TEORIA MATEMATICA DEI FENOMENI ELETTRODINAMICI

unicamente dedotti dall'Esperienza

di André-Marie Ampère

Parigi - Libreria scientifica, Rue de la Sorbonne, 8 - 1883

Memoria sulla teoria Matematica dei Fenomeni Elettrodinamici unicamente dedotti dall'esperienza

L'epoca nella quale i lavori di Newton hanno segnato la storia delle scienze non è solo quella della più importante scoperta fatta sulle cause dei grandi fenomeni della natura, è anche l'epoca in cui l'intelligenza umana si è aperta una nuova strada nelle scienze che ha come obiettivo lo studio di questi fenomeni.

Fino ad allora si erano quasi esclusivamente cercate le cause nell'impulso di un fluido sconosciuto che trasportava le particelle materiali lungo la direzione delle proprie particelle; e dovunque si osservava un moto di rivoluzione, si immaginava un vortice nello stesso verso.

Newton ci ha insegnato che questo tipo di movimento deve, come tutti quelli che ci offre la natura, essere ridotto dal calcolo a forze agenti sempre tra due particelle materiali lungo la retta congiungente, di modo che l'azione esercitata da una di esse sull'altra sia uguale e opposta a quella che quest'ultima esercita nello stesso tempo sulla prima, e che essa non possa, di conseguenza, quando si suppongono queste due particelle invariabilmente legate tra loro, risultare alcun movimento dalla loro reciproca azione. Questa legge è confermata da tutte le osservazioni, da tutti i calcoli, che egli presentò nel primo dei tre assiomi che pose all'inizio dei *Principia*. Ma non gli bastava essersi innalzato a questa alta concezione, doveva trovare secondo questa legge queste forze varianti con la rispettiva situazione delle particelle tra le quali esse si esercitano, o, analogamente, esprimerne il valore mediante una formula.

Newton fu lontano dal pensare che una tale legge potesse essere inventata partendo da considerazioni astratte più o meno plausibili. Egli stabilì che essa doveva essere dedotta da fatti osservati, o piuttosto da quelle leggi empiriche che, come quelle di Keplero, sono solo i risultati generalizzati di un grande numero di fatti.

Osservare dapprima i fatti, variarne le circostanze finché è possibile, accompagnare questo primo lavoro con misure precise per dedurre queste leggi, indipendentemente da ogni ipotesi sulla natura delle forze che producono i fenomeni, il valore matematico di queste forze, cioè la formula che le rappresenta, questo è il cammino seguito da Newton. Esso è stato, in generale, adottato in Francia dagli scienziati ai quali la fisica deve gli immensi progressi di questi ultimi tempi, e questo metodo ho seguito in tutte le mie ricerche sui fenomeni elettrodinamici. Ho consultato unicamente l'esperienza per stabilire le leggi di questi fenomeni e ne ho dedotto la formula che può da sola rappresentare le forze alle quali sono dovuti; non ho fatto alcuna ricerca sulla causa che si può assegnare a queste forze, ben convinto che ogni ricerca di questo genere deve essere preceduta dalla conoscenza puramente sperimentale delle leggi, e della determinazione, unicamente dedotta da queste leggi, del valore delle forze elementari la cui direzione è necessariamente quella della retta tracciata dai punti materiali tra i quali esse si esercitano. Per questo motivo ho evitato di parlare di idee che potevo avere sulla natura della causa di queste che provengono dai conduttori voltaici, se non nelle note che accompagnano l'*Esposizione sommaria delle nuove esperienze dopo il mese di marzo 1821*, che ho letto nella seduta pubblica dell'Accademia delle Scienze, l'8 aprile 1822; si può vedere ciò che ho detto in queste note alla pagina 215 del mio *Recueil d'Observation électro-dynamiques.* Non sembra che questo cammino, il solo che possa condurre a risultati indipendenti da ogni ipotesi, sia preferito dai fisici del resto d'Europa, come lo è per i Francesi; e lo scienziato illustre che ha visto per primo i poli di una calamita trasportati dall'azione di un filo conduttore in direzioni perpendicolari a quella di questi filo, ne ha concluso che la materia elettrica ruotava attorno ad esso e trasportava questi poli nel verso del suo movimento, precisamente come Cartesio faceva ruotare la materia nei suoi vortici nel verso delle rivoluzioni planetarie. Guidato dai principi della filosofia newtoniana, ho ricondotto il fenomeno osservato da M. Oersted, come si è fatto riguardo a tutti quei fenomeni dello stesso genere che ci offre la natura, a forze agenti sempre lungo la retta che unisce le due particelle tra le quali si esercitano; e se ho stabilito che la stessa disposizione o lo stesso movimento dell'elettricità che esiste nel filo conduttore ha luogo anche attorno alle particelle dei magneti, non certo facendole agire per impulso di un vortice, ma per calcolare, secondo la mia formula, le forze che risultano tra queste particelle e quelle di un conduttore o di un altro magnete, lungo le rette che uniscono a due a due le particelle di cui si considera l'azione reciproca, e per mostrare che i risultati del calcolo sono completamente verificati: 1° dalle esperienze che ho eseguito e da quelle che si devono a M. Pouillet sulla determinazione precisa delle situazioni nelle quali si deve trovare un conduttore mobile, perché rimanga in equilibrio quando è sottoposto all'azione, sia di un altro conduttore, sia di una calamita; 2° per l'accordo di questi risultati con le leggi che Coulomb e M. Biot hanno dedotto dalle loro esperienze, il primo relativamente all'azione reciproca di due magneti, il secondo a quella di un magnete e di un filo conduttore.

Il principale vantaggio delle formule che sono così stabilite immediatamente da alcuni fatti generali dati da un numero sufficiente di osservazioni affinché la certezza non possa essere contestata, è di restare indipendenti, tanto dalle ipotesi che hanno aiutato i loro autori nelle ricerche di queste formule, che di quelle che possono essere loro sostituite nel seguito. L'espressione dell'attrazione universale dedotta dalle leggi di Keplero non dipende dalle ipotesi che alcuni autori hanno cercato di fare su una causa meccanica, che volevano assegnarli. La teoria del calore riposa realmente su fatti generali dati immediatamente dall'osservazione; e l'equazione dedotta da questi fatti si trovano confermati dall'accordo dei risultati che se ne ricavano e da quelli che fornisce l'esperienza, deve essere pure recepita come esprimente le vere leggi della propagazione del calore, e da quelli che l'attribuiscono a un irraggiamento di molecole calorifiche, e da coloro che ricorrono per spiegare lo stesso fenomeno alle vibrazioni di un fluido distribuito nello spazio; solo bisogna che i primi mostrino come l'equazione in questione risulti dal loro modo di vedere e che i secondi la deducano da formule generali dei moti vibratori; non per nulla aggiungere alla certezza di questa equazione, me perché le loro rispettive ipotesi possano sussistere. Il fisico che non ha preso partito a questo riguardo ammette questa equazione come la rappresentazione esatta dei fatti, senza inquietarsi per il modo in cui essa possa risultare dall'una o dall'altra delle spiegazioni presentate; e se nuovi fenomeni e nuovi calcoli verranno a dimostrare che gli effetti del calore possono essere realmente spiegati solo nel sistema delle vibrazioni, il grande fisico che ha per primo fornito questa equazione e che ha creato per applicarla allo scopo delle sue ricerche nuovi metodi di integrazione, sarà l'autore della teoria matematica del calore, come Newton è quello della teoria dei moti planetari, sebbene quest'ultimo non fosse completamente dimostrato tanto dai suoi lavori quanto da quelli dei suoi successori.

Così è per la formula con la quale ho descritto l'azione elettrodinamica. Qualunque sia la causa fisica alla quale si vogliano riferire i fenomeni prodotti da questa azione, la formula che ho ottenuto resterà sempre l'espressione dei fatti. Se si giunge a dedurla da considerazioni con le quali si sono spiegati molti altri fenomeni, come le attrazioni in ragione inversa del quadrato della distanza, quelle che diventano insensibili a ogni distanza apprezzabile delle particelle tra le quali esse si esercitano, le vibrazioni di un fluido distribuito nello spazio, ecc., si farà un passo in più in questo ambito della fisica; ma questa ricerca, di cui non mi sono ancora occupato, sebbene ne riconosca tutta l'importanza, non cambierà nulla ai risultati del mio lavoro, poiché per accordarsi con i fatti, bisognerà sempre che l'ipotesi adottata si accordi con la formula che li rappresenta così interamente.

Dal momento che riconobbi che due conduttori voltaici agiscono l'uno sull'altro, a volte attraendosi, a volte respingendosi. che distinsi e descrissi le azioni che essi esercitano nelle diverse situazioni in cui si possono trovare e che constatai l'uguaglianza dell'azione che è esercitata da un conduttore rettilineo, e di quella che di un conduttore sinuoso, quando questo si allontana a distanze estremamente piccole dalla direzione del primo, e finisce, da una parte e dall'altra, agli stessi punti; cercai di esprimere con una formula il valore della forza attrattiva o repulsiva di due dei loro elementi, o di parti infinitamente piccole, al fine di poterne dedurre, con i metodi conosciuti di integrazione, l'azione che avviene tra due porzioni di conduttori dati di forma e condizione.

L'impossibilità di sottoporre direttamente all'esperienza parti infinitamente piccole del circuito voltaico, obbliga necessariamente a partire da osservazioni fatte su fili conduttori di grandezza finita e si devono soddisfare le due condizioni, che le osservazioni abbiano una grande precisione e che siano in grado di determinare il valore dell'azione reciproca di due parti infinitamente piccole di questi fili. Ciò si può ottenere in due modi: uno consiste nel misurare dapprima con la massima esattezza valori dell'azione reciproca di due parti di grandezza finita ponendole in successione, uno rispetto all'altro, a differenti distanze e in diverse posizioni, poiché è evidente che qui l'azione non dipende solamente dalla distanza; bisogna poi fare un'ipotesi sul valore dell'azione reciproca di due parti infinitamente piccole, per derivare quella dell'azione che deve risultare per i conduttori finiti sui quali si è operato e modificare l'ipotesi fino a che i risultati del calcolo si accordino con quelli dell'osservazione. Questo era il procedimento che mi ero proposto di seguire, come ho spiegato in dettaglio in una Memoria dell'Accademia delle Scienze, il 9 ottobre 1820[1]; e sebbene si giunga alla verità solo per via indiretta delle ipotesi, non è meno prezioso, poiché è spesso il solo che possa essere impiegato in ricerche di questo tipo. Uno dei membri di questa Accademia, i cui lavori hanno riguardato tutti gli aspetti della fisica, lo ha perfettamente descritto nella *Notice sur l'animation imprimée aux metaux par l'électricité en mouvement*, che ci ha letto il 2 aprile 1821, chiamandolo un lavoro in quale tipo di previsione, che è il fine di quasi tutte le ricerche fisiche[2].

Ma esiste un altro modo di ottenere più rapidamente lo stesso obiettivo; è quello che ho seguito dopo e che mi ha portato al risultato che desideravo; esso consiste nel constatare, dall'esperienza, che un conduttore mobile rimane esattamente in equilibrio tra due forze uguali, o tra due momenti di rotazione uguali, essendo queste forze e momenti prodotti da parti dei conduttori fissi le cui forme o grandezze possono variare in un modo qualunque, sotto condizioni che l'esperienza determina, senza che l'equilibrio sia turbato e concluderne direttamente con il calcolo quale deve essere il valore dell'azione reciproca di due parti infinitamente piccolo, perché l'equilibrio sia in effetti indipendente da tutti i cambiamenti di forma o di grandezza compatibili con queste condizioni.

Quest'ultimo procedimento può essere impiegato solo quando la natura dell'azione che si studia produce casi di equilibrio indipendenti dalla forma dei corpi; è, di conseguenza, molto più ristretto in queste applicazioni che in quelle di cui ho parlato prima: ma poiché i conduttori voltaici presentano circostanze in cui questo tipo di equilibrio si manifesta, è naturale preferirlo ad ogni altro, come più diretto, più semplice e suscettibile di una maggiore esattezza facendo le esperienze fatte con le precauzioni necessarie. Vi è d'altra parte, riguardo all'azione esercitata da questi conduttori, un motivo assai più decisivo ancora per preferirlo nelle ricerche relative alla determinazione delle forze che la producono: è l'estrema difficoltà delle esperienze in cui ci si proponeva, per esempio, di misurare queste forze dal numero delle oscillazioni di un corpo sottoposto alle loro azioni. Questa difficoltà si manifesta per il fatto che, quando si fa agire un

[1] Questa memoria non è stata pubblicata a parte, ma i principali risultati sono stati inseriti in quella che ho pubblicato nel 1820, nel tomo XV degli *Annales de chimie et de physique*.

[2] Si veda il *Journal des savants*, aprile 1821, p. 233.

conduttore su su una parte mobile del circuito voltaico, le parti della strumentazione necessaria per metterla in comunicazione con la pila, agiscono su questa porzione mobile contemporaneamente al conduttore e alterano così i risultati delle esperienze. Credo, tuttavia, di essere riuscito a superare in uno strumento atto a misurare l'azione reciproca di due conduttori, uno fisso e l'altro mobile, dal numero di oscillazioni di quest'ultimo, facendo variare la forma del conduttore fisso. Descriverò questo strumento nel seguito di questa opera.

È vero che non si incontrano gli stessi ostacoli quando si misura allo stesso modo l'azione di un filo conduttore su un magnete; ma questo metodo non può essere utilizzato quando si devono determinare forze che due conduttori voltaici esercitano l'uno sull'altro, misura che deve essere il primo obiettivo delle nostre ricerche nello studio di nuovi fenomeni. È evidente, infatti, che se l'azione di un filo conduttore su un magnete fosse dovuta a un'altra causa diversa da quella che si ha tra due conduttori, le esperienze fatte sulla prima non farebbero conoscere nulla sulla seconda; e che se i magneti devono le loro proprietà solo a correnti elettriche, circondanti ognuna delle particelle, bisognerebbe, per poterne trarre delle conseguenze certe rispetto all'azione che esercita su queste correnti quella del filo conduttore, che si sapeva in anticipo se hanno la stessa intensità vicino alla superficie del magnete e al suo interno, i secondo quale legge varia questa intensità; se i piani di queste correnti sono dappertutto perpendicolari all'asse della barra magnetica, come avevo dapprima supposto, o se l'azione reciproca delle correnti di uno stesso magnete dà loro una situazione tanto più inclinata a questo asse di quanto sono a una maggiore distanza e che si divaricano maggiormente del suo mezzo, come ho concluso in base alla differenza che si osserva tra la situazione dei poli di un magnete, e quelle dei punti che uniscono le stesse proprietà in un filo conduttore avvolto a spirale[3].

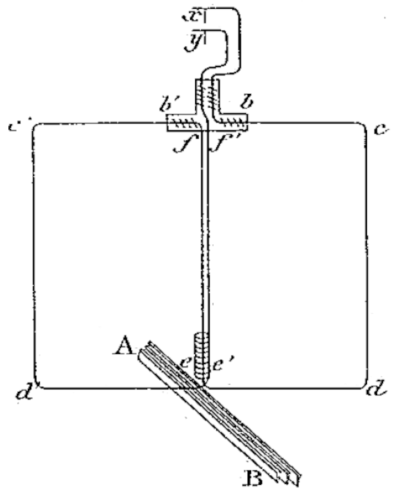
I diversi casi di equilibrio che ho constatato da esperienze precise, danno immediatamente altrettante leggi che conducono direttamente all'espressione matematica della forza che due

[3]Credo di dover inserire qui la seguente nota, che è estratta dall'analisi dei lavori dell'Accademia nell'anno 1821, pubblicata l'8 aprile 1822. (Si veda la parte matematica di questa analisi, p. 22 e 23).

"La principale differenza tra il modo di agire di un magnete e di un conduttore voltaico una parte del quale è avvolta a spirale attorno all'altra, consiste nel fatto che i poli del primo sono posti più vicini alla parte centrale del magnete che alle sue estremità, mentre i punti che presentano le stesse proprietà nella spirale sono esattamente poste alle estremità di questa spirale: è ciò che deve succedere quando l'intensità delle correnti del magnete tende a diminuire dalla sua metà verso le estremità. Ma M. Ampère ha riconosciuto un'altra causa che può pure determinare questo effetto. Dopo aver concluso dalle sue nuove esperienze che le correnti elettriche di un magnete esistono attorno a ciascuna delle sue particelle, gli è stato facile vedere che non è necessario supporre, come fatto in precedenza, che i piani di queste correnti sono dappertutto perpendicolari all'asse del magnete; la loro azione reciproca deve tendere a dare a questi piani una situazione inclinata all'asse, soprattutto verso le estremità, di modo che i poli, invece di essere esattamente collocati, come dovrebbero essere, secondo i calcolo dedotti dalle formule da M. Ampère, quando si suppongono tutte le correnti della stessa intensità e nei piani perpendicolari all'asse, devono avvicinarsi alla metà della calamita da una parte della sua lunghezza tanto più grande quanto i piano di un gran numero di correnti sono così inclinate, e che esse lo sono di più, cioè tanto più il magnete è spesso relativamente alla sua lunghezza, ciò che è conforme all'esperienza. Nei fili conduttori piegati a spirale e una parte dei quali ritorna dall'asse per distruggere l'effetto della parte delle correnti di ogni spira che agisce come se fossero parallele a questo asse, le due circostanze che, secondo quanto abbiamo detto, non hanno necessariamente luogo nei magneti, esistono al contrario necessariamente in questi fili; così si osserva che le spirali hanno poli simili a quelli dei magneti, ma posti esattamente alle loro estremità come fornisce il calcolo."

Si vede da questa nota che, nell'anno 1821, avevo concluso riguardo ai fenomeni che presentano i magneti:1° che considerando ogni particella di una barra magnetizzata come una calamita, gli assi di queste calamite elementari devono essere, non paralleli all'asse del magnete totale come si supponeva allora, ma posti in direzioni inclinate a questo asse e in direzioni date dalla loro reciproca azione; 2° che questa disposizione è una delle cause per le quali i poli del magnete totale non sono posti alle sue estremità, ma tra le estremità e la metà del magnete. Entrambe queste affermazioni si trovano oggi completamente dimostrate dai risultati che M. Poisson ha dedotto dalle formule con le quali ha rappresentato la distribuzione, nelle calamite, delle forze prodotte da ciascuna delle loro particelle. Queste formule sono fondate sulla legge di Coulomb, e non vi è, di conseguenza, nulla da cambiare quando si adotta il modo in cui ho spiegato i fenomeni magnetici, poiché questa legge è una conseguenza della mia formula, come si vedrà in seguito.

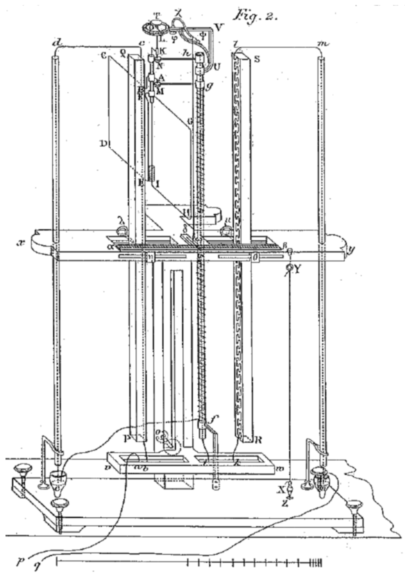
elementi di conduttori voltaici esercitano l'uno sull'altro, dapprima facendo conoscere la forma di questa espressione, poi determinando i valori costanti, inizialmente incogniti, che essa contiene, precisamente come le leggi di Keplero che dimostrano che la forza che trattiene i pianeti nelle loro orbite tende costantemente verso il centro del sole, poiché essa cambia per uno stesso pianeta in ragione inversa del quadrato della distanza dal suo centro, infine che il coefficiente costante che ne rappresenta l'intensità ha lo stesso valore per tutti i pianeti. Questi casi di equilibrio sono nel numero di quattro: il primo dimostra l'uguaglianza dei valori assoluti dell'attrazione e della repulsione che si produce facendo passare alternativamente, in due versi opposti, la stessa corrente in un conduttore fisso del quale non si cambia né la posizione né la distanza dal corpo sul quale agisce. Questa uguaglianza risulta dalla semplice osservazione che due parti uguali di uno stesso filo conduttore ricoperto di seta per impedirne il contatto, e tutti e due rettilinei o piegati insieme in modo da formare l'uno attorno all'altro due spirali con tutte le parti uguali, e percorse da una stessa corrente elettrica, una in un verso e l'altro in quello contrario, non esercitano alcuna azione, sia su un conduttore mobile, sia su un magnete; lo si può constatare con l'aiuto di un conduttore mobile che si vede in figura 9 della tavola I del tomo XVIII degli *Annales de chimie et de physique*, relativa alla descrizione di uno dei miei strumenti elettrodinamici e che è qui riprodotta (tav. I, fig. 1).



Si pone un poco al di sotto della parte inferiore $dee'd'$ di questo conduttore e in una direzione qualsiasi, un conduttore rettilineo orizzontale numerose volte raddoppiato AB, in modo che la metà della sua lunghezza e del suo spessore sia nella verticale che passa per i punti x, y attorno ai quali ruota liberamente il conduttore mobile. Si vede allora che questo conduttore rimane nella condizione lo si pone; ciò prova che vi è un equilibrio tra le azioni esercitate dal conduttore fisso sulle due parti uguali e opposte del circuito voltaico $bcde, b'c'd'e'$, che differisce solo perché in uno, la corrente elettrica va avvicinandosi al conduttore fisso AB, e nell'altro, allontanandosene, qualunque sia l'angolo formato dalla direzione di quest'ultimo conduttore con il piano del conduttore mobile: se si considerano dapprima le due azioni esercitate tra ciascuna di queste parti del circuito voltaico e la metà del conduttore AB al quale è più vicino, e poi le due azioni tra ciascuna di esse e la metà dello stesso conduttore da cui è più lontano, si vedrà facilmente: 1° che l'equilibrio non può avere luogo per tutti i valori di questo angolo, purché vi sia equilibrio separatamente tra le prime due azioni e le ultime due; 2° che se una delle prime due è attrattiva, poiché i lati dell'angolo acuto formato dalle parti di conduttore tra le quali ha luogo, sono percorsi nello stesso verso dalla corrente elettrica, l'altra sarà repulsiva poiché avrà luogo tra i due lati dell'angolo opposto al vertice, che sono percorsi in versi contrari dalla stessa corrente, di modo che servirà dapprima, perché si abbia equilibrio tra esse, che queste prime due azioni che tendono a far ruotare il conduttore mobile, uno in un verso, l'altro nel verso opposto, siano uguali tra loro; e poi che le ultime due azioni, una attrattiva e l'altra repulsiva, che si esercitano tra i lati dei due angoli ottusi opposti al vertice e supplementari di quelli prima indicati, siano pure uguali tra loro. È inutile rimarcare che queste azioni sono realmente le somme dei prodotti delle forze che agiscono su ogni parte infinitamente piccola del conduttore mobile, moltiplicate per la loro distanza dalla verticale attorno alla quale può liberamente ruotare; ma siccome le distanze tra questa verticale e le porzioni infinitamente piccole corrispondenti ai due rami $bcde, b'c'd'e'$ sono sempre uguali tra loro, l'uguaglianza dei momenti rende necessaria quella delle forze.

Il secondo dei tre casi generali di equilibrio, è quello che ho osservato alla fine dell'anno 1820; consiste nell'uguaglianza delle azioni esercitate su un conduttore rettilineo mobile, da parte di due conduttori fissi posti a uguali distanze dal primo, e uno dei quali è rettilineo, l'altro piegato e ritorto in un modo qualsiasi, qualunque siano d'altra parte le sinuosità da esso formate. Ecco la descrizione dello strumento con il quale ho verificato l'uguaglianza delle due azioni con esperienze di grande precisione e i cui risultati ho comunicato all'Accademia, nella seduta del 26 dicembre 1820.

I due righelli verticali in legno, PQ, RS (fig. 2), portano, in scanalature praticate sulle loro facce che si trovano di fronte, la prima un filo rettilineo bc, la seconda un filo kl formante in tutta la sua lunghezza e in un piano perpendicolare al piano che unirebbe i due assi dei righelli, contorni e pieghe come quelle che si vedono in figura lungo il righello RS in modo che questo filo si allontani, in alcuno dei suoi punti, solo molto poco dalla metà della scanalatura.



Questi due fili sono destinati a servire da conduttori a due parti della stessa corrente, che si fa agire per repulsione sulla parte GH di un conduttore mobile, composto da due circuiti rettangolari quasi chiusi e uguali $BCDE, FGHI$, che sono percorsi in versi contrari dalla corrente elettrica, affinché le azioni che la terra esercita su questi due circuiti si elidano reciprocamente. Alle due estremità di questo conduttore mobile, sono due punti A e K immersi nelle coppette M e N, piene di mercurio, e saldate alle estremità dei due pezzi di rame gM, hN. Queste parti sono in comunicazione, tramite le scatole di rame g e h, la prima con un filo di rame gfe, piegato a spirale attorno al tubo di vetro hgf, l'altra con un filo rettilineo hi che passa all'interno dello stesso tubo e che finisce nella conca ki, scavata in un pezzo di legno vw che si fissa all'altezza desiderata, contro il montante z, con la vite di pressione o. Dalla esperienza di cui prima ho parlato, questa parte del circuito composta dalla spirale gf e dal filo rettilineo hi, non può esercitare alcuna azione sui conduttori fissi bc e kl, i fili di cui questi conduttori sono formati si prolungano in cde, lmn, in due tubi di vetro[4] attaccati alla traversina xy, e terminano, il primo nella coppetta e, e il secondo nella coppetta n. Disposto tutto in questo modo, si mette del mercurio in ogni coppetta e nelle due conche ba, ki e si immerge il reoforo positivo pa nella conca ha che è pure scavata nel pezzo di legno vw, e il reoforo negativo qn nella coppetta n. La corrente percorre tutti i conduttori dello strumento nell'ordine seguente $pabcdefg\ MABCDEFGHIKN\ hiklmnq$; da cui risulta che è ascendente nei due conduttori fissi e discendente nella parte GH del conduttore mobile che è soggetto alla loro azione e che si trova a metà dell'intervallo dei due conduttori fissi nel piano che passa per i loro assi. Questa parte GH è quindi respinta da bc e kl: da ciò segue che se l'azione di questi due conduttori è lo stesso a pari distanza, GH deve fermarsi nel mezzo dell'intervallo che li separa; ciò che in effetti avviene.

È bene osservare: 1° che i due assi dei conduttori fissi essendo a uguali distanze da GH, non è possibile dire in modo rigoroso che la distanza è la stessa per tutti i punti del conduttore kl, a causa dei contorni e delle pieghe che forma questo conduttore. Ma siccome questi contorni e queste pieghe sono in un piano perpendicolare al piano passante per GH e per gli dei conduttori fissi, è evidente che la differenza di distanza che ne deriva è la più piccola possibile e tanto minore quanto la metà della larghezza della scanalatura RS, quanto questa metà è minore dell'intervallo tra i due righelli, poiché questa differenza, nel caso in cui è la più grande possibile, è uguale a quella che si trova tra il raggio e la secante di un arco la cui tangente è uguale alla metà della larghezza della scanalatura e che appartiene a un cerchio il cui diametro è l'intervallo tra i due righelli; 2° che se si scompone ogni porzione infinitamente piccola del conduttore kl, come si scomporrebbe una forza in due altre piccole parti che ne siano le proiezioni, l'una sull'asse verticale di questo conduttore, l'altra su due rette orizzontali tracciate per tutti i suoi punti nel piano in cui si trovano le pieghe e i contorni che esso forma, la somma dei prima, prendendo negativamente quelli che, avendo una direzione opposta a quella delle altre, devono produrre un'azione in verso contrario, sarà uguale alla lunghezza di questo asse; di modo che l'azione totale, risultante da tutte queste proiezioni, sarà la stessa di quella del conduttore bc posto dall'altra parte alla stessa distanza da GH, mentre l'azione delle seconde sarà nulla sullo stesso conduttore mobile GH, poiché i piani innalzati perpendicolarmente sulla metà di ciascuno si essi passeranno per la direzione di GH. La riunione di queste due serie di proiezioni produce quindi necessariamente su GH un'azione uguale a quella di bc; e siccome l'esperienza prova che il conduttore sinuoso kl produce pure un'azione uguale a quella di bc, quali che siano le pieghe e i contorni che forma, ne segue che si tratta, in tutti i casi, come la riunione di due serie di proiezioni, ciò che non può avvenire, indipendentemente dal modo in cui è piegato e ricurvato, a meno che ognuna della parti di questo conduttore non agisca separatamente come la riunione delle sue proiezioni.

Affinché questa esperienza abbia tutta l'esattezza desiderabile, è necessario che i due righelli siano esattamente verticali e precisamente alla stessa distanza dal conduttore mobile. Per soddisfare queste condizioni, si adatta una divisoria alla traversina xy e si fissano i righelli con due morse η e θ e due viti di pressione λ, μ, ciò permette di allontanarli o di avvicinarli a piacere, mantenendoli sempre a uguale distanza dalla metà γ della divisoria $\alpha\beta$. Lo strumento è costruito in modo che i due righelli sono perpendicolari alla traversina xy e si rende questa orizzontale mediante viti che si vedono ai quattro angoli del piede dello strumento e del filo a piombo XY che corrisponde esattamente al punto Z, determinato opportunamente su questo piede, quando la traversina xy è perfettamente a livello.

Per rendere il conduttore $ABCDEFGHIK$ mobile attorno a una retta verticale, posta a uguale distanza da due conduttori bc, kl, questo conduttore è sospeso a un filo metallico molto

[4]L'uso di questi tubi è per impedire la flessione dei fili che vi sono contenuti, mantenendoli a distanze uguali dai due conduttori be, kl affinché le loro azioni su GH che diminuiscono quelle di questi due conduttori, le diminuiscano in modo uguale.

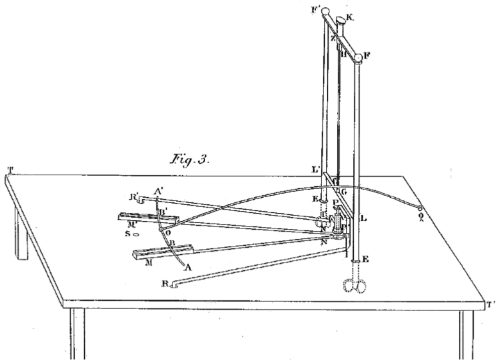
sottile attaccato al centro del pulsante T, che può ruotare su se stesso senza variare la sua distanza da questi due conduttori; questo pulsante è al centro di un piccolo quadrante O, sul quale l'indice L serve a marcare il punto in cui bisogna fermarlo affinché la parte GH del conduttore mobile risponda, senza che il filo sia ritorto, nel mezzo dell'intervallo dei due conduttori fissi bc, kl, allo scopo di poter rimettere immediatamente l'ago nella direzione necessaria per tutte le ripetizioni dell'esperienza. Si riconosce che GH è infatti a uguale distanza da bc e da kl, per mezzo di un altro filo a piombo $\psi\omega$ attaccato a un'astina di rame $\varphi\chi\psi$ sostenuta come il quadrante O dal supporto UVO, nel quale questa astina $\varphi\chi\psi$ può ruotare attorno all'asse del pulsante φ che la termina, e ciò offre la facilità di far corrispondere la punta a piombo ω alla retta $\gamma\delta$ metà della divisoria $\alpha\beta$. Quando il conduttore è nelle posizione opportuna, le tre verticali $\psi\omega$, GH e CD si trovano nello stesso piano e ci si può assicurare facilmente ponendo l'occhio in questo piano davanti a $\psi\omega$.

Il conduttore mobile si trova così posto in anticipo nella situazione in cui vi deve essere equilibrio, tra le repulsione dei due conduttori fissi, se queste repulsioni sono esattamente uguali: le si produce allora immergendo nel mercurio della conca ba e della coppetta n i fili ap, nq, che comunicano con le due estremità della pila e si vede il conduttore GH rimanere in questa posizione malgrado la grande mobilità di questo tipo si sospensione, mentre se lo si sposta, anche di molto poco, l'indice L, ciò che porta GH in una posizione in cui non è più a pari distanza da conduttori fissi bc, kl, lo si vede muovere all'istante dove si stabilisce il contatto con la pila, allontanandosi da quella dei conduttori. In questo modo ho constatato, nel tempo in cui ho fatto costruire questo strumento, l'uguaglianza delle azioni di due conduttori fissi, con esperienze ripetute parecchie volte con tutte le precauzioni necessarie per eliminare qualsiasi dubbio sul loro risultato.

Si può così dimostrare la stessa legge con una esperienza assai semplice: basta per questo prendere un filo di rame rivestito di seta, una parte del quale è rettilinea e l'altra è avvolta su se stessa in modo da formare sinuosità senza separarsi dalla prima che è isolata dalla seta che la ricopre. Si constata allora che un'altra parte del filo conduttore è senza azione sull'insieme di queste due parti; e siccome essa lo sarà pure sull'insieme dei due fili rettilinei percorsi in verso contrario da una stessa corrente elettrica, dalla esperienza dalla quale si constata nel modo più semplice il primo caso di equilibrio, ne segue che l'azione di una corrente sinuosa è precisamente uguale a quella di una corrente rettilinea compresa tra le stesse estremità, poiché queste due azioni fanno l'una e l'altra equilibrio all'azione di una stessa corrente rettilinea della stessa lunghezza di quest'ultima, ma diretta in verso contrario.

Il terzo caso di equilibrio consiste nel fatto che un circuito chiuso di qualsiasi forma, non potrebbe mettere in movimento una parte qualunque di un filo conduttore formante un arco di cerchio il cui centro è in un asse fisso, attorno al quale può ruotare liberamente e che è perpendicolare al piano del cerchio di cui questo arco fa parte.

Su un piede TT' (fig. 3), a forma di tavolo, si innalzano due colonne $EF, E'F'$, legate tra loro da due traversine LL', EF'; un asse GH è mantenuto tra queste due traversine in una posizione verticale. Le sue due estremità G, H, terminanti in punte aguzze, entrano in due fori conici praticati, uno nella traversina inferiore LL', l'altro all'estremità di una vite KZ portata dalla traversina superiore EF' e destinata a premere l'asse GH senza forzarlo. In C è fissato invariabilmente a questo asse un supporto QO la cui estremità O presenta una cerniera nella quale è introdotto dalla sua metà un arco di cerchio AA' formato da un filo metallico che rimane costantemente in una posizione orizzontale e che per raggio la distanza tra il punto O e l'asse GH. Questo arco è equilibrato da un contrappeso Q, allo scopo di diminuire l'attrito dell'asse GH nei fori conici dove le sue estremità sono inserite.



Al di sotto dell'arco AA' sono disposti due trogoli pieni di mercurio in modo che la superficie del mercurio, innalzandosi al di sopra del bordo, vada a toccare l'arco AA' in B e B'. Questi due trogoli comunicano mediante conduttori metallici $MN, M'N'$ con coppette P, P' piene di mercurio. La P e il conduttore MN che la collega a M sono fissati a un asse verticale che affonda nel tavolo in modo da poter ruotare liberamente. La P', alla quale è attaccato il conduttore $M'N'$, è attraversata dallo stesso asse, attorno al quale può pure ruotare indipendentemente dall'altro. Essa è isolata da un tubo di vetro V che avvolge questo asse e da una rondella di vetro U che la separa da conduttore del trogolo M, in modo da poter disporre i conduttori $MN, M'N'$ sotto un angolo a piacere.

