dell'art. e, basterà mettere al posto di dx, dy, dz il loro valori pdt, qdt, rdt e cambiando il simbolo D in d, si avrà immediatamente, essendo dt costante

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0 \qquad (G)$$

Si vede che queste equazioni sono molto più semplici delle equazioni (C) o (D) e (E) alle quali corrispondono; conviene, pertanto, impiegarle preferibilmente nella teoria dei fluidi.

11. Nei fluidi omogenei e di densità uniforme, la quantità Δ che esprime la densità è costante; è il caso più comune e il solo che esamineremo in seguito.

Ma nei fluidi eterogenei, questa quantità deve essere una funzione costante rispetto al tempo t per la stessa particella, ma variabile da una particella all'altra, secondo una legge stabilita. Così, considerando il fluido nella condizione iniziale, dove le coordinate x, y, z sono a, b, c, la quantità Δ sarà una funzione assegnata e nota di a, b, c senza t; di conseguenza, il termine comprendente dt nel differenziale totale di Δ vista come funzione di a, b, c, t dovrà essere nullo; ma con un ragionamento simile a quello mostrato nell'articolo precedente per trovare il valore di $\frac{d^2x}{dt^2}$, si troverà che considerando Δ come una funzione di x, y, z, t, il termine in questione sarà espresso da

$$\left(\frac{d\Delta}{dt} + p\frac{d\Delta}{dx} + q\frac{d\Delta}{dy} + r\frac{d\Delta}{dz}\right) dt$$

Si avrà così l'equazione

$$\frac{d\Delta}{dt} + p\frac{d\Delta}{dx} + q\frac{d\Delta}{dy} + r\frac{d\Delta}{dz} = 0 \qquad (H)$$

che servirà a determinare l'incognita Δ nelle equazioni (F), poiché in queste equazioni si deve trattare Δ come una funzione di x, y, z, t.

Sotto questo aspetto sono meno vantaggiose delle equazioni (C) o (D) nelle quali si può considerare Δ come una funzione nota di a, b, c.

12. Lunato detto per la funzione Δ, andrà applicato anche alla funzione A, in quanto $A = 0$ è l'equazione delle pareti del contenitore. La condizione che le stesse particelle rimangono sempre alla superficie richiede, come visto nell'art. 8, che A divenga una funzione di a, b, c senza t; di modo che considerando questa quantità come una funzione di x, y, z, t, si avrà l'espressione

$$\frac{dA}{dt} + p\frac{dA\Delta}{dx} + q\frac{dA}{dy} + r\frac{dA}{dz} = 0 \qquad (I)$$

Per le parti cella superficie dove il fluido sarà libero si avrà l'equazione $\lambda = 0$ (art. 2); bisognerà, di conseguenza, per soddisfare alla stessa condizione, che si abbia pure

$$\frac{d\lambda}{dt} + p\frac{d\lambda}{dx} + q\frac{d\lambda}{dy} + r\frac{d\lambda}{dz} = 0 \qquad (H)$$

13. Ecco le formule più generali e più semplici per la determinazione rigorosa del moto dei fluidi. La difficoltà sta ora solo nella loro integrazione, ma è così grande che finora siamo stati obbligati ad accontentarci, anche nei problemi più semplici, di metodi particolari e basati su ipotesi più o meno limitate. Per ridurre il più possibile questa difficoltà, esaminiamo come e in quale caso queste formule possono ancora essere semplificate; ne faremo poi l'applicazione ad alcuni problemi sul moto dei fluidi in contenitori o canali.

14. Niente è più facile che soddisfare all'equazione (G) dell'art. 10; facendo $p = \frac{d\alpha}{dz}$, $q = \frac{d\beta}{dz}$, essa diviene $\frac{d^2\alpha}{dxdz} + \frac{d^2\beta}{dydz} + \frac{dr}{dz} = 0$, la quale è integrabile rispetto a z e dà $r = -\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}$; non è necessario aggiungere qui una funzione arbitraria a causa delle quantità indeterminate α e β.

Così l'equazione sarà soddisfatta da questi valori

$$p = \frac{d\alpha}{dz} \quad q = \tfrac{d\beta}{dz} \quad r = -\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}$$

e sostituendoli nelle tre equazioni (F) dello stesso articolo, si avranno solo tre incognite α, β, γ; e sarà pure molto facile eliminare λ mediante differenziazioni parziali. Se, quindi, la densità Δ è costante, il problema si troverà ridotto a due sole equazioni tra le incognite α, β; e se la densità Δ è variabile, bisognerà aggiungere l'equazione (H) dell'art. 11. Ma l'integrazione di queste equazioni supera le possibilità dell'analisi nota.

15. Vediamo quindi se le equazioni (F) considerate in se stesse, possono essere semplificate.

Considerando nella funzione λ solo la variabilità di x, y, z, si ha $d\lambda = \frac{d\lambda}{dx}dx + \frac{d\lambda}{dy}dy + \frac{d\lambda}{dz}dz$.

Sostituendo, quindi, per $\frac{d\lambda}{dx}, \frac{d\lambda}{dy}, \frac{d\lambda}{dz}$ i loro valori ricavati da queste equazioni, si avrà

$$d\lambda = \left(\frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz} + X\right)\Delta dx + \left(\frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz} + Y\right)\Delta dy + \left(\frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dy} + r\frac{dr}{dz} + Z\right)\Delta dz$$

Il primo membro di questa equazione è un differenziale totale, sarà necessario, quindi, che il secondo lo sia rispetto a x, y, z; e il valore di λ che se ne ricava, soddisferà a sua volta le tre equazioni (F).

Supponiamo ora che il fluido sia omogeneo, di modo che la densità Δ sia costante e per semplicità poniamola unitaria.

Supponiamo inoltre che le forze acceleratrici X, Y, Z, siano tali che la quantità $Xdx+Ydy+Zdz$ sia un differenziale esatto. Questa condizione è quella che è necessaria affinché il fluido possa essere in equilibrio con queste stesse forze, come si è visto nell'art. 17 della sezione 7 della prima parte. Essa vale sempre, quando queste forze derivano da uno o più attrazioni proporzionali a funzioni qualsiasi delle distanze dai centri, che è il caso in esame, poiché chiamando le attrazioni P, Q, R, ecc, e le distanze p, q, r, ecc, si ha in generale

$$Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr + ecc$$

(Parte I, sez, 4, art. 5).

Ponendo, quindi, $\Delta = 1$ e $Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr + ecc = dV$, l'equazione precedente diverrà

$$d\lambda - dV = \left(\frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz} + X\right)dx + \left(\frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz} + Y\right)dy + \left(\frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dy} + r\frac{dr}{dz} + Z\right)dz \quad (L)$$

e basterà che il secondo membro di questa equazione sia un differenziale esatto, poiché il primo lo è.

Questa equazione equivarrà alle equazioni (F) dell'art. 10.

Considerando il differenziale di $\frac{p^2+q^2+r^2}{2}$ preso rispetto a x, y, z non è difficile vedere che si può dare al secondo membro dell'equazione la forma

$$\frac{d.(p^2+q^2+r^2)}{2} + \frac{dp}{dt}dx + \frac{dp}{dt}dy + \frac{dp}{dt}dz + \left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx}\right)(qdx - pdy) + + \left(\frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx}\right)(rdx - pdz) + \left(\frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dz}\right)(rdy - qdz)$$

e si vede che questa quantità sarà un differenziale esatto tutte le volte che $pdx + qdy + rdz$ lo sarà; allora il suo differenziale rispetto a t, cioè, $\frac{dp}{dt}dx + \frac{dp}{dt}dy + \frac{dp}{dt}dz$ lo sarà pure, e inoltre le condizioni note dell'integrabilità daranno

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} = 0 \quad \frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx} = 0 \quad \frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy} = 0$$

Da ciò segue che si potrà soddisfare all'equazione (L) con la semplice supposizione che $pdx + qdy + rdz$ sia un differenziale esatto e il calcolo del moto del fluido sarà di molto semplificato. Ma, essendo questa solo un'ipotesi particolare, importa esaminare prima di tutto in quali caso può e deve valere.

17. Sia per abbreviare

$$\alpha = \frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} \quad \beta = \frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx} \quad \gamma = \frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy}$$

si tratterà di rendere un differenziale esatto la quantità

$$\frac{dp}{dt}dx + \frac{dp}{dt}dy + \frac{dp}{dt}dz + \alpha(qdx - pdy) + \beta(rdx - pdz) + \gamma(rdy - qdz)$$

Supponiamo dapprima che la variabile t abbia un valore molto piccolo, si potrà allora dare a p, q, r, le seguenti formulazioni in serie

$$\begin{aligned} p &= p' + p"t + p'"t^2 + p^{iv}t^3 + ecc \\ q &= q' + q"t + q'"t^2 + qp^{iv}t^3 + ecc \\ & \quad\; p' + p"t + p'"t^2 + p^{iv}t^3 + ecc \end{aligned}$$

nelle quali le quantità $p', p", p'"$, ecc, $q', q", q'"$, ecc, $r', r", r'"$, ecc, saranno funzioni di x, y, z senza t.

Sostituendo questi valori nelle tre quantità α, β, γ, esse diverranno

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' + \alpha"t + \alpha'"t^2 + \alpha^{iv}t^3 + ecc \\ \beta &= \beta' + \beta"t + \beta'"t^2 + \beta^{iv}t^3 + ecc \\ \gamma &= \gamma' + \gamma"t + \gamma'"t^2 + \gamma^{iv}t^3 + ecc \end{aligned}$$

supponendo

$$\begin{array}{ll} \alpha' = \frac{dp'}{dy} - \frac{dq'}{dx} & \alpha" = \frac{dp"}{dy} - \frac{dq"}{dx},\ ecc \\ \beta' = \frac{dp'}{dz} - \frac{dr'}{dx} & \beta" = \frac{dp"}{dz} - \frac{dr"}{dx},\ ecc \\ \gamma' = \frac{dq'}{dz} - \frac{dr'}{dy} & \gamma" = \frac{dq"}{dz} - \frac{dr"}{dy},\ ecc \end{array}$$

Così la quantità $\frac{dp}{dt}dx+\frac{dq}{dt}dy+\frac{dr}{dt}dz+\alpha\left(qdx-pdy\right)+\beta\left(rdx-pdz\right)+\gamma\left(rdy-qdz\right)$ diverrà dopo queste sostituzioni, ordinando i termini rispetto alle potenze di t

$$\begin{gathered} p"dx+q"dy+r"dz+\alpha'\left(q'dx-p'dy\right)+\beta'\left(r'dx-p'dz\right)+\gamma'\left(r'dy-q'dz\right)+t\left(\ 2\left(p'"dx+q'"dy+r'"dz\right)+\right. \\ +\alpha'\left(q"dx-p"dy\right)+\beta'\left(r"dx-p"dz\right)+\gamma'\left(r"dy-q"dz\right)+\alpha"\left(q'dx-p'dy\right)+\beta"\left(r'dx-p'dz\right)+\gamma"\left(r'dy-q'dz\right)) \\ +t^2\left(3\left(p^{iv}dx+q^{iv}dy+r^{iv}dz\right)+\alpha'\left(q'"dx-p'"dy\right)+\beta'\left(r'"dx-p'"dz\right)+\gamma'\left(r'"dy-q'"dz\right)+\right. \\ +\alpha"\left(q"dx-p"dy\right)+\beta"\left(r"dx-p"dz\right)+\gamma"\left(r"dy-q"dz\right)+\alpha'"\left(q'dx-p'dy\right)+\beta'"\left(r'dx-p'dz\right)+\gamma'"\left(r'dy-q'dz\right))+ecc \end{gathered}$$

e siccome questa quantità deve essere un differenziale esatto indipendentemente dal valore di t, sarà necessario che le potenze che moltiplicano ogni potenza di t, siano ognuna in particolare un differenziale esatto.

Ciò posto, supponiamo che $p'dx+q'dy+r'dz$ sia un differenziale esatto, si avrà, dai teoremi noti

$$\frac{dp'}{dy} = \frac{dq'}{dx} \quad \frac{dp'}{dz} = \frac{dr'}{dx} \quad \frac{dq'}{dz} = \frac{dr'}{dy}$$

pertanto $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\gamma' = 0$; la prima quantità, che deve essere un differenziale esatto, si ridurrà a $p"dx+q"dy+r"dz$ e si avranno, di conseguenza, queste equazioni di condizione $\alpha" = 0$, $\beta" = 0$, $\gamma" = 0$.

Allora la seconda quantità che deve essere un differenziale esatto, diverrà $2\left(p'"dx+q'"dz\right)$; e si otterranno le nuove equazioni $\alpha'" = 0$, $\beta'" = 0$, $\gamma'" = 0$. Di modo che la terza quantità che deve essere un differenziale esatto, sarà $3\left(p^{iv}dx+q^{iv}dy+r^{iv}dz\right)$; da cui si ricaveranno in modo analogo le equazioni $\alpha^{iv} = 0$, $\beta^{iv} = 0$, $\gamma^{iv} = 0$; e così di seguito. Se, quindi, $p'dx+q'dy+r'dz$ è un differenziale esatto, basterà che $p"dx+q"dy+r"dz$, $p'"dx+q'"dy+r'"dz$, $p^{iv}dx+q^{iv}dy+r^{iv}dz$, ecc, siano ciascuno dei differenziali esatti. Di conseguenza, la quantità $pdx+qdy+rdz$ sarà in questo caso un differenziale esatto, supponendo il tempo t molto piccolo.

17. Ne segue che se la quantità $pdx+qdy+rdz$ è un differenziale esatto quando $t=0$, essa dovrà esserlo anche quando t avrà un valore qualsiasi molto piccolo; da cui si può concludere in generale che questa quantità dovrà essere sempre un differenziale esatto per qualunque valore di t. Poiché essa deve esserlo da $t=0$ fino a $t=\theta$, (essendo θ una quantità qualsiasi data molto piccola) se si sostituisce $\theta+t'$ al posto di t, si proverà che essa dovrà essere un differenziale esatto, da $t'=0$ fino a $t=2\theta$; e così di seguito.

In generale, quindi, siccome l'origine di t è arbitraria, e si può prendere t positivo o negativo, ne segue che se la quantità $pdx+qdy+rdz$ è un differenziale esatto in un qualsiasi istante, lo dovrà essere per tutti gli altri istanti. Di conseguenza, se vi è un solo istante nel quale non è un differenziale esatto, non potrà mai esserlo durante tutto il movimento; se lo fosse in un altro istante qualsiasi, lo dovrebbe essere anche nel primo.

18. quando il moto comincia dal riposo, si ha allora $p=0$, $q=0$, $r=0$, quando $t=0$; pertanto $pdx+qdy+rdz$ sarà integrabile per questo momento e, di conseguenza, lo dovrà essere sempre per l'intera durata del movimento.

Ma se vi sono velocità impresse al fluido, all'inizio, tutto dipende dalla natura di tali velocità, secondo che esse saranno tali che $pdx+qdy+rdz$ sia una quantità integrabile oppure no; nel primo caso la quantità $pdx+qdy+rdz$ sarà sempre integrabile, nel secondo non lo sarà mai.

Quando le velocità iniziali sono prodotte da un impulso qualsiasi sulla superficie del fluido, come per l'azione di un pistone, si può dimostrare che $pdx+qdy+rdz$ deve essere integrabile nel primo istante. È necessario che le velocità p, q, r che ogni punto del fluido riceve in virtù dell'impulso dato alla superficie, siano tali che se si distruggessero queste velocità imprimendo nello stesso tempo in ogni punto del fluido velocità uguale e in senso contrario, tutta la massa del fluido si troverebbe a riposo o in equilibrio. Servirà, pertanto, che vi sia equilibrio in questa massa, in virtù dell'impulso applicato alla superficie e a velocità o forze $-p, -q, -r$, applicate a ciascun punto del suo interno; di conseguenza, dalla legge generale dell'equilibrio dei fluidi (Parte prima, sezione 7, art. 17), le quantità p, q, r, dovranno essere tali che $pdx+qdy+rdz$ sia un differenziale esatto. In questo caso la stessa quantità dovrà sempre essere un differenziale esatto in ogni istante del moto.

19. Si potrebbe forse dubitare della presenza di moti possibili nel fluido, per i quali $pdx+qdy+rdz$ è un differenziale esatto.

Per togliere questo dubbio con un esempio molto semplice, basta considerare il caso in cui $p=gy$, $q=-gx$, $r=0$, essendo g una costante qualsiasi. Si vede che in questo caso $pdx+qdy+rdz$ non sarà un differenziale totale, poiché diviene $g\left(ydx-xdy\right)$ che non è integrabile; tuttavia l'equazione (L) dell'art. 15 sarà integrabile; si avrà $\frac{dp}{dy}=g$, $\frac{dq}{dx}=-g$ e tutte le altre differenze parziali di p e q saranno nulle; di modo che l'equazione diverrà

$$d\lambda - dV = -g^2\left(xdx+ydy\right)$$

il cui integrale dà

$$\lambda = V - \frac{g^2}{2}\left(x^2+y^2\right)+f\left(t\right)$$

valore che soddisferà alle tre equazioni (F) dell'art. 10.

Rispetto all'equazione (G) dello stesso articolo, essa varrà pure, poiché i valori supposti danno $\frac{dp}{dx} = 0$, $\frac{dq}{dy} = o$, $\frac{dr}{dz} = 0$.

Del resto, è chiaro che questi valori di p, q, r rappresentano il moto di un fluido che ruota attorno all'asse fisso delle coordinate z, con una velocità angolare costante e uguale a g; e si sa che un simili moto può sempre avvenire in un fluido.

Si può concludere da ciò che nel calcolo delle oscillazioni del mare, in virtù dell'attrazione del Sole e della Luna, non si può supporre che la quantità $pdx + qdy + rdz$ sia integrabile, poiché essa non lo è quando il fluido è a riposo rispetto alla Terra, e non possiede il moto di rotazione che ha in comune con essa.

20. Dopo aver determinato i casi nei quali è accertato che la quantità $pdx + qdy + rdz$ deve essere un differenziale totale, vediamo come, da questa condizione, si può risolvere le equazioni del moto dei fluidi.

Sia, quindi, $pdx+qdy+rdz = d\phi$, essendo ϕ una funzione qualsiasi di x, y, z e della variabile t, la quale è considerata costante nel differenziale $d\phi$ e si avrà quindi $p = \frac{d\phi}{dx}$, $q = \frac{d\phi}{dy}$, $r = \frac{d\phi}{dz}$ e sostituendo questi valori nell'equazione (L) dell'art. 15, essa diverrà

$$\begin{aligned} d\lambda - dV &= \left(\frac{d^2\phi}{dtdx} + \frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d\phi}{dy}\cdot\frac{d^2\phi}{dxdy} + \frac{d\phi}{dz}\cdot\frac{d^2\phi}{dxdz}\right)dx + \left(\frac{d^2\phi}{dtdx} + \frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^2\phi}{dxdy} + \frac{d\phi}{dy}\cdot\frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d\phi}{dz}\cdot\frac{d^2\phi}{dyxdz}\right)dy \\ &+ \left(\frac{d^2\phi}{dtdz} + \frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^2\phi}{dxdz} + \frac{d\phi}{dy}\cdot\frac{d^2\phi}{dydz} + \frac{d\phi}{dz}\cdot\frac{d^2\phi}{dz^2}\right)dz \end{aligned}$$

il cui integrale rispetto a x, y, z è evidentemente

$$\lambda - V = \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2$$

Si potrebbe aggiungere una funzione arbitraria di t, poiché questa variabile è vista nell'integrazione come costante; ma osservo che questa funzione può essere ritenuta contenuta nel valore di ϕ; aumentando ϕ di una funzione qualsiasi T di t, i valori di p, q, r rimarranno gli stessi di prima e il secondo membro dell'equazione precedente di troverà aumentato della funzione $\frac{dT}{dt}$, che è arbitrario. Si può quindi senza derogare dalla generalità di questa equazione, non aggiungere alcuna funzione arbitraria di t.

Da questa condizione si avrà

$$\lambda = V + \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2$$

valore che soddisferà alle tre equazioni (F) dell'art. 10; e la determinazione di ϕ dipenderà dall'equazione (G) dello stesso articolo, la quale, sostituendo a p, q, r i loro valori $\frac{d\phi}{dx}, \frac{d\phi}{dy}, \frac{d\phi}{dz}$ diviene

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$$

Così tutta la difficoltà consisterà solo nell'integrazione di quest'ultima equazione.

21. Vi è ancora un caso molto esteso, nel quale la quantità $pdx + qdy + rdz$ deve essere un differenziale esatto; quello in cui si suppone che le velocità p, q, r, siano molto piccole e si trascurano le quantità molto piccole del secondo ordine e degli ordini seguenti. È chiaro che in questa ipotesi, la stessa equazione (L) si ridurrà a

$$d\lambda - dV = \frac{dp}{dt}dx + \frac{dq}{dt}dy + \frac{dr}{dt}dz$$

dove si vede che $\frac{dp}{dt}dx + \frac{dq}{dt}dy + \frac{dr}{dt}dz$, dovendo essere integrabile rispetto a x, y, z, la quantità $pdx + qdy + rdz$ lo dovrà pure essere. Si avranno anche le stesse formule dell'articolo precedente, supponendo ϕ una funzione molto piccola e trascurando i secondi gradi di ϕ e dei suoi differenziali.

Si potrà, inoltre, in questo caso, determinare i valori stessi di x, y, z per un tempo qualsiasi. Basterà integrare le equazioni $dx = pdt$, $dy = qdt$, $dz = rdt$ (art. 9), nelle quali, poiché p, q, r sono molto piccoli e, di conseguenza, lo sono anche dx, dy, dz dello stesso ordine rispetto a dt, si potrà considerare x, y, z come costanti rispetto a t. Di modo che, trattando t come variabile solo nelle funzioni p, q, r e aggiungendo le costanti a, b, c, si avrà immediatamente $x = a + \int pdt$, $y = b + \int qdt$, $z = c + \int rdt$. Introducendo $\Phi = \int \phi dt$ e cambiando in Φ le variabili x, y, z in a, b, c si avrà semplicemente

$$x = \frac{d\Phi}{da} \quad y = b + \tfrac{d\Phi}{db} \quad z = c + \frac{d\Phi}{dc}$$

dove la funzione Φ dovrà essere preso in modo da essere nulla quando $t = 0$, affinché a, b, c siano i valori iniziali di x, y, z.

Questo caso si presenta, soprattutto nella teoria delle onde, come si vedrà in seguito.

22. Del resto, se la massa del fluido fosse tale che una delle sue dimensioni sia considerevolmente più piccola delle altre, in modo da poter considerare, per esempio, le coordinate z come molto piccole rispetto a x, y, questa circostanza servirebbe pure a facilitare la risoluzione delle equazioni generali.

È chiaro che si potrebbe assegnare allora alle incognite p, q, r, Δ la forma seguente

$$\begin{aligned} p &= p' + p"z + p'"z^2 + ecc \\ q &= q' + q"z + q'"z^2 + ecc \\ r &= r' + r"z + r'"z^2 + ecc \\ \Delta &= \Delta' + \Delta"z + \Delta'"z^2 + ecc \end{aligned}$$

nelle quali $p', p"$, ecc; $q', q"$, ecc; $r', r"$, ecc; $\Delta', \Delta"$, ecc saranno funzioni di x, y, t senza z; operando, quindi, queste sostituzioni, si avrebbero equazioni in serie, le quali conterranno solo differenze parziali relative a x, y, t.

Per presentare un tentativo di calcolo, supponiamo di nuovo che si tratti di un liquido omogeneo, dove $\Delta = 1$ e iniziamo a sostituire i valori precedenti nell'equazione (G) dell'art. 10; ordinando i termini rispetto a z, si avrà

$$0 = \frac{dp'}{dx} + \frac{dq'}{dy} + r" + z\left(\frac{dp"}{dx} + \frac{dq"}{dy} + 2r'"\right) + z^2\left(\frac{dp'"}{dx} + \frac{dq'"}{dy} + 3r^{iv}\right) + ecc$$

Di modo che, siccome $p', p"$, ecc; $q', q"$, ecc, non devono contenere z, si avranno queste equazioni particolari

$$\begin{aligned} \frac{dp'}{dx} + \frac{dq'}{dy} + r" &= 0 \\ \frac{dp"}{dx} + \frac{dq"}{dy} + 2r'" &= 0 \\ \frac{dp'"}{dx} + \frac{dq'"}{dy} + 3r^{iv} &= 0 \end{aligned}$$

tramite le quali si determineranno le quantità $r", r'", r^{iv}$,ecc mentre le altre quantità $r', p', p"$, ecc, $q', q"$, ecc, rimarranno ancora indeterminate.