Due altri conduttori $IR, I'R'$ attaccati al tavolo immersi rispettivamente nelle coppette P, P' le fanno comunicare con cavità R, R' scavate nel tavolo e riempite di mercurio. Infine, una terza cavità S piena pure di mercurio si trova tra le altre due.

Ecco il modo con cui si usa questa strumentazione: Si fa immergere uno dei reofori, per esempio, quello positivo nella cavità R e quello negativo nella cavità S, che si collega con la cavità R' con un conduttore curvilineo di forma qualsiasi. La corrente segue il conduttore RI, passa nella coppetta P, poi nel conduttore NM, nel trogolo M, nel conduttore $M'N'$, nella coppetta P', nel conduttore $I'R'$ e infine dalla cavità R' nel conduttore curvilineo che comunica con il mercurio della cavità S dove è immerso il reoforo negativo.

In questo modo il circuito voltaico è pienamente formato:

1° Dall'arco BB' e dai conduttori $MN, M'N'$;

2° Da un circuito che si compone delle parti $RIP, P'I'R'$ dello strumento, del conduttore curvilineo che va da R' in S e dalla pila stessa.

Quest'ultimo circuito deve agire come un circuito chiuso, poiché è interrotto solo dallo spessore del vetro che isola le due coppette P, P': basterà quindi osservare la sua azione sull'arco BB' per constatare con l'esperienza l'azione di un circuito chiuso su un arco nelle diverse posizioni che si possono dare ad entrambi.

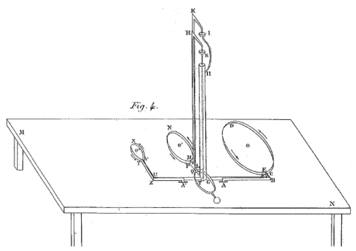
Quando nel mezzo della cerniera O si mette l'arco AA' in una posizione tale che il suo centro sia fuori dall'asse GH, questo arco prende un movimento e scorre sul mercurio dei trogoli M, M' in virtù dell'azione della corrente curvilinea chiusa che va da R' in S. Se al contrario il suo centro è nell'asse, rimane immobile; da cui segue che le due porzioni del circuito chiuso che tendono a farlo ruotare in versi contrari attorno all'asse esercitano su questo arco momenti di rotazione il cui valore assoluto è lo stesso qualunque sia la grandezza della parte BB' determinata dall'apertura dell'angolo tra i conduttori $MN, M'N'$. Se, quindi, si prendono in successione due archi BB' che differiscono poco tra loro, siccome il momento di rotazione è nullo per ognuno di essi, sarà nullo per la loro piccola differenza e, di conseguenza, per ogni elemento della circonferenza il cui centro è nell'asse; da cui segue che la direzione dell'azione esercitata dal circuito chiuso sull'elemento passa per l'asse e che esso è necessariamente perpendicolare all'elemento.

Quando l'arco AA' è posto in modo che il suo centro sia nell'asse, le porzioni di conduttore $Mn, M'N'$ esercitano sull'arco BB' azioni repulsive uguali e opposte, di modo che non ne può risultare alcun effetto; e poiché non vi è movimento, si è sicuri che non vi è momento di rotazione prodotto dal circuito chiuso.

Quando l'arco AA' si muove nell'altra posizione in cui l'abbiamo prima supposto, le azioni dei conduttori $MN, M'N'$ non sono più uguali: si potrebbe credere che il movimento è dovuto solo a questa differenza; ma secondo che si avvicini o si allontani il circuito che va da R' in S, il moto è aumentato o diminuito, ciò che non permette di dubitare che il circuito chiuso non sia per molto nell'effetto osservato.

Una volta ottenuto questo risultato, per qualunque lunghezza dell'asse AA', esso avverrà necessariamente per ognuno degli elementi che compongono questo arco. Trarremo da ciò questa conseguenza generale, che l'azione di un circuito chiuso, o di un insieme di circuiti chiusi qualsiasi, su un elemento infinitamente piccolo di una corrente elettrica, è perpendicolare a questo elemento.

È grazie a un quarto caso di equilibrio, del quale mi resta di parlare, che si può completare la misura dei coefficienti costanti che entrano nella mia formula, senza far ricorso, come avevo prima fatto, alle esperienze dove un magnete e un filo conduttore agiscono uno sull'altro. Ecco lo strumento con l'aiuto del quale questa misura si basa unicamente sull'osservazione di ciò che avviene quando vi sono due fili conduttori di cui si esamina l'azione reciproca.



Nella tavola MN (fig. 4), è scavata una cavità A, riempita di mercurio, da dove parte un conduttore fisso $ABCDEFG$ formato da una lamina di rame, con la porzione CDE circolare, e le parti CBA, EFG sono isolate tra loro dalla seta che le ricopre. In G questo conduttore è saldato a un tubo di rame GH, sormontato da una coppa I, che comunica con il tubo mediante il supporto HI dello stesso metallo. Dalla coppa I parte un conduttore mobile $IKLMNPQRS$, la cui parte MNP è circolare; è avvolto da seta nelle parti MLK e PQR affinché siano isolati, ed è tenuta orizzontale per mezzo di un contrappeso a fissato su una circonferenza di cerchio che un prolungamento bcg della lamina di cui è composto il conduttore mobile forma attorno al tubo GH. La coppa S è sostenuta da un'asta ST, avente lo stesso asse di GH, pure essa isolata da una sostanza resinosa che si cola nel tubo. Il piede dell'asta ST è saldato al conduttore fisso $TUVXYZA'$, che esce dal tubo GH mediante un'apertura molto grande in modo che la resina lo isoli completamente in questo punto che essa fa nel resto del tubo GH, nei confronti di ST. Questo conduttore, alla sua uscita dal tubo, è rivestito di seta per impedire alla porzione TUV di comunicare con YZA'. Quanto alla porzione VXY, essa è circolare, e l'estremità A' immersa in una seconda cavità A' scavata nella tavola e piene di mercurio.

I centri O, O', O" delle tre porzioni circolari sono in linea retta; i raggi dei cerchi che esse formano sono in proporzione geometrica continua e si pone dapprima il conduttore mobile in modo che le distanze $OO', O'O$" siano nello stesso rapporto dei termini consecutivi di questa proporzione; in modo che i cerchi O e O' formino un sistema simile a quello dei cerchi O' e O". Si immerge allora il reoforo positivo in A e quello negativo in A', la corrente percorre successivamente i tre cerchi i cui centri sono O, O', O" che si respingono a due a due, poiché la corrente va in versi opposti nelle parti vicine.

Lo scopo dell'esperienza che si fa con questo strumento è di provare che il conduttore mobile rimane in equilibrio nella posizione dove il rapporto OO' a $O'O$" è lo stesso di quello dei raggi dei due cerchi consecutivi, e che se lo si sposta da questa posizione esso ritorna oscillando attorno ad essa.

Spiego ora come si deduce rigorosamente da questi casi di equilibrio la formula con la quale ho rappresentato l'azione reciproca di due elementi di corrente voltaica, mostrando che è la sola forza agente lungo la retta che ne unisce i punti medi che possa accordarsi con questi dati dell'esperienza. Dapprima è evidente che l'azione reciproca di due elementi di corrente elettrica è proporzionale alla loro lunghezza; infatti, supponendoli divisi in parti infinitamente piccole uguali alla loro misura comune, tutte le attrazioni o repulsioni di queste parti, potendo essere considerate come dirette lungo una stessa retta, si sommano necessariamente. Questa stessa azione deve pure essere proporzionale alle intensità delle due correnti. Per esprimere con un numero l'intensità di una corrente qualsiasi, si immaginerà di scegliere un'altra corrente arbitraria come termine di confronto, e di prendere due elementi uguali in ognuna di queste correnti, e di cercare il rapporto tra le azioni che si esercitano alla stessa distanza su uno stesso elemento di ogni altra corrente, nella situazione dove è a loro parallela e dove la sua direzione è perpendicolare alle rette che congiungono il suo punto medio con quello degli altri elementi. Questo rapporto sarà la misura di una delle intensità, prendendo l'altra per unità.

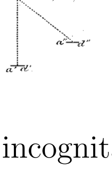
Indicando con i e i' il rapporto tra le intensità delle due correnti date e l'intensità della corrente presa come unità, e con ds, ds' le lunghezze degli elementi considerati in ognuna di esse; la loro azione reciproca, quando esse saranno perpendicolari alla retta che unisce i loro punti medi, parallele tra loro e poste alla distanza unitaria l'una dall'altra, sarà espressa da $ii'dsds'$; che prendiamo con il segno $+$ quando le due correnti, che vanno nello stesso verso, si attirano, e con il segno $-$ nel caso contrario.

Se si volesse riferire l'azione di due elementi alla gravità, si prenderebbe per unità delle forze il peso dell'unità di volume di una materia convenuta. Ma allora la corrente presa per unità non sarebbe più arbitraria; dovrebbe essere tale che l'attrazione tra due dei suoi elementi ds, ds', posto come abbiamo detto, possa sostenere un peso che stesse all'unità di peso come $dsds'$ sta a 1. Una volta determinata questa corrente, il prodotto $ii'dsds'$ designerebbe il rapporto tra l'attrazione di due elementi di intensità qualunque, sempre nella stessa situazione, al peso che si avrebbe scelto per unità di forza.

Ciò posto, se si considerano due elementi posti in un modo qualunque, la loro azione reciproca dipenderà dalla loro lunghezza, dalle intensità delle correnti di cui fanno parte, e dalla loro posizione rispettiva. Questa posizione si può determinare per mezzo della lunghezza r della retta che unisce i loro punti medi. degli angoli θ e θ' che formano con uno stesso prolungamento di questa retta, le direzioni dei due elementi presi nel verso delle loro correnti rispettive, e infine dall'angolo ω che formano tra loro i piano tracciati per ognuna di queste direzioni e dalla retta che unisce i punti medi degli elementi.

La considerazione delle diverse attrazioni o repulsioni osservate in natura mi portava a credere che la forza di cui cercavo l'espressione, agisse in ragione inversa della distanza; la supposi, per maggiore generalità, in ragione inversa della potenza n-esima di questa distanza, essendo n una costante da determinare.

Fig. 5.

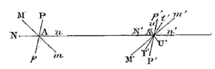


Allora rappresentando con ρ,la funzione incognita degli angoli θ, θ', ω, ebbi $\frac{\rho ii'dsds'}{r^n}$ per l'espressione generale dell'azione di due elementi ds, ds' di due correnti aventi intensità i e i'. Mi rimaneva da determinare la funzione ρ, e considerai dapprima per questa due elementi $ad, a'd'$ (fig. 5) paralleli tra loro, perpendicolari alla retta che unisce i loro punti medi e posti a una distanza qualunque r l'uno dall'altro; essendo espressa la loro azione secondo quanto detto da

$\frac{\rho ii'dsds'}{r^n}$, supposi che ad restasse fisso e che $a'd'$ fosse trasportato parallelamente a se stesso, in modo che il suo punto medio fosse sempre alla stessa distanza da quello di ad; essendo ω nullo, il valore della loro mutua azione poteva dipendere solo dagli angoli indicati prima con θ e θ' e che, in questo caso, sono uguali o supplementari, secondo che le correnti sono dirette nello stesso verso o in verso opposto; trovai per questo valore $\frac{ii'dsds'\varphi(\theta,\theta')}{r^n}$. Chiamando k la costante positiva o negativa alla quale si riduce $\varphi(\theta,\theta')$ quando l'elemento $a'd'$ è in $a"'d"'$ nel prolungamento di ad e diretta nello stesso verso, ottenni $\frac{kii'dsds'}{r^n}$ per l'espressione dell'azione di ad su $a"'d"'$; in questa espressione la costante k rappresenta il rapporto tra l'azione di ad su $a"'d"'$ e quella di ad su $a'd'$, rapporto indipendente dalla distanza r, dalle intensità i, i' e dalle lunghezze ds, ds' dei due elementi considerati.

Questi valori dell'azione elettrodinamica, nei due casi più semplici, bastano a trovare la forma generale della funzione ρ, partendo dall'esperienza che mostra che l'attrazione di un elemento rettilineo infinitamente piccola è la stessa di quella di un altro elemento sinuoso qualsiasi, delimitato alle due estremità dal primo, e da questo teorema che vado a stabilire, cioè: una porzione infinitamente piccola di corrente elettrica non esercita alcuna azione su un'altra porzione infinitamente piccola di una corrente posta in un piano che passa per il suo punto medio e che è perpendicolare alla sua direzione. Infatti, le due metà del primo elemento producono sul secondo azioni uguali, l'una attrattiva e l'altra repulsiva, poiché nell'una di queste metà la corrente va avvicinandosi e nell'altra allontanandosi dalla perpendicolare comune. Queste due forze uguali formano un angolo che tende verso due angoli retti al tendere dell'elemento a zero. La loro risultante è quindi infinitamente piccola rispetto a queste forze e deve, di conseguenza, essere trascurata nel calcolo.

Fig. 6.



Ciò posto, siano (fig. 6) $Mm = ds$ e $M'm = ds'$, due elementi di correnti elettriche, i cui punti medi siano nei punti A e A'; facciamo passare il piano $MA'm$ per la retta AA' che li unisce e per l'elemento Mm. Sostituiamo alla porzione della corrente ds che percorre questo elemento, la sua proiezione $Nn = ds\cos\theta$ sulla retta AA' e la sua proiezione $Pp = ds\sin\theta$ sulla perpendicolare elevata in A questa retta nel piano MA'm; sostituiamo poi alla porzione di corrente ds' che percorre $M'm'$ la sua proiezione $N'n' = ds'\cos\theta$ sulla retta AA' e la sua proiezione $P'p' = ds'\sin\theta'$ sulla perpendicolare a AA' tracciata dal punto A' su AA' nel piano $M'Am'$; sostituiamo infine quest'ultima con la sua proiezione $Tt' = ds'\sin\theta'\cos\omega$ sul piano $MA'm$ e con la sua proiezione $U'u' = ds'\sin\theta'\sin\omega$ sulla perpendicolare a questo piano tracciato dal punto A'; secondo la legge stabilita prima, l'azione di due elementi ds e ds' sarà la stessa di quella dell'insieme delle due parti di correnti $ds\cos\theta$ e $ds\sin\theta$ su quella delle tre parti $ds'\cos\theta'$, $ds'\sin\theta\cos\omega$, $ds'\sin\theta'\sin\omega$; quest'ultima avente il suo punto medio nel piano Mam al quale è perpendicolare, non vi sarà alcuna azione tra essa e le due parti $ds\cos\theta$, $ds\sin\theta$, che sono in questo piano. Non si potrà più, per lo stesso motivo, averne qualcuna tra le parti $ds\cos\theta$, $ds'\sin\theta'\cos\omega$, né tra le parti $ds\sin\theta$, $ds'\cos\theta'$, poiché predisponendo con la retta AA' un piano perpendicolare al piano $MA'm$, $ds\cos\theta$ e $ds'\cos\theta'$ si trovano in questo piano, e le parti $ds'\sin\theta'\cos\omega$ e $ds\sin\theta$ gli sono perpendicolari e hanno i loro punti medi in questo stesso piano. L'azione dei due elementi ds e ds' si riduce quindi alla riunione delle due azioni rimanenti, cioè: l'azione reciproca di $ds\sin\theta$ e di $ds'\sin\theta'\cos\omega$ e a quella di $ds\cos\theta$ e di $ds'\cos\theta'$, essendo queste tutte dirette lungo la retta AA' che unisce i punti medi delle parti di correnti tra le quali esse si esercitano, basta sommarle per avere l'azione reciproca dei due elementi ds e ds'. Le parti $ds\sin\theta$ e $ds'\sin\theta'\cos\omega$ sono in uno stesso piano, ed entrambe perpendicolari alla retta AA'; la loro azione reciproca lungo questa retta è quindi, da quanto visto, uguale a

$$\frac{ii'dsds'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega}{r^n}$$

e quella delle due parti $ds\cos\theta$ e $ds'\cos\theta'$ dirette lungo la stessa retta AA', vale

$$\frac{kii'dsds'\cos\theta\cos\theta'}{r^n}$$

e, di conseguenza, l'azione dei due elementi ds, ds' l'uno sull'altro è necessariamente espressa da

$$\frac{ii'dsds'}{r^n}\left(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega + k\cos\theta\cos\theta'\right)$$

Si semplifica questa formula introducendovi l'angolo ϵ dei due elementi invece di ω; poiché considerando il triangolo sferico i cui lati sarebbero $\theta, \theta', \epsilon$, si ha

$$\cos\epsilon = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega$$

da cui

$$\sin\theta\sin\theta'\cos\omega = \cos\epsilon - \cos\theta\cos\theta'$$

sostituendo nella formula precedente e ponendo $k - 1 = h$, essa diviene

$$\frac{ii'dsds'}{r^n}\left(\cos\epsilon + h\cos\theta\cos\theta'\right)$$

ed è opportuno osservare che essa cambia segno quando una sola delle correnti, per esempio quella dell'elemento ds, prende una direzione diametralmente opposta a quella che aveva, poiché allora $\cos\theta$ e $\cos\epsilon$ cambiano di segno, e $\cos\theta'$ rimane lo stesso. Questo valore dell'azione reciproca di due elementi è stata dedotta solo dalla sostituzione delle proiezioni di un elemento a questo stesso elemento; ma è facile assicurarsi che essa esprime la possibilità di sostituire a un elemento un contorno poligonale qualsiasi, e, di conseguenza, un arco qualunque di curva chiuso alle sue estremità, purché tutte le dimensioni di questo poligono o di questa curva siano infinitamente piccole.

Siano, infatti, $ds_1, ds_2, ...ds_m$ i diversi lati del poligono infinitamente piccolo sostituito a ds; la direzione AA' potrà sempre essere considerata come quella delle linee che uniscono i punti medi rispettivi di questi lati con A'.

Siano $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ gli angoli che si formano rispettivamente con AA'; e $\epsilon_1, \epsilon_2, ...\epsilon_m$ quelli che si formano con $M'm'$, indicando, secondo l'uso, con $\sum$ una somma di termini della stessa forma, la somma delle azioni dei lati $ds_1, ds_2, ...ds_m$ su ds', sarà

$$\frac{ii'ds'}{r^n}\left(\sum ds_1\cos\epsilon_1 + h\cos\theta'\sum ds_1\cos\theta_1\right)$$

Ora $\sum ds_1\cos\epsilon_1$ è la proiezione del contorno poligonale sulla direzione di ds' ed è, di conseguenza, uguale alla proiezione di ds sulla stessa direzione, cioè a $ds\cos\epsilon$; analogamente $\sum ds_1\cos\theta_1$ è uguale alla proiezione di ds su AA' che è $ds\cos\theta$; l'azione esercitata su ds' dal contorno poligonale chiuso alle estremità di ds ha quindi per espressione

$$\frac{ii'ds'}{r^n}\left(ds\cos\epsilon + hds\cos\theta\cos\theta'\right)$$

ed è la stessa di quella di ds su ds'.

Essendo questa conseguenza indipendente dal numero di lati $ds_1, ds_2, ...ds_m$, si presenterà per un arco infinitamente piccolo di una curva qualsiasi.

Si proverebbe allo stesso modo che l'azione di ds' su ds, potendo essere sostituita da quella di una curva qualsiasi infinitamente piccola, le cui estremità sarebbero le stesse di quelle di ds', eserciterebbe su ciascuno degli elementi della piccola curva che abbiamo già sostituito a ds e, di conseguenza, su questa piccola curva stessa. Così la formula che abbiamo trovato esprime che un elemento curvilineo qualunque produce lo stesso effetto della porzione infinitamente piccola di corrente rettilinea chiusa alle stesse estremità, qualunque siano d'altra parte le costanti n e h. L'esperienza con la quale si constata questo risultato non può quindi servire per nulla a determinare queste costanti.

Faremo allora ricorso ai due altri casi di equilibrio dei quali abbiamo già parlato. Ma prima trasformeremo l'espressione precedente dell'azione di due elementi di correnti voltaiche, introducendovi i differenziali parziali della distanza di questi due elementi.

Siano x, y, z, le coordinate del primo punto, e x', y', z' quelle del secondo, si avrà

$$\cos\theta = \frac{x-x'}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz}{ds}$$

$$\cos\theta' = \frac{x-x'}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz'}{ds'}$$

ma si ha

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

da cui, prendendo successivamente i coefficienti differenziali parziali come rapporti tra s e s',

$$r\frac{dr}{ds} = (x-x')\frac{dx}{ds} + (y-y')\frac{dy}{ds} + (z-z')\frac{dz}{ds}$$

$$r\frac{dr'}{ds'} = (x-x')\frac{dx'}{ds'} + (y-y')\frac{dy'}{ds'} + (z-z')\frac{dz'}{ds'}$$

così

$$\cos\theta = \tfrac{dr}{ds} \quad \cos\theta' = -\tfrac{dr}{ds'}$$

Per avere il valore di $\cos\epsilon$, osserveremo che

$$\tfrac{dx}{ds}, \tfrac{dy}{ds}, \tfrac{dz}{ds} \quad e \quad \tfrac{dx'}{ds'}, \tfrac{dy'}{ds'}, \tfrac{dz'}{ds'}$$

sono i coseni degli angoli che ds e ds' formano con i tre assi, e ne concluderemo

$$\cos\epsilon = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz'}{ds'}$$

Differenziando rispetto a s' l'equazione precedente che ha $r\frac{dr}{ds}$, si trova

$$r\frac{d^2r}{dsds'} + \frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr'}{ds'} = -\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz'}{ds'} = -\cos\epsilon$$

Se si sostituisce, nella formula che rappresenta l'azione mutua dei due elementi ds, ds', invece di $\cos\theta, \cos\theta', \cos\epsilon$, i valori che otteniamo, questa formula diverrà, sostituendo $1+h$ con il suo uguale k,

$$-\frac{ii'dsds'}{r^n}\left(r\frac{d^2r}{dsds'} + \frac{kdr}{ds}\cdot\frac{dr'}{ds'}\right)$$

che si può mettere nella forma

$$-\frac{ii'dsds'}{r^n}\cdot\frac{1}{r^{k-1}}\cdot\frac{d\left(r^k\frac{dr}{ds}\right)}{ds'}$$

o infine

$$ii'r^{1-n-k}\frac{d\left(r^k\frac{dr}{ds}\right)}{ds'}dsds'$$

Si potrebbe ancora darle la forma seguente

$$-\frac{ii'}{1+k}r^{1-n-k}\frac{d^2\left(r^{1+k}\right)}{dsds'}dsds'$$

Esaminiamo ora ciò che risulta dal terzo caso di equilibrio di cui abbiamo parlato, e che dimostra che la componente dell'azione di un circuito chiuso qualunque su un elemento, lungo la direzione di questo elemento, è sempre nulla, qualunque sia la forma del circuito. Indicando con ds' l'elemento in questione, l'azione di un elemento ds del circuito chiuso su ds' sarà, da quanto precede,

$$-ii'ds'r^{1-n-k}\frac{d\left(r^k\frac{dr}{ds'}\right)}{ds}ds$$

o, sostituendo $\frac{dr}{ds'}$ con $-\cos\theta'$

$$ii'ds'r^{1-n-k}\frac{d\left(r^k\cos\theta'\right)}{ds}ds$$

la componente di questa azione lungo ds' si otterrà moltiplicando questa espressione per $\cos\theta'$ e sarà

$$ii'ds'r^{1-n-k}\cos\theta'\frac{d\left(r^k\cos\theta'\right)}{ds}ds$$

Questo differenziale integrato sull'intera estensione del circuito s darà la componente tangenziale totale, e dovrà essere nullo, qualunque sia la forma di questo circuito. Integrando per parti, dopo averlo scritto così

$$ii'ds'r^{1-n-2k}r^k\cos\theta'\frac{d\left(r^k\cos\theta'\right)}{ds}ds$$

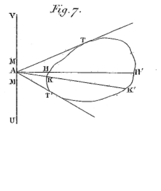
avremo

$$\frac{1}{2}ii'ds\left[r^{1-n}\cos^2\theta'-(1-n-2k)\int r^{-n}\cos^2\theta'dr\right]$$

Il primo termine $r^{1-n}\cos\theta'$ si annulla ai limiti. Quanto all'integrale $\int r^{-n}\cos^2\theta'dr$, è facile immaginare un circuito chiuso per il quale non si riduca a zero. Infatti, se si interseca questo circuito con superfici sferiche molto ravvicinate aventi come centro il punto medio dell'elemento ds', i due punti dove ciascuno di queste sfere intersecheranno il circuito daranno lo stesso valore per r e valori uguali e di segno contrario per dr; ma i valori di $\cos^2\theta'$ potranno essere differenti, e vi sarà un'infinità di modi di fare in modo che i quadrati di tutti i coseni relativi ai punti posti da uno stesso lato tra i punti estremi del circuito siano minori di quelli relativi ai punti corrispondenti sull'altro lato; ora, in questo caso, l'integrale non si annullerà; e siccome l'espressione sopra deve essere nulla, qualunque sia la forma del circuito, bisogna che il coefficiente $1-n-2k$ di questo integrale sia nullo, ciò che dà tra n e k questa prima relazione $1-n-2k=0$.

Prima di cercare una seconda equazione per determinare queste due costanti, inizieremo a provare che k è negativo e, di conseguenza, che $n=1-2k$ è maggiore di 1; ricorreremo perciò a un fatto facilmente constatabile dall'esperienza, cioè che un conduttore rettilineo indefinito attrae un circuito chiuso, quando la corrente elettrica di questo circuito va nello stesso verso di quello del conduttore nella parte che è la più vicina, e che esso respinge nel caso contrario.

Fig. 7.



Sia UV (fig. 7) il conduttore rettilineo indefinito; supponiamo per maggiore semplicità che il circuito chiuso $THKT'H'K'$ sia nello stesso piano del filo conduttore UV, e cerchiamo l'azione esercitata da un elemento qualunque MM' di quest'ultimo. Perciò tracciamo dal punto medio A di questo elemento dei raggi vettori a tutti questi punti del circuito, e cerchiamo l'azione perpendicolare a UV esercitata da questo elemento sul circuito.

La componente perpendicolare a UV dell'azione esercitata da $MM' = ds'$ su un elemento $KH = ds$ si otterrà moltiplicando l'espressione di questa azione per $\sin\theta'$; essa sarà pertanto, osservando che $1 - n - 2k = 0$,

$$ii'ds' \sin\theta' \frac{d\left(r^k \cos\theta'\right)}{ds} ds$$

o

$$\frac{1}{2} ii'ds' \tan\theta' \frac{d\left(r^{2k} \cos^2\theta'\right)}{ds} ds$$

espressione che deve essere integrata in tutta l'estensione del circuito. L'integrazione per parti darà

$$\frac{1}{2} ii'ds' \left(r^{2k} \sin\theta' \cos\theta' - \int r^{2k} d\theta' \right)$$

Il primo termine si annulla ai limiti, resta soltanto

$$-\frac{1}{2} ii'ds' \int r^{2k} d\theta'$$

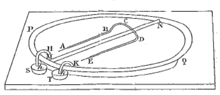
Considerando ora i due elementi $KH, K'H'$ compresi tra due stessi raggi consecutivi, $d\theta'$ è lo stesso da una parte e dall'altra, ma deve essere preso con un segno contrario, di modo che ponendo $AH = r$, $AH' = r'$, si ha per l'azione riunita dei due elementi

$$-\frac{1}{2} ii'ds' \left[\int \left(r'^{2k} - r?2k \right) d\theta' \right]$$

dove supponiamo che r' è maggiore di r. Il termine di questo integrale che risulta dall'azione della parte THT' convesso verso UV prevarrà su quella che è prodotto dall'azione della parte concava THT' se k è negativo; il contrario avverrà se k è positivo, e non vi sarà azione se k è nullo. Le stesse conseguenze avverranno per tutti gli elementi di UV, ne segue che la parte convessa verso UV avrà maggiore influenza sul movimento del circuito della parte concava, se $k < 0$, uguale se $k = 0$ e minore se $k > 0$. Ora, l'esperienza prova che esso ne ha di più. Si ha quindi $k < 0$, e di conseguenza $n > 1$, poiché $n = 1 - 2k$.

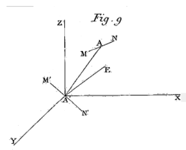
Si deduce da ciò questa conseguenza significativa, che le parti di una stessa corrente rettilinea si respingono; poiché se di pone $\theta = 0$, $\theta' = 0$, la formula che dà l'attrazione di due elementi, diviene $\frac{kii'dsds'}{r^n}$; e siccome essa è negativa, poiché k lo è, vi è repulsione.

Fig. 8.



Questo è ciò che ho verificato con l'esperienza che ora descrivo. Si prende un recipiente di vetro PQ (fig. 8) separato da un parete MN in due comparti uguali e riempiti di mercurio, vi si pone un filo di rame ricoperto di seta $ABCDE$, i cui lati AB, ED, posti parallelamente alla parete MN, fluttuano sul mercurio con il quale comunicano le estremità scoperte A ed E di questi lati. Mettendo i reofori nelle capsule S e T, il cui mercurio comunica con quello del recipiente PQ mediante le parti del conduttore hH, kK, si stabiliscono due correnti, ognuna delle quali ha per conduttore una parte di mercurio e una parte solida: qualunque sia la direzione della corrente, si vedono sempre i due fili AB, ED muoversi parallelamente alla parete MN allontanandosi dai punti H e K, e ciò indica una repulsione per ogni filo tra la corrente stabilita nel mercurio e il suo prolungamento nel filo stesso. Secondo il verso della corrente, il movimento del filo di rame è più o meno facile, perché, in un caso, l'azione esercitata dal globo sulla porzione BCD di questo filo, si aggiunge all'effetto ottenuto e che nell'altro, al contrario, essa lo diminuisce e ne deve essere sottratta.

Esaminiamo ora l'azione che esercita una corrente elettrica formante un circuito chiuso, o un sistema di correnti formanti pure circuiti chiusi, su un elemento di corrente elettrica.



Prendiamo l'origine delle coordinate nel punto medio A dell'elemento proposto $M'N'$, e chiamiamo λ, μ, ν, gli angoli che forma con i tre assi. Sia MN un elemento qualunque di corrente formante un circuito chiuso, o di una delle correnti formanti pure circuiti chiusi che formano il sistema di correnti considerate, indicando con ds' e ds gli elementi $M'N', MN, r$ la distanza AA' dal loro punto medio e θ' l'angolo della corrente $M'N'$ con AA', formula che abbiamo trovato in precedenza per esprimere l'azione reciproca di due elementi diverrà, sostituendo $\frac{dr}{ds}$ con $-\cos\theta'$,

$$i'ds'r^k\frac{d\left(r^n\cos\theta'\right)}{ds}ds$$

Gli angoli che AA' forma con i tre assi aventi per coseni $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ si ha

$$\cos\theta' = \frac{x}{r}\cos\lambda + \frac{y}{r}\cos\mu + \frac{z}{r}\cos\nu$$

sostituendo questo valore a $\cos\theta$, e moltiplicando per $\frac{x}{r}$, troveremo per l'espressione della componente lungo l'asse x,

$$ii'ds'r^{k-1}xd\left(r^{k-1}x\cos\lambda + r^{k-1}y\cos\mu + r^{k-1}z\cos\nu\right)$$

il segno d si riferisce solamente, tranne nel fattore ds' ai differenziali presi facendo variare s, questa espressione si può scrivere così

$$\begin{aligned}
&= ii'ds'\left[\cos\lambda r^{k-1}xd\left(r^{k-1}x\right) + \tfrac{x\cos\mu}{y}r^{k-1}yd\left(r^{k-1}y\right) + \tfrac{x\cos\nu}{z}r^{k-1}zd\left(r^{k-1}z\right)\right]\\
&= ii'ds'\left[\cos\lambda d\left(r^{2k-2}x^2\right) + \tfrac{x\cos\mu}{y}d\left(r^{2k-2}y^2\right) + \tfrac{x\cos\nu}{z}d\left(r^{2k-2}z^2\right)\right]\\
&= ii'ds'\left[d\tfrac{x^2\cos\lambda + xy\cos\mu + xz\cos\nu}{r^{n+1}} - \tfrac{y^2\cos\mu}{r^{n+1}}d\tfrac{x}{y} - \tfrac{z^2\cos\nu}{r^{n+1}}d\tfrac{x}{y}\right]\\
&= \tfrac{1}{2}ii'ds'\left[d\tfrac{x\cos\theta'}{r^n} + \tfrac{xdy-ydx}{r^{n+1}}\cos\mu - \tfrac{zdx-xdz}{r^{n+1}}\cos\nu\right]
\end{aligned}$$

sostituendo $2k-2$ con il suo valore $-n-1$.