Si faranno le stesse sostituzioni nell'equazione (L) dell'art. 15, la quale equivale alle tre equazioni (F) dell'art. 10, ed è facile vedere che si ridurrà alla forma seguente

$$d\lambda - dV = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz + z\left(\alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz\right) + z^2\left(\alpha" dx + \beta" dy + \gamma" dz\right) + ecc$$

e abbreviando

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dp'}{dt} + p'\frac{dp'}{dx} + q'\frac{dp'}{dy} + r'p^{iv} \\ \beta &= \frac{dq'}{dt} + p'\frac{dq'}{dx} + q'\frac{dq'}{dy} + r'q" \\ \gamma &= \frac{dr'}{dt} + p'\frac{dr'}{dx} + q'\frac{dr'}{dy} + r'r" \\ \alpha' &= \frac{dp"}{dt} + p'\frac{dp"}{dx} + p"\frac{dp'}{dx} + q'\frac{dp"}{dy} + q"\frac{dp'}{dy} + 2r'p'" + r"p" \\ \beta' &= \frac{dq"}{dt} + p'\frac{dq"}{dx} + p"\frac{dq'}{dx} + q'\frac{dq"}{dy} + q"\frac{dq'}{dy} + 2r'q'" + r"q" \\ \gamma' &= \frac{dr"}{dt} + p'\frac{dp"}{dx} + p"\frac{dr'}{dx} + q'\frac{dr'}{dy} + q"\frac{dr'}{dy} + 2r'r'" + r"r" \end{aligned}$$

e così di seguito.

Affinché, quindi, il secondo membro di questa equazione sia integrabile, basterà che le quantità

$$\begin{gathered} \alpha dx + \beta dy \\ \gamma dz + z\left(\alpha' dx + \beta' dy\right) \\ \gamma' z dz + z^2\left(\alpha" dx + \beta" dy\right) \\ ecc \end{gathered}$$

siano ognuna integrabile in particolare.

Se, pertanto, si indica con ω una funzione di x, y, t senza z, si avranno queste condizioni

$$\begin{gathered} \alpha = \tfrac{d\omega}{dx} \qquad \beta = \tfrac{d\omega}{dy} \qquad \alpha' = \tfrac{d\gamma}{dx} \qquad \beta' = \tfrac{d\gamma}{dy} \\ \alpha" = \tfrac{d\gamma'}{2dx} \qquad \beta" = \tfrac{d\gamma'}{2dy} \qquad ecc \end{gathered}$$

Allora l'equazione integrata darà

$$\lambda = V + \omega + \gamma z + \frac{1}{2}\gamma' z^2 + ecc$$

e si tratterà solo di soddisfare alle condizioni precedenti per mezzo delle funzioni indeterminate $\omega, r', p', p"$, ecc„ $q', q"$, ecc.

Il calcolo diverrebbe ancora più facile se le due variabili y, z fossero contemporaneamente molto piccole rispetto a x; si potrebbe, allora, supporre

$$\begin{aligned} p &= p' + p"y + p'"z + p^{iv}y^2 + p^v yz + ecc \\ q &= q' + q"y + q'"z + q^{iv}y^2 + q^v yz + ecc \\ r &= r' + r"y + r'"z + r^{iv}y^2 + r^v yz + ecc \end{aligned}$$

essendo le quantità $p', p"$, ecc, $q', q"$, ecc, semplici funzioni di x.

Con queste sostituzioni nell'equazione (G) e uguagliando separatamente a zero i termini comprendenti y, z e i loro prodotti, si avrebbe

$$\begin{aligned} \frac{dp'}{dx} + q" + r'" &= 0 \\ \frac{dp"}{dx} + 2q^{iv} + r^v &= 0 \\ ecc \end{aligned}$$

L'equazione (L) diverrebbe

$$d\lambda - dV = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz + y\left(\alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz\right) + z\left(\alpha" dx + \beta" dy + \gamma" dz\right) + ecc$$

supponendo

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dp'}{dt} + p'\frac{dp'}{dx} + q'p" + r'p'" \\ \beta &= \frac{dq'}{dt} + p'\frac{dq'}{dx} + q'q" + r'q'" \\ \gamma &= \frac{dr'}{dt} + p'\frac{dr'}{dx} + q'r" + r'r'" \\ \alpha' &= \frac{dp"}{dt} + p'\frac{dp"}{dx} + p"\frac{dp'}{dx} + 2q'p^{iv} + q"p" + r'p^v + r"p'" \end{aligned}$$

ecc. e si avrebbero, per l'integrabilità di questa equazione, le condizioni $\alpha' = \frac{d\beta}{dx}$, $\alpha" = \frac{d\gamma}{dx}$, ecc, dopodiché darebbero

$$\lambda = V + \int adx + \beta y + \gamma z + ecc$$

Si potrà, infine, semplificare qualche volta il calcolo per mezzo delle sostituzioni, introducendo al posto delle coordinate x, y, z altre variabili ξ, η, ζ, le quali siano funzioni date di quelle; e se, per la natura del problema, la variabile ζ, per esempio, o le due variabili η, ζ sono molto piccole rispetto a ξ, si potranno impiegare riduzioni analoghe a quelle esposte.

2.8.2 Moto dei fluidi pesanti e omogenei in contenitori o canali di forma qualsiasi

23. Per mostrare l'utilizzo dei principi e delle formule introdotte, le applichiamo ai fluidi che si muovono in contenitori o canali di forma data.

Supporremo che il fluido sia omogeneo e pesante, e che sia inizialmente a riposo o messo in movimento dall'impulso di un pistone applicato alla sua superficie; così le velocità p, q, r, di ogni particella dovranno essere tali che la quantità $pdx + qdy + rdz$ sia integrabile (art. 18); di conseguenza, si potranno impiegare le formule dell'art. 20.

Sia, quindi, ϕ una funzione di x, y, z, t, determinata dall'equazione

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$$

si avranno per le velocità di ogni particella lungo le direzioni delle coordinate x, y, z, queste espressioni

$$p = \frac{d\phi}{dx} \quad q = \frac{d\phi}{dy} \quad r = \frac{d\phi}{dz}$$

Poi si avrà

$$\lambda = V + \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2$$

quantità che dovrà essere nulla sulla superficie esterna libera del fluido (art. 2).

Quanto al valore di V che dipende dalle forze acceleratrici del fluido (art. 15), se si esprime con g la forza acceleratrice della gravità e si indicano con ξ, η, ζ gli angoli che gli assi coordinati formano con la verticale tracciata dal punto di intersezione di questi assi e diretta dall'alto in basso, si avrà $X = -g\cos\xi$, $Y = -g\cos\eta$, $Z = -g\cos\zeta$;

assegno il segno $-$ ai valori delle forze X, Y, Z, poiché esse sono supposte tendere a diminuire le coordinate x, y, z. Pertanto, poiché $dV = Xdx + Ydy + Zdz$, si avrà integrando

$$V = -gx\cos\xi - gy\cos\eta - gz\cos\zeta$$

24. Sia ora $z = \alpha$, o $z - \alpha = 0$, l'equazione di una parete del canale, essendo α una funzione data di x, y, senza z né t. Affinché le stesse particelle del fluido siano sempre contigue a queste pareti, basterà soddisfare l'equazione (I) dell'art. 12, supponendo $A = z - \alpha$. Si avrà

$$\frac{d\phi}{dz} - \frac{d\phi}{dx} \times \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\phi}{dy} \times \frac{d\alpha}{dy} = 0$$

equazione che dovrà essere soddisfatta dal valore $z = \alpha$. Ogni parete fornirà una simile equazione.

Analogamente, poiché $\lambda = 0$ è l'equazione della superficie esterna del fluido, affinché le stesse particelle siano costantemente in questa superficie, si avrà l'equazione

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\phi}{dx} \times \frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\phi}{dy} \times \frac{d\lambda}{dy} + \frac{d\phi}{dz} \times \frac{d\lambda}{dz} = 0$$

la quale dovrà valere e dare, di conseguenza, uno stesso valore di z dell'equazione $\lambda = 0$. Ma questa equazione non sarà più necessaria se la condizione cesserà di valere.

25. Ciò posto, bisogna cominciare a determinare la funzione ϕ. L'equazione da cui essa dipende, non essendo in generale integrabile con nessun metodo noto, supporremo che una delle dimensioni della massa fluida sia molto piccola rispetto alle altre, di modo che le coordinate z, per esempio, siano molto piccole rispetto alle x, y. Con questa ipotesi, si potrà rappresentare il valore di ϕ con una serie del tipo

$$\phi = \phi' + z\phi" + z^2\phi'" + z'"\phi^{iv} + ecc$$

dove $\phi', \phi", \phi'"$, ecc saranno funzioni di x, y, t senza z.

Con queste sostituzioni nell'equazione precedente, essa diverrà

$$\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2} + 2\phi'" + z\left(\frac{d^2\phi"}{dx^2} + \frac{d^2\phi"}{dy^2} + 2\cdot\phi^{iv}\right) + z^2\left(\frac{d^2\phi'"}{dx^2} + \frac{d^2\phi'"}{dy^2} + 3\cdot 4\phi^v\right) + ecc = 0$$

Uguagliando poi separatamente a zero i termini comprendenti diverse potenze di z, si avrà

$$\begin{aligned}
\phi'" &= -\frac{d^2\phi'}{2dx^2} - \frac{d^2\phi'}{2dy^2} \\
\phi^{iv} &= -\frac{d^2\phi"}{2\cdot 3dx^2} - \frac{d^2\phi"}{2\cdot 3dy^2} \\
\phi^v &= -\frac{d^2\phi'"}{3\cdot 4dx^2} - \frac{d^2\phi'"}{3\cdot 4dy^2} \\
&= \frac{d^4\phi'}{2\cdot 3\cdot 4dx^4} + \frac{d^4\phi'}{2\cdot 3\cdot 4dx^2dy^2} + \frac{d^4\phi'}{2\cdot 3\cdot 4dy^4}
\end{aligned}$$

ecc. Così l'espressione di ϕ diverrà

$$\phi = \phi' + z\phi" - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2}\right) - \frac{z^2}{2\cdot 3}\left(\frac{d^2\phi"}{dx^2} + \frac{d^2\phi"}{dy^2}\right) + \frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4\phi'}{dx^4} + \frac{2d^4\phi'}{dx^2dy^2} + \frac{d^4\phi'}{dy^4}\right) + ec$$

nella quale le funzioni $\phi', \phi"$ sono indeterminate e ciò mostra che questa espressione è integrale totale dell'equazione proposta.

Avendo trovato l'espressione di ϕ, si avranno, mediante la differenziazione, quelle di p, q, r come segue.

$$\begin{aligned}
p = \frac{d\phi}{dx} &= \frac{d\phi'}{dx} + z\frac{d\phi"}{dx} - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^3\phi'}{dx^3} + \frac{d^3\phi'}{dxdy^2}\right) - \frac{z^2}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3\phi"}{dx^3} + \frac{d^3\phi"}{dxdy^2}\right) + ecc \\
q = \frac{d\phi}{dy} &= \frac{d\phi'}{dy} + z\frac{d\phi"}{dy} - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^3\phi'}{dx^2dy} + \frac{d^3\phi'}{dy^2}\right) - \frac{z^2}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3\phi"}{dx^2dy} + \frac{d^3\phi"}{dy^3}\right) + ecc \\
r = \frac{d\phi}{dz} &= \phi" - z\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2}\right) - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2}\right) + \frac{z^2}{2\cdot 3}\left(\frac{d^4\phi'}{dx^4} + \frac{2d^4\phi'}{dx^2dy^2} + \frac{d^4\phi'}{dy^4}\right) + ecc
\end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nell'espressione di λ dell'art. 23, essa assumerà questa forma

$$\lambda = \lambda' + z\lambda" + z^2\lambda'" + z^3\lambda^{iv} + ecc$$

nella quale

$$
\begin{aligned}
\lambda' &= -g\left(x\cos\xi + y\cos\eta\right) + \frac{d\phi'}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\phi" \\
\lambda" &= -g\cos\zeta + \frac{d\phi"}{dt} + \frac{d\phi'}{dx}\times\frac{d\phi"}{dy} + \frac{d\phi'}{dy}\times\frac{d\phi"}{dy} - \phi"\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2}\right) \\
\lambda'" &= -\left(\frac{d^3\phi'}{dtdx^2} + \frac{d^3\phi'}{dtdy^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi"}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d\phi'}{dx}\times\left(\frac{d^3\phi'}{dx^3} + \frac{d^3\phi'}{dxdy^2}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi"}{dy}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d\phi'}{dy}\times\left(\frac{d^4\phi'}{dx^2dy^2} + \frac{d^3\phi"}{dy^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2}\right) - \frac{1}{2}\phi"\left(\frac{d^2\phi"}{dx^2} + \frac{d^2\phi"}{dy^2}\right)
\end{aligned}
$$

+ecc e così di seguito.

26. Se $z = \alpha$ è l'equazione delle pareti, essendo α una funzione molto piccola di x, y senza z, l'equazione di condizione affinché le stesse particelle siano sempre contigue a queste pareti (art. 24), diverrà con le sostituzioni precedenti

$$
\begin{aligned}
0 &= \phi" - \frac{d\phi'}{dx}\times\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\phi'}{dy}\times\frac{d\alpha}{dy} - z\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2} + \frac{d^2\phi"}{dx}\times\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d^2\phi"}{dy}\times\frac{d\alpha}{dy}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}z^2\left(\frac{d^2\phi"}{dx^2} + \frac{d^2\phi"}{dy^2} - \left(\frac{d^3\phi'}{dx^3} + \frac{d^3\phi'}{dxdy^2}\right)\frac{d\alpha}{dx} - \left(\frac{d^3\phi'}{dx^2dy} + \frac{d^3\phi'}{dy^3}\right)\frac{d\alpha}{dy}\right) + ecc
\end{aligned}
$$

la quale, dovendo valere quando $z = \alpha$, si ridurrà alla seguente forma più semplice

$$
\phi" - \frac{d.\alpha\frac{d\phi'}{dx}}{dx} - \frac{d.\alpha\frac{d\phi'}{dy}}{dy} - \frac{d.\alpha^2\frac{d\phi"}{2dx}}{2dx} - \frac{d.\alpha^2\frac{d\phi"}{2dy}}{2dy} + \frac{d.\alpha^3\left(\frac{d^3\phi'}{dx^3} + \frac{d^3\phi'}{dxdy^2}\right)}{2\cdot 3dx} + \frac{d.\alpha^3\left(\frac{d^3\phi'}{dx^2dy} + \frac{d^3\phi'}{dy^3}\right)}{2\cdot 3dy} + ecc = 0
$$

e sarà sufficiente che questa equazione sia vera in tutta l'estensione delle pareti date.

27. Infine, l'equazione della superficie esterna del fluido, essendo $\lambda = 0$, avrà la forma

$$
\lambda' + z\lambda" + z^2\lambda'" + z^3\lambda^{iv} + ecc = 0
$$

e l'equazione di condizione affinché le stesse particelle rimangano alla superficie (art. 24), sarà

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d\phi'}{dx}\times\frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\phi'}{dy}\times\frac{d\lambda'}{dy} + \phi"\lambda" + z\left(\frac{d\lambda"}{dt} + \frac{d\phi"}{dx}\times\frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\phi'}{dx}\times\frac{d\lambda"}{dx} + \frac{d\phi"}{dy}\times\frac{d\lambda'}{dy}\right. \\
&\left. + \frac{d\phi'}{dy}\times\frac{d\lambda"}{dy} + 2\phi"\lambda" - \left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2}\right)\lambda"\right) + z^2\left(\frac{d\lambda'"}{dt} + \frac{d\phi"}{dx}\times\frac{d\lambda"}{dx} + \frac{d\phi'}{dx}\times\frac{d\lambda'"}{dx} + \frac{d\phi"}{dy}\times\frac{d\lambda"}{dy}\right. \\
&+ \frac{d\phi'}{dy}\times\frac{d\lambda'"}{dy} - \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\phi'}{dx^3} + \frac{d^3\phi'}{dxdy^2}\right)\times\frac{d\lambda'}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\phi'}{dx^2dy} + \frac{d^3\phi'}{dy^3}\right)\times\frac{d\lambda'}{dy} - 2\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2}\right)\lambda'" \\
&\left. + 3\phi"\lambda^{iv} - \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\phi'}{dx^2dy} + \frac{d^3\phi'}{dy^3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\phi"}{dx^2} + \frac{d^2\phi"}{dy^2}\right)\lambda"\right) + ecc \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

Eliminando z in queste due equazioni, se ne ricaverà una che dovrà valere da sola per tutti i punti della superficie esterna.

Applicazione di queste formule al moto di un fluido che fluisce in un contenitore stretto e quasi verticale.

28. Immaginiamo ora che il fluido scorra in uno stretto contenitore, all'incirca verticale e supponiamo per maggiore semplicità, che le ascisse x siano verticali e dirette dall'alto in basso, si avrà (art. 23), $\xi = 0°$, $\eta = 90°$, $\zeta = 90°$, quindi, $\cos\xi = 1$, $\cos\eta = 0$, $\cos\zeta = 0$.

Supponiamo inoltre, per semplificare, che il contenitore sia, per quanto possibile, piano, di modo che delle due ordinate y, z, le prime y siano nulle e le seconde z siano molto piccole.

Infine, siano $z = \alpha$ e $z = \beta$, le equazioni delle due pareti del contenitore, essendo α, β due funzioni note e molto piccole. Si avranno relativamente a queste pareti, le due equazioni (art. 26)

$$
\begin{aligned}
\phi" - \frac{d.\alpha\frac{d\phi'}{dx}}{dx} - \frac{d.\alpha^2\frac{d\phi"}{2dx}}{2dx} + ecc &= 0 \\
\phi" - \frac{d.\beta\frac{d\phi'}{dx}}{dx} - \frac{d.\beta^2\frac{d\phi"}{2dx}}{2dx} + ecc &= 0
\end{aligned}
$$

le quali serviranno a determinare le funzioni ϕ' e $\phi"$.

Consideriamo le quantità z, α, β, come molto piccole del primo ordine e trascureremo almeno in prima approssimazione, le quantità del secondo ordine e degli ordini successivi. Così le due equazioni precedenti si ridurranno a queste

$$\phi" - \frac{d.\alpha\frac{d\phi'}{dx}}{dx} = 0 \qquad \phi" - \frac{d.\beta\frac{d\phi'}{dx}}{dx} = 0$$

le quali, sottratte tra loro, danno $\frac{d.(\alpha-\beta)\frac{d\phi'}{dx}}{dx} = 0$, equazione il cui integrale è $\frac{(\alpha-\beta)\frac{d\phi'}{dx}}{dx} = \theta$, essendo θ una funzione arbitraria di t, la quale deve essere molto piccola del primo ordine.

È chiaro che $\alpha - \beta$ è la larghezza orizzontale del contenitore che rappresenteremo con γ. Si avrà così $\frac{d\phi'}{dx} = \frac{\theta}{x}$ e, integrando di nuovo rispetto a x, $\phi' = \theta\frac{dx}{\gamma} + \vartheta$, indicando con ϑ una nuova funzione arbitraria di t.

Se si sommano le stesse equazioni e si pone $\frac{\alpha+\beta}{2} = \mu$, si ricaverà $\phi" = \frac{d.\mu\frac{d\phi'}{dx}}{dx}$, o sostituendo il valore di $\frac{d\phi'}{dx}$, $\phi" = \theta\frac{d.\frac{\mu}{\gamma}}{dx}$. Da ciò si vede che, poiché γ, μ, θ sono quantità molto piccole del primo ordine, $\phi"$ sarà pure molto piccolo dello stesso ordine.

Trascurando, pertanto, sempre le quantità del secondo ordine, si avranno le formule dell'art. 25, la velocità verticale $p = \frac{d\phi'}{dx} = \frac{\theta}{x}$, la velocità orizzontale

$$\gamma = \phi" - z\frac{d^2\phi'}{dx^2} = \theta\left(\frac{d.\frac{\mu}{\gamma}}{dx} - z\frac{d.\frac{1}{\gamma}}{dx}\right) = \frac{\theta}{\gamma}\left(\frac{d\mu}{dx} + (z-\mu)\frac{d\gamma}{2dx}\right)$$

A causa di $\cos\xi = 0$, la quantità $\lambda"$ sarà pure molto piccola del primo ordine. Di conseguenza, il valore di λ si ridurrà a

$$\lambda' = -gx + \frac{d\theta}{dt}\int\frac{dx}{\gamma} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2\gamma^2}$$

Uguagliando questo valore a zero, si otterrà la forma della superficie del fluido; e siccome non contiene l'ordinata z, ma solo l'ascissa x e il tempo t, ne segue che la superficie del fluido dovrà essere in ogni istante piana e orizzontale.

Infine, l'equazione di condizione affinché le stesse particelle siano sempre sulla superficie, si ridurrà per lo stesso motivo a questa $\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d\phi'}{dx} \times \frac{d\lambda'}{dx}$ (art. 27), cioè $\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\theta}{\gamma} \times \frac{d\lambda'}{dx} = 0$, la quale non contiene z, ma solo x e t.

29. Per distinguere le quantità che si riferiscono alla superficie superiore del fluido da quelle alla superficie inferiore, indicheremo le prime con un tratto e le seconde con due. Così, x', y', ecc. saranno l'ascissa, la larghezza del contenitore, ecc, per la superficie superiore; $x", y"$, ecc, saranno l'ascissa, la larghezza del contenitore, ecc, per la superficie inferiore.

Pertanto, anche $\lambda', \lambda"$ indicheranno nel seguito i valori di λ per le due superfici, in modo che si avrà per la superficie superiore, l'equazione

$$\lambda' = -gx' + \frac{d\theta}{dt}\int\frac{dx'}{\gamma'} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2\gamma'^2} = 0$$

e per la superficie inferiore, l'equazione simile

$$\lambda" = -gx" + \frac{d\theta}{dt}\int\frac{dx"}{\gamma"} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2\gamma"^2} = 0$$

Infine, $\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\theta}{\gamma'} \times \frac{d\lambda'}{dx'} = 0$ sarà l'equazione di condizione, affinché le stesse particelle che si trovano sulla superficie superiore vi rimangano sempre; e $\frac{d\lambda"}{dt} + \frac{\theta}{\gamma"} \times \frac{d\lambda"}{dx"} = 0$, sarà l'equazione di condizione, affinché la superficie inferiore contenga sempre le stesse particelle del fluido.

Ciò posto, basta distinguere quattro casi nel modo in cui un fluido può scorrere in un contenitore e ognuno di essi richiede una soluzione particolare.

30. Il primo caso è quello in cui una quantità data di fluido scorre in un contenitore indefinito. In questo caso, è chiaro che entrambe le superfici devono sempre contenere le stesse particelle e che, per queste superfici, si avranno le equazioni $\lambda' = 0$, $\lambda" = 0$ e inoltre

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\theta}{\gamma'} \times \frac{d\lambda'}{dx'} &= 0\\ \frac{d\lambda"}{dt} + \frac{\theta}{\gamma"} \times \frac{d\lambda"}{dx"} &= 0\end{aligned}$$

quattro equazioni che serviranno a determinare le variabili $x', x", \theta, \vartheta$ in t.

Differenziando l'equazione $\lambda' = 0$ si ottiene $\frac{d\lambda'}{dx'}dx' + \frac{d\lambda'}{dt}dt = 0$; pertanto, $\frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{d\lambda'}{dx'} \times \frac{dx'}{dt}$; sostituendo questo valore nell'equazione $\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\theta}{\gamma'} \times \frac{d\lambda'}{dx'} = 0$ e dividendo per $\frac{d\lambda'}{dx'}$ si avrà $\frac{dx'}{dt} = \frac{1}{\gamma'}$.

Si troverà analogamente combinando l'equazione $\lambda" = 0$ con l'equazione $\frac{d\lambda"}{dt} = -\frac{d\lambda"}{dx"} \times \frac{dx"}{dt}$, questa $\frac{dx"}{dt} = \frac{\theta}{\gamma"}$.

Si avrà, quindi, $\theta dt = \gamma' dx' = \gamma" dx"$, equazioni separate e, di conseguenza, integrando, si avrà

$$\int\gamma" dx" - \int\gamma' dx' = m$$

essendo m una costante, la quale esprime evidentemente la quantità data del fluido che scorre in un contenitore. Questa equazione darà il valore di x" in x'.