Se si rappresenta con r_1, x_1, θ_1' e $r_2, x_2\theta_2'$ i valori di r, x, θ', alle due estremità dell'arco s e con X la risultante lungo l'asse x di tutte le forze esercitate dagli elementi di questo arco su ds', si avrà

$$X = \frac{1}{2}ii'ds'\left[\frac{x^2\cos\theta_2'}{r_2^n} - \frac{x_1\cos\theta_1'}{r_1^n} + \cos\mu\int\frac{xdy-ydx}{r^{n+1}} - \cos\nu\int\frac{zdx-xdz}{r^{n+1}}\right]$$

Se questo arco forma un circuito chiuso r_2, x_2, θ_2' saranno uguali a r_1, x_1, θ_1' e il valore di X si ridurrà a

$$X = \frac{1}{2}ii'ds' \left[\cos\mu \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} - \cos\nu \int \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}}\right]$$

Indicando con Y e Z le forze lungo gli assi delle y e z risultanti dall'azione degli stessi elementi su ds', si troverà con un calcolo simile

$$\begin{array}{l} Y = \frac{1}{2}ii'ds' \left[\cos\nu \int \frac{ydz - zdy}{r^{n+1}} - \cos\lambda \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}}\right] \\ Z = \frac{1}{2}ii'ds' \left[\cos\lambda \int \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} - \cos\mu \int \frac{ydz - zdy}{r^{n+1}}\right] \end{array}$$

e ponendo

$$\int \frac{ydz - zdy}{r^{n+1}} = A \quad \int \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} = B \quad \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} = C$$

si otterrà

$$\begin{array}{rcl} X & = & \frac{1}{2}ii'ds' \left(C\cos\mu - B\cos\nu\right) \\ Y & = & \frac{1}{2}ii'ds' \left(A\cos\nu - C\cos\lambda\right) \\ Z & = & \frac{1}{2}ii'ds' \left(B\cos\lambda - A\cos\mu\right) \end{array}$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni per A, la seconda per B e la terza per C, si trova $AX + BY + CZ = 0$; e se si immagina per l'origine una retta $A'E$ che formi con gli assi degli angoli i cui coseni siano rispettivamente

$$\frac{A}{B} = \cos\xi_1 \quad \frac{B}{D} = \cos\eta_1 \quad \frac{C}{D} = \cos\zeta_1$$

e supponendo, per brevità

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = D$$

essa sarà perpendicolare sulla risultante R delle tre forze X, Y, Z, che forma con gli assi degli angoli i cui coseni sono

$$\frac{X}{R} \quad \frac{Y}{R} \quad \frac{Z}{R}$$

poiché si ha, in virtù dell'equazione precedente

$$\frac{A}{D} \cdot \frac{X}{R} + \frac{B}{D} \cdot \frac{Y}{R} + \frac{C}{D} \cdot \frac{Z}{R} = 0$$

Si deve osservare che la retta che abbiamo determinato è del tutto indipendente dalla direzione dell'elemento $M'N'$; poiché essa si deduce immediatamente dagli integrali A, B, C che dipendono solo dal circuito chiuso e dalla posizione dei piani coordinati e che sono le somme delle proiezioni sui piani coordinati della aree dei triangoli che hanno il loro vertice nel punto medio dell'elemento ds', e come basi i diversi elementi dei circuiti chiusi s, essendo tutte queste aree divise per la potenza $n + 1$ del raggio vettore r. Essendo la risultante perpendicolare a questa retta $A'E$ che chiamerò direttrice, essa si trova, qualunque sia la direzione dell'elemento, nel piano innalzato dal punto A' perpendicolarmente a $A'E$; darò a questo piano il nome di piano direttore. Se si fa la somma dei quadrati di X, Y, Z, si troverà per il valore della risultante dell'azione del circuito unico o dell'insieme di circuiti considerati,

$$= \frac{1}{2}Dii'ds' \sqrt{(\cos\zeta_1\cos\mu - \cos\eta_1\cos\nu)^2 + (\cos\xi_1\cos\nu - \cos\zeta_1\cos\lambda)^2 + (\cos\eta_1\cos\lambda - \cos\xi_1\cos\mu)^2}$$

o, chiamando ϵ l'angolo dell'elemento ds' con la direttrice

$$R = \frac{1}{2}Dii'ds' \sin\epsilon$$

È facile determinare la componente di questa azione in un piano dato passante per l'elemento ds' e formante un angolo φ con il piano tracciato da ds' e dalla direttrice. Infatti, la risultante R essendo perpendicolare a quest'ultimo piano, la sua componente sul piano dato sarà

$$R\sin\varphi \quad o \quad \frac{1}{2}Dii'ds' \sin\epsilon \sin\varphi$$

Ora, $\sin\epsilon \sin\varphi$ è uguale al seno dell'angolo ψ che la direttrice forma con il piano dato. È ciò che si deduce immediatamente dall'angolo triedro formato da ds', dalla direttrice e dalla sua proiezione sul piano dato. La componente in questo piano avrà quindi per espressione

$$\frac{1}{2}Dii'ds' \sin\psi$$

Questa espressione si può mettere sotto un'altra forma osservando che ψ è il complementare dell'angolo che forma la direttrice con la normale al piano nel quale si considera l'azione. Si ha quindi, chiamando ξ, η, ζ gli angoli che quest'ultima retta forma con i tre assi,

$$\sin\psi = \frac{A}{D}\cos\xi + \frac{B}{D}\cos\eta + \frac{C}{D}\cos\zeta$$

e l'espressione dell'azione diviene

$$\frac{1}{2}ii'ds' \left(A\cos\xi + B\cos\eta + C\cos\zeta\right)$$

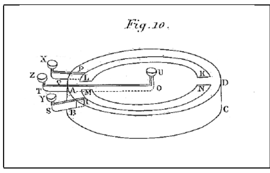
o

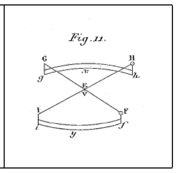
$$\frac{1}{2}Uii'ds'$$

ponendo

$$U = A\cos\xi + B\cos\eta + C\cos\zeta$$

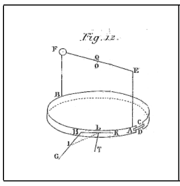
Si vede che questa azione è indipendente dalla direzione dell'elemento nel piano considerato, la indicheremo con il nome di azione esercitata nel piano, e concluderemo da ciò che essa rimane sempre la stessa quando si danno successivamente all'elemento differenti direzioni in uno stesso piano, così come quella che la terra esercita su un conduttore mobile in un piano fisso è prodotta da correnti elettriche formanti circuiti chiusi, e le cui distanze dal conduttore sono molto grandi per essere considerate come costanti mentre si muove in questo piano, essa avrà sempre lo stesso valore nelle diverse posizioni che prenderà successivamente il conduttore, poiché le azioni esercitate su ciascun elemento di cui è composto rimangono sempre le stesse e sempre perpendicolari a questi elementi, e la loro risultante non potrà variare né in modulo né in direzione rispetto al conduttore. Questa direzione cambierà d'altra parte in un piano fisso seguendo il movimento di questo conduttore: è infatti ciò che si osserva a proposito di un conduttore che è mobile in un piano orizzontale, e che si dirige successivamente nei diversi azimut:

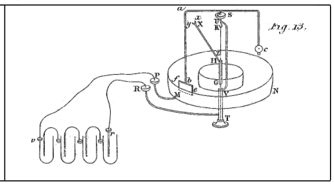




Si può verificare questo risultato con l'esperienza seguente: in un disco di legno $ABCD$ (fig. 10), si scava un canaletto circolare $KLMN$ nel quale si pongono due contenitori in rame KL, MN della stessa forma, e che occupano ognuno quasi la semicirconferenza del canaletto in modo tuttavia che rimangano tra di essi due intervalli KN, LM, che si riempiono con mastice isolante; a ciascuno di questi contenitori sono saldate le due lamine di rame PQ, RS, inserite nel disco e che portano le coppette X, Y, destinate a mettere, per mezzo del mercurio che contengono, i contenitori KL, MN in comunicazione con i reofori di una pila molto forte; nel disco è inserita un'altra lamina TO portante la coppetta Z, dove si mette anche un poco di mercurio; questa lamina TO è saldata al centro O del disco a un'asta verticale sulla quale è saldata una quarta coppetta U, il cui fondo è fornito di un pezzo di vetro o di agata per rendere più mobile la struttura a croce di cui parleremo, ma i cui bordi sono molto innalzati per essere a contatto con il mercurio che si mette in questa coppa; essa riceve la punta V (fig. 11) che serve da perno alla struttura a croce $FGHI$, i cui bracci EG, EI, sono uguali tra loro e saldati in G, I alle manine gxh, iyf che pescano nell'acqua acidificata dei recipienti EH, EF, senza comunicare con essi. Queste due lamine sono uguale e simili e piegate ad arco di cerchio di circa 90°. Quando si immergono i reofori, una nella coppetta Z, l'altro nell'una o nell'altra delle coppette X o Y, la corrente passa solo per una dei rami della struttura a croce, da est a ovest per il sud quando la corrente va dalla circonferenza al centro, e nel verso contrario quando va dal centro alla circonferenza, conformemente alla spiegazione che ho dato di questo fenomeno, e che si può vedere nel mio *Recueil d'Observations électro-dynamiques*, pag. 284. Ma quando li si immerge nelle coppette X e Y, la corrente che percorre in senso contrario i due rami EG, EI, la struttura a croce rimane immobile in qualche situazione in cui la si abbia posta, quando, per esempio, uno dei rami è parallelo e l'altro perpendicolare al meridiano magnetico, e ciò anche quando sfregando leggermente sul disco $ABCD$, si aumenta, con piccole le piccole scosse che ne derivano, la mobilità dello strumento. Piegando un poco i rami della struttura attorno al punto E, si può far assumere a loro diversi angoli, e il risultato dell'esperienza è sempre lo stesso. Ne segue evidentemente che la forza con la quale la terra agisce su una porzione di conduttore, perpendicolarmente alla sua direzione, per muoverlo in un piano orizzontale, e, di conseguenza, in un piano dato di posizione rispetto al sistema delle correnti terrestri, è la stessa, qualunque sia la direzione, in questo piano, della porzione del conduttore, ciò che è precisamente il risultato del calcolo che si tratterà di verificare.

È bene osservare che l'azione delle correnti dell'acqua acidificata sui loro prolungamenti nelle lamine gh, if non altera in alcun modo l'equilibrio dello strumento; poiché è facile vedere che l'azione di cui qui si tratta tende a fa ruotare la lamina gh attorno alla punta V nel verso hxg, e la lamina if nel verso fyi, da cui risulta, a causa dell'eguaglianza di queste lamine, due momenti di rotazione uguali e di segni contrari che si annullano.





Si sa che è a M. Savary che è dovuta l'esperienza con la quale si constata questa azione; questa esperienza si può fare più comodamente sostituendo la spirale in filo di rame dello strumento utlizzato, con una lamina circolare dello stesso metallo. Questa lamina ABC (fig. 12) forma un arco si cerchio quasi uguale a un'intera circonferenza; ma le sue estremità A e C sono separate da un pezzo D di una sostanza isolante. Si mette una delle sue estremità A, per esempio, a contatto con un reoforo con la punta O che si pone nella coppetta S (fig. 13) piena di mercurio; questa è unita con il filo metallico STR alla coppetta R nella quale è immerso uno dei reofori. Questa punta O (fig. 12) è a contatto con l'estremità A tramite il filo di rame AEQ il cui prolungamento QF sostiene in F la lamina ABC con un anello di sostanza isolante, che circonda in questo punto il filo di rame. Quando la punta O riposa sul fondo della coppetta S (fig. 13), la lamina ABC (fig. 12) è immersa nell'acqua acidificata contenuta nel recipiente di rame MN (fig. 13) che comunica con la coppetta P dove si mette l'altro reoforo; si vede allora ruotare questa lamina nel verso CBA, e purché la pila sia abbastanza forte, il moto resta sempre in questo verso quando si invertono i contatti con la pila, cambiando reciprocamente i due reofori dalla coppetta P alla R, ciò che prova che questo movimento non è dovuto all'azione della terra e può derivare solo da quello che le correnti dell'acqua acidificata esercitano sulla corrente della lamina circolare ABC (fig. 12), azione che è sempre repulsiva, poiché se GH rappresenta una delle correnti dell'acqua acidificata che si immerge in HK nella lamina ABC, qualunque sia il verso di questa corrente, percorrerà evidentemente uno dei lati dell'angolo GHK avvicinandosi, e l'altro allontanandosi dal vertice H. Ma serve, affinché il movimento che si osserva in questo caso abbia luogo, che la repulsione tra i due elementi, l'uno in I e l'altro in L, avvenga lungo la retta IL, obliqua all'arco ABC, e non lungo la perpendicolare che incontra la verticale tracciata dal punto O attorno al quale la parte mobile dello strumento è obbligata a ruotare, una forza diretta lungo questa perpendicolare non potrebbe imprimergli alcun movimento di rotazione.

Dico che, quando ci si deve assicurare che il movimento di questo strumento non è prodotto dall'azione della terra, constatando che continua ad avere luogo nello stesso verso quando si invertono i contatti con la pila cambiando i reofori nelle coppette, bisogna impiegare una pila assai forte; è impossibile, infatti, in questa disposizione di conduttore mobile, impedire alla terra di agire sul filo verticale AE per portarlo ad ovest, quando la corrente è ascendente, ad est, quando la corrente è discendente, e sul filo orizzontale EQ, per farlo ruotare attorno alla verticale passante per il punto O, nel verso diretto a est, sud, ovest, quando la corrente va da E a Q, avvicinandosi al centro di rotazione, e nel verso retrogrado ovest, sud, est, quando va da Q ad E, allontanandosi dallo stesso centro[5].

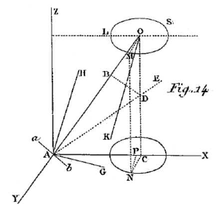
La prima di queste azioni è poco osservabile, almeno quando si dà al filo verticale AE solo la lunghezza necessaria per la stabilità del conduttore mobile sulla sua punta O; ma la seconda è determinata dalle dimensioni dello strumento; e siccome essa cambia di verso quando si invertono i contatti con la pila, essa si aggiunge in un contatto all'azione esercitata dalle correnti dell'acqua acidificata, e si sottrae nell'altro; è perché il movimento osservato è sempre più rapido in un caso che nell'altro; questa differenza è tanto più marcata, quanto la corrente prodotta dalla pila è piccola, poiché al diminuire della sua intensità, essendo l'azione elettrodinamica, a parità di condizioni, come il prodotto delle intensità delle due parti di correnti che agiscono una sull'altra, questa azione tra le correnti dell'acqua acidificata e quella della lamina ABC, diminuisce come il quadrato delle loro intensità, mentre l'intensità delle correnti terrestri rimane la stessa, la loro azione su quelle della lamina, non diviene minore se non proporzionalmente alla stessa intensità: al diminuire dell'energia della pila, l'azione del globo diviene sempre più vicina a distruggere quella delle correnti dell'acqua acidificata nella disposizione dei contatti con la pila dove queste azioni sono opposte, e si vede che quando questa energia è divenuta molto piccola, lo strumento si ferma, e il movimento avviene poi in verso contrario; allora l'esperienza conduce a una conseguenza opposta a quella da stabilire, poiché l'azione della terra, divenendo preponderante, potrebbe nascondere l'esistenza di quella delle correnti dell'acqua acidificata.

Del resto, la prima di queste due azioni è sempre nulla sulla lamina circolare ABC, poiché la terra agendo come un sistema di correnti chiuse, essendo la forza che essa esercita su ogni elemento perpendicolare alla direzione dello stesso, passa per la verticale tracciata dal punto O, e non può, di conseguenza, tendere a far ruotare attorno ad esso il conduttore mobile.

Presentiamo ora come esempio l'applicazione delle formule precedenti al caso in cui il sistema i riduce a una sola corrente circolare chiusa.

Quando il sistema è composto solo da una sola corrente, che percorre una circonferenza di cerchio di un raggio qualunque m si semplifica il calcolo, prendendo, per il piano xy, il piano tracciato dall'origine delle coordinate, cioè per il punto medio di A dell'elemento ab (fig. 14), parallelamente a quello del cerchio; e per il piano xz, quello che è tracciato perpendicolarmente al piano del cerchio per la stessa origine e per il centro O.

[5]Si veda su questi due tipi di azione esercitata dal globo terrestre, quanto detto nel mio *Recueil d'Observation électro-dynamiques*, pagg. 280, 284.



Siano p e q le coordinate di questo centro O; supponiamo che il punto C sia la proiezione di O sul piano xy, N quella di un punto qualunque M del cerchio, e indichiamo con ω l'angolo ACN; se si abbassa NP perpendicolarmente su AX, le tre coordinate x, y, z del punto M saranno MN, NP, AP, e si troverà facilmente per i loro valori:

$$z = q \quad y = m \sin\omega \quad x = p - m\cos\omega$$

Le quantità che abbiamo indicato con A, B, C, essendo rispettivamente uguali a

$$\int \tfrac{ydz - zdy}{r^{n+1}} \quad \int \tfrac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \quad \int \tfrac{xdy - ydx}{r^{n+1}}$$

avremo

$$\begin{gathered} A = -mq \int \tfrac{\cos\omega d\omega}{r^{n+1}} \\ B = mq \int \tfrac{\sin\omega d\omega}{r^{n+1}} \\ C = mp \int \tfrac{\cos\omega d\omega}{r^{n+1}} - m^2 A = -mq \int \tfrac{d\omega}{r^{n+1}} \end{gathered}$$

Se si integra per parti quelli di questi termini che contengono $\sin\omega$ e $\cos\omega$, e facendo attenzione che

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = q^2 + p^2 + m^2 - 2mp\cos\omega$$

dà

$$dr = \frac{mp \sin\omega d\omega}{r}$$

sopprimendo i termini che sono nulli poiché questi integrali devono essere presi da $\omega = 0$ fino a ωa 2π, e mettendo i valori di A, B, C così trovati in quello di U,

$$U = A\cos\xi + B\cos\eta + C\cos\zeta$$

si otterrà

$$U = m\left[(n+1)\left(p^2\cos\zeta - pq\cos\xi\right)\int \frac{\sin^2\omega d\omega}{r^{n+3}} - \cos\zeta \int \frac{d\omega}{r^{n+1}}\right]$$

Ora, l'angolo ξ può essere espresso per mezzo di ζ;poiché, indicando con h la perpendicolare OK abbassata dal centro O sul piano bAG per il quale si calcola il valore di U, si avrà $h = q\cos\zeta + p\cos\xi$, e questo valore diverrà

$$U = m^2\left\{(n+1)\left[\left(p^2+q^2\right)\cos\zeta - hq\right]\int \frac{\sin^2\omega d\omega}{r^{n+3}} - \cos\zeta \int \frac{d\omega}{r^{n+1}}\right\}$$

La valutazione risulta assai semplice nel caso in cui il raggio m è molto piccolo rispetto alla distanza l dall'origine A al centro O; poiché se si sviluppa in serie di potenze di m, si vedrà che quando si trascurano le potenze di m superiori a 3, i termini in m^3 svaniscono tra i limiti $0, 2\pi$, e quelli in m^2si ottengono sostituendo r con $l = \sqrt{p^2+q^2}$; basta allora calcolare soltanto i valori di

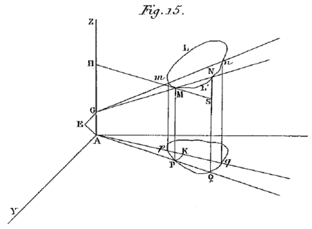
$$\int \sin^2\omega d\omega \quad e \quad \int d\omega \quad da \quad \omega = 0 \quad a \quad \omega = 2\pi$$

ciò che dà π per il primo e 2π per il secondo; il valore di U si riduce quindi a

$$U = \pi m^2\left[\frac{(n-1)\cos\zeta}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)\,hq}{l^{n+3}}\right]$$

Per maggiore generalità,supporremo ora che la corrente chiusa, invece di essere circolare, abbia una forma qualsiasi senza cessare di essere piana e molto piccola.

Fig. 15.



Sia MNL (fig. 15) un circuito molto piccolo chiuso e piano la cui area sia λ e che agisca su un elemento posto nell'origine A. Dividiamo la sua superficie in elementi infinitamente piccoli, con piani passanti per l'asse z, e sia APQ la tracia di uno di questi piani, e M, N il suoi punti di incontro con il circuito λ, proiettati sul piano xy in P e Q. Prolunghiamo la corda MN fino all'asse z in G; abbassiamo da A una perpendicolare $AE = q$ sul piano del circuito, e congiungiamo EG. Sia Apq la traccia di un piano infinitamente vicino al primo, formante con esso un angolo $d\varphi$; poniamo $AP = u$ e $PQ = \delta u$. L'azione del circuito sull'elemento in A dipende, come abbiamo visto, da tre integrali indicati con A, B, C, che calcoliamo. Consideriamo dapprima C, il cui valore è

$$C = \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} = \int \frac{u^2 d\varphi}{r^{n+1}}$$

Questo integrale è relativo a tutti i punti del circuito, e se si considerano contemporaneamente i due elementi compresi tra i due piani vicini $AGNO$ e $AGnq$, e che si riferiscono a valori uguali e di segni contrari a $d\varphi$, si vedrà che le azioni di questi due elementi devono essere sottratte l'una dall'altra, e che quella dell'elemento che è più vicino ad A produce l'azione più intensa. Osservando che per avere l'azione del più lontano, bisogna sostituire u e r con $u + \delta u$ e $r + \delta r$, si trova

$$C = \int \frac{u^2 d\varphi}{r^{n+1}} - \frac{(u + \delta u)^2 \, d\varphi}{(r + \delta r)^{n+1}}$$

essendo questi due integrali presi tra i due valori di φ relativi ai punti estremi L, L' tra i quali è compreso il circuito.

La differenza tra questi due integrali può essere considerato come la variazione della prima presa con segno contrario, quando si trascurano tutte le potenze di dimensioni del circuito i cui esponenti superano l'unità, viene

$$C = -\delta \int \frac{u^2 d\varphi}{r^{n+1}} = \int \left[\frac{(n+1)\, u^2 \delta r}{r^{n+2}} - \frac{2u\delta u}{r^{n+1}} \right] d\varphi$$

Ora

$$r^2 = u^2 + z^2$$

da cui

$$\delta r = \frac{u\delta u + z\delta z}{r}$$

d'altra parte, essendo l'angolo ZAE uguale a ζ, si ha

$$AG = \tfrac{q}{\cos\zeta} \quad GH = z - \tfrac{q}{\cos\zeta}$$

e, per dei triangoli simili MGH, MSN,

$$MH : MS = GH : NS$$

cioè

$$u : \delta u = z - \frac{q}{\cos\zeta} : \delta z$$

e ricavando da questa proporzione il valore di δz e riportandolo in quello di δr, si ottiene:

$$\delta z = \tfrac{z\cos\zeta - q}{u\cos\zeta} \quad \delta r = \tfrac{\left(u^2+z^2\right)\cos\delta - qz}{ur\cos\zeta} \quad \delta u = \tfrac{r^2\cos\zeta - qz}{ur\cos\zeta}\delta u$$

e sostituendo questo valore in quello di C, si ha

$$C = \int \left[\frac{(n+1)\left(r^2\cos\xi - qz\right)}{r^{n+3}\cos\zeta} - \frac{2}{r^{n+1}}\right] u\delta u d\varphi = \int \left[\frac{n-1}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)\,qz}{r^{n+3}\cos\zeta}\right] u\delta u d\varphi$$

Essendo il circuito molto piccolo, si possono considerare i valori di r e di z come costanti e uguali per esempio a quelli che si rapportano al centro di gravità dell'area del circuito, affinché i termini del terzo ordine scompaiano, rappresentando questi valori con l e z_1, l'integrale precedente assumerà questa forma

$$C = \left[\frac{n-1}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)\,qz_1}{l^{n+3}\cos\zeta}\right] \int u\delta u d\varphi$$

Ma $ud\varphi$ è l'arco PK descritto da A come centro con il raggio u e $PQ = \delta u$; quindi $ud\varphi\delta u$ è l'area infinitamente piccola $PQpq$, e l'integrale $\int u\delta\varphi\delta u$ esprime l'area totale della proiezione del circuito, cioè $\lambda\cos\zeta$, poiché ζ è l'angolo del piano del circuito con il piano xy; si avrà quindi infine

$$C = \left[\frac{(n-1)\cos\zeta}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)\,qz_1}{l^{n+3}}\right]\lambda$$

Si otterranno valori analoghi per B e A, cioè

$$B = \left[\frac{(n-1)\cos\eta}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)\,qy_1}{l^{n+3}}\right]\lambda$$

$$A = \left[\frac{(n-1)\cos\xi}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)\,qx_1}{l^{n+3}}\right]\lambda$$

Si conosceranno così gli angoli che la direttrice forma con gli assi, poiché si ha per i loro coseni $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{B}{D}$, facendo

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Quanto alla forza prodotta dall'azione del circuito sull'elemento posto nell'origine, essa avrà, come visto in precedenza, per espressione $\frac{1}{2}ii'ds'D\sin\epsilon$, essendo ϵ l'angolo che questo elemento forma con la direttrice, alla quale questa forza è perpendicolare così come la direzione dell'elemento-

Nel caso in cui il piccolo circuito che si considera è nello stesso piano dell'elemento ds' sul quale agisce, si ha, prendendo questo piano per quello delle xy

$$q = 0 \quad \cos\zeta = 1 \quad \cos\eta = 0 \quad \cos\xi = 0$$

e di conseguenza

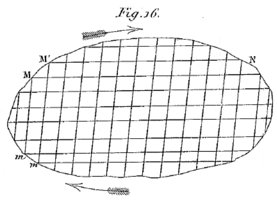
$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = \tfrac{n-1}{l^{n+1}}\lambda$$

D si riduce allora a C; ϵ è uguale a $\frac{\pi}{2}$, e l'azione del circuito sull'elemento ds diviene

$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{ii'ds'\lambda}{l^{n+1}}$$

Esporrò ora un nuovo modo di considerare l'azione dei circuiti piani di una forma e grandezza qualunque.

Sia un circuito piano MNm (fig. 16); dividiamo la sua superficie in elementi infinitamente piccoli con rette parallele tagliate da un secondo sistema di parallele formanti angoli retti con le precedenti, e immaginiamo attorno a ciascuna di queste aree infinitamente piccole delle correnti dirette nello stesso verso della corrente MNm. Tutte le parti di queste correnti che si trovano lungo queste linee rette, saranno distrutte, poiché ve ne saranno due di segno contrario che percorreranno la stessa retta; e ne rimarranno solo le parti curvilinee di queste correnti, come MM', mm', che formeranno il circuito totale MNm.



Da ciò segue che i tre integrali A, B, C si otterranno per il circuito piano di una grandezza finita, sostituendo nei valori ottenuti per queste tre quantità, al posto di λ un elemento qualsiasi dell'area del circuito che possiamo rappresentare con $d^2\lambda$ e integrando su tutta l'estensione di questa area.

Quando, per esempio, l'elemento è posto nello stesso piano del circuito, e si prende questo piano per quello xy, si ha

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = (n-1) \iint \tfrac{d^2\lambda}{l^{n+1}}$$

e il valore della forza diviene

$$\frac{n-1}{2} ii' ds' \iint \frac{d^2\lambda}{l^{n+1}}$$

da cui segue che, se da ciascuno dei punti dell'area de circuito si innalza una perpendicolare uguale a $\frac{1}{l^{n+1}}$, il volume del prisma che avrà per base il circuito e che sarà terminata dalla superficie formata dalle estremità di queste perpendicolari, rappresenterà il valore di $\iint \frac{d^2\lambda}{l^{n+1}}$; e questo volume moltiplicato per $\frac{n-2}{2} ii'ds'$ esprimerà l'azione cercata.

È bene osservare che essendo la questione riportata al calcolo del volume di un solido, si potrà adottare il sistema di coordinate e la divisione dell'area del circuito in elementi che condurranno ai calcoli più semplici.

Passiamo all'azione reciproca di due circuiti molto piccoli O e O' (fig. 18) posti in uno stesso piano. Sia MN un elemento ds' qualunque del secondo. L'azione del circuito O su ds' è, da quanto precede,

$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{ii' ds' \lambda d\varphi}{r^{n+1}}$$

Indicando con $d\varphi$ l'angolo MNO, e descrivendo l'arco MP tra i lati di questo angolo, si potrà sostituire la piccola corrente MN con le due correnti MP, NP le cui lunghezze sono rispettivamente $rd\varphi$ e dr; l'azione del circuito O sull'elemento MP, che è normale alla sua direzione, si otterrà sostituendo nell'espressione precedente ds' con MP, e sarà

$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{ii' \lambda d\varphi}{r^n}$$

l'azione su NP, perpendicolare alla sua direzione, sarà pure

$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{ii' \lambda dr}{r^{n+1}}$$

Quest'ultima integrata sull'intero circuito chiuso O' è nulla, e basta considerare la prima che è diretta verso il punto O, da cui risulta già che l'azione di due piccoli circuiti è diretta lungo la loro congiungente.

Prolunghiamo i raggi OM, ON fino ad incontrare la curva in M' e N'; l'azione di $M'N'$ dovrà essere sottratta da quella di MN, e l'azione risultante si otterrà prendendo come prima la variazione di quella di MN con segno contrario, ciò che dà

$$\frac{n\,(n-1)}{2}\cdot\frac{ii'\lambda d\varphi\delta r}{r^{n+1}}\quad \textit{oppure}\quad \frac{n\,(n-1)}{2}\cdot\frac{ii'\lambda r d\varphi\delta r}{r^{n+2}}$$

Ora, $rd\varphi\delta r$ è la misura del segmento infinitamente piccolo $MNM'N'$. Facendo la somma di tutte le espressioni analoghe relative ai diversi elementi del circuito O', e considerando r come costante e uguale alla distanza dei centri di gravità delle aree λ e λ' dei due circuiti, si avrà per l'azione che essi esercitano l'uno sull'altro

$$\frac{n\,(n-1)}{2}\cdot\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^{n+2}}$$

e questa azione sarà diretta lungo la retta OO'. Risulta da ciò che si otterrà l'azione reciproca di due circuiti finiti posti nello stesso piano, considerando le loro aree come divise in elementi infinitamente piccoli in tutti i sensi, e supponendo che gli elementi agiscano l'uno sull'altro lungo la retta congiungente, in ragione diretta delle loro superfici e in ragione inversa della potenza $n+2$ della loro distanza.

L'azione reciproca delle correnti chiuse essendo allora funzione solo della distanza, si ricava questa conseguenza importante, che non può risultare da questa azione un movimento di rotazione continuo.

La formula trovata per riportare l'azione reciproca di due circuiti chiusi e piani a quella degli elementi delle aree di questi circuiti, porta alla determinazione del valore di n. Infatti, se si considerano due sistemi simili composti da due circuiti chiusi e piani, gli elementi simili delle loro aree saranno proporzionali ai quadrati delle linee omologhe, e le distanze di questi elementi saranno proporzionali alle prime potenze di queste stesse linee. Chiamando m il rapporto delle linee omologhe dei due sistemi, le azioni di due elementi del primo sistema e dei loro corrispondenti del secondo saranno rispettivamente

$$\frac{n\,(n-1)}{2}\cdot\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^{n+2}}\quad e\quad \frac{n\,(n-1)}{2}\cdot\frac{ii'\lambda\lambda' m^4}{r^{n+2}m^{n+2}}$$

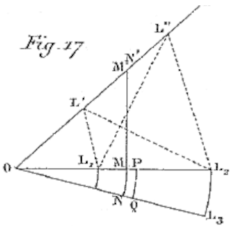
il loro rapporto, e di conseguenza quello delle azioni totali, sarà pertanto m^{2-n}. Ora, abbiamo descritto precedentemente un'esperienza con la quale si può trovare direttamente che queste due azioni sono uguali; bisogna quindi che $n=2$, e, in virtù dell'equazione $1-n-2k=0$, che $k=-\frac{1}{2}$. questi valori di n e di k riducono a una forma molto semplice l'espressione

$$-\frac{1+k}{ii'}r^{1-n-k}\frac{d^2\left(r^{1+k}\right)}{dsds'}$$

dell'azione reciproca di ds e di ds'; questa espressione diviene

$$-\frac{2ii'}{\sqrt{r}}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'}dsds'$$

Segue così da ciò che $n=2$, che nel caso in cui le direzioni dei due elementi restano le stesse, questa azione è in ragione inversa del quadrato della loro distanza. Si sa che M. de La Place ha stabilito la stessa legge, da un'esperienza di M. Biot, quando si tratta dell'azione reciproca di un elemento di conduttore voltaico e di una molecola magnetica: ma questo risultato non poteva essere esteso all'azione di due elementi di conduttori, se non ammettendo che l'azione dei magneti è dovuta a correnti elettriche; mentre la dimostrazione sperimentale che ho presentato è indipendente da tutte le ipotesi che si potrebbero fare sulla struttura dei magneti.



Sia MON (fig. 17) un circuito formante un settore i cui lati comprendono un angolo infinitamente piccolo e cerchiamo l'azione che esso esercita su un conduttore rettilineo OS' passante per il centro O del settore, e calcoliamo dapprima quella di un elemento $MNPQ$ dell'area di questo settore su un elemento $M'N'$ del conduttore OS'. Poniamo $OM = u$, $MP = du$, $OM' = s'$, $MM' = r$, $S'ON = \varepsilon$, $NOM = d\varepsilon$. Il momento di $MNPQ$ per far ruotare M' attorno a O sarà, osservando che l'area $MNPQ$ ha come espressione $udud\varepsilon$

$$\frac{1}{2} ii' s' ds' \frac{udud\varepsilon}{r^3}$$

e il momento del settore sul conduttore s' si otterrà integrando questa espressione rispetto a u e s'.

Si ha

$$r^2 = s'^2 + u^2 - 2us' \cos\varepsilon$$

da cui

$$r\tfrac{dr}{du} = u - s'\cos\varepsilon \quad r\tfrac{dr}{ds'} = s' - u\cos\varepsilon$$

e, differenziando una seconda volta

$$r\frac{d^2r}{duds'} + \frac{dr}{ds'} \cdot \frac{dr}{du} = -\cos\varepsilon$$

o, sostituendo a $\frac{dr}{ds'}$ e $\frac{dr}{du}$ i loro valori

$$r\frac{d^2r}{duds'} + \frac{(u - s'\cos\varepsilon)\,(s' - u\cos\varepsilon)}{r^2} = -\cos\varepsilon$$

ciò che diviene, effettuando i calcoli e riducendo,

$$r\frac{d^2r}{duds'} + \frac{us'r\sin^2\varepsilon}{r^3} = 0$$

da cui si ricava

$$\frac{us'}{r^3} = -\frac{1}{\sin^2\varepsilon} \cdot \frac{d^2r}{duds'}$$

sostituendo questo valore nel momento elementare, si ha per l'espressione del momento totale

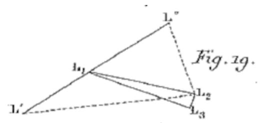
$$\frac{1}{2} ii' d\varepsilon \iint \frac{us'duds'}{r^3} = -\frac{1}{2} ii' \frac{d\varepsilon}{\sin^2\varepsilon} \iint \frac{d^2r}{duds'} duds'$$

Considerando la porzione LL' della corrente s', e la porzione L_1L_2 del settore, e ponendo $LL' = r_1^{'}$, $L"L_2 = r_2^{'}$, il valore di questo integrale è evidentemente

$$\frac{1}{2} ii' \frac{d\varepsilon}{\sin^2\varepsilon} \left(r_2^{'} + r_1^{"} - r_2^{"} - r_1^{'}\right)$$

Quando è a partire dal centro O che iniziano il settore e il conduttore s', la distanza $r_1^{'} = 0$; e se si pone $OL_2 = a$, $OL" = b$, $L"L_2 = r$, si trova che la loro mutua azione è espressa da

$$\frac{1}{2} ii' \frac{d\varepsilon}{\sin^2\varepsilon} (a + b - r)$$



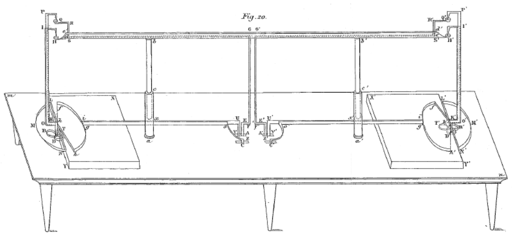
Quando il conduttore $L'L$" (fig. 19) ha come punto medio il centro L_1 del settore, e la sua lunghezza è doppia del raggio a di questo settore, si ha $a = b$, e ponendo $L'L_1L_2 = 2\,\theta = 2\pi - \varepsilon$,

$$r_1' = r_2'' \quad r_2' = 2a\sin\theta \quad r_2'' = 2a\cos\theta \quad d\varepsilon = -2d\theta$$

di modo che il valore del momento di rotazione diviene

$$aii'\frac{d\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}\left(\sin\theta - \cos\theta\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{aii'd\theta\left(\sin\theta - \cos\theta\right)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

Si può dedurre da questo risultato un modo per verificare la mia formula per mezzo di uno strumento di cui mi appresto a dare la descrizione.



Dai due punti aa' (fig. 20) si innalzano due supporti $ab, a'b'$ le cui parti superiori $cb, c'b'$ sono isolanti; essi sostengono una lamina di rame $HdeH'd'e'$ piegata in due lungo la retta HH', e che è terminata da due coppette H e H' dove si mette del mercurio. Ai punti A, C, A', C', vi sono quattro cavità riempite dello stesso mercurio. Da A parte un conduttore in rame $AEFGSRQ$, sostenuto da HH' e terminato da una coppetta Q; da A' ne parte un secondo $A'E'F'G'S'R'Q'$ simmetrico al primo; essi sono entrambi circondati di seta, per essere isolati tra loro e dal conduttore HH'. Nella coppetta Q pesca la punta di un conduttore mobile $QPONMLKIH$ che ritorna su se stesso da K in I, e avente in questa parte i sui due rami PO, KI circondati di seta; è terminato da una seconda punta immersa nella coppetta H; NLM forma una semicirconferenza di diametro LN, e di centro K; l'asta PKp è verticale, e terminata in p da una punta trattenuta da tre cerchi orizzontali B, D, T che possono ruotare attorno ai loro centri e sono destinati a diminuire l'attrito.

XY è una tavoletta fissa che riceve in una scanalatura un conduttore $VUifkhgoZC$ che ritorna su se stesso da g in o e raddoppiata di seta in questa parte; $ifkhg$ è un settore di cerchio che ha per centro il punto k; le parti Ui e go sono rettilinee; esse attraversano in x il supporto ab, nel quale si è praticata un'apertura a tale scopo, e si separano in o per andare a immergersi rispettivamente nelle cavità A e C. A destra di FG si trova un insieme di conduttori fissi e mobili perfettamente simili a quello descritto, e quando si immerge il reoforo positivo della pila in C, e il negativo in C', la corrente elettrica percorre i conduttori $CZoghkfiUV, AEFGSRQ$; da lì passa nel conduttore mobile $QPONMLKIH$, e si restituisce in C' attraverso il conduttore $V'U'i'f'k'h'g'o'Z'C'$, e da lì nel reoforo negativo.

La corrente andando nella direzione LN nel diametro LN, e da h in k, poi da k in f, nei raggi hk, kf, vi è una repulsione tra questi raggi e il diametro; inoltre, il circuito chiuso $ghkfi$ non producendo alcuna azione sul semicerchio LMN il cui centro si trova nell'asse fisso pH, il conduttore mobile non può essere messo in movimento se non per l'azione del settore $ghkfi$ sul diametro LN, visto che in tutte le altre parti dello strumento passano due correnti opposte le cui azioni di eliminano. L'equilibrio avrà luogo quando il diametro LN formerà angoli uguali con i raggi kf, kh; e se si sposta da questa posizione, oscillerà per l'azione del solo settore $ghkfi$ su questo diametro.

Sia 2η l'angolo al centro del settore, si avrà nella posizione di equilibrio

$$2\theta = \tfrac{\pi}{2} + \eta \quad \theta = \tfrac{\pi}{4} + \eta \ da$$

cui si conclude

$$\cos\theta - \sin\theta = \cos\theta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = -\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\eta$$

e

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta = \frac{1}{2}\cos\eta$$

Ma è facile vedere che quando si sposta, dalla sua posizione di equilibrio, il conduttore $L'L$" di una quantità uguale a $2d\theta$, il momento delle forze che tendono a riportarlo si compone di quelle che producono due piccoli settori il cui angolo è uguale a questo spostamento, e le cui azioni sono uguali, momento il cui valore, da quanto abbiamo visto prima, è

$$\frac{1}{2}\frac{aii'\left(\sin\theta - \cos\theta\right)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}d\theta = -\frac{2aii'\sqrt{2}\sin\frac{\eta}{2}}{\cos^2\eta}d\theta$$

Da ciò segue che le durate delle oscillazioni saranno, per lo stesso diametro, proporzionali a

$$\frac{\sqrt{\sin\frac{\eta}{2}}}{\cos\eta}$$

Facendo quindi simultaneamente oscillare i conduttori mobili nelle due parti simmetriche dello strumento, supponendo gli angoli dei settori diversi, si avranno correnti della stessa intensità, e si osserverà se il numero delle oscillazioni fatte nello stesso tempo, sono proporzionale alle due espressioni

$$\frac{\sqrt{\sin\frac{\eta}{2}}}{\cos\eta} \quad \frac{\sqrt{\sin\frac{\eta'}{2}}}{\cos\eta'}$$

indicando con 2η e $2\eta'$ gli angoli al centro dei due settori.

Esaminiamo ora l'azione reciproca di due conduttori rettilinei; e ricordiamoci dapprima che chiamando β l'angolo compreso tra la direzione dell'elemento ds' e quella della retta r, il valore dell'azione che i due elementi di correnti elettriche ds e ds' esercitano l'uno sull'altro è già stata messa sotto la forma

$$ii'ds'r^k d\left(r^k\cos\beta\right)$$

moltiplicandola e dividendola per $\cos\beta$ e facendo attenzione che $k = -\frac{1}{2}$ dà $r^{2k} = \frac{1}{r}$, vedremo che la si può scrivere così:

$$\frac{ii'ds'}{\cos\beta}r^k\cos\beta d\left(r^k\cos\beta\right) = \frac{1}{2}\frac{ii'ds'}{\cos\beta}d\left(\frac{\cos^2\beta}{r}\right)$$

da cui ci sarà facile concludere che la componente di questa azione lungo la tangente all'elemento ds', è uguale a

$$\frac{1}{2}ii'ds'd\left(\frac{\cos^2\beta}{r}\right)$$

e che la componente normale all'elemento è

$$\frac{1}{2}ii'ds'\tan\beta d\left(\frac{\cos^2\beta}{r}\right)$$

espressione che si può mettere nella forma

$$\frac{1}{2}ii'ds'\left[d\left(\frac{\sin\beta\cos\beta}{r}\right)-\frac{d\beta}{r}\right]$$

Questi valori delle due componenti si trovano alla pagina 331 del mio *Recueil d'observations électro-dynamiques*, pubblicato nel 1822.

Applichiamo l'ultima al caso di due correnti rettilinee parallele, poste a una distanza a l'una dall'altra.

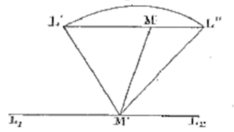
Si ha allora

$$r=\frac{\alpha}{\sin\beta}$$

e la componente normale diviene

$$\frac{1}{2}ii'ds'\left[\frac{d\left(\sin^2\beta\cos^2\beta\right)}{a}-\frac{\sin\beta d\beta}{a}\right]$$

Fig. 21.



Sia M' (fig. 21) un punto qualunque della corrente che percorre la retta L_1L_2; e $\beta', \beta"$ gli angoli $L'M'L_2, L"M'L_2$ formati con L_1L_2 dai raggi vettori estremi $M'L', M'L"$; si avrà l'azione di ds' su $L'L"$ integrando l'espressione precedente tra i limiti $\beta', \beta"$, che dà

$$\frac{1}{2a}ii'ds'\left(\sin^2\beta"\cos\beta"+\cos\beta"-\sin^2\beta'\cos\beta'-\cos\beta"\right)$$

ma si ha una caduta limite, rappresentandovi i valori di ds con b' e $b"$,

$$s'=b"-a\cot\beta"=b'-a\cot\beta' \quad ds'=\frac{ad\beta"}{\sin^2\beta"}=\frac{ad\beta'}{\sin^2\beta'}$$

sostituendo questi valori e integrando di nuovo tra i limiti $\beta_1^{'}, \beta_2^{'}$ e $\beta_1^{"}, \beta_2^{"}$, si ha per il valore della forza cercata

$$\frac{1}{2}ii''\left(\sin\beta_2^{"}-\sin\beta_1^{"}-\sin\beta_2^{'}+\sin\beta_1^{'}-\frac{1}{\sin\beta_2^{"}}+\frac{1}{\sin\beta_1^{"}}+\frac{1}{\sin\beta_2^{'}}-\frac{1}{\sin\beta_1^{1}}\right)$$

o

$$\frac{1}{2}ii''\left(\frac{a}{r_2^{"}}-\frac{a}{r_1^{"}}-\frac{a}{r_2^{'}}+\frac{a}{r_1^{1}}+\frac{r_1^{"}+r_2^{'}-r_2^{"}-r_1^{'}}{}\right)$$

Se i due conduttori sono della stessa lunghezza e perpendicolari alle retta che ne uniscono le due estremità da uno stesso lato, si ha

$$r_1^{'}=r_2^{"}=a \quad r_2^{'}=r_1^{"}=c$$

e chiamando c la diagonale del rettangolo formato da queste due rette e dalle due direzioni delle correnti, l'espressione precedente diviene allora

$$ii'\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)=\frac{ii'l^2}{ac}$$

indicando con l la lunghezza dei conduttori, e quando questo rettangolo diviene un quadrato, si ha $\frac{ii'}{\sqrt{2}}$ per il valore della forza; infine, se si suppone uno dei conduttori indefinito nei due versi, e che l sia la lunghezza dell'altro, i termini dove $r_1^{'}, r_2^{'}, r_1^{"}, r_2^{"}$ si trovano al denominatore scompariranno; si avrà

$$r_2^{'} + r_1^{"} - r_2^{"} - r_1^{'} = 2l$$

e l'espressione della forza diverrà

$$\frac{ii'l}{a}$$

che si riduce a ii' quando la lunghezza l è uguale alla distanza a.

Quanto all'azione di due correnti parallelamente alla direzione di s', essa si può ottenere qualunque sia la forma della corrente s. Infatti la componente lungo ds' essendo

$$\frac{1}{2} ii' ds' d \left(\frac{\cos^2 \beta}{r} \right)$$

l'azione totale che esercita ds' in questa direzione sulla corrente $L'L"$ (fig. 21) vale

$$\frac{1}{2} ii' ds' \left(\frac{\cos^2 \beta"}{r"} - \frac{\cos^2 \beta'}{r'} \right)$$

ed è significativo che essa dipenda solo dalla condizione delle estremità $L', L"$ del conduttore s; essa è quindi la stessa, qualunque sia la forma di questo conduttore, che può essere piegato lungo una linea qualsiasi.

Se si chiamano a' e $a"$ le perpendicolari abbassate da due estremità della parte del conduttore $L'L"$ che si considera come mobile, sul conduttore rettilineo di cui si tratta di calcolare l'azione parallelamente alla sua direzione, si avrà

$$r" = \frac{a"}{\sin \beta"} \quad r' = \frac{a'}{\sin \beta'}$$

$$ds' = -\frac{dr"}{\cos \beta"} = \frac{a" d\beta"}{\sin^2 \beta"} = -\frac{dr'}{\cos \beta'} = \frac{a' d\beta'}{\sin^2 \beta'}$$

e di conseguenza

$$\frac{ds}{r"} = \frac{d\beta"}{\sin \beta"} \quad \frac{ds'}{r'} = \frac{d\beta'}{\sin \beta'}$$

da cui è facile concludere che l'integrale cercato è

$$-\frac{1}{2} ii' \int \left(\frac{\cos^2 \beta" d\beta"}{\sin \beta"} - \frac{\cos^2 \beta' d\beta'}{\sin \beta'} \right) = -\frac{1}{2} ii' \left(L \frac{\tan \frac{1}{2} \beta"}{\tan \frac{1}{2} \beta'} + \cos \beta" - \cos \beta' + C \right)$$

Bisognerà prendere questo integrale tra i limiti determinati dalle due estremità del conduttore rettilineo, indicando $\beta_1^{'}, \beta_2^{'}$ e $\beta_1^{"}, \beta_2^{"}$ i valori di β' e di $\beta"$ relative a questi limiti, si ha sul campo quella della forza esercitata dal conduttore rettilineo, e quest'ultimo valore dipende evidentemente solo dai quattro angoli $\beta_1^{'} \beta_1^{"}, \beta_2^{'}, \beta_2^{"}$.

Quando si vuole il valore di questa forza per il caso in cui il conduttore rettilineo si estende indefinitamente nei due sensi, bisogna porre $\beta_1^{'} = \beta_1^{"} = 0$, e $\beta_2^{'} = \beta_2^{"} = \pi$; sembra, a prima vista, che esso divenga nulla, e ciò sarebbe contrario all'esperienza; ma si vede facilmente che la parte dell'integrale contenente i coseni di questi quattro angoli è la sola che svanisce in questo caso, e che il resto dell'integrale

$$\frac{1}{2} ii' \left(L \frac{\tan \frac{1}{2} \beta_1^{"}}{\tan \frac{1}{2} \beta_1^{'}} - L \frac{\tan \frac{1}{2} \beta_2^{"}}{\tan \frac{1}{2} \beta_2^{'}} \right) = \frac{1}{2} ii' L \frac{\tan \frac{1}{2} \beta_1^{"} \cot \frac{1}{2} \beta_2^{"}}{\tan \frac{1}{2} \beta_1^{'} \cot \frac{1}{2} \beta_2^{'}}$$

diviene poiché si ha $\beta_2^{"} = \pi - \beta_1^{"}$ e $\beta_2^{'} = \pi - \beta_1^{'}$

$$\frac{1}{2}ii'L\frac{\tan^2\frac{1}{2}\beta_1^{"}}{\tan^2\frac{1}{2}\beta_1^{'}} = ii'L\frac{\tan\frac{1}{2}\beta_1^{"}}{\tan\frac{1}{2}\beta_1^{'}} = ii'L\frac{a"}{a'}$$

Questo valore mostra che la forza cercata dipende allora solo dal rapporto tra le due perpendicolari a e a', abbassate sul conduttore rettilineo indefinito da due estremità della parte del conduttore sulla quale agisce; che esso è ancora indipendente dalla forma di questa parte, e non divine nullo, come deve essere, se non quando le due perpendicolari sono uguali tra loro.

Per avere la distanza di questa forza sul conduttore rettilineo, la cui direzione è parallela alla sua, bisogna moltiplicare ognuna delle forze elementari di cui si compone per la sua distanza dal conduttore, e integrare il risultato rispetto agli stessi limiti; si avrà così il momento che bisognerà dividere per la forza per avere la distanza cercata.

Si trova facilmente, dai valori qui sopra, che il momento elementare vale

$$\frac{1}{2}ii'ds'r\sin\beta d\frac{\cos^2\beta}{r}$$

Questo valore si può integrare solo quando si è sostituito a una delle variabili r o β il suo valore in funzione dell'altro, ricavato dalle equazioni che determinano la forma della parte mobile del conduttore; esso diviene molto semplice quando questa parte di trova su una retta innalzata da un punto qualsiasi del conduttore rettilineo che si considera come fisso, perpendicolarmente alla sua direzione, poiché prendendo questo punto per l'origine di s', si ha

$$r = -\frac{s'}{\cos\beta}$$

e che s' è una costante relativamente al differenziale

$$d\frac{\cos^2\beta}{r}$$

Il valore del momento elementare diviene quindi

$$\frac{1}{2}ii'ds'\frac{\sin\beta}{\cos\beta}d\left(\cos^2\beta\right) = -\frac{3}{2}ii'ds'\sin^2\beta\cos\beta d\beta$$

il cui integrale tra i limiti $\beta"$ e β' è

$$-\frac{1}{2}ii'ds'\left(\sin^2\beta" - \sin^2\beta'\right)$$

Sostituendo ds' con i valori di questo differenziale e integrando di nuovo, si ha, tra i limiti determinati dal conduttore rettilineo

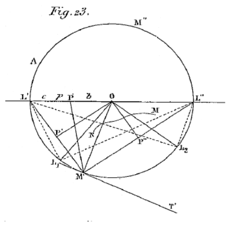
$$\frac{1}{2}ii'\left[a"\left(\cos\beta_2^{"} - \cos\beta_1^{"}\right) - a'\left(\cos\beta_2^{'} - \cos\beta_1^{'}\right)\right]$$

Se si suppone che il conduttore si estenda indefinitamente nei due sensi, bisognerà assegnare a $\beta_1^{'}, \beta_1^{"}, \beta_2^{'}, \beta_2^{"}$ i valori che abbiamo loro già assegnato in questo caso, e si avrà

$$-ii'\left(a" - a'\right)$$

per il valore del momento cercato, che sarà, di conseguenza, proporzionale alla lunghezza $a" - a'$ del conduttore mobile e non cambierà fintanto che questa lunghezza resterà la stessa, qualunque siano d'altra parte le distanze delle estremità di quest'ultimo conduttore da quello considerato come fisso.

Calcoliamo ora l'azione esercitata da un arco di curva qualunque NM per far ruotare un arco di cerchio L_1L_2 attorno al suo centro.



Sia M' (fig. 23) il punto medio di un elemento qualunque ds' dell'arco L_1L_2, e a il raggio del cerchio. Il momento di un elemento ds di NM per far ruotare ds' attorno al centro O si ottiene moltiplicando la componente tangente in M' per la sua distanza a dal punto fisso; e si ha

$$\frac{1}{2}aii'ds'd\frac{\cos^2\beta}{r}$$

Chiamando $\beta', \beta"$ e $r', r"$ i valori di β e r relativi ai limiti M e N, si ha per il momento di rotazione di ds'

$$\frac{1}{2}aii'ds'\left(\frac{\cos^2\beta"}{r"}-\frac{\cos^2\beta'}{r'}\right)$$

risultato che dipende solo dalla condizione delle estremità M e N.

Concludiamo il calcolo supponendo che la linea MN sia un diametro $L'L"$ dello stesso cerchio.

Chiamiamo 2θ l'angolo $M'OL'$; essendo $M'T'$ la tangente in M' gli angoli $L'M'T', L"M"T"$ saranno rispettivamente β' e $\beta"$ e si avrà evidentemente

$$\cos\beta' = -\cos\theta \quad \cos\beta" = \sin\theta \quad r' = 2a\sin\theta \quad r" = 2a\cos\theta$$

L'azione del diametro $L'L"$ per far ruotare l'elemento posto in M sarà quindi

$$\frac{1}{4}ii'ds'\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)$$

Quando si prende un punto qualsiasi A della circonferenza per origine degli archi, e si pone $AL' = C$, si ha

$$\frac{1}{2}aii'\left(\frac{\sin^2\theta d\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta d\theta}{\sin\theta}\right)$$

che bisogna integrare su tutto l'arco L_1L_2 per avere il momento di rotazione di questo arco attorno al suo centro.

Ora si ha

$$\int\frac{\sin^2\theta d\theta}{\cos\theta} = L\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\theta\right)-\sin\theta + C$$

$$\int\frac{\cos^2\theta d\theta}{\sin\theta} = L\tan\frac{1}{2}\theta+\cos\theta + C'$$

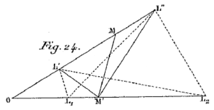
se quindi si chiamano $2\theta_1$ e $2\theta_2$ gli angoli $L'OL_1$ e $L'OL_2$ il momento totale dell'arco L_1L_2 sarà

$$\frac{a}{2}ii'\left[L\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\theta_2\right)\tan\frac{1}{2}\theta_1}{\tan\frac{1}{2}\theta_2\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\theta_1\right)}-\sin\theta_2-\cos\theta_2+\sin\theta_1+\cos\theta_1\right]$$

Questa espressione, cambiata di segno, dà il valore del momento di rotazione del diametro $L'L"$ dovuto all'azione di L_1L_2.

In uno strumento che ho in precedenza descritto, un conduttore che ha la forma di un settore circolare, agisce su un altro conduttore composto da un diametro e una semicirconferenza che è mobile attorno ad un asse passante per il centro di questa semicirconferenza e perpendicolare al suo piano. L'azione che esso subisce da parte del settore è distrutta dalla resistenza dell'asse, poiché il contorno che forma il settore è chiuso; rimane quindi solo l'azione sul diametro. Abbiamo già calcolato quella dell'arco, ci resta solo quindi da ottenere quelle dei raggi di questo settore sullo stesso diametro.

Per determinarle, cerchiamo il momento di rotazione che risulta dalla mutua azione di due correnti rettilinee poste nello stesso piano, e che tende a farle ruotare in senso contrario attorno al punto di incontro delle loro direzioni.



La componente normale all'elemento ds' posto in M' (fig. 24), è, come visto in precedenza,

$$\frac{1}{2}ii'ds'\left(d\frac{\sin\beta\cos\beta}{r}-\frac{d\beta}{r}\right)$$

Il momento di ds per far ruotare ds' attorno ad O, si otterrà moltiplicando questa forza per s'; si avrà quindi, indicando con M il momento totale

$$\frac{d^2M}{dsds'}dsds'=\frac{1}{2}ii's'ds'\left(d\frac{\sin\beta\cos\beta}{r}-\frac{d\beta}{r}\right)$$

dove, integrando rispetto a s,

$$\frac{dM}{ds'}ds'=\frac{1}{2}ii's'ds'\left(\frac{\sin\beta\cos\beta}{r}-\int\frac{d\beta}{r}\right)$$

Ma, secondo il modo in cui gli angoli sono stati presi nel calcolo della formula che rappresenta l'azione reciproca di due elementi di conduttori voltaici, l'angolo $MM'L_2=\beta$ è esterno al triangolo OMM'; e, indicando con ϵ l'angolo MOM' compreso tra le direzioni di due correnti, si trova che il terzo angolo OMM' è uguale a $\beta-\epsilon$, ciò che dà

$$r=\frac{s'\sin\epsilon}{\sin(\beta-\epsilon)}$$

si ha quindi

$$\frac{dM}{ds'}ds'=\frac{1}{2}ii'\frac{ds'}{\sin\epsilon}\left[\sin\beta\cos\beta\sin(\beta-\epsilon)+\cos(\beta-\epsilon)+C\right]$$

Sostituendo in questo valore $\cos(\beta-\epsilon)$ con

$$\cos^2\beta\cos(\beta-\epsilon)+\sin^2\beta\cos(\beta-\epsilon)$$

si veda facilmente che essa si riduce a

$$\frac{dM}{ds'}ds'=\frac{1}{2}ii'\frac{ds'}{\sin\epsilon}\left[\cos\epsilon\cos\beta+\sin^2\beta\cos(\beta-\epsilon)+C\right]$$

che bisogna prendere tra i limiti β' e β"; si ha così la differenza di due funzioni della stessa forma, una di β", l'altra di β', che si tratta di integrare di nuovo per avere il momento di rotazione cercato: basta fare questa seconda interazione su una sola di queste due quantità: sia quindi a" la distanza OL" che corrisponde a β", si ha, nel triangolo $OM'L$",

$$s'=\frac{a"\sin(\beta"-\epsilon)}{\sin\beta"}=a"\cos\epsilon-a"\sin\epsilon\cot\beta"$$

e

$$ds' = \frac{a" \sin r d\beta"}{\sin^2 \beta"}$$

e la quantità che ci proponiamo dapprima di integrare, diviene

$$\frac{1}{2}a" ii' \left[\frac{\cos\epsilon \cos\beta" d\beta"}{\sin^2 \beta"} + \cos(\beta" - \epsilon)\, d\beta"\right]$$

il cui integrale preso tra i limiti $\beta_1^"$ e $\beta_2^"$ è

$$\frac{1}{2}a" ii' \left[\sin\left(\beta_2^" - \epsilon\right) - \sin\left(\beta_1^" - \epsilon\right) - \frac{\cos\epsilon}{\sin\beta_2^"} + \frac{\cos\epsilon}{\sin\beta_1^"}\right]$$

Indicando con $p_2^"$ e $p_2^{'}$ le perpendicolari abbassate dal punto O, sulle distanza $L"L_2 = r_2^"$, $L"L_1 = r_1^"$, si ha evidentemente

$$a" \sin\left(\beta_2^" - \epsilon\right) = p_2^" \quad a" \sin\left(\beta_1^" - \epsilon\right) = p_1^" \quad \frac{a"}{\sin\beta_2^"} = \frac{r_2^"}{\sin\epsilon} \quad \frac{a"}{\sin\beta_1^"} = \frac{r_1^"}{\sin\epsilon}$$

e l'integrale precedente diviene

$$\frac{1}{2}ii' \left[p_2^" - p_1^" - \left(r_2^" - r_1^"\right)\cot\epsilon\right]$$

Se si pone attenzione indicando la distanza OL' con a' si ha pure, nel triangolo $OM'L'$

$$s' = \frac{a' \sin(\beta' - \epsilon)}{\sin\beta'} = a'\cos\epsilon - a'\sin\epsilon\cot\beta' \quad ds' = \frac{a'\sin\epsilon d\beta'}{\sin^2\beta'}$$

si vede facilmente che l'integrale dell'altra quantità si forma da quello che abbiamo ottenuto, cambiando $p_2^", p_1^", r_2^", r_1^"$ in $p_2^{'}, p_1^{'}, r_2^{'}, r_1^{'}$; ciò che dà per il valore del momento di rotazione che è la differenza dei due integrali

$$\frac{1}{2}ii' \left[p_2^" - p_1^" - p_2^{'} + p_1^{'} - \left(r_2^" - r_1^" - r_2^{'} - r_1^{'}\right)\cot\epsilon\right]$$

Questo valore si riduce a quello che abbiamo prima trovato, nel caso in cui l'angolo ϵ è retto, poiché allora $\cot\epsilon = 0$.

Quando si suppone che le due correnti partano dal punto O e che le lunghezze $OL", OL_2$ (fig. 22) sono rappresentate rispettivamente da a e da b, la perpendicolare OP per p, e la distanza $L"L_2$ per r, si ha $p_2^" = p$, $p_1^" = p_2^{'} = p_1^{'} = 0$, $r_2^" = r$, $r_1^" = a$, $r_2^{'} = b$, $r_1^{'} = 0$ e

$$\frac{1}{2}ii' \left[p + (a + b - r)\cot\epsilon\right]$$

per il valore che assume allora il momento di rotazione.

La quantità $a + b - r$, eccesso della somma di due lati di un triangolo sul terzo, è sempre positivo: da cui segue che il momento di rotazione è maggiore del valore $\frac{1}{2}ii'p$ che prende quando l'angolo ϵ dei due conduttori è retto, fintanto che $\cot\epsilon$ è positiva, cioè finché l'angolo è acuto; ma diviene più piccolo quando lo stesso angolo è ottuso, poiché allora $\cot\epsilon$ è negativa. È evidente d'altronde che il suo valore è tanto più grande quando l'angolo ϵ tende a zero; ma è bene non indicare che il resto è sempre positivo, per quanto questo angolo sia vicino a due retti.

Basta per questo fare attenzione che chiamando α l'angolo del triangolo $OL"L_2$ compreso tra i lati a e r, e β quello che sta tra i lati b e r, si ha

$$\cot\epsilon = -\cot(\alpha + \beta) \quad p = a\sin\alpha = b\sin\beta \quad r = a\cos\alpha + b\cos\beta$$

e, di conseguenza,

$$a + b - r = a\,(1 - \cos\alpha) + b\,(1 - \cos\beta) = p\tan\frac{1}{2}\alpha + p\tan\frac{1}{2}\beta$$

e

$$\frac{1}{2}ii'\,[p + (a + b - r)\cot\epsilon] = \frac{1}{2}ii'p\left(\frac{\tan\frac{1}{2}\alpha + \tan\frac{1}{2}\beta}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\right)$$

valore che resta sempre positivo, per quanto piccoli siano gli angoli α e β, poiché $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, per angoli inferiori a $\frac{\pi}{4}$, è sempre maggiore di $\tan\alpha + \tan\beta$, e a maggior ragione più di $\tan\frac{1}{2}\alpha + \tan\frac{1}{2}\beta$. Questo valore tende evidentemente verso il limite $\frac{1}{4}ii'p$ al tendere a zero di α e β; essi si annullano con p quando questi angoli diventano nulli.

Riprendiamo ora il valore generale del momento di rotazione facendo intervenire solo le distanze $OL" = a"$, $OL' = a'$ e i diversi angoli, valore che è

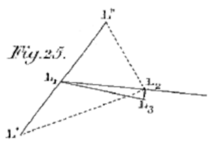
$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}ii'\left[a"\sin\left(\beta_2^{"} - \epsilon\right) - a"\sin\left(\beta_1^{"} - \epsilon\right) - a'\sin\left(\beta_2^{'} - \epsilon\right) + a'\sin\left(\beta_1^{'} - \epsilon\right) + \right.\\ \left. -\frac{a"\cos\epsilon}{\sin\beta_2^{"}} + -\frac{a"\cos\epsilon}{\sin\beta_1^{"}} + -\frac{a'\cos\epsilon}{\sin\beta_2^{'}} - -\frac{a'\cos\epsilon}{\sin\beta_1^{'}}\right]\end{gathered}$$

e applichiamola al caso in cui uno dei conduttori $L'L"$ (fig. 25) è rettilineo e mobile attorno al suo punto medio L_1, e dove l'altra parte di questo punto di mezzo. Facendo $L'L" = 2a$, si ha

$$\alpha" = a \quad \alpha' = -a \quad \beta_1^{'} = \pi + \epsilon \quad \beta_1^{"} = \epsilon \quad \sin\beta_1^{'} = -\sin\beta_1^{"}$$

e indicando come in precedenza le perpendicolari abbassate da L_1 su $L'L_2$, $L"L_2$, l'espressione del momento diviene

$$\frac{1}{2}ii'\left(p_2^{"} + p_1^{'} - \frac{a\cos\epsilon}{\sin{}^{"}} - \frac{a\cos\epsilon}{\sin\beta_2^{'}}\right)$$



Ora

$$\sin\beta_2^{"} : \alpha = \sin\epsilon : r_2^{"} \quad -\sin\beta_2^{'} : \alpha = \sin\epsilon : r_2^{'}$$

e i valori di $r_2^{"}$ e di $r_2^{'}$ ricavati da queste proporzioni e sostituiti nell'espressione precedente cambiandola in

$$\frac{1}{2}ii'\left[p_2^{"} + p_1^{'} + \cot\epsilon\left(r_2^{'} - r_2^{"}\right)\right]$$

Quando si suppone L_1L_2 infinito, si ha $p_2^{"} = p_2^{'} = \alpha\sin\epsilon$, $r_2^{'} - r_2^{"} = 2\alpha\cos\epsilon$, e questo valore del momento si riduce a

$$\frac{1}{2}aii'\left(2\sin\epsilon + \frac{2\cos^2\epsilon}{\sin\epsilon}\right) = \frac{aii'}{\sin\epsilon}$$

è quindi in ragione inversa del seno dell'angolo delle due correnti, e proporzionale alla lunghezza della corrente finita.

Quando $L_1L_2 = \frac{1}{2}L'L" = \alpha$ e si rappresenta l'angolo $L"L_1L_2$ con 2θ, si ha

$$p_2^{"} = a\sin\theta \quad p_2^{'} = a\cos\theta \quad r_2^{'} = 2a\sin\theta \quad r_2^{"} = 2a\cos\theta \quad \cot\epsilon = -\cot 2\theta$$

e il momento diviene (73)

$$\frac{1}{2}aii'\left[\cos\theta+\sin\theta+2\cot 2\theta\left(\cos\theta-\sin\theta\right)\right]$$

sostituendo $2\cot 2\theta$ con il suo valore

$$\frac{1-\tan^2\theta}{\tan\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\left(\cos\theta-\sin\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta}$$

si trova che quello di questo momento è uguale a

$$\frac{1}{2}aii'\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\left[1+\frac{\left(\cos\theta-\sin\theta\right)^2}{\sin\theta\cos\theta}\right]=\frac{1}{2}aii'\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-1\right)$$

Per avere la somma delle azioni dei due raggi tra i quali è compreso un settore infinitamente piccolo il cui arco è $d\epsilon$, bisogna fare attenzione che essendo questi due raggi percorsi in verso contrario, questa somma è uguale al differenziale dell'espressione precedente; si trova così che essa è rappresentata da (73)

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}aii'\left[\left(\cos\theta-\sin\theta\right)\left(\tfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}-1\right)-\tfrac{\left(\sin\theta\cos\theta\right)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right]d\theta=\\&=\tfrac{1}{2}aii'\left(\cos\theta-\sin\theta\right)\left(\tfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}-1-\tfrac{\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)d\theta=\\&=\tfrac{1}{2}aii'\left(\cos\theta-\sin\theta\right)\left(\tfrac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}+\tfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}+1\right)d\theta\end{aligned}$$

Ma l'azione dell'arco L_2L_3 sul diametro $L'L$" è uguale e opposta a quella che questo diametro esercita sull'arco per farlo ruotare attorno al suo centro; il momento di questa azione, da quanto detto, è quindi uguale a

$$\frac{1}{2}aii'\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)d\theta=\frac{1}{2}aii'\left(\cos\theta-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}+1\right)d\theta$$

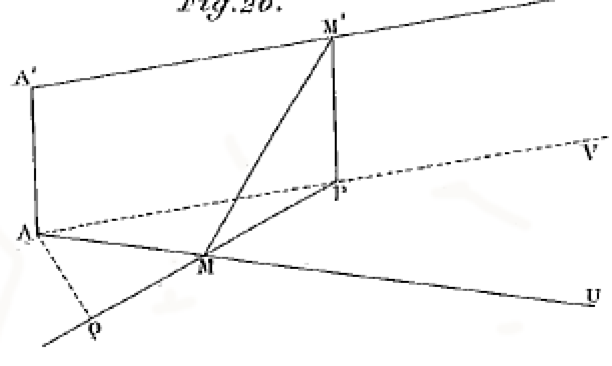
e aggiungendolo al precedente, si ha per ciò che risulta dall'azione del settore infinitamente piccolo sul diametro $L'L$"

$$-\frac{1}{2}aii'\left(\cos\theta-\sin\theta\right)\frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

Questo valore differisce solo per il segno da quello che abbiamo già trovato per lo stesso momento, differenza che deriva evidentemente da ciò che abbiamo ricavato da quest'ultima dalla formula relativa all'azione di un circuito molto piccolo chiuso su un elemento dove avevamo cambiato il segno di C per renderlo positivo.

Esaminiamo ora l'azione che due correnti rettilinee, che non sono in uno stesso piano, esercitano l'una sull'altra, sia per muoversi parallelamente alla loro perpendicolare comune, sia per ruotare attorno a questa retta.

Fig.26.



Siano le due correnti $AU, A'U'$ (fig. 26); $AA' = a$, la loro perpendicolare comune; AV una parallela $A'U'$: l'azione dei due elementi posti in M e M', quando si pone $n = 2$ e $h = k - 1 = -\frac{3}{2}$ nella formula generale

$$\frac{ii'dsds'}{r^n}\left(\cos\epsilon + h\cos\theta\cos\theta'\right)$$

diviene

$$\frac{1}{2}\frac{ii'dsds'\left(2\cos\epsilon + 3\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}\right)}{r^2}$$

a causa di

$$\cos\theta = \tfrac{dr}{ds} \quad \cos\theta' = -\tfrac{dr}{ds'}$$

ma ponendo $AM = s$, $A'M' = s'$, $VAU = \epsilon$, si ha

$$r^2 = a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss'\cos\epsilon$$

da cui

$$r\tfrac{dr}{ds} = s - s'\cos\epsilon \quad r\tfrac{dr}{ds'} = s' - s\cos\epsilon \quad r\tfrac{d^2r}{dsds'} + \tfrac{dr}{ds}\cdot\tfrac{dr}{ds'} = -\cos\epsilon$$

e siccome

$$\frac{d\frac{1}{r}}{ds} = -\frac{\frac{dr}{ds}}{r^2} \quad \frac{d^2\frac{1}{r}}{dsds'} = \frac{r\frac{d^2r}{dsds'} - 2\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}}{r^2} = \frac{\cos\epsilon + 3\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}}{r^2}$$

il valore dell'azione dei due elementi diviene

$$\frac{1}{2}ii'dsds'\left(\frac{\cos\epsilon}{r^2} + r\frac{d^2\frac{1}{r}}{dsds'}\right)$$

Per avere la componente parallela a AA', bisogna moltiplicare questa espressione per il coseno dell'angolo $MM'P$ che fa MM' con $M'P$ parallela a AA', cioè per $\frac{M'P}{M'M}$, o $\frac{a}{r}$, ciò che dà

$$\frac{1}{2}aii'dsds'\left(\frac{\cos\epsilon}{r^2} + r\frac{d^2\frac{1}{r}}{dsds'}\right)$$

e integrando sull'intera estensione delle due correnti, si trova per l'azione totale

$$\frac{1}{2}aii'\left(\frac{1}{r} + \cos\epsilon\iint\frac{dsds'}{r^3}\right)$$

Se le due correnti formano un angolo retto, si ha $\cos\epsilon = 0$, e l'azione parallela a AA' si riduce, prendendo l'integrale tra i limiti opportuni, e impiegando le stesse notazioni di prima, a

$$\frac{1}{2}ii'\left(\frac{a}{r''_2} - \frac{a}{r''_1} - \frac{a}{r'_2} + \frac{a}{r'_1}\right)$$

Questa espressione è proporzionale alla più breve distanza delle correnti, e diviene di conseguenza nulla quando esse sono su uno stesso piano, come deve essere evidentemente.