Se si sostituisce nell'equazione $\lambda' = 0$, per dt il suo valore $\frac{\gamma' dx'}{\theta}$, essa diviene

$$-gx' + \frac{\theta d\theta}{\gamma' dx'} \int \frac{dx'}{\gamma'} + \frac{\theta d\vartheta}{\gamma' dx'} + \frac{\theta^2}{2\gamma'^2} = 0$$

che, moltiplicata per $-\gamma' dx'$ dà

$$g\gamma' x' dx' - \theta d\theta \int \frac{dx'}{\gamma'} - \int \theta d\vartheta = cost$$

Analogamente si troverà, sostituendo $\frac{\gamma\text{"} dx\text{"}}{\theta}$ al posto di dt nell'equazione $\lambda\text{"} = 0$ e moltiplicando per $-\gamma\text{"} dx\text{"}$, una nuova equazione integrabile, il cui integrale sarà

$$g \int \gamma\text{"} x\text{"} dx\text{"} - \frac{\theta^2}{2} \int \frac{dx\text{"}}{\gamma\text{"}} - \int \theta d\vartheta = cost$$

Sottraendo queste due equazioni tra loro, per eliminare il termine $\int \theta d\vartheta$, si avrà

$$g \left(\int \gamma\text{"} x\text{"} dx\text{"} - \int \gamma' x' dx' \right) - \frac{\theta^2}{2} \left(\int \frac{dx\text{"}}{\gamma\text{"}} - \int \frac{dx'}{\gamma'} \right) = L$$

nella quale le quantità $\int \gamma\text{"} x\text{"} dx\text{"} - \int \gamma' x' dx'$ e $\int \frac{dx\text{"}}{\gamma\text{"}} - \int \frac{dx'}{\gamma'}$ esprimono gli integrali di $\gamma x dx$ e di $\frac{dx}{\gamma}$ presi da $x = x'$ fino a $x = x$" e dove L è una costante.

Questa equazione darà, quindi, θ in x', poiché x" è già noto in x' dall'equazione trovata in precedenza. Avendo così θ in x', si troverà anche t in x', dall'equazione $dt = \frac{\gamma' dx'}{\theta}$, il cui integrale è $t = \int \frac{\gamma' dx'}{\theta} + H$, essendo H una costante arbitraria.

Per quanto riguarda le due costanti L, H, le si determinerà dalla condizione iniziale del fluido. Quando $t = 0$, il valore di x' sarà dato dalla posizione iniziale del fluido nel contenitore e, se si suppone che le velocità iniziali del fluido siano nulle, basterà avere $\theta = 0$, quando $t = 0$, affinché le espressioni di p, q, r (art. 28) divengano nulle. Ma se il fluido fosse stato messo in movimento con impulsi qualsiasi, allora i valori di λ', λ" saranno dati, quando $t = 0$, poiché la quantità λ riferita alla superficie del fluido esprime la pressione che il fluido esercita e che deve essere controbilanciata dalla pressione esterna (art. 2). Si ha (art. 29)

$$\lambda\text{"} - \lambda' = -g\left(x\text{"} - x'\right) + \frac{d\theta}{dt} \left(\int \frac{dx\text{"}}{\gamma\text{"}} - \int \frac{dx'}{\gamma'} \right) - \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{1}{\gamma\text{"}^2} - \frac{1}{\gamma'^2} \right)$$

ponendo quindi $t = 0$, si avrà un'equazione in grado di determinare il valore iniziale di θ.

In questo modo, il problema è risolto e il molto del fluido completamente determinato.

31. Il secondo caso si ha quando il contenitore è di lunghezza determinata e il fluido scorre dal suo fondo. In questo caso si avranno, come nel precedente, per la superficie superiore le due equazioni $\lambda' = 0$ e $\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{\theta}{\gamma'} \times \frac{d\lambda'}{dx'} = 0$; ma per la superficie inferiore si avrà semplicemente l'equazione $\lambda\text{"} = 0$, poiché per lo scorrimento del fluido, vi devono essere in ogni istante nuove particelle a questa superficie. Ma l'ascissa x" per questa stessa superficie, sarà data e costante; di modo che vi saranno solo tre incognite da determinare, cioè x', θ, ϑ.

Le prime due equazioni danno, come nel caso precedente, questa $dt = \frac{\gamma' dx'}{\theta}$ e $\int \frac{dx'}{\gamma'} - \theta d\theta - \frac{\theta^2 dx'}{2\gamma'} = 0$; l'equazione $\lambda\text{"} = 0$ darà

$$-gx\text{"} + \frac{d\theta}{dt} \int \frac{dx\text{"}}{\gamma\text{"}} + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2\gamma\text{"}^2} = 0$$

dalla quale si evidenzierà che x", γ" e $\int \frac{dx\text{"}}{\gamma\text{"}}$ sono costanti che indicheremo con f, h, n, Sostituendo a dt il suo valore $\frac{\gamma' dx'}{\theta}$, moltiplicando poi per $-\gamma' dx'$, si avrà l'equazione

$$-g \int \gamma' dx' - n\theta d\theta - \theta d\vartheta - \frac{\theta^2 dx'}{2h} = 0$$

Sottraendo da questa l'equazione precedente, per eliminare i termini $\theta d\vartheta$, si avrà

$$g\left(f - x'\right)\gamma' dx' - \left(n - \int \frac{dx\text{"}}{\gamma\text{"}}\right)\theta d\theta - \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{2\gamma}\right)\theta^2 dx' = 0$$

equazione che contiene solo le due variabili x', θ e dalla quale si potrà determinare una di queste variabili in funzione dell'altra.

Poi si avrà t espresso dalla stessa variabile, integrando l'equazione $dt = \frac{\gamma' dx'}{\theta}$. E si determineranno le costanti dalla condizione iniziale del fluido, come nel problema precedente.

32. Il terzo caso si presenta quando un fluido scorre in un contenitore indefinito, ma che è mantenuto sempre pieno alla stessa altezza da nuovo fluido che si versa continuamente. Questo caso è l'inverso del precedente; si avranno qui

per la superficie inferiore le due equazioni $\lambda" = 0$ e $\frac{d\lambda"}{dt} + \frac{\theta}{\gamma"} \times \frac{d\lambda"}{dx'} = 0$ e per la superficie superiore semplicemente l'equazione $\lambda' = 0$, a causa del cambiamento continuo delle particelle di questa superficie. Basterà, quindi, cambiare nelle equazioni dell'articolo precedente, le quantità x', γ' in $x", \gamma"$ e assumere per f, h, n i valori dati di $x', \gamma' \int \frac{dx'}{\gamma'}$.

Del resto, supponiamo che l'aggiunta di nuovo fluido si faccia in modo che ogni strato prenda la velocità di quello che lo segue immediatamente e che, in tal modo, l'aumento e la diminuzione di velocità di questo strato, nel primo istante, è la stessa come se il contenitore non fosse mantenuto pieno alla stessa altezza durante questo istante.

33. L'ultimo caso, infine, è quello dove il fluido esce da un contenitore determinato che è mantenuto sempre pieno alla stessa altezza. Qui le particelle delle superfici superiore e inferiore si rinnovano completamente; di conseguenza, si avranno semplicemente per queste due superfici, le equazioni $\lambda' = 0$, $\lambda" = 0$; ma nello stesso tempo le due ascisse $x', x"$ saranno date e costanti, di modo che si dovranno determinare solo le due incognite θ, ϑ in t.

Sia quindi $x' = f$, $\gamma' = h$, $\int \frac{dx'}{\gamma'} = n$, $x" = F$, $\gamma" = H$, $\int \frac{dx"}{\gamma"} = N$, le due equazioni $\lambda' = 0$, $\lambda" = 0$, diverranno

$$\begin{aligned} -gf + \frac{d\theta}{dt}n + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2h^2} &= 0 \\ -gF + \frac{d\theta}{dt}N + \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\theta^2}{2H^2} &= 0 \end{aligned}$$

ed eliminando $\frac{d\vartheta}{dt}$, si avrà

$$g\,(F-f) - (N-n)\,\frac{d\theta}{dt} - \left(\frac{1}{2H^2} - \frac{1}{2h^2}\right)\theta^2$$

da cui si ricava

$$dt = \frac{(N-n)\,d\theta}{g\,(F-f) - \left(\frac{1}{2H^2} - \frac{1}{2h^2}\right)\theta^2}$$

equazione a variabili separate e che è integrabile con archi di cerchio o logaritmi.

34. Le soluzioni precedenti sono conformi a quelle che i primi Autori ai quali si devono le teorie del moto dei fluidi, hanno trovato dall'ipotesi che i diversi strati del fluido conservano esattamente il loro parallelismo discendendo nel contenitore (Si veda l'Idrodinamica di Daniel Bernoulli, l'Idraulica di Jean Bernoulli e il Trattato dei Fluidi di M. d'Alembert). La nostra analisi mostra che questa ipotesi è esatta solo quando la larghezza del contenitore è infinitamente piccola; ma che può, in tutti i casi, essere introdotta per una prima approssimazione e che le soluzioni che ne derivano sono esatte alle quantità del secondo ordine, considerando le larghezze del contenitore come quantità del primo ordine.

Ma il grande vantaggio di questa analisi è che rende possibile avvicinarsi sempre più al moto reale dei fluidi in contenitori di forma qualsiasi; avendo trovato i primi valori delle incognite, trascurando le seconde dimensioni delle larghezze del contenitore e tenendo conto successivamente dei termini trascurati. Questo dettaglio non presenta difficoltà se non la lunghezza del calcolo e non vi entreremo.

2.8.3 Applicazione delle stesse formule al moto di un fluido contenuto in un canale poco profondo e quasi orizzontale e in particolare al moto delle onde.

35. Poiché si suppone l'altezza del fluido molto piccola, basterà prendere le ordinate z verticali e diretti dall'alto in basso, le ascisse x e le altre ordinate y diverranno orizzontali e si avrà (art. 23), $\cos\xi = 0$, $\cos\eta = 0$, $\cos\zeta = 1$. Prendendo gli assi delle x, y nel piano orizzontale, formato dalla superficie superiore del fluido in condizioni di equilibrio, sia $z = \alpha$, l'equazione del fondo del canale, essendo α una funzione data di x, y.

Considereremo le quantità z, α come molto piccole del primo ordine e trascureremo le quantità del secondo ordine e degli ordini successivi, cioè, quelle che conterranno i quadrati e i prodotti di z e α.

L'equazione di condizione relativa al fondo del canale darà (art. 26),

$$\phi" = \frac{d.\phi\frac{d\phi'}{dx}}{dx} + \frac{d.\phi\frac{d\phi'}{dy}}{dy}$$

dalla quale si vede che $\phi"$ è una quantità del primo ordine.

Il valore della quantità λ si ridurrà a $\lambda' + \lambda"z$ (art. 25); basterà trascurare nell'espressione di λ' le quantità del secondo ordine e in quella di $\lambda"$ le quantità del primo. Così, poiché $\cos\xi = 0$, $\cos\eta = 0$, $\cos\zeta = 1$, si avrà dalle formule dello stesso articolo

$$\lambda' = \frac{d\phi'}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dy}\right)^2 \qquad \lambda" = -g$$

Si avrà quindi (art. 27), per la superficie superiore del fluido, l'equazione $\lambda' - gz = 0$, e poi l'equazione di condizione

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d\phi'}{dx} \times \frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\phi'}{dy} \times \frac{d\lambda'}{dy} - g\phi" + gz\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2}\right) = 0$$

L'equazione $\lambda' - gz = 0$ dà immediatamente $z = \frac{\lambda'}{g}$ per la forma della superficie superiore del fluido in ogni istante e siccome l'equazione di condizione deve valere anche rispetto alla stessa superficie, basterà che sia vera, sostituendo a z questo stesso valore $\frac{\lambda'}{g}$. Questa equazione diverrà assumerà la forma

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d.\lambda' \frac{d\phi'}{dx}}{dx} + \frac{d.\lambda' \frac{d\phi'}{dy}}{dy} - g\phi" = 0$$

e sostituendo ancora per $\phi"$ il suo valore trovato prima, si ridurrà a

$$\frac{d\lambda'}{dt} + \frac{d.\left(\lambda' - g\alpha\right) \frac{d\phi'}{dx}}{dx} + \frac{d.\left(\lambda' - g\alpha\right) \frac{d\phi'}{dy}}{dy} = 0$$

nella quale basterà mettere al posto di λ' il suo valore $\frac{d\phi'}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dy}\right)^2$ e si avrà un'equazione alle differenze parziali del secondo ordine, che servirà a determinare ϕ' in funzione di x, y, t.

Si potrà, quindi, conoscere la forma della superficie superiore del fluido dall'equazione

$$z = \frac{d\phi'}{gdt} + \frac{1}{g}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{g}\left(\frac{d\phi'}{dy}\right)^2$$

e se si volessero conoscere anche le velocità orizzontali p, q di ogni particella del fluido, le si otterrebbe dalle formule $p = \frac{d\phi'}{dx}$, $q = \frac{d\phi'}{dy}$ (art. 25).

36. Il calcolo integrale delle equazioni alle differenze parziali è ancora ben lontano dalla perfezione necessaria per l'integrazione di equazioni complicate come questa; rimane l'unica risorsa di semplificare tale equazioni con qualche limitazione.

Supporremo per questo che il fluido nel suo movimento, si innalzi e si abbassi al di sopra o al di sotto del livello, di infinitamente poco, in modo che le sue ordinate z, della superficie superiore, siano sempre molto piccole, e che oltre queste, le velocità orizzontali p, q siano pure infinitamente piccole. Basterà quindi che le quantità $\frac{d\phi'}{dt}, \frac{d\phi'}{dx}, \frac{d\phi'}{dy}$ siano infinitamente piccole e che anche la quantità ϕ' lo sia.

Trascurando nell'equazione proposta le quantità infinitamente piccole del secondo ordine e degli ordini superiori, essa si ridurrà a questa forma lineare

$$\frac{d^2\phi'}{dt^2} - g\frac{d.\alpha' \frac{d\phi'}{dx}}{dx} - g\frac{d.\alpha \frac{d\phi'}{dy}}{dy} = 0$$

e si avrà

$$z = \frac{d\phi'}{gdt} \quad p = \frac{d\phi'}{dx} \quad q = \frac{d\phi'}{dy}$$

Questa equazione contiene le teoria generale delle piccole agitazioni di un fluido profondo e, di conseguenza, la vera teoria delle onde formate da elevazioni e abbassamenti successivi e infinitamente piccoli di un'acqua stagnate e contenuta in un canale o bacino poco profondo. La teoria delle onde che Newton ha dato nella proposizione quarantasei del secondo Libro, essendo basata sull'ipotesi precaria e poco naturale che le oscillazioni verticali delle onde sono analoghe a quelle dell'acqua nei tubi ricurvi, deve essere considerata come assolutamente insufficiente a spiegare questo problema.

37. Se si suppone che il canale o bacino abbia un fondo orizzontale, allora la quantità α sarà costante e uguale alla profondità dell'acqua e l'equazione per il moto delle onde diverrà

$$\frac{d^2\phi'}{dt^2} = g\alpha\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2} + \frac{d^2\phi'}{dy^2}\right)$$

Questa equazione è del tutto simile a quelle che determinano le piccole agitazioni nell'aria, nella formazione del suono, considerando solo il moto delle particelle parallelamente all'orizzonte, come si vedrà nell'art. 9 della sezione seguente. Le elevazioni z, al di sopra del livello dell'acqua, corrispondono alle condensazioni dell'aria e la profondità α dell'acqua nel canale corrisponde all'altezza dell'atmosfera supposta omogenea; ciò stabilisce una perfetta analogia tra le onde formate alla superficie di un'acqua tranquilla dalle elevazioni e dai successivi abbassamenti dell'acqua e le onde formate nell'aria, dalle condensazioni e rarefazioni successive dell'aria, analogia che numerosi Autori avevano già supposto, ma che nessuno finora aveva ancora rigorosamente dimostrato.

Così come la velocità di propagazione del suono si trova uguale a quella che un corpo grave acquisterebbe cadendo dalla metà dell'altezza dell'atmosfera, supposta omogenea, la velocità di propagazione delle onde sarà la stessa di quella che un corpo grave acquisterebbe discendendo da un'altezza uguale alla metà della profondità dell'acqua nel canale. Di conseguenza, se questa profondità è di un piede, la velocità delle onde sarà $5,495$ piedi al secondo; e se la profondità dell'acqua è più o meno grande, la velocità delle onde varierà in ragione raddoppiata delle profondità, purché esse non siano troppo considerevoli.

Del resto, quale possa essere la profondità dell'acqua e la forma del suo fondale, si potrà sempre impiegare la teoria precedente, se si suppone che nella formazione delle onde l'acqua non è messa in moto e mescolata, se non a una profondità molto piccola, ipotesi che è molto plausibile in se stessa, a causa della tenacità e aderenza reciproca delle particelle dell'acqua e che trovo, d'altronde, confermata dall'esperienza, anche riguardo a grandi onde del mare. In questo modo, quindi, la velocità delle onde determinerà la profondità α alla quale l'acqua è agitata nella loro formazione; se questa velocità è di n piedi al secondo, si avrà $\alpha = \frac{n^2}{30,196}$ piedi.

Si trovano, nel tomo X delle antiche Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi, esperienze sulla velocità delle onde, eseguite da M. de la Hire, e che hanno dato un piede e mezzo al secondo per questa velocità, o più esattamente $1,412$ piedi al secondo. Ponendo $n = 1,412$, si avrà la profondità α di $\frac{66}{1000}$ piedi, cioè $\frac{8}{10}$ di pollice o circa 10 linee.

2.9 Moto dei Fluidi comprimibili ed Elastici

1. Per applicare a questo tipo di fluidi, l'equazione generale dell'art. 2 della sezione precedente, si osserverà che il termine $S\lambda\delta L$ deve essere eliminato, poiché la condizione dell'incomprimibilità alla quale questo termine è dovuto, non esiste più nell'ipotesi presente; ma, d'altro canto, bisognerà tener conto dell'azione dell'elasticità che si oppone alla compressione e che tende a dilatare il liquido.

Sia, quindi, ε l'elasticità di una particella qualsiasi Dm del fluido; siccome il suo effetto consiste nell'aumentare il volume $DxDyDz$ di questa particella e, di conseguenza, nel diminuire la quantità $-DxDyDz$; ne risulterà per questa particella il momento $-\varepsilon\delta_0 (DxDyDz)$ da aggiungere al primo membro della stessa equazione. Di modo che si avrà per tutte le particelle, il termine integrale $-S\varepsilon\delta_0 (DxDyDz)$ da sostituire al posto del termine $S\lambda\delta L$. Ora, essendo $\delta L = \delta_0 (DxDyDz)$, è chiaro che l'equazione generale manterrà la stessa forma cambiando semplicemente λ in $-\varepsilon$. Si arriverà quindi con gli stessi procedimenti a tre equazioni finali, simili alle equazioni (A), cioè

$$\left.\begin{array}{rcl} \Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)+\frac{D\varepsilon}{Dx} & = & 0 \\ \Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)+\frac{D\varepsilon}{Dy} & = & 0 \\ \Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)+\frac{D\varepsilon}{Dz} & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (a)$$

Basterà che il valore di ε sia nullo alla superficie del fluido, se il fluido è libero; ma se è contenuto da pareti, il valore di ε sarà uguale alla resistenza che le pareti esercitano per contenere il fluido, cosa evidente, poiché ε esprime la forza elastica delle sue particelle.

2. Nei fluidi comprimibili, la densità Δ è sempre data da una funzione nota di ε, x, y, z, t, dipendente dalla legge dell'elasticità del fluido e di quella del calore che è supposto regnare in ogni istante in tutti i punti dello spazio. Vi sono quindi quattro incognite, ε, x, y, z da determinare in t, e, di conseguenza, serve ancora una quarta equazione per la soluzione completa del problema. Per i fluidi incomprimibili, la condizione dell'invariabilità del volume ha dato l'equazione (B) dell'art. 3 e quella dell'invariabilità della densità da un istante all'altro ha dato l'equazione (H) dell'art. 11. Nei fluidi comprimibili alcune di queste due condizioni non valgono in particolare, poiché il volume e la densità variano; ma la massa che è il loro prodotto deve rimanere invariata. Così si avrà $d.Dm = 0$, o $d.(\Delta DxDyDz) = 0$. Pertanto, differenziando logaritmicamente $\frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{d.(DxDyDz)}{DxDyDz} = 0$ e sostituendo il valore di $d.(DxDyDz)$, (questo valore è lo stesso di quello di $\delta.(DxDyDz)$ dell'art. 2 della sez. precedente, cambiando d con δ), si avrà l'equazione

$$\frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{Ddx}{Dx} + \frac{Ddy}{Dy} + \frac{Ddz}{Dz} = 0 \qquad (b)$$

la quale corrisponde all'equazione (B) dell'art. 3 della sezione citata, essendo quella relativa all'invariabilità del volume e questa all'invariabilità della massa.

3. Se si considerano le coordinate x, y, z, come funzioni delle coordinate iniziali a, b, c e del tempo t trascorso dall'inizio del moto, le equazioni (a) diverranno, con procedimenti simili a quelli dell'art. 5 della sezione precedente, di questa forma

$$\left.\begin{array}{rcl} \theta\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)+\alpha\frac{d\varepsilon}{da}+\beta\frac{d\varepsilon}{db}+\gamma\frac{d\varepsilon}{dc} & = & 0 \\ \theta\Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)+\alpha'\frac{d\varepsilon}{da}+\beta'\frac{d\varepsilon}{db}+\gamma'\frac{d\varepsilon}{dc} & = & 0 \\ \theta\Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)+\alpha"\frac{d\varepsilon}{da}+\beta"\frac{d\varepsilon}{db}+\gamma"\frac{d\varepsilon}{dc} & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (c)$$

o da questa più semplice

$$\left.\begin{array}{rcl} \Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{da}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{da}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{da}\right)+\frac{d\varepsilon}{da} & = & 0 \\ \Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{db}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{db}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{db}\right)+\frac{d\varepsilon}{db} & = & 0 \\ \Delta\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\frac{dx}{dc}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\frac{dy}{dc}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\frac{dz}{dc}\right)+\frac{d\varepsilon}{dc} & = & 0 \end{array}\right\} \ (d)$$

essendo queste trasformate analoghe alle trasformate (C) e (D) della questione citata.

Riguardo all'equazione (d) applicando le trasformazioni dell'art. 3 della sezione precedente, essa si ridurrà a questa forma $\frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{d\theta}{\theta} = 0$, essendo i differenziali Δ e $d\theta$ relativi unicamente alla variabile t. Di modo che, integrando, si avrà $\Delta\theta = f(a, b, c)$. Quando $\varepsilon = 0$, abbiamo visto nell'art. citato, che θ diviene $= 1$; pertanto, se si suppone che H sia allora il valore di Δ, si avrà $H = f(a, b, c)$ e l'equazione diverrà $\Delta\theta = H$, oppure $\theta = \frac{H}{\Delta}$; cioè, sostituendo per θ il suo valore,

$$\frac{dx}{da} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{dc} + \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{da} - \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{da} + \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{db} - \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{db} = \frac{H}{\Delta}$$

trasformata analoga alla trasformata (E) dell'art. citato.

Infine, basterà applicare anche a queste equazioni quanto detto nell'art. 8 della stessa sezione, relativamente alla superficie del fluido.

4. Ma se si vuole, cosa molto più semplice, ottenere delle equazioni tra le velocità p, q, r delle particelle lungo le direzioni delle coordinate x, y, z, considerando queste velocità così come le quantità Δ, ε come funzioni di x, y, z, t, si utilizzeranno le trasformazioni dell'art. 10 della sezione precedente e le equazioni (a) daranno immediatamente queste trasformate analoghe alle (F) di quest'ultimo articolo

$$\left.\begin{array}{rcl} \Delta\left(\frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz} + X\right) + \frac{d\varepsilon}{dx} & = & 0 \\ \Delta\left(\frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz} + Y\right) + \frac{d\varepsilon}{dy} & = & 0 \\ \Delta\left(\frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dy} + r\frac{dr}{dz} + Z\right) + \frac{d\varepsilon}{dz} & = & 0 \end{array}\right\} \quad (f)$$

Nell'equazione (b) oltre alla sostituzione di pdt, qdt, rdt al posto di dx, dy, dz e il cambiamento di D in d, bisognerà ancora mettere per $d\Delta$ il suo valore completo

$$\left(\frac{d\Delta}{\Delta dx}p + \frac{d\Delta}{\Delta dy}q + \frac{d\Delta}{\Delta dz}r + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz}\right) dt$$

e si avrà, dividendo per dt, questa trasformata

$$\frac{d\Delta}{\Delta dt} + \frac{d\Delta}{\Delta dx}p + \frac{d\Delta}{\Delta dy}q + \frac{d\Delta}{\Delta dz}r + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0$$

la quale, moltiplicata per Δ, si riduce alla forma più semplice

$$\frac{d\Delta}{dt} + \frac{d.(\Delta p)}{dx} + \frac{d.(\Delta q)}{dy} + \frac{d.(\Delta r)}{dz} = 0 \quad (g)$$

La condizione relativa al moto delle particelle alla superficie sarà rappresentata pure dall'equazione (I) dell'art. 12 della sezione precedente, cioè

$$\frac{dA}{dt} + p\frac{dA}{dx} + q\frac{dA}{dy} + r\frac{dA}{dz} = 0 \qquad (i)$$

supponendo che $A = 0$ sia l'equazione della superficie.