Se le correnti sono parallele, si ha $\epsilon = 0$ e

$$r^2 = a^2 + (s - s')^2$$

da cui

$$\iint\frac{dsds'}{r^3} = \int ds'\int\frac{ds}{\left[a^2 + (s - s')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \int ds'\frac{s - s'}{a^2\sqrt{a^2 + (s - s')^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - (s - s')^2}}{a^2} = -\frac{r}{a^2}$$

cioè tra i limiti di integrazione

$$\frac{r_2^{'}+r_1^{"}-r_1^{\prime}-r_2^{2}}{a^2}$$

e siccome $\cos\epsilon=1$, l'azione totale diviene

$$\frac{1}{2}ii'\left(\frac{a}{r_2^{"}}-\frac{a}{r_2^{'}}-\frac{a}{r_1^{"}}+\frac{a}{r_1^{'}}+\frac{r_1^{"}+r_2^{'}-r_2^{"}-r_1^{'}}{a^2}\right)$$

Vedremo poi come si fa l'integrazione nel caso in cui l'angolo ϵ è qualunque.

Cerchiamo ora il momento di rotazione attorno alla perpendicolare comune: per questo bisogna conoscere dapprima la componente lungo MP e moltiplicarla per la perpendicolare AQ abbassata da A su MP, ciò che torna a moltiplicare la forza lungo MM' per $\frac{MP}{MM'}$. AQ, o da $\frac{ss'\sin\epsilon}{r}$; si avrà così

$$\frac{1}{2}ii'\sin\epsilon\left[ss'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dsds'}dsds'+ss'\frac{\cos\epsilon dsds'}{r^3}\right]$$

ponendo $\frac{ss'}{r}=q$, si avrà

$$\frac{dq}{ds}=\frac{s'}{r}+\frac{ss'd\frac{1}{r}}{ds}$$

e

$$\frac{d^2q}{dsds'}=\frac{1}{r}-\frac{s'}{r^2}\cdot\frac{dr}{ds'}-\frac{s}{r^2}\cdot\frac{dr}{ds}+ss'\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds}=\frac{1}{r}-\frac{s\left(s'-s\cos\epsilon\right)+s\left(s-s'\cos\epsilon\right)}{r^3}+ss'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dsds'}$$

e riducendo

$$ss'\frac{d^2q}{dsds'}=\frac{a^2}{r^3}+\frac{ss'd^2\frac{1}{r}}{dsds'}$$

da cui si ricaverà

$$ss'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dsds'}=\frac{d^2q}{dsds'}-\frac{a^2}{r^3}$$

In precedenza abbiamo trovato

$$r\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}=-\cos\epsilon$$

o

$$r\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{\left(s-s'\cos\epsilon\right)\left(s'-s\cos\epsilon\right)}{r^2}=-\cos\epsilon$$

effettuando la moltiplicazione e sostituendo $s^2+s^{'2}$ con il suo valore ricavato da

$$r^2=a^2+s^2+s^{'2}-2ss'\cos\epsilon$$

si ottiene, riducendo,

$$\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{ss'\sin^2\epsilon+a^2\cos\epsilon}{r^3}=0$$

da cui

$$\frac{ss'}{r^3}=-\frac{1}{\sin^2\epsilon}\left(\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{a^2\cos\epsilon}{r^3}\right)$$

Sostituendo questo valore come quello di $\frac{ss'd^2\frac{1}{r}}{dsds'}$ nell'espressione del momento di rotazione dell'elemento, diviene

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}ii'\sin\epsilon dsds'\left[\tfrac{d^2q}{dsds'}-\tfrac{a^2}{r^3}-\tfrac{\cos\epsilon}{\sin^2\epsilon}\left(\tfrac{d^2r}{dsds'}+\tfrac{a^2\cos\epsilon}{r^3}\right)\right]=\\=\tfrac{1}{2}ii'dsds'\left(\sin\epsilon\tfrac{d^2q}{dsds'}-\tfrac{a^2\sin\epsilon}{r^3}-\cot\tfrac{d^2r}{dsds'}-\tfrac{\cos^2\epsilon}{\sin\epsilon}\cdot\tfrac{a^2}{r^3}\right)=\\=\tfrac{1}{2}ii'dsds'\left(\sin\epsilon\tfrac{d^2q}{dsds'}-\cot\tfrac{d^2r}{dsds'}-\tfrac{1}{\sin\epsilon}\cdot\tfrac{a^2}{r^3}\right)\end{gathered}$$

e integrando rispetto a s e s', si ha per il momento totale

$$\frac{1}{2}ii'\left(q\sin\epsilon - r\cot\epsilon - \frac{a^2}{\sin\epsilon}\iint\frac{dsds'}{r^3}\right)$$

il calcolo si riduce,, come prima, a trovare il valore dell'integrale doppio $\iint\frac{dsds'}{r^3}$.

Se le correnti sono in uno stesso piano, si ha $a = 0$, e il momento si riduce a

$$\frac{1}{2}ii'\left(q\sin\epsilon - r\cot\epsilon\right)$$

risultato che coincide con quello che abbiamo ottenuto trattando direttamente due correnti poste in uno stesso piano. Non essendo q altro cosa da $\frac{ss'}{r}$, e r divenendo MP, si ha

$$q\sin\epsilon = \frac{ss'\sin\epsilon}{r} = \frac{MP\cdot AQ}{MP} = AQ$$

e abbiamo trovato con l'altro procedimento

$$\frac{1}{2}ii'\left(p - r\cot\epsilon\right)$$

indicando p la perpendicolare AQ: i due risultati sono quindi identici. L'integrazione eseguita tra i limiti dà (78)

$$\frac{1}{2}ii'\left[p_2^{"} - p_1^{"} - p_2^{'} + p_1^{'} + \cot\epsilon\left(r_1^{"} + r_2^{'} - r_2^{"} - r_1^{'}\right)\right]$$

se l'angolo ϵ è retto, questo momento si riduce a

$$\frac{1}{2}ii'\left(p_2^{"} - p_1^{"} - p_2^{'} + p_1^{'}\right)$$

Quando $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, ma a non è nullo, il momento sopra diviene

$$\frac{1}{2}ii'\left(q - a^2\iint\frac{dsds'}{r^3}\right)$$

L'integrale che si deve calcolare in questo caso è

$$\int ds'\int\frac{ds}{r^3} = \int ds'\int\frac{ds}{\left(a^2+s^2+s'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{s}{\left(a^2+s'^2\right)\sqrt{\left(a^2+s^2+s'^2\right)}}$$

che bisogna integrare nuovamente rispetto a s'; viene

$$\int\frac{sds'}{\left(a^2+s'^2\right)\sqrt{\left(a^2+s^2+s'^2\right)}} = \int\frac{\left(a^2+s^{'2}\right)sds'}{\left(a^4+a^2s'^2+a^2s^2+s^2s'^2\right)\sqrt{\left(a^2+s^2+s'^2\right)}} =$$

$$= \int\frac{s\left(a^2+s^2\right)\frac{ds}{\sqrt{\left(a^2+s^2+s'^2\right)}}}{a^2\left(a^2+s^2+s'^2\right)+s^2s'^2} = \int\frac{\frac{s\left(a^2+s^2\right)ds'}{\left(a^2+s^2+s'^2\right)^{\frac{3}{2}}}}{a^2+\frac{s^2s'^2}{a^2+s^2+s'^2}} = \int\frac{\frac{dq}{ds'}ds'}{a^2+q^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{q}{a}+C$$

Sia M il valore del momento di rotazione quando le due correnti elettriche, le cui lunghezze sono s e s', partono da punti in cui le loro direzioni incontrano la retta che ne misura la più corta distanza, si avrà

$$M = \frac{1}{2}ii'\left(q - a\arctan\frac{q}{a}\right)$$

espressione che si riduce, quando $a = 0$, a $M = \frac{1}{2}ii'q$, ciò che è in accordo con il valore $M = \frac{1}{2}ii'p$ che abbiamo già trovato per questo caso, poiché allora q diviene la perpendicolare che avevamo indicato con p. Se si suppone a infinito, M diviene nullo, come deve essere, poiché ne risulta

$$a \arctan \frac{q}{a} = q$$

Se si chiama z l'angolo la cui tangente è

$$\frac{ss'}{a\sqrt{(a^2 + s^2 + s'^2)}}$$

verrà

$$M = \frac{1}{2}ii'q\left(1 - \frac{z}{\tan z}\right)$$

il valore del momento di rotazione che sarebbe prodotto da una forza uguale a

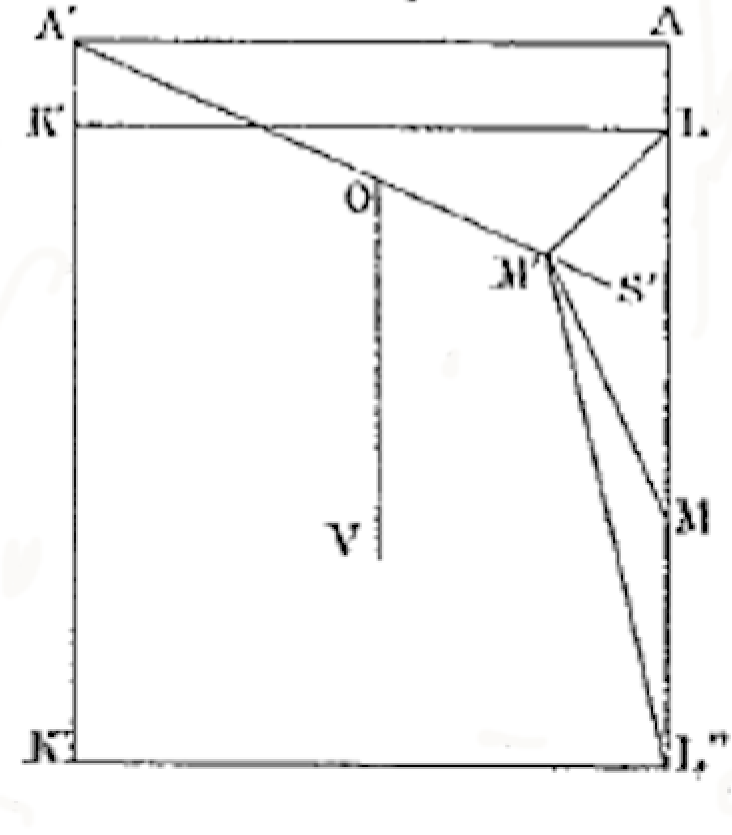
$$\frac{1}{2}ii'\left(1 - \frac{z}{\tan z}\right)$$

agente lungo la retta che unisce le due estremità dei conduttori opposti a quelli dove essi sono incontrati dalla retta che ne misura la distanza più breve.

Basta quadruplicare queste espressioni per avere il momento di rotazione prodotto dall'azione reciproca di due conduttori uno dei quali sarà mobile attorno alla retta che misura la loro più breve distanza, nel caso in cui questa retta incontra i due conduttori nel loro punto medio, e dove le loro lunghezze sono rispettivamente rappresentate da $2s$ e $2s'$.

Del resto, è facile vedere che se, invece di supporre che le due correnti partono dal punto in cui esse incontrano la retta, fatto il calcolo per limiti qualsiasi, si sarebbe trovato un valore di M composto di quattro termini della forma di quello che abbiamo ottenuto in questo caso particolare, essendo due di questi termini positivi e gli altri due negativi.

Fig. 27.



Consideriamo ora due correnti rettilinee $A'S', L'L$" (fig. 27) non poste in uno stesso piano e le cui direzioni formino un angolo retto.

Sia AA' la loro perpendicolare comune, e cerchiamo l'azione di $L'L$" per far ruotare $A'S'$ attorno a una parallela OV a $L'L$" tracciata alla distanza $A'O = b$ da A.

Siano M, M' due elementi qualunque di queste correnti; l'espressione generale della componente della loro azione parallela alla perpendicolare comune AA', diviene, ponendo $\epsilon = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{2}aii'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dsds'}dsds'$$

il suo momento rispetto al punto O è quindi, prendendo A' per origine delle s', uguale a

$$\frac{1}{2}aii'\left(s'-b\right)\frac{d^2\frac{1}{r}}{dsds'}dsds'$$

integrando rispetto a s, si ha

$$\frac{1}{2}aii'\left(s'-b\right)\frac{d\frac{1}{r}}{ds'}ds'$$

e chiamando r' e r" le distanze $M'L', M'L$" tra M' e i punti L', L", e integrando tra questi limiti l'azione di $L'L$", per far ruotare l'elemento M', è

$$\frac{1}{2}aii'\left(s'-b\right)ds'\left(\frac{d\frac{1}{r"}}{ds'}-\frac{d\frac{1}{r'}}{ds'}\right)$$

espressione che bisogna integrare rispetto a s'. Ora

$$\frac{1}{2}aa'\int\left(s'-b\right)d\frac{1}{r"}=\frac{1}{2}aa'\left(\frac{s'-b}{r"}-\int\frac{ds'}{r"}\right)$$

ed è allora facile vedere che indicando con c il valore di AL" di s che corrisponde a r", e che è una costante nell'integrazione, si ha $A"L" = \sqrt{a^2+c^2}$, da cui segue che

$$r" = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sin\beta"} \quad s' = -\sqrt{a^2+c^2}\cot\beta" \quad ds' = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sin^2\beta"}d\beta"$$

così

$$\int\frac{ds'}{r"}=\int\frac{d\beta"}{\sin\beta"}=L\frac{\tan\frac{1}{2}\beta_2^{"}}{\tan\frac{1}{2}\beta_1^{"}}$$

il secondo termine si integrerà allo stesso modo, e si avrà infine per il momento di rotazione cercato

$$\frac{1}{2}aa'\left(\frac{s_2^{'}-b}{r_2^{"}}-\frac{s_1^{'}-b}{r_1^{"}}-\frac{s_2^{'}-b}{r_2^{'}}+\frac{s_1^{'}-b}{r_1^{'}}-L\frac{\tan\frac{1}{2}\beta_2^{"}\tan\frac{1}{2}\beta_1^{'}}{\tan\frac{1}{2}\beta_1^{"}\tan\frac{1}{2}\beta_2^{'}}\right)$$

Nel caso in cui l'asse di rotazione parallelo alla retta $L'L$" dove s passa per il punto di intersezione A' delle rette a e s', si ha $b = 0$; e se si suppone, inoltre, che la corrente che percorre s' parte da questo punto di intersezione, si avrà inoltre

$$s'=0 \quad \beta_1^{'}=\frac{\pi}{2} \quad \beta_1^{"}=\frac{\pi}{2} \ di$$

modo che il valore del momento do rotazione si ridurrà a

$$\frac{1}{2}aii'\left(\frac{s_2^{'}}{r_2^{"}}-\frac{s_2^{'}}{r_2^{'}}-L\frac{\tan\frac{1}{2}\beta_2^{"}}{\tan\frac{1}{2}\beta_2^{'}}\right)$$

Cercherò ora l'azione di un filo conduttore piegato lungo il perimetro di un rettangolo $K'K"L"L'$ per far ruotare un conduttore rettilineo $A'S' = s_2^{'}$, perpendicolare sul piano di questo rettangolo, e mobile attorno a uno dei suoi lati $K'K$" che incontra nel punto A': essendo il momento prodotto dall'azione di questo lato $K'K$" evidentemente nullo, servirà a quello che è dovuto all'azione di $L'L$" e di cui abbiamo calcolato il valore, aggiungere il momento prodotto da $K'L'$ nello stesso verso di quello di $L'L$", e togliere quello che è da K"L" la cui azione tende a far ruotare $A'S'$ in verso contrario; ora, dai calcoli precedenti, indicando con g e h le distanze più brevi $A'K', A'K$", di AS' dalle rette $K'L', L$"L" che sono entrambe uguali ad a, si ha per i valori assoluti di questi momenti

$$\tfrac{1}{2}ii'\left(q' - g\arctan\tfrac{q'}{g}\right) \quad \tfrac{1}{2}ii'\left(q" - h\arctan\tfrac{q"}{h}\right)$$

e ponendo

$$q' = \frac{as_2'}{\sqrt{g^2+a^2+s'^2}} = \frac{as_2'}{r_2'} \quad q" = \frac{as_2'}{\sqrt{h^2+a^2+s'^2}} = \frac{as_2'}{r_2"}$$

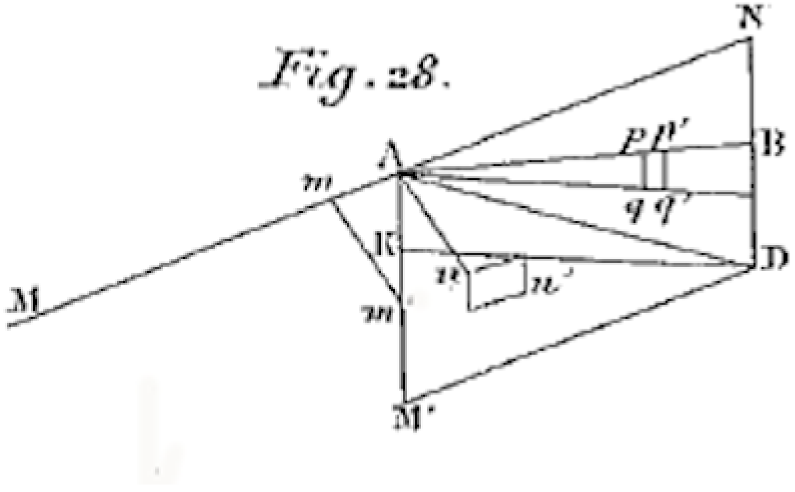
quello del momento totale è

$$\frac{1}{2}ii'\left(h\arctan\frac{q"}{g} - g\arctan\frac{q'}{g} - aL\frac{\tan\frac{1}{2}\beta_2"}{\tan\frac{1}{2}\beta_2'}\right)$$

Questo è il valore del momento di rotazione risultante dall'azione di un conduttore avente per forma il perimetro di un rettangolo, e agente su un conduttore mobile attorno a uno dei lati del rettangolo, quando la direzione di questo conduttore è perpendicolare al piano del rettangolo, qualunque sia la sua distanza dagli altri lati del rettangolo e le sue dimensioni. Determinando con l'esperienza l'istante in cui il conduttore mobile è in equilibrio tra le azioni opposte di due rettangoli posti nello stesso piano, ma di grandezza differente e a distanza diverse del conduttore mobile, si ha un metodo assai semplice di procurarsi delle verifiche della mia formula dotata di una grande precisione; è quanto si può fare facilmente con l'aiuto di uno strumento di cui è sin troppo facile immaginare la costruzione perché sia necessario spiegarla qui.

Integriamo ora l'espressione $\iint \frac{dsds'}{r^3}$ nell'estensione di due correnti rettilinee non poste nello stesso piano, e formanti tra loro un angolo qualunque ϵ, nel caso in cui queste correnti iniziano dalla perpendicolare comune; gli altri casi si dedurranno immediatamente.

Siano A (fi.g 28) il punto il cui la comune perpendicolare incontra la direzione AM della corrente s, AM' una parallela tracciata da questo punto alla corrente s', e mm' la proiezione sul piano MAM' della retta che unisce i due elementi ds, ds'.



Tracciamo da A una linea An parallela e uguale a mm', e formiamo in n un piccolo parallelogrammo nn', avente i suoi lati paralleli alle rette MAN, AM' e uguali a ds, ds'.

Se si ripete la stessa costruzione per tutti gli elementi, i parallelogrammi così formati comporranno il parallelogrammo intero $NAM'D$, e, avendo per misura $dsds' \sin\epsilon$, si otterrà l'integrale proposto moltiplicato per $\sin\epsilon$, cercando il volume avente per base $NAM'D$, e chiuso alla superficie le cui ordinate innalzate dai diversi punti di questa base hanno per valore $\frac{1}{r^2}$; essendo r la distanza di due elementi delle correnti, che corrispondono, secondo la nostra costruzione, a tutti questi punti della superficie $NAMD$.

Per calcolare questo volume, potremo dividere la base in triangoli aventi per vertice comune il punto A.

Siano Ap una retta tracciata a uno qualunque dei punti dell'area del triangolo AND, e $pqp'q'$ l'area compreso tra le due rette infinitamente vicine Ap, Aq' e i due archi di cerchio descritti da A con i raggi $Ap = u$ e $Ap' = u + du$: avremo, a causa dell'angolo $NAM' = \pi - \epsilon$ e chiamando φ l'angolo NAp,

$$\sin\epsilon \iint \frac{dsds'}{r^3} = \iint \frac{udud\varphi}{r^3}$$

Se a indica la perpendicolare comune alle direzioni di due conduttori, e s e s' le distanze contate da A sulle due correnti, si ha

$$r = \sqrt{a^2 + u^2} \quad u = \sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos\epsilon}$$

pertanto, integrando dapprima da $u = 0$ fino a $u = AR = u_1$,

$$\sin\epsilon \iint \frac{dsds'}{r^3} = \iint \frac{udud\varphi}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int d\varphi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + u_1^2}} \right)$$

Rimane da integrare quest'ultima espressione rispetto a φ: perciò calcoleremo u_1 in funzione di φ con la proporzione $AN : AR = \sin(\varphi + \epsilon) : \sin\epsilon$, o $s : u_1 = \sin(\varphi + \epsilon) : \sin\epsilon$; e sostituendo a $a^2 + u_1^2$ il valore ricavato da questa proporzione, dovremo calcolare

$$\int d\varphi \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{s^2 \sin^2\epsilon}{\sin^2(\varphi+\epsilon)}}} \right] = \frac{\varphi}{a} - \int \frac{d\varphi \sin(\varphi + \epsilon)}{\sqrt{s^2 \sin^2\epsilon + a^2 \sin^2(\varphi + \epsilon)}} =$$

$$= \frac{\varphi}{a} + \frac{1}{a} \int \frac{d\cos(\varphi + \epsilon)}{\sqrt{\frac{a^2 + s^2 \sin^2\epsilon}{\sin^2(\varphi+\epsilon)} - \cos^2(\varphi + \epsilon)}} = \frac{1}{a} \left[\varphi + \arcsin \frac{a \cos(\varphi + \epsilon)}{\sqrt{a^2 + s^2 \sin^2\epsilon}} + C \right]$$

Chiamiamo μ e μ' gli angoli $NAD, M'AD$ e prendiamo l'integrale precedente tra $\varphi = 0$ e $\varphi = \mu$, esso diviene allora

$$\frac{1}{a} \left[\mu + \arcsin \frac{a \cos(\mu + \epsilon)}{\sqrt{a^2 + s^2 \sin^2\epsilon}} - \arcsin \frac{a \cos\epsilon}{\sqrt{a^2 + s^2 \sin^2\epsilon}} \right]$$

e, a causa di $\mu + \epsilon = \pi - \mu'$, esso si cambia in

$$\frac{1}{a} \left[\mu - \arcsin \frac{a \cos\mu'}{\sqrt{a^2 + s^2 \sin^2\epsilon}} - \arcsin \frac{a \cos\epsilon}{\sqrt{a^2 + s^2 \sin^2\epsilon}} \right]$$

o

$$\cos\mu' = \frac{AK}{AD} = \frac{s' - s\cos\epsilon}{\sqrt{(s' - s\cos\epsilon)^2 + s^2 \sin^2\epsilon}} = \frac{s' - s\cos\epsilon}{\sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos\epsilon}}$$

da cui si ricava per l'integrale l'espressione seguente:

$$\frac{1}{a} \left[\mu - \arcsin \frac{a(s' - s\cos\epsilon)}{\sqrt{a^2 + s^2 \sin^2\epsilon}\sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos\epsilon}} - \arcsin \frac{a \cos\epsilon}{\sqrt{a^2 + s^2 \sin^2\epsilon}} \right]$$

o, passando dai seni alla tangente per i due archi,

$$\frac{1}{a}\left[\mu - \arctan\frac{a\,(s' - s\cos\epsilon)}{s\sin\epsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos\epsilon}} - \arctan\frac{a\cot\epsilon}{\sqrt{a^2+s^2}}\right]$$

e siccome si trova l'integrale relativo al triangolo $M'AD$ cambiando in questa espressione μ in μ' e s in s', si ha per l'integrale totale, perché $\mu + \mu' = \pi - \epsilon$

$$\frac{1}{a}\left(\pi - \epsilon - \arctan\frac{a(s'-s\cos\epsilon)}{s\sin\epsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos\epsilon}} - \arctan\frac{a\cot\epsilon}{\sqrt{a^2+s^2}}\right.$$
$$\left. - \arctan\frac{a(s-s'\cos\epsilon)}{s'\sin\epsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos\epsilon}} - \arctan\frac{a\cot\epsilon}{\sqrt{a^2+s'^2}}\right)$$

Calcolando la tangente della somma dei due archi i cui valori contengono s e s', si cambia questa espressione in

$$\frac{1}{a}\left(\pi - \epsilon - \arctan\frac{a\sin\epsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos\epsilon}}{ss'\sin^2\epsilon + a^2\cos\epsilon} - \arctan\frac{a\cot\epsilon}{\sqrt{a^2+s^2}} - \arctan\frac{a\cot\epsilon}{\sqrt{a^2+s'^2}}\right)$$

e siccome

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a\sin\epsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos\epsilon}}{ss'\sin^2\epsilon + a^2\cos\epsilon} = \arctan\frac{ss'\sin^2\epsilon + a^2\cos\epsilon}{a\sin\epsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos\epsilon}}$$

si ha, dividendo per $\sin\epsilon$,

$$\iint\frac{dsds'}{r^3} = \frac{1}{a\sin\epsilon}\left(\arctan\frac{ss'\sin^2\epsilon + a^2\cos\epsilon}{a\sin\epsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos\epsilon}} - \arctan\frac{a\cot\epsilon}{\sqrt{a^2+s^2}} - \arctan\frac{a\cot\epsilon}{\sqrt{a^2+s'^2}} + \frac{\pi}{2} - \right.$$

espressione che, quando si suppone $\epsilon = \frac{\pi}{2}$, si riduce a

$$\frac{1}{a}\left(\arctan\frac{ss'}{s\sqrt{a^2+s^2+s'^2}}\right)$$

come abbiamo trovato in precedenza.

Si può osservare che il primo termine del valore che troviamo nel caso generale è l'integrale indefinito di

$$\frac{dsds'}{(a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos\epsilon)^{\frac{3}{2}}}$$

come lo si può verificare per differenziazione, e che gli altri tre si ottengono ponendo successivamente in questo integrale indefinito:

$$1^\circ\ s' = 0 \quad 2^\circ\ s = 0 \quad 3^\circ\ s' = 0 \quad 4^\circ\ s = 0$$

Se le correnti non partissero dalla perpendicolare comune, si avrebbe un integrale composto ancora da quattro termini che sarebbero tutti della stessa forma dell'integrale indefinito.

Abbiamo considerato finora l'azione mutua di correnti elettriche poste in uno stesso piano, e di correnti rettilinee poste in un modo qualunque nello spazio; ci resta da esaminare l'azione reciproca di correnti curvilinee che non stanno nello stesso piano. Supporremo dapprima che queste correnti descrivono curve piane e chiuse, e che tutte le loro dimensioni siano infinitamente piccole. Abbiamo visto che l'azione di una corrente di questa specie dipendeva da tre integrali A, B, C, i cui valori sono

$$A = \lambda\left(\frac{\cos\xi}{l^3} - \frac{3qx}{l^3}\right)$$

$$B = \lambda \left(\frac{\cos \eta}{l^3} - \frac{3qy}{l^3} \right)$$

$$C = \lambda \left(\frac{\cos \zeta}{l^3} - \frac{3qz}{l^3} \right)$$

Immaginiamo ora nello spazio una linea qualunque MmO (fig. 29), che circondano correnti elettriche formando circuiti chiusi molto piccoli attorno a questa linea, in piani infinitamente vicini che gli sono perpendicolari, in modo che le aree comprese in questi circuiti siano tutte uguali tra loro e rappresentate da λ, che i loro centri di gravità siano su MmO, e che vi sia dappertutto la stessa distanza, misurata su questa linea, tra due piani consecutivi. Chiamando g questa distanza che consideriamo come infinitamente piccola, il numero di correnti che si troveranno a soddisfare un elemento di ds della linea MmO, sarà $\frac{ds}{g}$; e bisognerà moltiplicare per questo numero i valori di A, B, C che abbiamo trovato per un solo circuito, al fine di avere quelli che si riferiscono ai circuiti dell'elemento ds; integrando poi, da una delle estremità L' dell'arco s fino all'altra estremità L" di questo arco, si avranno i valori di A, B, C relativi all'insieme di tutti i circuito che lo circondano, insieme al quale ho dato il nome di *solenoide elettrodinamico*, dalla parola greca σωληνοειδῄς, il cui significato esprime precisamente ciò che ha la forma di un canale, cioè la superficie di questa forma sulla quale si trovano tutti i circuiti.

Si ha così per tutti i solenoidi,

$$A = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{\cos \xi ds}{l^3} - \frac{3qxds}{l^3} \right)$$

$$B = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{\cos \eta ds}{l^3} - \frac{3qyds}{l^3} \right)$$

$$C = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{\cos \zeta ds}{l^3} - \frac{3qzds}{l^3} \right)$$

Ora, la direzione della retta g, perpendicolare al piano di λ, essendo parallela alla tangente alla curva s, si ha

$$\cos \xi = \frac{dx}{ds} \quad \cos \eta = \frac{dy}{ds} \quad \cos \zeta = \frac{dz}{ds}$$

Inoltre, q è evidentemente uguale alla somma delle proiezioni delle tre coordinate x, y, z sulla sua direzione; così

$$q = \frac{xdx + ydy + zdz}{ds} = \frac{ldl}{ds}$$

poiché si ha $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Sostituendo questi valori in quello che abbiamo trovato per C, esso diviene

$$C = \frac{\lambda}{g} \int \left(\frac{dz}{l^3} - \frac{3zdl}{l^3} \right) = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{z}{l^3} + C \right)$$

Indicando x', y', z', l' e $x", y", z", l"$, i valori di x, y, z, l relativi alle due estremità $L', L"$ del solenoide, si ha

$$C = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{z"}{l"^3} - \frac{z'}{l'^3} \right)$$

Operando allo stesso modo, per gli altri due integrali A, B si trovano espressioni simili per rappresentarli, e i valori delle tre quantità che ci siamo proposti di calcolare per l'intero solenoide sono

$$A = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{x"}{l"^3} - \frac{x'}{l'^3} \right)$$

$$B = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{y"}{l"^3} - \frac{y'}{l'^3} \right)$$

$$C = \frac{\lambda}{g}\left(\frac{z"}{l"^3} - \frac{z'}{l'^3}\right)$$

Se il solenoide avesse per direttrice una curva chiusa, si avrebbe $x" = x'$, $y" = y'$, $z" = z'$, $l" = l'$ e, di conseguenza, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; se si estendesse all'infinito nei due sensi, tutti i termini dei valori di A, B, C sarebbero nulli separatamente, ed è evidente che in questi due casi l'azione esercitata dal solenoide si riduce a zero. Se si suppone che si estende all'infinito solo da un lato, assegnandogli allora il nome di solenoide indefinito in un solo verso, si dovrà considerare solo l'estremità le cui coordinate x', y', z' hanno valori finiti, poiché essendo supposta l'altra estremità a una distanza infinita, i primi termini si quelli trovati per A, B, C sono necessariamente nulli; si ha così

$$A = -\tfrac{\lambda x'}{gl'^3} \quad B = -\tfrac{\lambda y'}{gl'^3} \quad C = -\tfrac{\lambda z'}{gl'^3}$$

pertanto $A : B : C = x' : y' : z'$; da cui segue che la normale al piano direttore, che passa per l'origine e forma con gli assi i cui coseni sono

$$\tfrac{A}{D} \quad \tfrac{B}{D} \quad \tfrac{C}{D}$$

facendo sempre $D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, passa anche per l'estremità del solenoide le cui coordinate sono x', y', z'.

Abbiamo visto, nel caso generale, che la risultante totale è perpendicolare a questa normale; così l'azione di un solenoide indefinito su un elemento è perpendicolare alla retta che unisce il punto medio di questo elemento all'estremità del solenoide; e siccome è così anche per l'elemento, ne segue che esso è perpendicolare al piano tracciato da questo elemento e dall'estremità del solenoide.

Essendo la sua direzione determinata, rimane solo da conoscerne il valore: ora, dal calcolo fatto nel caso generale, questo valore è

$$-\frac{Dii'ds'\sin\varepsilon'}{2}$$

essendo ε' l'angolo dell'elemento ds' con la normale al piano direttore; e siccome $D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, si trova facilmente

$$D = -\frac{\lambda}{gl'^2}$$

ciò che dà per il valore della risultante

$$\frac{\lambda ii'ds'\sin\varepsilon}{2gl'^2}$$

Si vede quindi che l'azione che un solenoide indefinito la cui estremità è L' (fig. 29) esercita sull'elemento ab, è normale in A al piano bAL', proporzionale al seno dell'angolo bAL' e in ragione inversa del quadrato della distanza AL', e che essa rimane sempre la stessa, qualunque sia la forma e la direzione della curva $L'L"$ sulla quale si suppongono posti tutti i centri di gravità delle correnti di cui il solenoide è composto.

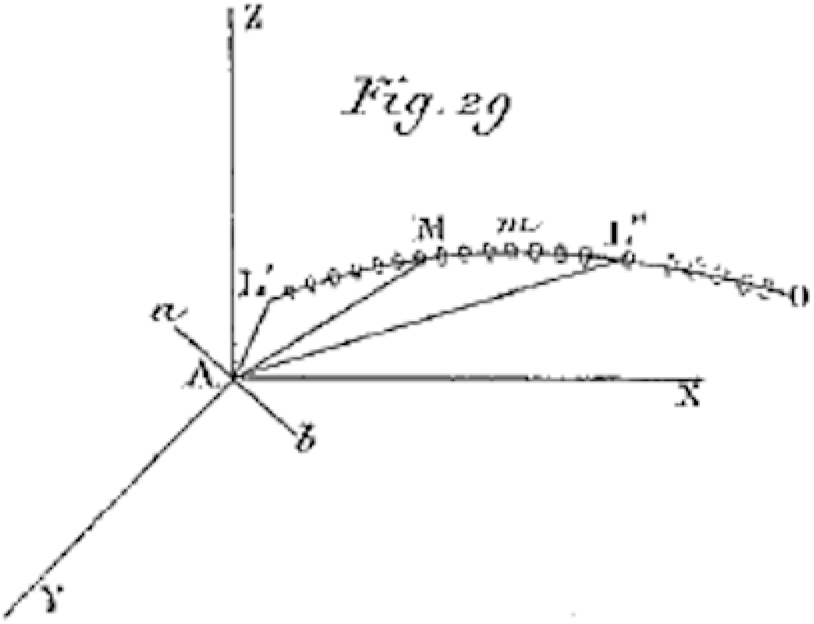


Fig. 29

Se si vuole passare al caso di un solenoide finito le cui due estremità siano poste in due punti dati L', L'', basterà supporre un secondo solenoide indefinito iniziante dal punto L'' del primo e coincidente con esso da questo punto fino all'infinito, avente le sue correnti della stessa intensità, ma dirette in verso contrario, l'azione di quest'ultimo sarà di segno contrario a quella del primo solenoide indefinito partente dal punto L' e la distruggerà in tutta la parte che si estende da L'' fino a all'infinito nella direzione $L''O$ dove essi saranno sovrapposti; l'azione del solenoide $L'L''$ sarà quindi la stessa di quella che eserciterebbe l'unione di questi due solenoidi infiniti, e si comporrà, di conseguenza, della forza che abbiamo calcolato e di un'altra forza agente in verso contrario, passante dallo stesso punto A, perpendicolare al piano bAL'', e avente per valore

$$\frac{\lambda i i' ds' \sin \varepsilon''}{2 g l''^2}$$

essendo ϵ'' l'angolo bAL'', e l'' la distanza AL''. L'azione totale del solenoide $L'L''$ è la risultante di queste due forze, e passa, come esse, per il punto A.