5. È facile soddisfare l'equazione (g), supponendo $\Delta p = \frac{d\alpha}{dt}$, $\Delta q = \frac{d\beta}{dt}$, $\Delta r = \frac{d\gamma}{dt}$, essendo α, β, γ funzioni incognite di x, y, z, t. Con queste sostituzioni, l'equazione diverrà

$$\frac{d\Delta}{dt} + \frac{d^2\alpha}{dtdx} + \frac{d^2\beta}{dtdy} + \frac{d^2\gamma}{dtdz} = 0$$

la quale è integrabile rispetto a t e avrà come integrale

$$\Delta = F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz}$$

essendo F una funzione arbitraria di x, y, z senza t, dipendente dalla legge della densità iniziale del fluido. Si avrà così

$$\begin{array}{rcl} p & = & \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz}} \\ q & = & \dfrac{\frac{d\beta}{dt}}{F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz}} \\ r & = & \dfrac{\frac{d\gamma}{dt}}{F - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\gamma}{dz}} \end{array}$$

Sostituendo, pertanto, questi valori nell'equazione (f) e mettendo inoltre per ε il suo valore in funzione di Δ, x, y, z, t (art. 2), si avranno tre equazioni alle differenze parziali tra le incognite α, β, γ e le quattro variabili x, y, z, t; e la soluzione del problema dipenderà solo dall'integrazione di queste equazioni; ma questa integrazione supera le possibilità dell'analisi nota.

6. Trascurando il calore e altre circostanze che possono far variare l'elasticità indipendentemente dalla densità, il valore dell'elasticità ε sarà espresso da una funzione della densità Δ, di modo che $\frac{d\varepsilon}{\Delta}$ sarà un differenziale a una sola variabile e, di conseguenza, integrabile, e supporremo l'integrale espresso da E.

Sia, inoltre, la quantità $Xdx + Ydy + Zdz$ un differenziale totale, il cui integrale sia V, come nell'art. 15 della sezione precedente.

Le equazioni (f) dell'art. 4, moltiplicate rispettivamente per dx, dy, dz e sommate, daranno dopo la divisione per Δ una equazione della forma

$$-dE - dV = \left(\frac{dp}{dt} + p\frac{dp}{dx} + q\frac{dp}{dy} + r\frac{dp}{dz}\right) dx + \left(\frac{dq}{dt} + p\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} + r\frac{dq}{dz}\right) dy + \left(\frac{dr}{dt} + p\frac{dr}{dx} + q\frac{dr}{dy} + r\frac{dr}{dz}\right) dz \quad (l)$$

il cui primo membro, essendo integrabile richiede che lo sia anche il secondo. Si avrà di nuovo il caso dell'equazione (L) dell'art. 15 della sezione precedente e si giungerà, di conseguenza, a risultati simili.

7. In generale, quindi, se la quantità $pdx + qdy + rdz$ è in un istante qualsiasi un differenziale totale, sempre vero all'inizio del moto, quando il fluido è in condizione di riposo o è messo in movimento da un impulso applicato alla superficie; allora, la stessa quantità dovrà essere sempre un differenziale totale (artt. 17, 18, sez. preced.).

In questa ipotesi sarà come nell'art. 20 della sezione precedente $pdx + qdy + rdz = d\phi$ e ciò dà

$$p = \frac{d\phi}{dx} \quad q = \tfrac{d\phi}{dy} \quad r = \frac{d\phi}{dz}$$

e integrando l'equazione (l) dopo la sostituzione darà

$$E = -V - \frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dy}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 \qquad (m)$$

valore che soddisferà nello stesso tempo le tre equazioni (f) dell'art. 4.

Essendo $E = \int \frac{d\varepsilon}{\Delta}$, essa sarà una funzione di Δ, poiché ε è una funzione nota di Δ; pertanto, Δ sarà una funzione di E. Sostituendo, quindi, il valore di Δ ricavato dall'equazione precedente, così come quelli di p, q, r nell'equazione (g) dell'art. 4, si avrà un'equazione in differenze parziali di ϕ, la quale contenendo solo questa incognita sarà in grado di determinarla. Tutta la complessità sarà ridotta a quest'unica integrazione.

8. Nei fluidi elastici noti, l'elasticità è sempre proporzionale alla densità di modo che per essi si ha $\varepsilon = i\Delta$, essendo i un coefficiente costante che determinerà conoscendo il valore dell'elasticità per una data densità.

Per l'aria l'elasticità è uguale al peso della colonna di mercurio nel barometro; se si indica con H l'altezza del barometro per una certa densità dell'aria che si assumerà come unitaria, n la densità del mercurio, cioè il rapporto numerico tra la densità del mercurio e quella dell'aria, rapporto che è lo stesso di quello delle gravità specifiche, e g la forza acceleratrice della gravità, si avrà, quando $\Delta = 1$, $\varepsilon = gnH$; di conseguenza $i = gnH$, dove si evidenzierà che nH è l'altezza dell'atmosfera supposta omogenea. Indicando questa altezza con h, si avrà più semplicemente $i = gh$ e da ciò $\varepsilon = gh\Delta$.

Poiché $E = \int \frac{d\varepsilon}{\Delta}$, si avrà $E = ghl\Delta$. L'equazione (g) dell'art. 4 si può scrivere nella forma

$$\frac{d.l\Delta}{dt} + \frac{d.l\Delta}{dx}p + \frac{d.l\Delta}{dy}q + \frac{d.l\Delta}{dz}r + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0$$

Sostituendo, quindi, $\frac{E}{gh}, \frac{d\phi}{dx}, \frac{d\phi}{dy}, \frac{d\phi}{dz}$ al posto di $l\Delta, p, q, r$ e moltiplicando per gh, essa diverrà

$$gh\left(\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2}\right) + \frac{dE}{dt} + \frac{dE}{dx} \times \frac{d\phi}{dx} + \frac{dE}{dy} \times \frac{d\phi}{dy} + \frac{dE}{dz} \times \frac{d\phi}{dz} = 0$$

Basterà, quindi, sostituire per E il suo valore trovato sopra e questa sostituzione darà l'equazione finale in ϕ.

$$\begin{gathered} gh\left(\tfrac{d^2\phi}{dx^2} + \tfrac{d^2\phi}{dy^2} + \tfrac{d^2\phi}{dz^2}\right) - \tfrac{d^2\phi}{dt^2} - \tfrac{dV}{dx} \times \tfrac{d\phi}{dx} - \tfrac{dV}{dy} \times \tfrac{d\phi}{dy} - \tfrac{dV}{dz} \times \tfrac{d\phi}{dz} \\ -2\tfrac{d\phi}{dx} \times \tfrac{d^2\phi}{dxdt} - 2\tfrac{d\phi}{dy} \times \tfrac{d^2\phi}{dydt} - 2\tfrac{d\phi}{dz} \times \tfrac{d^2\phi}{dzdt} - \left(\tfrac{d\phi}{dx}\right)^2 \tfrac{d^2\phi}{dx^2} - \left(\tfrac{d\phi}{dy}\right)^2 \tfrac{d^2\phi}{dy^2} - \left(\tfrac{d\phi}{dz}\right)^2 \tfrac{d^2\phi}{dz^2} \\ -2\tfrac{d\phi}{dx} \times \tfrac{d\phi}{dy} \times \tfrac{d^2\phi}{dxdy} - 2\tfrac{d\phi}{dx} \times \tfrac{d\phi}{dz} \times \tfrac{d^2\phi}{dxdz} - 2\tfrac{d\phi}{dy} \times \tfrac{d\phi}{dz} \times \tfrac{d^2\phi}{dydz} = 0 \qquad (n) \end{gathered}$$

la quale contiene solo la teoria del movimento dei fluidi elastici nell'ipotesi presentata.

9. quando il moto del fluido è molto piccolo e si tiene conto solo delle quantità molto piccole del primo ordine, abbiamo visto nell'art. 21 della sez. precedente che la quantità $pdx + qdy + rdz$ è necessariamente un differenziale totale. In questo caso, quindi, le formule precedenti varranno per qualsiasi tipo di moto del fluido, purché sia sempre molto piccolo e, di conseguenza, la funzione ϕ sia pure molto piccola.

Nel teoria del suono si suppone che il moto delle particelle dell'aria sia molto piccolo; così, considerando nell'equazione (n) la quantità ϕ molto piccola e trascurando i termini in cui essa va oltre il primo grado, si avrà per questa teoria, l'equazione generale

$$gh\left(\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2}\right) - \frac{d^2\phi}{dt^2} - \frac{dV}{dx} \times \frac{d\phi}{dx} - \frac{dV}{dy} \times \frac{d\phi}{dy} - \frac{dV}{dz} \times \frac{d\phi}{dz} = 0$$

Trascurando anche i secondi ordini di ϕ nel valore di E dell'art. 7, si avrà semplicemente, $E = -V - \frac{d\phi}{dt} = ghl.\Delta$ (art. 8).

Si può supporre che la funzione ϕ sia nulla in condizione di riposo o di equilibrio. Si avrà, quindi, anche in questa condizione $\frac{d\phi}{dt} = 0$ e, di conseguenza, $ghl.\Delta = -V$ e $\Delta = e^{-\frac{v}{gh}}$.

Quando l'aria è in vibrazione, sia la sua densità naturale aumentata in ragione di $1 + s$ a 1, essendo s una quantità molto piccola, si avrà, quindi, in generale

$$\Delta = e^{-\frac{v}{gh}}(1 + s)$$

e, trascurando i quadrati di s, si avrà $l\Delta = -\frac{V}{gh} - s$; pertanto, $s = \frac{d\phi}{ghdt}$.

Il valore di V che dipende dalle forze acceleratrici, supponendo il fluido pesante e prendendo per maggiore semplicità le ordinate z verticali e dirette dall'alto in basso, si avrà per la formula dell'art. 23 (sez. preced.) $V = -gz$, essendo g la forza acceleratrice della gravità. L'equazione della teoria del suono sarà

$$gh\left(\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2}\right) + g\frac{d\phi}{dz} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Avendo determinato ϕ con questa equazione, si avranno le velocità p, q, r dell'aria, cosicché la sua condensazione s dalle formule $p = \frac{d\phi}{dx}$, $q = \frac{d\phi}{dy}$, $r = \frac{d\phi}{dz}$, $s = \frac{d\phi}{ghdt}$.

10. Se si vuole tenere conto del moto orizzontale dell'aria, si supporrà che la funzione ϕ non contenga z, ma solo x, y, t. Allora l'equazione in ϕ diverrà

$$gh\left(\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2}\right) = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Ma con questa semplificazione risulta ancora troppo complicata per poterla integrare in modo rigoroso.

Del resto, questa equazione è del tutto simile a quella del moto delle onde in un canale orizzontale e poco profondo. Si veda la sezione precedente, art. 37.

Finora si è potuto risolvere solo il caso in cui si considera nella massa dell'aria una sola dimensione, cioè, quello di una linea sonora, le cui particelle fanno solo escursioni longitudinali.

In questo caso, prendendo questa stessa linea per asse x, la funzione ϕ non conterrà y e l'equazione si ridurrà a

$$gh\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

che è simile a quella della corde vibranti e ammette come integrale totale

$$\phi = F\left(x + t\sqrt{gh}\right) + f\left(x - t\sqrt{gh}\right)$$

indicando con i simboli F, f due funzioni arbitrarie.

Questa formula contiene due teorie importanti, quella del suono dei flauti o tubi d'organo e quella della propagazione del suono in aria libera. Si tratta solo di determinare in modo opportuno le due funzioni arbitrarie ed ecco i principi guida.

11. Per i flauti, si considera solo la linea sonora che è contenuta; si suppone che la sua condizione iniziale sia data, dipendendo dalle vibrazioni impresse alle particelle, e si chiede la legge delle oscillazioni.

Facciamo cominciare le ascisse x ad un'estremità di questa linea, e sia la sua lunghezza, cioè quella del flauto uguale ad a. Le condensazioni s e le velocità longitudinali p saranno quindi date, quando $t = 0$, da $x = 0$ fino a $x = a$; le chiameremo S e P.

Poiché $s = \frac{d\phi}{ghdt}$ e $p = \frac{d\phi}{dx}$, se si differenzia l'espressione generale di ϕ dell'art. precedente, e si indicano con F' e f' i differenziali delle funzioni F, f, di modo che $F'x = \frac{dFx}{dx}$, $fx = \frac{dfx}{dx}$, si avrà

$$\begin{aligned} p &= F'\left(x + t\sqrt{gh}\right) + f'\left(x - t\sqrt{gh}\right) \\ s\sqrt{gh} &= F'\left(x + t\sqrt{gh}\right) - f'\left(x - t\sqrt{gh}\right) \end{aligned}$$

Ponendo $t = 0$ e cambiando p in P e s in S, si avrà

$$P = F'x + f'x \qquad S\sqrt{gh} = F'x - f'x$$

Siccome P, S sono date per tutte le ascisse x, da $x = 0$ fino a $x = a$, si avranno anche in questa estensione i valori di $F'x$ e di $f'x$; di conseguenza, si avranno i valori di p, s per un'ascissa e un tempo qualsiasi, fintanto che $x + t\sqrt{gh}$ saranno comprese nei limiti 0 e a.