Siccome l'azione di un solenoide definito si deduce immediatamente da quella del solenoide indefinito, inizieremo, in tutto ciò che rimane da dire su questo argomento, col considerare il solenoide indefinito che offre calcoli più semplici, e del quale è sempre facile concludere ciò che avviene realmente in un solenoide definito.

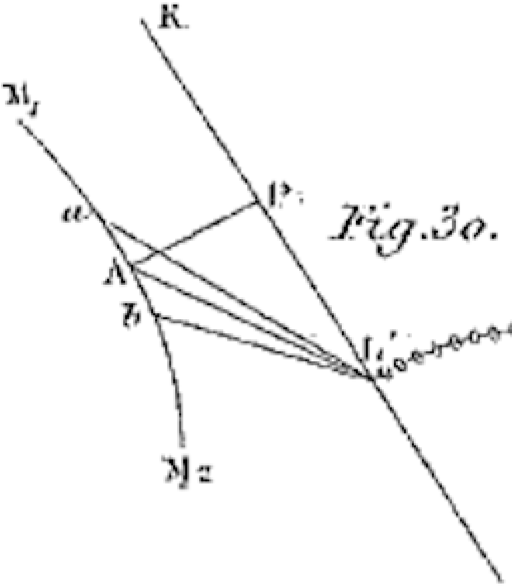


Fig. 30.

Siano L' (fig. 30), l'estremità di un solenoide indefinito; A i punto medio di un elemento qualunque ba di una corrente elettrica M_1AM_2, e $L'K$ una retta fissa qualunque tracciata dal punto L'; chiamiamo θ l'angolo variabile $KL'A$, μ l'inclinazione dei piani $bAL', AL'K$ e l la distanza LA'. Essendo l'azione dell'elemento ba sul solenoide uguale e opposta a quella che quest'ultimo esercita sull'elemento, bisogna, per determinarla, considerare un punto posto in A, legato invariabilmente al solenoide, e sollecitato da una forza la cui espressione sia, trascurando il segno,

$$\frac{\lambda ii' ds' \sin(bAL')}{2gl'^2}$$

o

$$\frac{\lambda ii' dv}{gl'^3}$$

indicando con dv l'area $aL'b$ che è uguale a

$$\frac{l' ds' \sin(bAL')}{2}$$

Siccome questa forza è normale in A al piano $AL'b$, bisogna, per avere il suo momento rispetto all'asse $L'K$, cercare la sua componente perpendicolare a $AL'K$, e moltiplicarla per la perpendicolare ad AP abbassata dal punto A sulla retta $L'K$. Essendo μ l'angolo compreso tra i piani $AL'b, AL'K$, questa componente si ottiene moltiplicando l'espressione precedente per $\cos\mu$; ma $dv\cos\mu$ è la proiezione dell'area dv sul piano $AL'K$, da cui segue che rappresentando questa proiezione con du, il valore della componente cercata è

$$\frac{\lambda ii' du}{gl'^3}$$

Ora, la proiezione dell'angolo $aL'b$ su $AL'K$ può essere considerata come la differenza infinitamente piccola degli angoli $KL'a, KL'b$: ciò sarà quindi $d\theta$, e si avrà

$$du = \frac{l'^2 d\theta}{2}$$

ciò che riduce l'ultima espressione a

$$\frac{\lambda ii' d\theta}{2gl'}$$

e siccome $AP = l \sin\theta$, si ha per il momento cercato

$$\frac{\lambda ii'}{2g} \sin\theta d\theta$$

Questa espressione, integrata su tutta l'estensione della curva M_1AM_2 dà il momento di questa corrente per far ruotare il solenoide attorno a $L'K$: se la corrente è chiusa, l'integrale, che è in generale

$$C - \frac{\lambda ii' \cos\theta}{2g}$$

si annulla tra i limiti, e il momento è nullo rispetto a una retta qualsiasi $L'K$ passante per il punto L'.

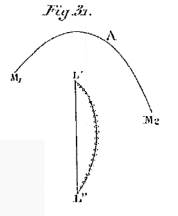
Segue da ciò che nell'azione di un circuito chiuso, o di un sistema qualunque di circuiti chiusi su un solenoide indefinito, tutte le forze applicate ai diversi elementi del sistema danno, attorno ad un asse qualunque, gli stessi momenti come se fossero all'estremità stessa del solenoide; inoltre la loro risultante passerà per questa estremità, e queste forze non potranno, in nessun caso, tendere a imprimere al solenoide un moto di rotazione attorno ad una retta tracciata dalla sua estremità, ciò che è conforme ai risultati delle esperienze. Se la corrente rappresentata dalla curva M_1AM_2 non fosse chiusa, il suo momento per far ruotare il solenoide attorno a $L'K$, chiamando $\theta_1^{'}$ e $\theta_2^{'}$ i valori estremi di θ relativi al punto L' e alle estremità M_1, M_2 della curva M_1AM_2, sarà

$$\frac{\lambda ii'}{2g}\left(\cos\theta_1^{'} - \cos\theta_2^{'}\right)$$

Consideriamo ora un solenoide definito $L'L$" (fig. 31) che possa ruotare solo attorno ad un asse passante per le sue due estremità. Potremo sostituirgli, come in precedenza, due solenoidi indefiniti; e la somma delle azioni della corrente M_1AM_2 su ognuno di essi sarà la sua azione di $L'L$". Troveremo il momento del primo, e chiamando $\theta_1^{"}, \theta_2^{"}$ gli angoli corrispondenti a $\theta_1^{'}$ e $\theta_2^{'}$ ma relativi all'estremità L", si avrà per quello della seconda

$$-\frac{\lambda ii'}{2g}\left(\cos\theta_1^{'} - \cos\theta_1^{"} - \cos\theta_2^{'} - \cos\theta_2^{"}\right)$$

Fig. 31.



il momento totale prodotto dall'azione di M_1AM_2, per far ruotare il solenoide attorno al suo asse $L'L$", sarà quindi

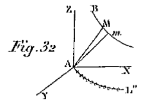
$$\frac{\lambda ii'}{2g}\left(\cos\theta_1^{'} - \cos\theta_1^{"} - \cos\theta_2^{'} - \cos\theta_2^{"}\right)$$

Questo momento è indipendente dalla forma del conduttore M_1AM_2, della sua grandezza e della sua distanza dal solenoide $L'L$", e rimane lo stesso quando variano in modo che i quattro angoli $\theta_1^{'}, \theta_1^{"}, \theta_2^{'}, \theta_2^{"}$ non cambiano valori; è nullo non solo quando la corrente M_1M_2 forma un circuito chiuso, ma ancora quando si suppone che questa corrente si estende all'infinito nei due versi, poiché essendo allora le sue due estremità a una distanza infinita di quelle del solenoide, l'angolo $\theta_1^{'}$ diviene uguale a $\theta_1^{"}$, e l'angolo $\theta_2^{'}$ a $\theta_2^{"}$.

Tutti i momenti di rotazione attorno alle rette tracciate dall'estremità di un solenoide indefinito essendo nulli, questa estremità è il punto di applicazione della risultante delle forze esercitate sul solenoide da un circuito elettrico chiuso o da un sistema di correnti formanti circuiti chiusi; si può quindi supporre che tutte le sue forze vi sono trasportate, e prenderla per l'origine A (fig. 32) delle coordinate: sia allora BM una porzione di una delle correnti che agiscono sul solenoide; la forza dovuta a un elemento qualunque Mm di BM è, da ciò che precede, normale al piano AMm e espresso da

$$\frac{\lambda ii'dv}{gr^3}$$

essendo dv l'area AMm, e r la distanza variabile AM.



Per avere la componente di questa azione lungo AX, la si deve moltiplicare per il coseno dell'angolo che essa forma con AX, il quale è lo stesso dell'angolo dei piani AMm, ZAY; ma dv moltiplicato per questo coseno è la proiezione di AMm su ZAY, che è uguale a

$$\frac{ydz - zdx}{2}$$

se quindi si vuole avere l'azione lungo AX esercitata da un numero qualunque di correnti formanti circuiti chiusi, bisognerà prendere in tutta l'estensione di queste correnti l'integrale

$$\frac{\lambda ii'}{2g}\int\frac{ydz - zdy}{r^3}$$

che è

$$\frac{\lambda ii'A}{2g}$$

indicando A sempre la stessa quantità di prima nella quale si è sostituito n con il suo valore 3; si troverà analogamente che l'azione lungo AY è espressa da

$$\frac{\lambda ii'B}{2g}$$

e quella che ha luogo lungo AZ, da

$$\frac{\lambda ii'C}{2g}$$

La risultante di queste tre forze, che rappresenta l'azione totale esercitata da un numero qualunque di circuiti chiusi sul solenoide indefinito, è quindi uguale a

$$\frac{\lambda ii'D}{2g}$$

indicando sempre $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ con D; e i coseni degli angoli che esso forma con gli assi x, y, z valgono

$$\tfrac{A}{D} \quad \tfrac{B}{D} \quad \tfrac{C}{D}$$

che sono precisamente quelli dei coseni degli angoli che forma con gli stessi assi la normale al piano direttore che si otterrebbe considerando l'azione degli stessi circuiti su un elemento posto in A.

Ora, questo elemento sarebbe portato dall'azione del sistema in una direzione compresa nel piano direttore; da cui si ricava questa conseguenza notevole, che quando un sistema qualunque di circuiti chiusi agisce alternativamente su un solenoide indefinito e su un elemento posto all'estremità di questo solenoide, le direzione lungo le quali sono portati rispettivamente l'elemento e l'estremità del solenoide, sono perpendicolari tra loro. Se si suppone l'elemento posto nello piano direttore stesso, l'azione che il sistema esercita su di esso è al suo massimo, e vale

$$\frac{ii'Dds'}{2}$$

Quella che lo stesso sistema esercita sul solenoide la si trova uguale a

$$\frac{\lambda ii'D}{2g}$$

queste due forze sono quindi sempre tra loro nel rapporto costante per uno stesso elemento e uno stesso solenoide

$$ds' : \frac{\lambda}{g}$$

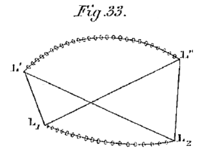
cioè come la lunghezza dell'elemento sta all'area della curva chiusa che descrive una delle correnti del solenoide divisa per la distanza di due correnti consecutive; questo rapporto è indipendente dalla forma e della grandezza delle correnti del sistema che agisce sull'elemento e sul solenoide.

Quando il sistema dei circuiti chiusi considerato è esso stesso un solenoide indefinito, la normale al piano direttore che unisce questo punto A è, come abbiamo visto, la retta che unisce questo punto A all'estremità del solenoide; segue da ciò che l'azione reciproca di due solenoidi indefiniti ha luogo lungo la retta che unisce l'estremità dell'uno a quella dell'altro; per trovarne il valore, indicheremo con λ' l'area dei circuiti formati dalle correnti di questo nuovo solenoide, g' la distanza tra i piani di due di questi circuiti che si seguono immediatamente, l la distanza tra le estremità dei due solenoidi indefiniti, e avremo $D = -\frac{\lambda'}{g'l^2}$, ciò che dà per la loro azioni mutua

$$\frac{\lambda ii'D}{2g} = -\frac{\lambda\lambda' ii'}{2gg'l^2}$$

che è in ragione inversa del quadrato della distanza l. Quando uno dei solenoidi è definito, lo si può sostituire con due solenoidi indefiniti, e l'azione si trova composta di due forze, l'una attrattiva e l'altra repulsiva, dirette lungo le rette che uniscono le due estremità del primo all'estremità del secondo. Infine, nel caso dove due solenoidi definiti $L'L"$, L_1L_2 (fig. 33) agiscono l'uno sull'altro, vi sono quattro forze dirette rispettivamente lungo le rette $L'L_1, L'L_2, L"L_1, L"L_2$ che uniscono le loro estremità a due a due; e se, per esempio, vi è repulsione lungo $L'L_1$ vi sarà attrazione lungo $L'L_2$ e $L"L_1$, e repulsione lungo $L"L_2$.

Fig. 33.



Per giustificare il modo in cui ho immaginato i fenomeni che presentano i magneti, considerandoli come un insieme di correnti elettriche formanti piccoli circuiti attorno alle loro particelle, si deve dimostrare, partendo dalla formula con la quale ho rappresentato l'azione reciproca di due elementi di correnti elettriche, che risultano da certi raggruppamenti di questi piccoli circuiti delle forze che dipendono solo dalla posizione di due punti determinati di questo sistema, e che godono, relativamente ad essi, tutte le proprietà delle forze che si attribuiscono a quelle che si chiamano molecole di fluido australe e di fluido boreale, quando si spiegano con questi due fluidi i fenomeni che presentano i magneti, sia nella loro reciproca azione, sia in quella che essi esercitano su un filo conduttore: si sa che i fisici che preferiscono la spiegazione in cui si suppone l'esistenza di queste molecole a quella che ho dedotto dalle proprietà delle correnti elettriche, ammettono che a ogni molecola di fluido australe corrisponde sempre, in ogni particella del corpo magnetizzato, una molecola di fluido boreale della stessa intensità, e che chiamando elemento magnetico l'insieme di queste due molecole che si possono considerare come i due poli di questo elemento, si possono spiegare i fenomeni che presentano i due generi di azione di cui qui si tratta: 1° che l'azione reciproca di due elementi magnetici si compone di quattro forze, due attrattive e due repulsive, dirette lungo le rette congiungenti le due molecole di uno di questi elementi alle due molecole dell'altro, e la cui intensità sia in ragione inversa del quadrato di queste distanze; 2° che quando uno di questi elementi agisce su una porzione infinitamente piccola del filo conduttore, ne risultano due forze perpendicolari ai piani passanti per le due molecole dell'elemento e per la direzione della piccola porzione del filo, e che siano proporzionali ai seni degli angoli che questa direzione forma con le rette che ne misurano le distanze dalle due molecole, e in ragione inversa dei quadrati di questi distanze. Fintanto che non si ammette il modo il cui concepisco l'azione dei magneti, e che attribuisco questi due tipi di forze a molecole di un fluido australe e di uno boreale, è impossibile ricondurle a un solo principio; ma adottando il mio modo di vedere sulla struttura dei magneti, si vede, dai calcoli precedenti, che questi due tipi di azione e i valori delle forze che ne derivano si deducono immediatamente dalla mia formula, e che essa basta per trovare questi valori da sostituire all'insieme di due molecole, l'una di fluido australe, l'altra di fluido boreale, un solenoide le cui estremità, che sono i due punti determinati da cui dipendono le forze in questione e che sono posti precisamente negli stessi punti in cui si supporrebbero le molecole dei due fluidi.

Nel momento in cui due sistemi di solenoidi molto piccoli agiscono l'uno sull'altro, dalla mia formula, come due magneti composti di tanti elementi magnetici quanti solenoidi si supporrebbero in questi due sistemi; uno di questi sistemi agirà così su un elemento di corrente elettrica, come fa un magnete; e, come conseguenza dei calcoli, tutte le spiegazioni, basate tanto sulla considerazione delle forze attrattive e repulsive di queste molecole in ragione inversa al quadrato delle distanze, quanto su quella della forze fanno ruotare in fuori tra una di queste molecole e un elemento di corrente elettrica, di cui ricordo la legge come la ammettono i fisici che non adottano la mia teoria, sono necessariamente le stesse, sia che si spieghi come faccio io con correnti elettriche i fenomeni che producono i magneti in questi due casi, o che si preferisca l'ipotesi dei due fluidi. Non vi è nulla quindi in questi calcoli o in queste spiegazioni da cercare né le obiezioni contro la mia teoria, né le prove in suo favore. Le prove sulle quali mi baso, risultano soprattutto dal fatto che si riportano a un unico principio tre tipi di azioni che l'insieme dei fenomeni prova essere dovuti a una causa comune, e che non possono essere ricondotti altrimenti. In Svezia, in Germania, in Inghilterra, si è creduto di poterli spiegare con il solo fatto dell'azione reciproca di due magneti, così come aveva determinato Coulomb; le esperienze che ci offrono movimenti di rotazione continua sono in contraddizione manifesta con questa idea. In Francia, coloro che non hanno adottato la mia teoria, sono obbligati a considerare i tre generi di azione che ho ricondotto a una legge comune, come tre tipi di fenomeni assolutamente indipendenti tra loro. Da notare, tuttavia, che si potrebbe dedurre dalla legge proposta da M. Biot per l'azione reciproca di un elemento di filo conduttore e di quella detta una molecola magnetica, quella stabilita da Coulomb relativamente all'azione di due magneti, se si ammette che uno di essi è composto da piccole correnti elettriche, così come lo immagino; ma allora come non si potrebbe ammettere che l'altro è composto allo stesso modo, e adottare, di conseguenza, il mio modo di vedere?

D'altra parte, sebbene M. Biot abbia chiamato forza elementare[6] quella di cui ha determinato il valore e la direzione nel caso in cui un elemento di filo conduttore agisce su ciascuna delle particelle di un magnete, è chiaro che non si può considerare come veramente elementare, né una forza che si manifesta nell'azione di due elementi che non sono della stessa natura, né una forza che non agisce lungo la retta che unisce i due punti tra i quali si esercita. Tuttavia, nella Memoria che questo abile fisico ha comunicato all'Accademia il 30 ottobre e 18 dicembre 1820, considera come elementare la forza che esercita un elemento di filo conduttore su una molecola di fluido australe o di fluido boreale, cioè sul polo di un elemento magnetico[7], e lo considera come un fenomeno composto dall'azione reciproca di due fili di conduttori voltaici. Ora, si immagina facilmente che se esistono in effetti molecole magnetiche, la loro azione reciproca può essere considerata come la forza elementare: era il punto di vista dei fisici Svedesi e Tedeschi, che non ha potuto sostenere la prova dell'esperienza, poiché questa forza essendo proporzionale a una funzione della distanza, non può mai dare origine al movimento sempre accelerato nello stesso verso, almeno fintanto che, come essi supponevano, le molecole magnetiche sono considerate come fissate a punti determinati dei fili conduttori che essi considerano come raggruppamento di

[6] *Précis élémentaire de Physique*, t. II, p. 122 della seconda edizione.

[7] Quest'ultima Memoria non essendo stata pubblicata a parte, non ne conosco la formula che vi è data per esprimere questa forza se non per il passaggio seguente della seconda edizione del *Précis élémentaire de physique*, t. II, p. 122 e 123.

"Dividendo mentalmente tutta la lunghezza del filo congiungente $Z'C'$ (fig, 34) in una infinità di parti di altezza molto piccola, si vede che ogni parte deve agire sull'ago con una diverse energia, secondo la sua distanza e la sua direzione. Ora, queste forze elementari sono precisamente il risultato semplice che interessa soprattutto conoscere; poiché la forza totale esercitata dall'intero filo è la somma delle loro azioni. Ma il calcolo basta a risalire da questa risultante all'azione semplice. Così ha fatto Laplace. Egli ha dedotto dalle nostre osservazioni, che la legge individuale delle forze elementari esercitate da ogni ramo del filo congiungente, era la ragione inversa del quadrato della distanza, cioè precisamente la stessa che si sa esistere nelle azioni magnetiche ordinarie. Questa analisi mostra che, per completare la conoscenza della forza, resta ancora da determinare se l'azione di ogni ramo del filo era la stessa in tutte le direzioni a distanza uguale, o se era maggiore in certe direzione piuttosto che in altre. Per decidere tale questione, ho teso in un piano verticale un lungo filo di rame ZMC (fig. 34), piegandolo in M, di modo che i due rami ZM, MC fissano con l'orizzontale MH angoli uguali. Davanti a questo filo, ne ho teso un altro $Z'M'C'$ dello stesso materiale, dello stesso diametro, preso dallo stesso rotolo; ma ho disposto questo verticalmente, in modo che fosse separato dal primo in MM' solo da una striscia di carta molto sottile. Ho poi sospeso il nostro ago magnetizzato AB davanti a questo sistema, all'altezza dei punti M, M', e ho osservato queste oscillazioni per diverse distanze, facendo successivamente passare la corrente voltaica per il filo piegato e per quello diritto. Ho trovato così che, per l'uno come per l'altro, l'azione era reciproca alla distanza nei punti M, M'; ma l'intensità assoluta era minore per il filo obliquo, nella proporzione dell'angolo ZMH con l'unità. Questo risultato analizzato con il calcolo, mi è parso indicare che l'azione di ogni elemento μ del filo obliquo su ogni molecola m di magnetismo australe o boreale è reciproca la quadrato della sua distanza μm da questa molecola, e proporzionale al seno dell'angolo $m\mu M$ formato dalla distanza μm con la lunghezza del filo".

È assai significativo che questa legge che è una conseguenza rigorosa della formula con la quale ho espresso l'azione reciproca di due elementi di fili conduttori, quando si sostituisce, conformemente alla mia teoria, ogni elemento magnetico con un solenoide elettrodinamico molto piccolo, è dapprima stato trovato con un errore di calcolo; infatti, perché sia vero, bisogna che l'*intensità assoluta* della forza sia proporzionale, non all'angolo ZMH, ma alla tangente della metà di questo angolo, così come ha dimostrato M. Savary, nella Memoria che ha letto all'Accademia, il 3 febbraio 1823, che è stata pubblicata nel tempo e si trova così nel *Journal de Physique*, t. XCVI, p. 1-25 e seguenti. Sembra, del resto, che M. Biot abbia riconosciuto questo errore, poiché nella terza edizione della stessa opera presenta, in verità, senza citare la Memoria dove era stata corretta, nuove esperienze dove l'intensità della forza totale è, conformemente al calcolo di M. Savary, proporzionale alla tangente della metà dell'angolo ZMH, e ne conclude di nuovo, con maggior motivo di quanto aveva fatto con le sue prime esperienze, che la forza che egli chiama elementare è, a distanze uguali, proporzionale al seno dell'angolo compreso tra la direzione dell'elemento del filo conduttore e quella della retta che ne unisce il punto medio alla molecola magnetica. (*Précis élémentaire de physique expérimentale*, terza edizione, t. II, p. 740-745)-

piccoli magneti, e allora gli altri generi di azione sarebbero fenomeni composti, poiché l'elemento voltaico lo era. Si vede pure che questa sia l'azione reciproca di due elementi di fili conduttori che offre la forza elementare: allora l'azione reciproca dei due elementi magnetici, e quella che uno di essi esercita su una porzione infinitamente piccola del conduttore voltaico, sono azioni composte, poiché l'elemento magnetico deve, in questo caso, essere considerato come composto. Ma come immaginare che la forza elementare sia quella che si manifesta tra un elemento magnetico e una porzione infinitamente piccola di conduttore voltaico, cioè tra due corpi in verità di volume molto piccolo, ma uno dei quali è necessariamente composto, qualunque sia quello dei due modi di interpretare i fenomeni presentati?

La circostanza che presenta la forza esercitata da un elemento di filo conduttore su un polo di un elemento magnetico, di agire in una direzione perpendicolare alla retta che unisce i due punti tra i quali essa si sviluppa, mentre l'azione reciproca di due elementi conduttori avviene lungo la linea congiungente, non è una prova meno dimostrativa del fatto che la prima di queste due forze è un fenomeno composto. Tutte le volte che due punti materiali agiscono l'uno sull'altro, sia in virtù di una forza che è loro intrinseca, o di una forza che vi nasce per una causa qualunque, come un fenomeno chimico, una scomposizione o ricomposizione del fluido neutro risultante dall'unione di due elettricità, non si può immaginare questa forza altrimenti che come una tendenza di questi due punti ad avvicinarsi o ad allontanarsi l'uno dall'altro lungo la retta congiungente, con velocità reciprocamente proporzionali alle loro masse, e ciò anche quando questa forza non si trasmetta da una delle particelle materiali all'altra se non mediante un fluido interposto, come la massa di una palla è portata avanti con una certa velocità, dall'energia dell'aria liberata dalla polvere, così come la massa del cannone è spinta indietro lungo la stessa retta, passante i per i centri di inerzia della palla e del cannone, con una velocità che sta a quella della palla, come la massa di questa sta alla massa del cannone.

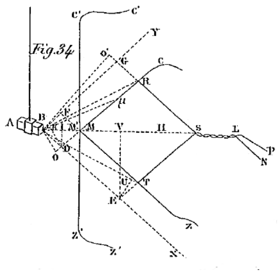
Questo è un risultato necessario dell'inerzia della materia, che Newton segnalò come uno dei principali fondamenti della teoria fisica dell'universo, nell'ultimo dei tre assiomi che ha posto all'inizio della *Philosophiae naturalis principia mathematica*, dicendo che l'azione è sempre uguale e opposta alla reazione; poiché due forze che forniscono a due masse velocità inverse alle due masse, sono forze che farebbero loro produrre pressioni uguali su ostacoli che si opporrebbero invincibilmente ad essere messe in moto, cioè forze uguali. Affinché questo principio sia applicabile nel caso di azione reciproca di due particelle materiali attraversate da corrente elettrica, quando si suppone questa azione trasmessa dal fluido essenzialmente elastico che riempie lo spazio, e le cui vibrazioni costituiscono la luce[8], bisogna ammettere che questo fluido non ha alcuna inerzia osservabile, come l'aria rispetto a una palla di cannone; cosa che non si può dubitare, poiché non oppone alcuna resistenza al moto dei pianeti. Il fenomeno della rotazione del mulinello elettrico aveva portato parecchi fisici ad ammettere un'inerzia valutabile nei due fluidi elettrici, e di conseguenza in quello che risulta dalla loro combinazione; ma questa ipotesi è in opposizione con tutto quanto sappiamo di questi fluidi, e con il fatto che i moti planetari non subiscono alcuna resistenza da parte dell'etere; non vi è alcun motivo di ammettere, dopo che ho mostrato che la rotazione del mulinello elettrico è dovuta a una repulsione elettrodinamica prodotta tra la punta del mulinello e le particelle dell'aria circostante, dalla corrente elettrica che sfugge da questa punta[9].

Quando M. Œrsted scoprì l'azione che il filo conduttore esercita su un magnete, si doveva, in verità, essere portati a sospettare che vi potesse essere un'azione reciproca tra due fili conduttori; ma non era una conseguenza della scoperta di questo celebre fisico, poiché una barra di ferro

[8]Questo fluido non può essere che quello che risulta dalla combinazione di due elettricità. Al fine di evitare di ripetere sempre la stessa frase per indicarlo, credo si debba impiegare, come Euler, il nome di etere, intendendo sempre con questa parola il fluido così definito.

[9]Si veda la nota che ho letto all'Accademia, il 24 giugno 1822, e che è inserita negli *Annales de Chimie*, t. XX, p. 419-421, e nella mia *Recueil d'obseervations électro-dynamiques*, p. 316-318.

agisce anche su un ago magnetizzato, e non vi è tuttavia alcuna azione reciproca tra due barre di ferro dolce. Finché si conosceva solo la deviazione dell'ago magnetizzato da parte del filo conduttore, non si poteva supporre che la corrente elettrica comunicasse soltanto a questo filo la proprietà di essere influenzato dall'ago di magnete analogo a quello che è il ferro dolce per questo stesso ago, ciò che bastava perché si opera su esso, senza che per questo debba risultare alcuna azione tra due fili conduttori quando si trovassero fuori dall'influenza di ogni corpo magnetizzato? L'esperienza poteva solo decidere la questione: la feci almeno nel settembre 1820, e l'azione reciproca dei conduttori voltaici fu dimostrata.



Riguardo all'azione del nostro globo sul filo conduttore, l'analogia tra la terra e un magnete basta senza dubbio a rendere questa azione estremamente probabile, e non vedo perché molti dei più abili fisici europei pensavano che non esistesse; non solo come M. Erman, prima che avessi fatto l'esperienza che la constatasse[10], ma dopo che questa esperienza fu comunicato all'Accademia delle Scienze, nella sua seduta del 30 ottobre 1820, e ripetuta numerose volte, nella seduta del novembre dello stesso anno, in presenza dei suoi membri e di un gran numero di altri fisici, che mi hanno autorizzato, nel tempo, a citarli in qualità di testimoni dei movimenti prodotti dall'azione della terra sulle parti mobili degli strumenti descritti e rappresentati negli *Annales de chimie et de physique*, t. XV, p. 191-196 (P. II, fig. 5 e P. II, fig. 71), così come nel mio *Recuil d'observations électro-magnetiques*, p. 43-48, poiché quasi un anno dopo, i fisici inglesi sollevavano ancora dubbi sui risultato di esperienze così complete e fatte davanti a un così grande numero di testimoni[11]. Non si può negare l'importanza di queste esperienze, né rifiutarsi di convenire che la scoperta dell'azione della terra sui fili conduttori mi appartiene completamente come quella dell'azione reciproca di due conduttori. Ma era poco aver scoperto questi due tipi di azione e di averle constatate con l'esperienza; serviva ancora:

1° Trovare la formula che esprime l'azione reciproca di due elementi di correnti elettriche:

2° Mostrare che dalla legge, espressa da questa formula, dell'attrazione tra le correnti che hanno lo stesso verso, e della repulsione tra quelle che hanno verso contrario, sia che queste correnti siano parallele o che formino un angolo qualunque[12], l'azione della terra sui fili conduttori è identica, in tutte le circostanze che essa presenta, a quella che eserciterebbe su questi stessi

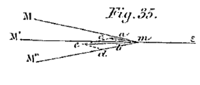
[10]In questa Memoria molto significativa, stampata nel 1820, questo celebre fisico dice che il filo conduttore avrà questo vantaggio sull'ago magnetizzato di cui ci si serve per esperienze complesse, che il movimento che prenderà in queste esperienze non sarà influenzato dall'azione della terra.

[11]Si vedano le Memorie di Faraday, pubblicato l'11 settembre 1821. La loro traduzione si trova negli *Annales de chimie et de physique,* t. XVIII, p. 337-370, e nella mia *Recuil d'observations électro-magnetiques*, p. 125-158. Solo per un motivo di stampa porta la data del 4 settembre 1821, invece di quella dell'11 settembre 1821.

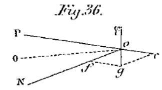
[12]Le esperienze che mettono in evidenza l'azione reciproca di due correnti rettilinee in questi due casi, furono comunicate all'Accademia nella seduta del 9 ottobre 1820. Gli strumenti che avevo impiegato sono descritti e rappresentati nella t. XV degli *Annales de chimie et de physique*, cioè: 1° quella per l'azione reciproca di due correnti parallele, p. 72 (Tav. I, fig. 1), e con maggior dettaglio nel mio *Recuil d'observations électro-magnetiques,* p. 16-18; 2° quella per l'azione reciproca di due correnti formanti un angolo qualunque, p, 171 dello stessa t. XV degli *Annales de chimie et de physique* (Tav. II, fig. 2), e nel mio *Recueil*, p. 23. Le figure portano nel mio *Recueil* gli stessi numeri degli *Annales.*

fili un fascio di correnti elettriche dirette da est a ovest e posto nel mezzo dell'Europa, dove le esperienze che constatano tale azione sono state fatte;

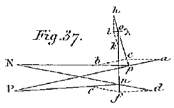
3° Calcolare, partendo dalla mia formula e nel modo che ho spiegato i fenomeni magnetici per correnti elettriche formanti circuiti chiusi molto piccoli attorno a particelle di corpi magnetizzati, l'azione che devono esercitare l'uno sull'altro due particelle di magneti considerati come due piccoli solenoidi equivalenti ognuno a due molecole magnetiche, una di fluido australe, l'altra di fluido boreale, e quella che una di queste particelle deve esercitare su un elemento di filo conduttore; assicurarsi poi che questi calcoli diano precisamente per questi due tipi di azione, nel primo caso la legge stabilita da Coulomb per l'azione di due magneti, e nel secondo quella che M. Biot ha proposto, rispetto alla forze che si sviluppano tra un magnete e un filo conduttore. Era senza dubbio facile, dall'insieme dei fatti, pensare questi tre tipi di azioni derivanti da un'unica causa. Ma è solo col calcolo che si poteva giustificare questa congettura, ed è quanto io ho fatto, senza per nulla pregiudicare sulla natura della forza che due elementi di fili conduttori si esercitano l'uno sull'altro: ho cercato, con i soli dati sperimentali, l'espressione analitica di questa forza; e prendendola come punto di partenza, ho dimostrato che si poteva dedurre con un calcolo puramente matematico i valori di due altre forze come quelle date dall'esperienza, l'una tra un elemento di conduttore e ciò che si chiama una molecola magnetica, l'altra tra due di queste molecole, sostituendo, in entrambi i casi, come si deve fare secondo il mio modo di vedere la struttura dei magneti, ogni molecola magnetica con una delle due estremità di un solenoide elettrodinamico. Da ciò tutto quello che si può dedurre dai valori di quest'ultima forza consiste necessariamente nel mio modo nel considerare gli effetti che esse producono, e la mia formula ne diviene una conseguenza necessaria, e basterebbe solo questo per dimostrare che l'azione reciproca di due elementi di fili conduttori è realmente il caso più semplice e quello da cui si deve partire per spiegare tutti gli altri: le considerazioni seguenti mi sembrano idonee a confermare nel modo più completo questo risultato generale del mio lavoro, esse si deducono facilmente dalle nozioni più semplici sulla composizione delle forze, e sono relative alla mutua azione di due sistemi, composti entrambi di punti infinitamente vicini tra loro, nei diversi casi si possono presentare a seconda che questi sistemi non contengano punti della stessa specie, cioè che tutti attraggano o respingano gli stessi punti dell'altro sistema, o che si abbiano, sia in uno di questi sistemi, sia in entrambi, punti di due specie opposte, di cui gli uni attraggono ciò che gli altri respingono e respingano ciò che quelli attraggono.



Supponiamo dapprima che ognuno dei due sistemi sia composto da molecole della stessa specie, cioè che quelle dell'uno agiscano tutte per attrazione o per repulsione su quelle dell'altro, con forze proporzionali alle loro masse; siano $MM'M$", ecc. (fig. 35), le molecole che compongono il primo, e m una qualunque dei quelle del secondo: componendo successivamente tutte le azioni ma, mb, md, ecc., l'ultima delle quali sarà l'azione del sistema $MM'M$" sul punto m, e passerà vicino al centro di inerzia di questo sistema. Ragionando allo stesso modo rispetto alle altre molecole del secondo sistema, si troverà che le risultanti corrispondenti passeranno tutte molto vicino al centro d'inerzia del primo sistema, e avranno una risultante generale che passerà pure vicino al centro d'inerzia del secondo: chiameremo *centri d'azione* i due punti estremamente vicini dei rispettivi centri d'inerzia dei due sistemi per il quali passa questa risultante generale; è evidente che essa tenderà, a causa delle piccole distanze dove sono centri di inerzia, solo a imprimere a ogni sistema un moto di traslazione.



Supponiamo, in secondo luogo, che le molecole del secondo sistema rimangano tutte della stessa specie, quelle del primo siano le une attrattive e le altre repulsive rispetto a queste molecole del secondo sistema, le prima daranno una risultante of, (fig. 36), passante per il loro centro di azione N, e per il centro di azione o dell'altro sistema: analogamente, le particelle repulsive daranno una risultante oe, passante per il loro centro di azione P e per lo stesso punto o: la risultante generale sarà quindi la diagonale og; e siccome essa passa vicino al centro d'inerzia del secondo sistema, tenderà ancora a imprimergli ancora solo un moto di traslazione. Questa risultante è d'altronde nel piano tracciato dai tre centri di azione o, N, P; e quando le molecole attrattive sono nello stesso numero delle repulsive, e agiscono con la stessa intensità, la sua direzione è, inoltre, perpendicolare alla retta oO che divide l'angolo PoN in due parti uguali.



Consideriamo infine il caso in cui i due sistemi sono composti entrambi di molecole di specie differenti. Siano N e P (fig. 37) centri d'azione rispettivi delle molecole attrattive e repulsive del primo, siano n e p i corrispondenti centri del secondo, di modo che si abbia attrazione tra N e p, così come tra n e P, e che si abbia repulsione tra N e n, così come tra P e p. Le azioni combinate di N e P su p daranno una risultante diretta lungo la diagonale pe: similmente, le azioni di N e P su n daranno una risultante nf. Per avere la risultante generale, si prolungheranno queste due linee fino ad incontrarsi in o, e prendendo $oh = pe$, e $ok = nf$, la diagonale ol sarà la risultante cercata che darà l'azione esercitata dal sistema PN sul sistema pm. Ma siccome il punto o non fa parte del sistema pn, bisognerà pensare che esso è legato a questo sistema in un modo invariabile senza esserlo al primo sistema PN; e la forza ol tenderà generalmente, in virtù di questo legame, a operare su pn un moto di traslazione e un moto di rotazione attorno al suo centro di inerzia.

Esaminiamo ora la reazione esercitata dal secondo sistema sul primo: secondo l'assioma fondamentale della meccanica, che l'azione e la reazione di due particelle l'una sull'altra sono uguali e di verso opposto, bisognerà, per ottenerla, comporre successivamente forze uguali e di verso opposto a quelle che le particelle del primo sistema esercitano sulle particelle del secondo, ed è evidente che la reazione totale così trovata sarà sempre uguale e di verso opposto all'azione totale.

Nel primo caso, la reazione sarà quindi rappresentata dalla linea $m\varepsilon$ (fig. 35), uguale e opposta alla risultante me, e che si potrà supporre applicata al centro di azione del primo sistema che si trova sulla sua direzione; da cui segue che trascurando sempre la piccola differenza di posizione tra il centro di azione e quello di inerzia, si avrà pure qui solo un moto traslatorio.

Nel secondo caso, la reazione sarà pure rappresentata dalla linea $o\gamma$ (fig. 36), uguale e opposta a og. Ma siccome il punto o non appartiene al primo sistema, e che in genere questo non sarà attraversato dalla direzione $o\gamma$, bisognerà immaginare che questo punto o sia legato invariabilmente al primo sistema senza esserlo al secondo; e, da questo legame, la forza $o\gamma$ tenderà generalmente ad operare sul sistema PN un doppio movimento di traslazione e di rotazione. Del resto, questa forza $o\gamma$ è nel piano PoN; e quando le molecole attrattive sono nello stesso numero di quelle repulsive e agiscono con la stessa intensità, la sua direzione è, come quella di og, perpendicolare a oO.

Infine, nel terzo caso, la reazione sarà rappresentata dalla linea $o\lambda$ (fig,. 37), uguale e opposta alla risultante ol, e applicata come essa al punto o. Per avere l'azione ol su pm, abbiamo immaginato per ora che questo punto o fosse legato a questo secondo sistema pn senza esserlo al primo PN. Per avere ora la reazione esercitata su questo, immaginiamo la forza $o\lambda$ applicata in un punto posto in o, e legato al primo sistema ON senza esserlo al secondo. Questa forza tenderà ancora generalmente ad operare su PN un doppio movimento di traslazione e di rotazione.

Se si confrontano questi risultati con le indicazioni dell'esperienza, relativamente alle direzioni delle forze che si esercitano nei tre tipi di azione che abbiamo prima distinto, si vedrà facilmente che i tre casi esaminati corrispondono loro esattamente. Quando due elementi di conduttori voltaici agiscono l'uno sull'altro, l'azione e la reazione sono, come nel primo caso, dirette lunghe la retta che li unisce; quando si tratta della forza che agisce entro un elemento del filo conduttore e di una particella contenente due poli di specie opposte, che agiscono in versi contrari con intensità uguali, l'azione e la reazione sono, come nel secondo caso, dirette perpendicolarmente alla retta che unisce la particella all'elemento; e due particelle di una barra magnetizzata, che sono esse stesse due magneti molto piccoli, esercitano l'una sull'altra un'azione più complessa, simile a quella che presenta il terzo caso, e del quale ci si può rendere ragione solo considerandola come il risultato di quattro forze, due attrattive e due repulsive: è facile concluderne che vi è solo l'elemento del filo conduttore per il quale si possa supporre che tutti i punti esercitano lo stesso tipo di azione, e di valutare quale è, dei tre tipi di forza qui considerati, quello che si deve considerare come il più semplice.

Ma per il fatto che la forza che vi è tra due elementi di filo conduttore è la più semplice, e che quelle che si sviluppano, l'una tra uno di questi elementi e una particella di magnete dove si trovano sempre due poli delle stessa intensità, l'altra tra due di queste particelle, con risultati più o meno complessi, bisogna concludere che la prima di queste forze deve essere considerata come veramente elementare? Sono sempre stato così lontano dal pensare che, nelle *Notes sur l'exposé sommaire des nouvelles expériences électro-magnétiques*, pubbilicate nel 1822[13], ho cercato di renderne ragione con la reazione del fluido distribuito nello spazio, e le cui vibrazioni producono i fenomeni della luce: ho solamente detto che la si doveva considerare come *elementare*, nel senso in cui i chimici annoverano nella classe dei corpi semplici tutti quelli che non hanno ancora potuto scomporre, qualunque siano d'altronde le supposizioni fondate sull'analogia che potrebbero portare a credere che essi sono realmente composti, e poiché dopo averne dedotto il valore da esperienze e calcoli esposti in questa Memoria, fosse partendo da questo solo valore che bisognerebbe calcolare quelle di tutte le forze che si manifestano nei casi più complessi.

Ma quando anche essa sarà dovuta, sia alla reazione di un fluido la cui scarsità non permette di supporre che reagisca un virtù della sua massa, sia a una combinazione delle forze proprie dei due fluidi elettrici, non ne seguirà, a meno che l'azione risulti sempre opposta alla reazione lungo una stessa retta; poiché, come si è visto nelle considerazioni lette, questa circostanza si incontra necessariamente in ogni azione complessa, quando essa avviene per forze veramente elementari di cui si compone l'azione complessa. Applicando lo stesso principio alla forza che si esercita tra ciò che si chiama molecola magnetica e un elemento di filo conduttore, si vede che questa forza, considerata come agente sull'elemento, passa per il suo punto di mezzo, e la reazione dell'elemento sulla molecola deve pure essere diretta in modo da passare per questo punto e non per la molecola. Questa conseguenza di un principio che avevano sinora ammesso tutti i fisici, non sembra del resto facile da dimostrare con l'esperienza, quando si tratta della forza di cui parliamo, poiché in tutte le esperienze dove si fa agire su un magnete una porzione di filo conduttore formante un circuito chiuso, il risultato che si ottiene per l'azione totale è

[13]Recueil d'observations électro-dynamiques, p. 215.

la stessa, sia che si supponga che questa forza passi per l'elemento di filo conduttore o per la molecola magnetica, così come si è visto in questa Memoria; è ciò che ha portato numerosi fisici a supporre che l'azione esercitata dall'elemento di filo conduttore passasse solo per questo elemento, e che essendogli la reazione opposta e parallela non fosse diretta lungo la stessa retta, che passasse cioè per la molecola e formasse con la prima ciò che è stata chiamata una coppia iniziale.

I calcoli che seguiranno mi forniranno presto l'occasione di esaminare in dettaglio questa singolare ipotesi. Si vedrà, da questo esame, che essa non è soltanto opposta a uno dei principi fondamentali della meccanica, ma che è inoltre assolutamente inutile per la spiegazione dei fatti osservati, e che una falsa interpretazione di questi fatti ha potuto solo portare alla sua adozione da parte di fisici che non ammettono che i magneti debbano realmente le loro proprietà all'azione delle correnti elettriche che circondano le loro particelle.

I fenomeni prodotti dai due fluidi elettrici in movimento nei conduttori voltaici appaiono così differenti da quelli che ne manifestano la presenza quando sono a riposo in corpi elettrizzati nel modo comune, che se si fosse preteso che i primi non dovessero essere attribuiti agli stessi fluidi dei secondi. È precisamente come se si concludesse da ciò che la sospensione del mercurio nel barometro è un fenomeno del tutto diverso da quello del suono, che si deve attribuire allo stesso fluido atmosferico, a riposo nel primo caso e in movimento nel secondo; ma bisogna ammettere, per due fatti così diversi, che due fluidi di cui uno agisce soltanto per pressare la superficie libera del mercurio, e l'altro per trasmettere i moti vibratori che producono il suono.

Nulla prova d'altronde che la forza espressa dalla mia formula non possa risultare da attrazioni o repulsioni delle molecole dei due fluidi elettrici, in ragione inversa dei quadrati delle distanze tra queste molecole. Il fatto di un movimento di rotazione che accelera continuamente finché gli attriti e la resistenza del liquido nel quale pesca il magnete o il conduttore voltaico che presenta questa tipo di movimento ne rendono la velocità costante, sembra dapprima assolutamente opposto a questo genere di spiegazione dei fenomeni elettrodinamici. Infatti, dal principio di conservazione delle forze vive, che è una conseguenza necessaria delle leggi stesse del moto, segue necessariamente che quando le forze elementari, che sarebbero qui attrazioni e repulsioni in ragione inversa dei quadrato delle distanze, sono espresse da semplici funzioni delle reciproche distanze dei punti tra i quali esse si esercitano, e che una parte di questi punti sono invariabilmente legati tra loro e si muovono solo in virtù di queste forze, rimanendo gli altri fissi, le prime non possono ritornare alla stessa situazione, rispetto alle seconde, con velocità maggiori di quelle che avevano quando sono partite. Nel movimento di rotazione continua impresso a un conduttore mobile dall'azione di un conduttore fisso, tutti i punti del primo ritornano alla stessa posizione con velocità sempre più grandi a ogni rivoluzione, finché gli attriti e la resistenza dell'acqua acidulata dove immerge la corona del conduttore pongono un termine all'aumento della sua velocità di rotazione: essa diviene allora costante, malgrado questi attriti e questa resistenza.

È quindi completamente dimostrato che non si saprebbe rendere ragione dei fenomeni prodotti dall'azione di due conduttori voltaici, supponendo che molecole elettriche agenti in ragione dell'inverso del quadrato della distanza siano distribuite sui fili conduttori, in modo da risiedere con fissità e di poter, di conseguenza, essere considerate come invariabilmente legate tra loro. Se ne deve concludere che questi fenomeni sono dovuti al fatto che i due fluidi elettrici percorrono[14]

[14]Dal momento che i primi lavori dei fisici sui fenomeni elettrodinamici, numerosi scienziati credettero di poterli spiegare con distribuzioni di molecole, sia elettriche, sia magnetiche, a riposo nel conduttori voltaici. Dopo che la scoperta del primo movimento di rotazione continua fatto da Faraday venne pubblicata, ho visto che essi rovesciarono del tutto questa ipotesi, ed ecco in quali termini enunciai questa osservazione, di cui quanto qui esposto è lo sviluppo, nell'*Exposé sommaire des nouvelles expériences électro-magnétiques* fatte da diversi fisici dopo il mese di marzo 1821, che lessi nella seduta pubblica dell'Accademia reale delle Scienze l'8 aprile 1822.

"Questi sono i nuovi progressi fatti in un ramo della fisica, di cui non supponevamo l'esistenza solo continuamente i fili conduttori, di un moto rapido, riunendosi e separandosi alternativamente negli intervalli delle particelle di questi fili. Per questo i fenomeni qui trattati possono essere prodotti solo dall'elettricità in movimento, che ho creduto dover indicare con il nome di *fenomeni elettro-dinamici*; quella di fenomeni elettro-magnetici, che si dato loro finora conveniva finché si trattava solo dell'azione scoperta da Oersted tra un *magnete* e una *corrente elettrica*, ma poteva rappresentare solo un'idea falsa dopo che avevo trovato che si producevano fenomeni dello stesso genere senza *magnete*, e con la sola azione reciproca di due *correnti elettriche*.

Soltanto in questo caso dove si suppongono le molecole elettriche a riposo nel corpo dove esse manifestano la loro presenza con le attrazioni o repulsioni prodotte tra questi corpi, si dimostra un movimento indefinitamente accelerato e che può derivare solo dalle forze che esercitano le molecole elettriche in questo stato di riposo e dipendono solo dalle loro mutue distanze. Quando si suppone al contrario che, messe in movimento nei fili conduttori dall'azione della pila, esse cambiano continuamente di posizione, si riuniscono in ogni istante in un fluido neutro, per poi separarsi di nuovo, riunendosi successivamente ad altre molecole del fluido di natura opposta, non è più contradditorio ammettere che, con azioni in ragione inversa ai quadrati delle distanze esercitate da ogni molecola, una forza possa risultare tra due elementi di fili conduttori, dipendente non solo dalla loro distanza ma anche dalle direzioni dei due elementi lungo le quali le molecole elettriche si muovono, per poi riunirsi a molecole della specie opposta, separandosene l'istante seguente per unirsi ad altre. Ora, è precisamente e unicamente da questa distanza e da queste direzioni che dipende la forza che si sviluppa, e della quale le esperienze e i calcoli esposti in questa Memoria mi hanno dato il valore. Per farsi un'idea precisa di quanto avviene in un filo conduttore, bisogna fare attenzione che tra le molecole metalliche di cui è composto è distribuito un fluido positivo e negativo, non nelle proporzioni che formano il liquido neutro, ma con un eccesso di quello dei due fluidi che è della natura opposta all'elettricità propria delle molecole del metallo, e che dissimula questa elettricità, come ho spiegato nelle lettere che scrissi a M. Van Beek all'inizio del 1822[15]: è in questo fluido elettrico intramolecolare che possano tutti i movimenti, tutte le scomposizioni e ricomposizioni che formano la corrente elettrica.

Siccome il liquido interposto tra le piastre della pila è, senza confronto, meno buon conduttore del filo metallico che ne unisce le estremità, trascorre un tempo, molto breve in verità, ma tuttavia valutabile, durante il quale l'elettricità intermolecolare, supposta dapprima in equilibrio, si scompone in ciascuno degli intervalli compresi tra due molecole di questo filo. Questa scomposizione aumenta gradualmente finché l'elettricità positiva di un intervallo si riunisce all'elettricità negativa dell'intervallo che la segue immediatamente nel verso della corrente, e la sua elettricità negativa a quella positiva dell'intervallo precedente. Questa riunione non può che essere istantanea come la scarica di una bottiglia di Leyda; e l'azione tra i fili conduttori, che si sviluppa, mentre ciò avviene, in verso contrario a quello che si eserciterebbe durante la scomposizione, non può di conseguenza diminuire l'effetto di questa, poiché l'effetto prodotto da una forza è in ragione composta della sua intensità e del tempo durante il quale agisce; qui l'intensità deve essere la stessa, sia che i due fluidi elettrici si separino o che si riuniscano: ma il tempo durante il quale avviene la loro separazione è molto maggiore di quello che richiede la loro riunione.

---

due anni fa, e che già ci hanno fatto conoscere fatti più sorprendenti di quanto forse finora la scienza ha offerto, fenomeni meravigliosi. Un movimento che continua sempre nello stesso verso, malgrado gli attriti, la resistenza dei mezzi, ed esso produce dall'azione reciproca di due corpi che si trovano costantemente nello stesso stato, è un fatto senza esempio in tutto ciò che sappiamo sulle proprietà che può offrire la materia inorganica; prova che l'azione che proviene da conduttori voltaici, non può essere dovuta a una distribuzione particolare di certi fluidi a riposo in questi conduttori, come sono le attrazioni e le repulsioni elettriche comuni. Si può attribuire questa azione solo a fluidi in movimento nel conduttore che percorrono portandosi rapidamente da una estremità della pila all'altra". Si vede il *Journal de physique* dove questa esposizione è stata inserita nel tempo, t. XCIV, p. 65, e la mia *Recueil d'observations elctro-dynamiques*, p. 205.

[15] *Journal de physique,* t. XCIII, p. 450-453, e *Recueil d'observations elctro-dynamiques*, p. 174-177.

Variando l'azione con le distanze tra le molecole di due fluidi elettrici mentre avviene questa separazione, si dovrebbe integrare, rispetto al tempo e per l'intera durata della separazione, il valore della forza presente in ogni istante, e dividere poi, per questa durata, l'integrale così ottenuto. Senza eseguire questo calcolo, per il quale bisognerebbe avere dei dati, che ci mancano ancora, sul modo in cui le distanze delle molecole elettriche variano, con il tempo, in ogni intervallo intermolecolare del filo conduttore, è facile vedere che le forze prodotte in questo modo, tra due elementi di questo filo, devono dipendere dalle direzioni della corrente elettrica in ciascuno di questi elementi.

Se fosse possibile, partendo da questa considerazione, trovare che l'azione reciproca di due elementi è effettivamente proporzionale alla formula con la quale l'ho rappresentata, questa spiegazione del fatto fondamentale di tutta la teoria dei fenomeni elettro-dinamici dovrebbe evidentemente essere preferita a ogni altra; ma richiederebbe ricerche più complesse ancora alle quali bisognerebbe dedicarsi, per vedere se la spiegazione contraria, dove si attribuiscono i fenomeni elettro-dinamici ai movimenti impressi all'etere dalle correnti elettriche, può condurre alla stessa formula. Comunque da queste ipotesi e da altre che si possono introdurre per spiegare questi fenomeni, esse saranno sempre rappresentate dalla formula che ho dedotto dai risultati sperimentali, interpretati dal calcolo, e resterà matematicamente dimostrato, che considerando i magneti come insieme di correnti elettriche disposte attorno alla loro particelle così come ho detto, i valori delle forze che sono, in ogni caso, dati dall'esperienza, e tutte le circostanze dei tre tipi di azioni che hanno luogo, l'una tra due calamite, un'altra tra un filo conduttore e una calamita, e la terza tra due fili conduttori, si deducono da un'unica forza, agente tra due elementi di corrente elettrica lungo la retta che unisce i loro punti medi.

Quanto all'espressione di questa forza, essa è una delle più semplici tra quelle che non dipendono solo dalla distanza, ma anche dalle direzioni dei due elementi; poiché queste direzioni intervengono solo in ciò che contiene il secondo differenziale della radice quadrata della distanza tra due elementi, preso facendo variare alternativamente i due archi di correnti elettriche di cui questa distanza è una funzione, differenziale che dipende dalle direzioni dei due elementi, e che entra nel valore dato dalla mia formula in un modo molto semplice, poiché si ha per questo valore il secondo differenziale così definito moltiplicato per un coefficiente costante e diviso per la radice quadrata della distanza, osservando che la forza è repulsiva quando il secondo differenziale è positivo, e attrattiva quando è negativo. È quanto esprime il segno $-$ che si trova davanti all'espressione generale

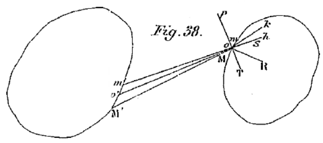
$$-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \cdot \frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'}dsds'$$

di questa forza, secondo l'uso di considerare le attrazioni come forze positive, e le repulsioni come forze negative.

I periodi dove ci si è riferiti a un unico principio dei fenomeni considerati in precedenza come dovuti a cause assolutamente differenti, sono stati quasi sempre accompagnati dalla scoperta di un gran numero di fatti nuovi, poiché un nuovo modo di immaginare le cause suggerisce una moltitudine di esperienze da provare, di spiegazioni da verificare; è così che la dimostrazione data da Volta dell'identità del galvanismo e dell'elettricità è stata accompagnata dalla costruzione della pila, e seguita da tutte le scoperte che ha generato questo pregevole strumento. A giudicare dai risultati così importanti dei lavori di M. Becquerel, sull'influenza dell'elettricità nelle combinazioni chimiche, e di quelli di MM. Prévost e Dumas sulle cause delle contrazioni muscolari, si può sperare che tanti fatti nuovi scoperti da quattro anni, e la loro riduzione a un unico principio, alle leggi delle forze attrattive e repulsive osservate tra i conduttori delle correnti elettriche, saranno anche seguiti da una serie di altri risultati che stabiliranno tra la fisica da una parte, la chimica e anche la fisiologia dall'altra, legami di cui si sentiva il bisogno senza potersi lusingare di giungere dopo lungo tempo a realizzarli.

Ci rimane ora di occuparci delle azioni che un circuito chiuso, di forma, grandezza e posizione qualsiasi, esercita, sia su un solenoide, sia un altro circuito di forma, grandezza e posizione qualunque; il principale risultato di queste ricerche consiste nell'analogia che esiste tra le forze prodotte da questo circuito, sia che agisca su un altro circuito chiuso o su un solenoide, e le forze che eserciteranno nei punti la cui azione sarebbe precisamente quella che si attribuisce alle molecole di ciò che chiamiamo fluido australe e boreale; essendo questi punti distribuiti nel modo che spiegherò su superfici chiuse dai circuiti, ed essendo le estremità del solenoide sostituite da due molecole magnetiche di tipo opposto. Questa analogia sembra dapprima così completa, tanto che i fenomeni elettro-dinamici sembrano essere così ricondotti alla teoria in cui si ammettono questi due fluidi; ma si riconosce ben presto che essa funziona solo con conduttori voltaici che formano circuiti solidi e chiusi, che vi sono solo quei fenomeni che sono prodotti da conduttori formanti tali circuiti dei quali si possa rendere ragione in questo modo, e che infine le forze che esprime la mia formula possono essere solo in accordo con l'insieme di questi fatti. D'altra parte, è da questa stessa analogia che dedurrò la dimostrazione di un teorema importante che si può enunciare così: l'azione reciproca di due circuiti solidi chiusi, o quella di un circuito solido e chiuso e di un magnete, non può mai produrre movimento continuo con una velocità che accelera indefinitamente finché le sue resistenze e gli attriti degli strumenti rendono questa velocità costante.

Allo scopo di non lasciare nulla a desiderare su questo argomento, inizierò con dare alle formule relative all'azione reciproca di due fili conduttori una forma più generale e più simmetrica. Siano per questo s e s' due curve qualsiasi che si suppone percorse da correnti elettriche le cui intensità continueremo a indicarle con i e i'.



Sia $ds = Mm$ (fig. 38) un elemento della prima curva, $ds' = M'm'$ un elemento della seconda; x, y, z e x', y', z' le coordinate dei loro punti medi o, o', e r la retta oo' che li congiunge, la quale deve essere considerata come una funzione delle due variabili indipendenti s e s' che rappresentano gli archi di due curve contati a partire da due punti fissi presi su di essi. L'azione reciproca di due elementi ds, ds', è, come abbiamo visto in precedenza, una forza diretta lungo la retta r, e avente per valore

$$-ii'dsds'r^k \frac{\left(r^k \frac{dr}{ds}\right)}{ds'}$$

La si può scrivere semplicemente in questo modo:

$$-ii'r^k d'\left(r^k dr\right)$$

distinguendo con le caratteristiche d e d' i differenziali relativi alla variazione delle solo coordinate x, y, z dell'elemento ds, da quelle che si ottengono facendo variare soltanto le coordinate x', y', z' dell'elemento ds'; distinzione di cui ci serviremo tutte le volte che dovremo considerare differenziali presi gli uni da uno di queste due maniere, e gli altri dall'altra.

Essendo questa forza attrattiva, bisogna, per avere quella delle sue componenti che è parallela all'asse x, moltiplicarne il valore per $\frac{x-x'}{r}$ o per $-\frac{x-x'}{r}$, secondo che la si consideri come agente sull'elemento ds o su quello ds; in quest'ultimo caso, la componente è quindi uguale a

$$ii'r^{k-1}\left(x-x'\right)d'\left(r^k dr\right)$$

Si può mettere questa espressione sotto un'altra forma facendo uso del valore che si ottiene per udv, rappresentando u e v quantità qualunque, quando si sommano, membro a membro, le due equazioni identiche

$$udv + vdu = d\,(uv)$$

$$udv - vdu = u^2 d\left(\frac{u}{v}\right)$$

questo valore è

$$udv = \frac{1}{2}d\,(uv) + \frac{1}{2}u^2 d\frac{u}{v}$$

e ponendo

$$u = r^{k-1}\,(x - x') \quad v = r^k dr$$

se ne conclude

$$\begin{aligned} r^{k-1}\,(x - x')\,d'\left(r^k dr\right) &= \tfrac{1}{2}d'\left[r^{2k-1}\,(x - x')\,dr\right] + \tfrac{1}{2}r^{2k-2}\,(x - x')^2\,d'\tfrac{rdr}{x-x'} \\ &= \tfrac{1}{2}d'\tfrac{(x-x')dr}{r^n} + \tfrac{1}{2}\tfrac{(x-x')^2}{r^{n+1}}d'\tfrac{rdr}{x-x'} \end{aligned}$$

poiché $2k + n = 1$, si ha

$$2k - 1 = -n \quad 2k - 2 = -n - 1$$

Ma

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

e di conseguenza

$$\frac{rdr}{x - x'} = dx + \frac{y - y'}{x - x'}dy + \frac{z - z'}{x - x'}dz$$

da cui

$$d'\frac{rdr}{x - x'} = \frac{(z - z')\,dx' - (x - x')\,dz'}{(x - x')^2}dz - \frac{(x - x')\,dy' - (y - y')\,dx'}{(x - x')^2}dy$$

La componente parallela all'asse x vale quindi

$$\frac{1}{2}ii'\frac{(x - x')\,dr}{r^n} + \frac{1}{2}ii'\left[\frac{(z - z')\,dx' - (x - x')\,dz'}{r^{n+1}}dz - \frac{(x - x')\,dy' - (y - y')\,dx'}{r^{n+1}}dy\right]$$

I due termini di questa espressione possono essere considerati separatamente come due forze la cui riunione equivale alla forza cercata. Ora è facile vedere che quando la curva s' forma un circuito chiuso, tutte le forze tali che quella che ha come espressione la parte $\frac{1}{2}ii'd'\frac{(x-x')dr}{r^n}$, proveniente dall'azione di tutti gli elementi ds' del circuito s' sullo stesso elemento ds si annullano reciprocamente. Infatti, tutte queste forze sono applicate allo stesso punto o, metà dell'elemento ds, lungo una stessa retta parallela all'asse x; bisogna quindi per avere la forza prodotta lungo questa retta dall'azione di una porzione qualunque del conduttore s' integrare $\frac{1}{2}ii'd'\frac{(x-x')dr}{r^n}$ da una delle estremità questa porzione all'altra, e si trova

$$\frac{1}{2}ii'\left[\frac{\left(x - x_2'\right)dr_2}{r_2^n} - \frac{\left(x - x_1'\right)dr_1}{r_1^n}\right]$$

e chiamando x_1', r_1', dr_1 le quantità che si riferiscono a una estremità e x_2', r_2', dr_2 quelle relativa all'altra, questo valore diviene evidentemente nullo quando, essendo il circuito chiuso, le sue due estremità sono nello stesso punto.

Quando il conduttore s' forma così un circuito chiuso, bisogna quindi, per avere più semplicemente l'azione che esso esercita sull'elemento ds parallelamente all'asse x, sopprimere, nell'espressione della componente parallela a questo asse, la parte $\frac{1}{2}ii'\frac{d'(x-x')dx}{r^n}$, e considerare solo l'altra parte

$$\frac{1}{2}ii'\left[\frac{(z-z')\,dx'-(x-x')\,dz'}{r^{n+1}}dz-\frac{(x-x')\,dy'-(y-y')\,dx'}{r^{n+1}}dy\right]$$

che rappresenteremo con X.

Applicando le stesse considerazioni alle altre due componenti della stessa forza che sono parallele agli assi y e z, si sostituiranno a loro le forze Y e Z, aventi per valore

$$Y=\frac{1}{2}ii'\left[\frac{(x-x')\,dy'-(y-y')\,dx'}{r^{n+1}}dx-\frac{(y-y')\,dz'-(z-z')\,dy'}{r^{n+1}}dz\right]$$

$$Z=\frac{1}{2}ii'\left[\frac{(y-y')\,dz'-(z-z')\,dy'}{r^{n+1}}dy-\frac{(z-z')\,dx'-(x-x')\,dz'}{r^{n+1}}dx\right]$$

Così, quando si tratta di un circuito chiuso, la risultante R delle tre forze X,Y,Z, alle quali sono ridotte le componenti della forza $-ii'r^kd'\left(r^kdr\right)$, sostituisce questa forza; e l'insieme di tutte le forze R è equivalente a quella di tutte le forze esercitate da ciascuno degli elementi ds', del circuito chiuso s', e rappresenta l'azione totale di questo circuito sull'elemento ds. Vediamo ora quale è il valore e la direzione di questa forza R.

Siano u,v,w, le proiezioni della linea r sui piani yz,xz,xy, formanti rispettivamente gli angoli φ,χ,ψ, con gli assi y,z,x. Consideriamo il settore $M'om'$ (fig. 38), che ha per base l'elemento ds' e per vertice il punto o medio di ds, le cui coordinate sono x,y,z. Chiamiamo λ,μ,ν gli angoli che forma con gli assi la normale al piano di questo settore, e θ' l'angolo compreso tra le direzioni di ds' e di r. Il doppio dell'area di questo settore è $rds'\sin\theta'$, e le sue proiezioni sui piani delle coordinate sono

$$\begin{aligned}u^2d'\varphi=rds'\sin\theta'\cos\lambda=(y'-y)\,dz'-(z'-z)\,dy'\\ v^2d'\chi=rds'\sin\theta'\cos\mu=(z'-z)\,dx'-(x'-x)\,dz'\\ w^2d'\psi=rds'\sin\theta'\cos\nu=(x'-x)\,dy'-(y'-y)\,dx'\end{aligned}$$

Si può quindi dare questa nuova forma ai valori delle forze X,Y,Z,

$$\begin{aligned}X&=\tfrac{1}{2}ii'\left(\tfrac{v^2d'\chi}{r^{n+1}}dz-\tfrac{w^2d'\psi}{r^{n+1}}dy\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{ii'dsds'\sin\theta'}{r^n}\left(\tfrac{dz}{ds}\cos\mu-\tfrac{dy}{ds}\cos\nu\right)\\ Y&=\tfrac{1}{2}ii'\left(\tfrac{w^2d'\psi}{r^{n+1}}dx-\tfrac{u^2d'\phi}{r^{n+1}}dz\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{ii'dsds'\sin\theta'}{r^n}\left(\tfrac{dx}{ds}\cos\nu-\tfrac{dz}{ds}\cos\lambda\right)\\ Z&=\tfrac{1}{2}ii'\left(\tfrac{u^2d'\phi}{r^{n+1}}dy-\tfrac{v^2d'\chi}{r^{n+1}}dx\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{ii'dsds'\sin\theta'}{r^n}\left(\tfrac{dy}{ds}\cos\lambda-\tfrac{dx}{ds}\cos\mu\right)\end{aligned}$$

Questi valori danno

$$\begin{aligned}X\tfrac{dx}{ds}+Y\tfrac{dy}{ds}+Z\tfrac{dz}{ds}&=0\\ X\cos\lambda+Y\cos\mu+Z\cos\nu&=0\end{aligned}$$

cioè che la direzione della forza R forma con quella dell'elemento $mM=ds$, e con la normale op al piano del settore $M'om'$, degli angoli i cui coseni sono nulli, di modo che questa forza è contemporaneamente nel piano del settore e perpendicolare all'elemento ds. Quanto alla sua intensità, si ha dalle formule note

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{ii'dsds'\sin\theta'\sin pom}{r^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{ii'dsds'\sin\theta'\cos mok}{r^n}$$

essendo ok la proiezione di om sul piano del settore $M'om'$. Si può scomporre questa forza nel piano dello stesso settore in due altre, una S diretta lungo la linea $oo'=r$, l'altra T perpendicolare a questa linea. Questa è

$$T=R\cos ToR=R\cos hok=\frac{1}{2}\cdot\frac{ii'dsds'\sin\theta'\cos mok\cos hok}{r^n}$$

e siccome l'angolo triedro formato dalle direzioni om, ok, oh dà

$$\cos mok \cos hok = \cos moh = \cos\theta$$

viene

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{ii'dsds'\sin\theta'\cos\theta}{r^n}$$

La forza S lungo oh è

$$S = R\sin hok = T\tan hok$$

ma indicando con ω l'inclinazione del piano moh sul piano hok, che è quello del settore $M'om'$, si ha

$$\tan hok = \tan\theta\cos\omega$$

così

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{ii'dsds'\sin\theta'\sin\theta\cos\omega}{r^n}$$

Se si integrano le espressioni di X, Y, Z per tutta l'estensione del circuito chiuso s', si avranno le tre componenti dell'azione esercitata da tutto questo circuito sull'elemento ds; sostituendo n con il suo valore 2, quelle delle tre componenti divengono

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}ii'\left(dz\int\frac{v^2d'\chi}{r^3} - dy\int\frac{w^2d'\psi}{r^3}\right)\\
\frac{1}{2}ii'\left(dx\int\frac{w^2d'\psi}{r^3} - dz\int\frac{u^2d'\phi}{r^3}\right)\\
\frac{1}{2}ii'\left(dy\int\frac{u^2d'\phi}{r^3} - dx\int\frac{v^2d'\chi}{r^3}\right)
\end{array}$$

Forze simili applicate a tutti gli elementi ds della curva s daranno l'azione totale esercitata dal circuito s' sul circuito s. Le si otterrà integrando di nuovo le espressioni precedenti in tutta l'estensione di quest'ultimo circuito.

Immaginiamo ora due superfici prese a piacere σ, σ', delimitate da due contorni s, s' tutti i punti dei quali siano legati invariabilmente tra loro e con tutti quelli della superficie corrispondente, e su queste superfici strati infinitamente sottili di uno stesso fluido magnetico vi sia trattenuto da una forza coercitiva sufficiente affinché non si possa spostare. Considerando su queste due superfici due porzioni infinitamente piccole del secondo ordine che rappresenteremo con $d^2\sigma$ e $d^2\sigma'$, le cui posizioni siano determinate dalle coordinate x, y, z per la prima, $x', y'z'$ per la seconda, e la cui distanza sia r, la loro azione reciproca sarà una forza repulsiva diretta lungo la linea r e rappresentata da $-\frac{\mu\varepsilon\varepsilon'd^2\sigma d^2\sigma'}{r^2}$ che considereremo come agente sull'elemento ds; $\varepsilon, \varepsilon'$ indicano qui ciò che si chiama lo spessore dello strato magnetico su ogni superficie; μ è il coefficiente costante così che $\mu\varepsilon\varepsilon'$ rappresenta l'azione repulsiva che avrebbe luogo, se si riunissero in due punti posti a una distanza uguale all'unità, da una parte tutto il fluido distribuito su un'area uguale all'unità di superficie, dove lo spessore sarà costante e uguale a ε, dall'altra tutto il fluido distribuito su un'altra area uguale all'unità di superficie, dove lo spessore sarà pure costante e uguale a ε'.