Ma il tempo t accrescendo sempre le quantità $x + t\sqrt{gh}$ e $x - t\sqrt{gh}$, usciranno presto da questi limiti e la determinazione delle funzioni $F'\left(x + t\sqrt{gh}\right), f'\left(x - t\sqrt{gh}\right)$ dipenderà allora dalle condizioni che devono valere alle estremità della linea sonora a seconda che il flauto sarà aperto o chiuso.

12. Supponiamo dapprima il flauto aperto ai due lati, di modo che la linea sonora comunichi immediatamente con l'aria esterna; è chiaro che la sua elasticità in questo due punti, potendo essere controbilanciata solo dalla pressione

dell'atmosfera, la concentrazione s dovrà essere sempre nulla. Dovrà, in questo caso essere $s = 0$, quando $x = 0$ e quando $x = a$ per qualsiasi valore di t; ciò dà le due condizioni da soddisfare

$$F'\left(t\sqrt{gh}\right) - f'\left(-t\sqrt{gh}\right) = 0$$
$$F'\left(a + t\sqrt{gh}\right) - f'\left(a - t\sqrt{gh}\right) = 0$$

le quali dovranno valere sempre con t avente un valore positivo qualsiasi.

In generale, prendendo per z una quantità qualunque positiva, si avrà

$$\begin{aligned} F'(a+z) &= f'(a-z) \\ f'(-z) &= F'z \end{aligned}$$

Pertanto, 1° finché sarà $z < a$, si conosceranno i valori di $F'(a+z)$ e di $f'(-z)$, poiché essi si riducono a quelli di $f'(a-z)$ e di $F'z$ che sono dati.

Mettiamo in queste formule $a + z$ al posto di z, esse diverranno

$$F'(2a+z) = f'(-z) = F'z$$
$$f'(-a-z) = F'(a+z) = f'(a-z)$$

Pertanto, 2° finché sarà $z < a$ si conosceranno anche i valori di $F'(2a+z)$ e $f'(-a-z)$, poiché essi si riducono a quelli di $F'z$ e di $f'(a-z)$ che sono dati.

Mettiamo di nuovo nelle ultime formule $a + z$ per z e combiniamole con le prime, poiché z può essere qualunque, si avrà

$$F'(3a+z) = F(a+z) = f'(a-z)$$
$$f'(-2a-z) = f'(-z) = F'z$$

pertanto 3° finché sarà $z < a$, si conosceranno ancora i valori di $F'(3a+z)$ e di $f'(-2a-z)$, poiché essi si riducono ai valori dati di $F'z$ e di $f'(a-z)$.

Si troverà ancora, mettendo $a + z$ per z

$$F'(4a+z) = f'(-z) = F'z$$
$$f'(-3a-z) = F'(a+z) = f'(a-z)$$

Da cui si conosceranno 3° i valori di $F'(4a+z)$ e di $f'(-3a-z)$, finché sarà $z < a$.

E così di seguito.

Si avranno in questo modo i valori delle funzioni $F'\left(x + t\sqrt{gh}\right)$ e di $f'\left(x - t\sqrt{gh}\right)$, qualunque sia il tempo t trascorso dall'inizio del moto della linea sonora; così si conoscerà per ogni istante lo stato di questa linea, cioè, le velocità p e le condensazioni s di ogni particella.

Ed è chiaro dalle formule precedenti che i valori di queste funzioni rimarranno gli stessi aumentando la quantità $t\sqrt{gh}$, di $2a$, o di $4a, 6a$, ecc. La linea sonora ritornerà esattamente allo stesso stato, dopo ogni intervallo di tempo stabilito dall'equazione $t\sqrt{gh} = 2a$, e ciò dà $\frac{2a}{\sqrt{gh}}$ per questo intervallo.

La durata delle oscillazioni della linea sonora è indipendente dalle vibrazioni iniziali e dipende solamente dalla lunghezza a della stessa e dall'altezza h dell'atmosfera.

Supponendo la forza acceleratrice della gravità g uguale all'unità, bisogna prendere per unità degli spazi il doppio di quello che un corpo pesante percorre liberamente nel tempo unitario. (sez. 2, art. 2). Se si prende, pertanto, cosa permessa, h come unità degli spazi, l'unità dei tempi sarà quella che un corpo pesante impiega a discendere dall'altezza $\frac{h}{2}$ e il tempo di una oscillazione della linea sonora sarà espresso da $2a$. O, analogamente, il tempo di una oscillazione starà a quello della caduta di un corpo dall'altezza $\frac{h}{2}$ come 2 sta a h.

13. Se il flauto fosse chiusa alle sue estremità, allora le condensazioni s potrebbero essere qualunque, poiché l'elasticità delle particelle sarebbe sostenuta dalla resistenza delle barriere; ma per lo stesso motivo, le velocità p dovrebbero essere nulle e ciò ridarebbe le condizioni

$$F'\left(t\sqrt{gh}\right) + f'\left(-t\sqrt{gh}\right) = 0$$
$$F'\left(a + t\sqrt{gh}\right) + f'\left(a - t\sqrt{gh}\right) = 0$$

Queste formule richiamano quelle che abbiamo esaminato sopra, supponendo solo la funzione f' negativa. Si otterranno delle conclusioni simili e si avrà ancora la stessa espressione per la durata delle oscillazioni della fibra sonora.

Non sarebbe così se il flauto fosse aperto da un lato e chiuso dall'altro.

Bisognerebbe allora che s fosse sempre nullo nella parte aperta e che p lo fosse in quella chiusa.

Supponendo il flauto aperto o $x = 0$ e chiuso o $x = a$, si avranno le condizioni

$$F'\left(t\sqrt{gh}\right) - f'\left(-t\sqrt{gh}\right) = 0$$
$$F'\left(a + t\sqrt{gh}\right) - f'\left(a - t\sqrt{gh}\right) = 0$$

Da un'analisi simile a quella dell'art. 12, si ricaveranno le formule seguenti

$$\begin{array}{rl} F'(a+z)=-f'(a-z) & f'(-z)=F'z \\ F'(2a+z)=-F'z & f'(-a-z)=-f'(a-z) \\ F'(3a+z)=f'(a-z) & f'(-2a-z)=F'z \\ F'(4a+z)=F'z & f'(-3a-z)=f'(a-z) \end{array}$$

e così di seguito.

Finché è $z<a$, le funzioni $F'z$ e $f'(a-z)$ sono date dalla condizione iniziale della fibra sonora; si conosceranno, pertanto, attraverso di esse i valori delle altre funzioni

$$\begin{array}{rl} F'(a+z) & F'(2a+z) \\ f'(-z) & f'(-a-z)\ ecc \end{array}$$

e, di conseguenza, si avrà la condizione della fibra dopo un tempo qualsiasi t.

Ma si vede dalle formule precedenti che questa condizione non diverrà la stessa se non dopo un intervallo di tempo determinato dall'equazione $t\sqrt{gh}=4a$; da cui segue che la durata delle vibrazioni sarà una volta più lunga che nei flauti aperti o chiusi dai due lati; è quanto conferma l'esperienza per i giochi d'organo detti *calabroni*, e che essendo tappati alla loro estremità superiore, opposta alla bocca, danno un tono di un'ottava più bassa della condizione aperta.

Vedere sulla teoria dei flauti i primi due volumi di Turin, le Memorie di Parigi per il 1762 e i *Novi Commentarii* di Pietroburgo, Tomo XVI.

14. Consideriamo ora una linea sonora di una lunghezza indefinita, che sia inizialmente vibrante, se non per una estensione molto piccola, si avrà il caso delle agitazioni dell'aria prodotte dai corpi sonori.

Supponiamo, quindi, che le vibrazioni iniziali si estendano solo da $x=0$ fino a $x=a$, essendo a una quantità molto piccola. Le velocità p e le condensazioni iniziali P,S saranno date per tutte le ascisse x, tanto positive quanto negative; ma esse avranno valori reali solo da $x=0$ fino a $x=a$; oltre questi limiti esse saranno nulle. Sarà così anche per le funzioni $F'x, f'x$, poiché ponendo $t=0$, si ha $P=F'x+f'x$, $S\sqrt{gh}=F'x-f'x$ e, di conseguenza,

$$F'x=\frac{P+S\sqrt{gh}}{2} \qquad f'x=\frac{P-S\sqrt{gh}}{2}$$

Da ciò segue che, prendendo per z una quantità positiva, minore di a, le funzioni $F'\left(x+t\sqrt{gh}\right)+f'\left(x-t\sqrt{gh}\right)$ non avranno valori reali finché si avrà $x\pm t\sqrt{gh}=z$. Di conseguenza, dopo un tempo qualsiasi t, le velocità p e le condensazioni s saranno nulle per tutti i punti della linea sonora, eccetto per quelle che corrispondono alle ascisse $x=z\mp t\sqrt{gh}$.

Si spiega così come il suono si propaghi e come si formino successivamente da una parte all'altra del corpo sonoro e in tempi uguali, fibre sonore uguali in lunghezza alla fibra iniziale a.

La velocità di propagazione di queste fibre sarà espressa dal coefficiente $\sqrt{gh}$; essa sarà costante e indipendente da moto iniziale; questo è confermato dall'esperienza, poiché tutti i suoni forti o deboli appaiono propagarsi con una velocità sensibilmente uguale.

Quanto al valore assoluto di questa velocità, ponendo come nell'art. 12, $g=1$ e $h=1$, essa diverrà pure $=1$. L'unità delle velocità è qui quella che un corpo pesante deve acquisire cadendo dalla metà dello spazio h, assunto come unitario (sez. 2, art. 2). La velocità del suono sarà dovuta all'altezza $\frac{h}{2}$.

15. Supponendo, con la maggior parte dei Fisici, l'aria 850 volte più leggera dell'acqua, e l'acqua 14 volte più leggera del mercurio, si ha 1 a 11900 per il rapporto tra il peso specifico dell'aria e quello del mercurio. Prendendo l'altezza media del barometro di 28 pollici francesi, viene 333200 pollici, o $27766\,\frac{2}{3}$ piedi per l'altezza h di una colonna d'aria uniformemente densa e facente equilibrio alla colonna di mercurio nel barometro. La velocità del suono sarà dovuta ad un'altezza di $13883\,\frac{1}{3}$ piedi e sarà di conseguenza di 915 per secondo.

L'esperienza dà circa 1088 con una differenza di quasi un sesto; ma questa differenza può essere attribuita all'incertezza dei risultati forniti dall'esperienza. Su questi si veda soprattutto una Memoria del defunto M. Lambert, tra quelle dell'Accademia di Berlino del 1768.

16. Se la linea sonora fosse terminata da un lato da un ostacolo immobile, allora la particella d'aria contigua a questo ostacolo, non avrebbe alcun movimento; di conseguenza, se a è il valore dell'ascissa x che vi corrisponde, basterà che la velocità p sia nulla, quando $x=a$, per ogni t; e ciò restituirà la condizione

$$F'\left(a+t\sqrt{gh}\right)+f'\left(a-t\sqrt{gh}\right)=0$$

Si è visto che la funzione $f'\left(a-t\sqrt{gh}\right)$ ha un valore reale finché $a-t\sqrt{gh}=z$ (art. 14); poiché $F'\left(a+t\sqrt{gh}\right)=-f'\left(a-t\sqrt{gh}\right)$, anche la funzione $F'\left(a+t\sqrt{gh}\right)$ avrà valori reali, quando $a-t\sqrt{gh}=z$, cioè, quando $t\sqrt{gh}=a-z$. Di conseguenza, la funzione $F'\left(x+t\sqrt{gh}\right)$ sarà non solo reale, quando $x+t\sqrt{gh}=z$ ma anche quando $x+t\sqrt{gh}=2a-z$, da ciò segue che in questo caso anche le velocità p e le condensazioni s saranno reali per le ascisse $x=2a-z-t\sqrt{gh}$.

La fibra sonora, dopo aver percorso lo spazio a sarà come riflessa dall'ostacolo che incontra e respinta all'indietro con la stessa velocità; ciò offre una spiegazione assai naturale degli echi.

Si spiegheranno allo stesso modo gli echi composti, supponendo che la linea sonora sia terminata dai due lati da ostacoli immobili che rifletteranno successivamente le fibre sonore e le faranno dare delle specie di oscillazioni continue. Su questo si possono vedere le Opere citate prima (art. 13), così come le Memorie dell'Accademia di Berlino del 1759 e 1765.