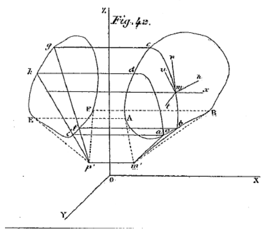
Scomponendo questa forza parallelamente ai tre assi, si hanno le tre componenti

$$\frac{\mu\varepsilon\varepsilon'd^2\sigma d^2\sigma'(x-x')}{r^2} \quad \frac{\mu\varepsilon\varepsilon'd^2\sigma d^2\sigma'(y-y')}{r^2} \quad \frac{\mu\varepsilon\varepsilon'd^2\sigma d^2\sigma'(z-z')}{r^2}$$

Immaginiamo ora una nuova superficie chiusa dallo stesso contorno s che limita la superficie σ e tale che le parti normali della superficie σ compresa tra essa e la nuova superficie siano piccole. Supponiamo che su quest'ultima superficie sia distribuito il fluido magnetico di tipo contrario a quello della superficie σ, di modo che abbia sulla parte della nuova superficie circoscritta dalle normali tracciate da tutti i punti del contorno dell'elemento di superficie d^2s una quantità uguale a quella del fluido distribuito su $d^2\sigma$. Chiamando h la lunghezza della piccola porzione della normale alla superficie σ, tracciata dal punto di coordinate x, y, z e compresa tra le due superfici, la quale misura in tutta l'estensione dell'area infinitamente piccola $d^2\sigma$ la distanza dei suoi punti dai punti corrispondenti dell'altra superficie, e indicando con ξ, η, ζ gli angoli che questa normale forma con gli assi, le tre componenti dell'azione reciproca tra l'elemento $d^2\sigma'$ e la piccola porzione della nuova superficie circoscritta, che è sempre uguale a $d^2\sigma$ finché h è molto piccola e trascurabile nel calcolo, come facciamo qui, le potenze di h superiori alla prima si otterranno sostituendo nell'espressione trovata, x, y, z con $x + h\cos\xi, y + h\cos\eta, z + h\cos\zeta$. E siccome i due fluidi distribuiti sulle due aree uguali a $d^2\sigma$ sono di natura contraria, bisognerà sottrarre i nuovi valori di queste componenti dai valori trovati in precedenza; ciò che si ridurrà, poiché si trascurano le potenze di h superiori alla prima, a differenziare questi valori, a sostituire nel risultato i differenziali di x, y, z con $h\cos\xi, h\cos\eta, h\cos\zeta$ e a cambiarne il segno. Questi differenziali essendo presi passando dalla prima superficie all'altra, li indicheremo con ∂,secondo la notazione del calcolo delle variazioni; avremo così per la componente parallela alle x ciò che diviene $-\mu\varepsilon\varepsilon' d^2\sigma d^2\sigma' \partial \frac{x-x'}{r^3}$, quando di sostituisce δx con $h\cos\xi$, cioè

$$\mu\varepsilon\varepsilon' d^2\sigma d^2\sigma' h\cos\xi \left[\frac{3\left(x-x'\right)\frac{\partial r}{\partial x}}{r^4} - \frac{1}{r^3}\right]$$

Determineremo ora la forma della posizione dell'elemento $d^2\sigma$.



Indichiamo come prima con u, v, w le proiezioni della linea r sui piano yz, zx, xy e con φ, χ, ψ, gli angoli che queste proiezioni formano rispettivamente con gli assi y, z, x. Scomponiamo la prima superficie σ in una infinità di zone infinitamente strette, come $abcd$ (fig. 42), tramite una successione di piani perpendicolari al piano yz tracciati dalla coordinata $m'p' = x$ del punto m'. Ogni zona racchiusa ai due bordi dal contorno s della superficie σ, avrà per proiezione sul piano yz un'area pure scomponibile in elementi quadrangolari infinitamente piccoli, ai quali corrisponderanno altrettanti elementi della superficie σ sulla zona in questione. Sono questi gli elementi da considerare come i valori di $d^2\sigma$. Quello la cui posizione, rispetto all'elemento $d^2\sigma'$, è determinato dalle coordinate polari r, u, φ, è uguale alla sua proiezione $udud\varphi$ sul piano yz diviso per il coseno dell'angolo ξ compreso tra questo piano e il piano tangente alla superficie σ con il quale coincide l'elemento $d^2\sigma$. Bisognerà quindi sostituire $d^2\sigma$ con $\frac{udud\varphi}{\cos\xi}$ nella formula precedente, e si avrà

$$\mu h\varepsilon\varepsilon' d^2\sigma' udud\varphi \left[\frac{3\left(x-x'\right)\frac{\partial r}{\partial x}}{r^4} - \frac{1}{r^3}\right]$$

Per calcolare il valore di $\left(x-x'\right)\frac{\partial r}{\partial x}$, siano mx il prolungamento della coordinata $mp = x$ del punto m dove è posto l'elemento $d^2\sigma$, mu una parallela al piano yz tracciata nel piano $pmm'p'$ e mt perpendicolare a quest'ultimo piano nel punto m. È facile vedere che la retta mn, lungo la quale $pmm'p'$ taglia il piano tangente in m, alla superficie σ, forma con le tre linee mx, mu, mt, che sono tra loro perpendicolari, angoli i cui coseni sono rispettivamente

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+du^2}} \quad \frac{du}{\sqrt{dx^2+du^2}} \quad 0$$

e che la normale mh forma con le stesse direzioni angoli i cui coseni sono

$$\frac{\delta x}{\sqrt{\delta x^2+\delta u^2+\delta t^2}} \quad \frac{\delta u}{\sqrt{\delta x^2+\delta u^2+\delta t^2}} \quad \frac{\delta t}{\sqrt{\delta x^2+\delta u^2+\delta t^2}}$$

δt tiene conto della proiezione di mh su mt. Si ha quindi

$$\frac{dx\delta x + du\delta u}{\sqrt{dx^2+du^2}\sqrt{\delta x^2+\delta u^2+\delta t^2}}$$

per il coseno dell'angolo compreso tra la retta mn e la normale mh e poiché questo angolo è retto, $dx\delta x + du\delta u = 0$, da cui $\frac{dx}{du} = -\frac{\delta u}{\delta x}$. Ma l'equazione

$$r^2 = (x-x')^2 + u^2$$

dà

$$r\delta r = (x-x')\,\delta x + u\delta u$$

da cui si deduce

$$\frac{\delta r}{\delta x} = \frac{u}{r} + \frac{x-x'}{r}\cdot\frac{dx}{du} = \frac{u}{r} - \frac{x-x'}{r}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}$$

eliminando $\frac{\delta u}{\delta x}$ tra queste due equazioni, viene

$$(x-x')\,\frac{\delta r}{\delta x} + u\frac{dr}{du} = \frac{(x-x')^2}{r} + \frac{u^2}{r} = r$$

Se ricaviamo ora da questa equazione il valore di $(x-x')\,\frac{\delta r}{\delta x}$ per sostituirlo in quello della forza parallela all'asse x, avremo

$$\mu h\varepsilon\varepsilon' ududφ \left[\frac{3r-3u\frac{dr}{du}}{r^4} - \frac{1}{r^3}\right] = \mu h\varepsilon\varepsilon' d\varphi\left(\frac{2udu}{r^3} - \frac{3u^2dr}{r^4}\right) = \mu h\varepsilon\varepsilon' d\varphi d\frac{u^2}{r^3}$$

L'altezza h e lo spessore ε dello strato del fluido infinitamente sottile distribuito sulla superficie σ, possono variare da un punto di questa superficie a un altro; e per raggiungere lo scopo che ci proponiamo di rappresentare con l'aiuto dei fluidi magnetici, le azioni che esercitano i conduttori voltaici, bisogna supporre che queste due quantità ε, h, varino in ragione inversa l'una dell'altra, in modo che il loro prodotto $h\varepsilon$ conservi lo stesso valore in tutta l'estensione della superficie σ. Chiamando g il valore costante di questo prodotto, l'espressione precedente diviene

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' d\varphi d\frac{u^2}{r^3}$$

e si integra immediatamente. Il suo integrale $\mu g\varepsilon' d^2\sigma' d\varphi\left(\frac{u^2}{r^3} - C\right)$ esprime la somma delle forze parallele all'asse x che agiscono sugli elementi $d^2\sigma$ della zona della superficie σ racchiusa tra i due piani tracciati da $m'p'$ che comprendono l'angolo $d\varphi$. Essendo la superficie σ delimitata dal contorno chiuso s, bisogna prendere questo integrale tra i limiti determinati dai due elementi ab, cd di questo contorno che sono compresi nell'angolo $d\varphi$ dei due piani detti, di modo che chiamando u_1, r_1 e u_2, r_2 i valori di u e di r relativi a questi due elementi, si ha

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' d\varphi\left(\frac{u_2^2}{r_2^3} - \frac{u_1^2}{r_1^3}\right)$$

per la somma di tutte le forze esercitate dall'elemento $d^2\sigma'$ sulla zona parallelamente all'asse x.

Se la superficie σ, invece di essere delimitata da un contorno, contenesse da tutti i lati uno spazio di figura qualsiasi, la zona di questa superficie compresa nell'angolo diedro φ sarebbe chiusa, e si avrebbe $u_2 = u_1$, $r_2 = r_1$; di modo che l'azione esercitata su questa zona parallelamente all'asse x sarebbe nulla, e di conseguenza anche quella che l'elemento $d^2\sigma'$ eserciterebbe su tutta la superficie σ composta allora da zone simili. E siccome la stessa cosa avverrebbe relativamente alle forze parallele agli assi y e z , si vede che l'insieme di due superfici molto vicine tra loro, contenenti da tutti i lati uno spazio di forma qualunque, e ricoperte, nel modo detto, una dal fluido australe, l'altra da quello boreale, è senza azione su una molecola magnetica, e in qualunque luogo essa sia posta, e di conseguenza su un corpo comunque magnetizzato. Riprendiamo l'esperienza precedente

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \left(\frac{u_2^2 d\varphi}{r_2^3} - \frac{u_1^2 d\varphi}{r_1^3}\right)$$

e sarà facile vedere che, per avere la somma totale delle forze parallele all'asse delle x che l'elemento $d^2\sigma'$ esercita sull'intera superficie σ, bisogna integrare rispetto a φ, le due parti di cui si compone questa espressione, rispettivamente nelle due porzioni $AabB, BcdA$ del contorno s , determinate dai due piano tangenti $p'm'A', p'm'B'$, tracciati dalla linea $m'p'$. Ma equivale a integrare $\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3}$ in tutta l'estensione del circuito s; poiché se si pone per u e φ i loro valori in funzione di r dedotti dalle equazioni della curva s, si vede che passando dalla parte $AabB$ alla parte $BcdA$, $d\varphi$ cambia di segno, e che di conseguenza gli elementi di una di queste parti sono di un segno contrario a quelli dell'altro.

Da ciò, se indichiamo con X la somma delle forze parallele alle x che esercita l'elemento $d^2\sigma'$ sull'insieme delle due superfici delimitate dallo stesso contorno s, avremo

$$X = \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{u^2 d\varphi}{r^3}$$

o, che è lo stesso

$$X = \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{(y-y')\,dz - (z-z')\,dy}{r^3}$$

essendo x, y, z relative al solo contorno s.

Si avrà pure, indicando con Y e Z le somme delle forze parallele alle y e alle z che agiscono sullo stesso insieme di superfici[16]

$$Y = \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{v^2 d\varphi}{r^3} = \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{(z-z')\,dx - (x-x')\,dz}{r^3}$$

$$Y = \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{w^2 d\varphi}{r^3} = \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{(x-x')\,dy - (y-y')\,dy}{r^3}$$

Siccome tutte le forze elementari che esercita l'elemento $d^2\sigma'$ su queste superfici passano per il punto m' dove è posto, si vede che tutte queste forze hanno una risultante unica la cui direzione passa per lo stesso punto m', e le cui componenti parallele agli assi sono X, Y, Z. I momenti di questa risultante rispetto agli stessi assi sono quindi

$$Yz' - Zy' \quad Zx' - Xz' \quad Xy' - Yx'$$

Supponiamo ora che invece di queste forze si applichi al mezzo di ognuno degli elementi ds del contorno s una forza uguale a $\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{ds \sin\theta}{r^2}$ e perpendicolarmente al piano del settore che ha ds come base e il punto m' come vertice, e la cui area è $\frac{1}{2} r ds \sin\theta$. Essendo le tre componenti di questa forza rispettivamente uguali a

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3} \quad \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{v^2 d\chi}{r^3} \quad \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{w^2 d\psi}{r^3}$$

[16] È inutile osservare che queste X, Y, Z esprimono forze del tutto differenti da quelle abbiamo già indicato con le stesse lettere, qualora si trattasse della mutua azione di due elementi di circuiti voltaici

parallele a quelle che passano per l'elemento $d^2\sigma$ e dirette nello stesso verso, si avranno gli stessi valori per le tre forze X, Y, Z che tendono a muovere il circuito s; ma le somme dei momenti di rotazione che ne risulteranno, invece di essere rappresentate da

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \left(z' \int \frac{v^2 d\chi}{r^3} - y' \int \frac{w^2 d\psi}{r^3}\right) \quad \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \left(x' \int \frac{w^2 d\psi}{r^3} - z' \int \frac{u^2 d\phi}{r^3}\right) \quad \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \left(y' \int \frac{u^2 d\phi}{r^3} - x' \int \frac{v^2 d\chi}{r^3}\right)$$

lo saranno per

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \left(\int \frac{zv^2 d\chi}{r^3} - \int \frac{yw^2 d\psi}{r^3}\right) \quad \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \left(\int \frac{xw^2 d\psi}{r^3} - \int \frac{xu^2 d\phi}{r^3}\right) \quad \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \left(\int \frac{yu^2 d\phi}{r^3} - \int \frac{xv^2 d\chi}{r^3}\right)$$

Sembra dapprima che questo cambiamento si deve solo apportare all'azione esercitata sul contorno s, ma non è così perché questo contorno forma un circuito chiuso, poiché se si toglie la prima somma dei momenti relativa all'asse x per esempio, dalla quarta che riferisce allo stesso asse, facendo attenzione che x', y', z' devono essere considerati come costanti in queste integrazioni, si avrà

$$\begin{aligned}
&\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{(z-z')d\chi - (y-y')d\psi}{r^3} = \\
&\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{(z-z')^2 dx - (z-z')(x-x')dz - (y-y')(x-x')dy + (y-y')^2 dx}{r^3} = \\
&\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{\left[(z-z')^2 dx + (y-y')^2\right]dx - (x-x')[(z-z')dz + (y-y')dy]}{r^3} = \\
&\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{\left[r^2 - (x-x')^2\right]dx - (x-x')[rdr - (x-x')dx]}{r^3} = \\
&\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \left[\frac{rdx - (x-x')dr}{r^3}\right] = \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \left(\frac{x_2-x'}{r_2} - \frac{x_1-x'}{r_1}\right)
\end{aligned}$$

chiamando x_1, x_2 e r_1, r_2 i valori di x e di r alle due estremità dell'arco s per il quale si calcola il valore della differenza dei due momenti. Quando questo arco forma un circuito chiuso, è evidente che $x_2 = x_1$ e $r_2 = r_1$, ciò che rende nullo l'integrale così ottenuto; si ha quindi

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3} \quad \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{v^2 d\chi}{r^3} \quad \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{w^2 d\psi}{r^3}$$

passanti per l'elemento $d^2\sigma'$ o per il medio di ds; da cui segue che in questi due casi l'azione che avviene sul contorno s è esattamente la stessa, essendo questo contorno invariabilmente legato alle due superfici molto vicine che esso racchiude: l'azione esercitata su queste due superfici dall'elemento $d^2\sigma'$ si ridurrà quindi, purché il contorno s sia una curva chiusa, alle forze applicate come detto a ciascuno degli elementi di questo contorno, quello che agisce sull'elemento ds avente per valore

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{ds \sin\theta}{r^2}$$

La forza applicata nel centro o dell'elemento $ab = ds$, che è proporzionale a $ds \sin\theta$ divisa per il quadrato della distanza r di questo elemento dal punto m', e la cui direzione è perpendicolare al piano che passa per l'elemento ab e per il punto m', è precisamente quella che esercita, come visto, sull'elemento ds l'estremità di un solenoide elettrodinamico indefinito quando si pone questa estremità nel punto m'; è anche quella che è prodotta, secondo le ultime esperienze di M. Biot, dall'azione reciproca dell'elemento ab e da una molecola magnetica posta in m'.

Ma dando a questa forza lo stesso valore e la stessa direzione perpendicolare al piano $m'ab$, che gli si deve assegnare quando la si determina, come ho fatto, sostituendo la molecola magnetica con l'estremità di un solenoide indefinito, M. Biot suppone che è in m' che si trova il suo punto di applicazione, o piuttosto quello della forza uguale e opposta che l'elemento ds esercita sul punto m', poiché è quest'ultimo che riferiscono gli esperimenti che egli ha eseguito; invece della direzione della forza esercitata da questo elemento sull'estremità posta in m' di un solenoide indefinito deve passare per il punto m, come quella che il solenoide esercita sull'elemento, quando si conclude questa della mia formula. Così, conservando le notazioni impiegate, e rappresentando, per brevità, con ρ il coefficiente costante $\mu g\varepsilon' d^2\sigma'$, le somme dei momenti, dal modo in cui Biot pone i punti di applicazione delle forze, staranno per i tre assi e cambiando i segni, poiché si tratta di forza che agiscono sul punto m',

$$-\rho \int \frac{z'v^2 d\chi - y'w^2 d\psi}{r^3}$$

$$-\rho \int \frac{x'w^2 d\psi - z'u^2 d\varphi}{r^3}$$

$$-\rho \int \frac{y'u^2 d\varphi - x'v^2 d\chi}{r^3}$$

mentre prendendo i punti di applicazione come io li trovo, si ha per queste somme di momenti

$$-\rho \int \frac{zv^2 d\chi - yw^2 d\psi}{r^3}$$

$$-\rho \int \frac{xw^2 d\psi - zu^2 d\varphi}{r^3}$$

$$-\rho \int \frac{yu^2 d\varphi - xv^2 d\chi}{r^3}$$

Ma possiamo vedere che questi ultimi valori sono rispettivamente uguali ai tre precedenti, quando la porzione di conduttore forma un circuito chiuso; da ciò segue che in questo caso, l'esperienza non può decidere se il punto di applicazione delle forze è realmente nel punto m' o nel punto medio m dell'elemento ds. E siccome, in quelle che ha eseguito l'abile fisico a cui si devono le esperienze in questione, vi era in effetti un circuito completamente chiuso, composto di due parti rettilinee formanti un angolo al quale dava successivamente valori diversi, al resto del filo e alla pila, che faceva agire su un piccolo magnete, per dedurre il rapporto delle forze corrispondenti ai diversi valori di questo angolo dal numero di oscillazioni del piccolo magnete, in un tempo dato, che corrispondevano a questi diversi valori; da allora, i risultati delle esperienze fatte in questo modo dovendo essere identicamente gli stessi, sia che si supponga il punto di applicazione delle forze in o o in m', non possono servire a decidere quale di queste due ipotesi si deve preferire; questa questione sulla posizione del punto di applicazione può essere risolta solo con altre considerazioni; è per questo io penso che sia necessario, prima di andare oltre, esaminarla con maggiore dettaglio.

Nella Memoria che ho letto nella seduta del 4 dicembre 1820, ho comunicato all'Accademia la formula fondamentale di tutta la teoria esposta in questa Memoria, formula che dà il valore della mutua azione di due fili conduttori così espressa[17]:

$$\frac{ii'dsds'\left(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega + k\cos\theta\cos\theta'\right)}{r^2}$$

essendo k un numero costante, di cui ho poi determinato il valore, provando, con altre esperienze, che è uguale a $-\frac{1}{2}$.

Qualche tempo dopo, nella seduta del 18 dello stesso mese, M. Biot lesse una Memoria in cui descriveva le esperienze da lui fatte sulle oscillazioni di un piccolo magnete sottoposto all'azione di un conduttore angolare, e dove da esse concludeva, con l'errore di calcolo prima esposto, che l'azione di ogni elemento del conduttore su ciò che chiamo una molecola magnetica, è rappresentata da una forza perpendicolare al piano tracciato per la molecola e l'elemento, in

[17] *Journal de physique*, t. XCI, p. 226-230.

ragione inversa del quadrato della loro distanza, e proporzionale al seno dell'angolo che la retta che misura questa distanza forma con la direzione dell'elemento. Si vede dai calcoli precedenti, che questa forza è precisamente quella che dà la mia formula per l'azione reciproca di un elemento di filo conduttore e dell'estremità di un solenoide elettrodinamico, e che essa è anche quella che risulta dalla legge di Coulomb, nell'ipotesi di due fluidi magnetici, quando si cerca l'azione che avviene tra una molecola magnetica e gli elementi del contorno che racchiude due superfici infinitamente vicine, ricoperte una di fluido australe, l'altra di fluido boreale, supponendo le molecole di questi fluidi distribuite sulle due superfici come prima spiegato.

In questi due modi di concepire le cose, si trovano gli stessi valori per le tre componenti, parallele a tre assi presi a piacere, della risultante di tutte le forze esercitate dagli elementi del contorno, e, per ognuna di queste forze, l'azione è opposta alla reazione lungo le rette che uniscono a due a due i punti tra i quali esse si esercitano; è così anche per la risultante e la sua reazione. Ma nel primo caso, il punto O (fig. 36) rappresenta l'estremità del solenoide al quale appartengono i punti P, N ed essendo o quello dove è posto l'elemento, le due forze uguali e opposte $og, o\gamma$ passano per questo elemento; nel secondo caso, al contrario, è in O che bisogna immaginare posto l'elemento del contorno delle superfici ricoperte di molecole magnetiche P, N e in o la molecola sulla quale agiscono queste superfici, di modo che le due forze uguali e opposte passano per la molecola. Fintanto che si ammette che non vi può essere azione da un punto materiale su un altro, senza che questo reagisca sul primo con una forza uguale e contraria lungo una stessa retta, ciò che comporta la stessa condizione relativamente all'azione e alla reazione di due sistemi di punti invariabilmente legati, si deve scegliere solo tra queste due ipotesi. E siccome l'esperienza di Faraday, sulla rotazione di una porzione del filo conduttore attorno a un magnete, è, così come spiegherò tra poco, in contraddizione manifesta con la prima, non si deve avere alcuna difficoltà nel considerare, con me, come sola ammissibile quella dove si fa passare, per il punto medio dell'elemento, la retta lungo la quale sono dirette le due forze. Ma numerosi fisici immagineranno allora di supporre che, nella mutua azione di un elemento AB (fig. 39) del filo conduttore e di una molecola magnetica M, l'azione e la reazione, sebbene uguali e dirette in verso contrario, non avessero una stessa retta, ma lungo due rette parallele, di modo che la molecola M, agente sull'elemento AB, tenderebbe a muoversi lungo la retta OR tracciata dal punto di mezzo O dell'elemento AB perpendicolarmente al piano MAB, e che l'azione che eserciterebbe reciprocamente questo elemento sulla molecola M tenderebbe a portarla, con una forza uguale, nella direzione MS parallela a OR.

Risulterebbe da questa singolare ipotesi, se fosse vera, che sarebbe matematicamente impossibile riportare i fenomeni prodotti dalla mutua azione di un filo conduttore e di un magnete a forze agenti, come tutte quelle di cui si è finora riconosciuta l'esistenza in natura, in modo che l'azione e la reazione siano uguali e opposte nella direzione delle rette congiungenti a due a due i punti tra i quali esse si esercitano; poiché, tutte le volte che questa condizione è soddisfatta per forze elementari qualunque, essa lo è evidentemente, dal principio stesso di composizione delle forze, per le loro risultanti. Così, i fisici che hanno adottato questa opinione sono obbligati ad ammettere una azione realmente elementare, consistente di due forze uguali dirette in verso contrario lungo due rette parallele, e formanti così una coppia, che non può essere ricondotta a forze per le quali l'azione e la reazione sarebbero opposte lungo una stessa retta. Ho sempre considerato questa ipotesi delle coppie come assolutamente contraria alle prime leggi della meccanica, tra le quali si deve contare, con Newton, l'uguaglianza dell'azione e della reazione agenti in verso contrario lungo la stessa retta; e ho ricordato i fenomeni che si osservano quando un filo conduttore e un magnete agiscono l'uno sull'altro, come tutti gli altri fenomeni elettrodinamici, a un'azione tra due elementi di correnti elettriche, da cui risultano due forze uguali e opposte, dirette entrambe lungo la retta che unisce i due elementi. Questa prima caratteristica delle altre forze osservate in natura si trova così giustificata; e quanto al considerare le forze come realmente elementari e inoltre semplicemente funzioni delle distanze dei punti tra i quali esse si esercitano, nulla vi si oppone, così come ho già osservato, a che la forza, di cui ho determinato il valore con esperienze precise, non si riconduca un giorno a forze elementari che soddisfano anche a questa seconda condizione, purché si faccia entrare nel calcolo il movimento continuo, nei fili conduttori, delle molecole elettriche alle quali queste ultime forze sarebbero inerenti. La considerazione di questi movimenti introducenti necessariamente nel valore della forza che ne risulterebbe tra due elementi, oltre alla loro distanza, gli angoli che determinano le direzioni lungo le quali si muovono le molecole elettriche, e che dipendono dalle direzioni stesse di questi elementi; sono precisamente quegli angoli, o, che è la stessa cosa, i differenziali della distanza di due elementi considerati come una funzione degli archi formati dai fili conduttori, che entrano solo con questa distanza nella mia formula. Non bisogna dimenticare che, nel modo di concepire le cose che mi appare il solo ammissibile, le due forze uguali e opposte OR e OP sono risultanti da una infinità di forze uguali e opposte a due a due; OR è quella delle forze On', Op', ecc., che passano tutte per il punto O, di modo che anche la loro risultante OR vi passi, ma che OT è la risultante delle forze Nn, Pp, ecc. esercitate dall'elemento AB sui punti tali che N, P, ecc., invariabilmente legati all'estremità M del solenoide elettrodinamico il quale suppongo sostituito da ciò che chiamo una molecola magnetica. Questi punti sono molto vicini a M quando questo solenoide è molto piccolo, ma non sono sempre distinti, ed è perché la loro risultante OT non passa per il punto M, ma per il punto O verso il quale tutte le forze $Nn, Pp, ...$ sono dirette.

Si vede, da quanto detto, che conservando alle due forze uguali che risultano dall'azione reciproca di un filo conduttore e di un magnete, e che agiscono l'una sul filo di cui l'elemento AB fa parte, e l'altra sul magnete al quale appartiene il punto M, lo stesso valore, e la stessa direzione perpendicolare al piano MAB, si possono avanzare tre ipotesi sul punto di applicazione di queste forze: nella prima, si suppone che le due forze passino per il punto M; nella seconda, che è quella che risulta dalla mia formula, le due forze passano per il punto medio O dell'elemento; nella terza, dove le forze sono OR e MS, quella che agisce sull'elemento è applicata nel punto O e l'altra nel punto M. Queste tre ipotesi sono pienamente in accordo: 1° riguardo al valore di queste forze che sono ugualmente, in tutte le tre ipotesi, in ragione inversa del quadrato della distanza MO, e in ragione diretta del seno dell'angolo MOB che la retta OM che misura questa distanza forma con l'elemento AB; 2° riguardo alla direzione delle stesse forze, sempre perpendicolare al piano MAB che passa per la molecola e per la direzione dell'elemento; ma riguardo ai loro punti di applicazione, essi sono posti differentemente per le due forze, nelle prime due ipotesi, e vi è una identità tra la prima e la terza soltanto per le forze che agiscono sul magnete, e tra la seconda e la terza soltanto per le forze che agiscono sul conduttore.

In virtù dell'identità dei valori e delle direzioni delle forze che vi sono nelle tre ipotesi, le componenti delle loro risultanti, prese parallelamente a tre assi qualunque, saranno le stesse; ma i momenti di rotazione, che dipendono inoltre dai punti di applicazione di queste forze, non saranno, in generale, gli stessi, riguardo alle forze che tendono a muovere il magnete, per la prima e la terza, e rispetto alle forze che agiscono sul filo conduttore, per la seconda e la terza.

Vediamo che nel caso in cui si tratta dell'azione di una porzione di filo conduttore, formante un circuito chiuso, i valori dei momenti sono gli stessi, sia che si prenda, per ogni elemento, il punto di applicazione delle forze in O o in M; in questo caso, quindi, vi sarà, inoltre, identità per i valori dei momenti nelle tre ipotesi.

Il movimento di un corpo, di cui tutte le parti sono invariabilmente collegate tra loro, può dipendere solo dalle tre componenti parallele a tre assi presi a piacere, e dai tre momenti attorno agli stessi assi; da cui segue che vi è una identità completa delle tre ipotesi per il movimento prodotto, sia nel magnete, sia nel conduttore, quando questo forma un circuito solido e chiuso. Da qui l'impossibilità di un movimento indefinitamente accelerato, essendo in generale una conseguenza necessaria delle tre ipotesi, poiché le forze elementari sono semplicemente funzioni delle distanze dei punti tra i quali essi si esercitano, ne segue evidentemente che questo movimento è pure impossibile, nelle due altre ipotesi, solo quando il conduttore forma un circuito solido e chiuso.

Del resto, è facile vedere che la dimostrazione così ottenuta dell'impossibilità di produrre un movimento indefinitamente accelerato per l'azione reciproca di un circuito elettrico solido e chiuso, e di un magnete, non è solo una conseguenza necessaria della mia teoria, ma che risulta pure, nell'ipotesi delle coppie iniziali, dal solo valore dato da M. Biot per la forza perpendicolare al piano MAB, così come ho dimostrato direttamente, con tutti i dettagli desiderabili, in una lettera che ho scritto su questo argomento a M. il dottor Gherardi. Se quindi si era potuto produrre un moto accelerato facendo agire su un magnete un conduttore formante un circuito solido e chiuso, ciò non sarebbe stato soltanto una formula in errore, ma anche quella che ha dato M. Biot, che tutte le osservazioni fatte dopo hanno completamente dimostrato, e delle quali i fisici che ammettono l'ipotesi delle coppie iniziali non hanno mai contestato l'esattezza.

Quando si rende mobile una porzione del circuito voltaico, si deve distinguere tre casi: quello dove esso forma un circuito quasi chiuso[18]; quello dove non potendo che ruotare attorno a un asse, esso ha le sue due estremità in questo asse; quello dove la parte mobile non forma un circuito chiuso, e dove una delle sue estremità almeno percorre un certo spazio muovendosi: quest'ultimo caso comprendente quello in cui questa parte è formata da un liquido conduttore.

Abbiamo visto che, nel primo di questi tre casi, il movimento che assume la porzione mobile per l'azione di un magnete, è identicamente la stessa nelle tre ipotesi, e non può mai accelerarsi indefinitamente, ma tende soltanto a portare la parte mobile in una posizione determinata dove si ferma in equilibrio dopo aver per qualche tempo oscillato attorno a tale posizione in virtù della velocità acquistata.

Così è del secondo, che differisce dal primo solo in apparenza; poiché se si aggiungesse nell'asse, una corrente, che raggiunge le due estremità della parte mobile, si averebbe un circuito chiuso senza nessun cambiamento nel momento della rotazione attorno a questo asse, poiché i momenti delle forze esercitati sulla corrente aggiunta sarebbero evidentemente nulli; da ciò segue che il movimento della parte mobile sarà identicamente lo stesso di quello del circuito chiuso così ottenuto.

Ma quando la parte mobile non forma un circuito chiuso, e che le sue due estremità non sono in un asse attorno al quale esse sarebbero tenute a ruotare, i momenti prodotti dall'azione, sia di una molecola magnetica, sia dell'estremità di un solenoide indefinito, non sono più le stesse nella seconda e terza ipotesi, e hanno un valore diverso nella prima. Prendendo per l'asse x la retta attorno alla quale si suppone la parte mobile collegata in modo da poter solo ruotare attorno a tale asse, e conservando le denominazioni impiegate nei calcoli precedenti, concluderemo che il valore del momento di rotazione prodotto dalle forze che agiscono sulla parte mobile, sarà

$$\rho \int \frac{z'v^2 d\chi - y'w^2 d\psi}{r^3}$$

nella prima ipotesi, e

$$\rho \int \frac{z'v^2 d\chi - y'w^2 d\psi}{r^3} + \rho \left(\frac{x_2 - x'}{r_2} - \frac{x_1 - x'}{r_1} \right)$$

nelle altre due.

Questa differenza nei valori del momento di rotazione offre la possibilità di provare sperimentalmente che la prima ipotesi è in contraddizione con i fatti. Poiché se si considera un magnete come ridotto a due molecole magnetiche di una forza come infinita poste ai suoi due poli, e che dopo aver messo in una posizione verticale la retta che le unisce, si obbliga una porzione di filo conduttore a ruotare attorno a questa retta presa come l'asse x, allora i due momenti

[18] Il circuito formato da una parte mobile del filo conduttore non è mai rigorosamente chiuso, poiché bisogna che queste due estremità comunichino separatamente con quelle delle pila; ma è facile rendere l'intervallo che le separa piccolo perché si possa considerarlo come se fosse perfettamente chiuso.

di rotazione relativi ai due poli saranno espressi dalla formula precedente sostituendo x', y', z' con $x_1^{'}, y_1^{'}, z_1^{'}$ per uno dei poli e con $x_2^{'}, y_2^{'}, z_2^{'}$ per l'altro, avendo cura di cambiare di segno uno di questi momenti, il primo, per esempio, poiché i due poli sono necessariamente di natura opposta, uno australe e l'altro boreale.

Quando i due poli sono, come supponiamo qui, posto sull'asse x, si ha $y_1^{'} = 0$, $y_2^{'} = 0$, $z_1^{'} = 0$, $z_2^{'} = 0$ e i due momenti di rotazione attorno all'asse x diventano nulli nella prima ipotesi: ciò che era facilmente prevedibile, poiché in questa ipotesi le direzioni di tutte le forze applicate al conduttore mobile passano per uno dei due poli e vi incontrano l'asse fisso, ciò che rende necessariamente nulli i momenti di queste forze.

Nelle altre due ipotesi, al contrario, dove le direzioni delle forze passano per i punti medi degli elementi, le parti dei momenti uguali a quelle della prima ipotesi sono le sole che si annullano; e quando dopo averle soppresse, si riunisce ciò che rimane di ogni momento, si ha

$$\rho \left(\frac{x_2 - x_2'}{r_{2,2}} - \frac{x_1 - x_2'}{r_{1,2}} - \frac{x_2 - x_1'}{r_{2,1}} + \frac{x_1 - x_1'}{r_{1,1}} \right)$$

indicando con $r_{2,2}; r_{1,2}; r_{2,1}; r_{1,1}$ le distanze dei punti le cui ascisse sono rispettivamente $x_2, x_2^{'}$; x_1, $x_2^{'}$; $x_1^{'}$; x_1, $x_1^{'}$. È facile vedere che i quattro termini della quantità che è compresa tra le parentesi in questa espressione, sono precisamente i coseni degli angoli che formano con l'asse x le rette che misurano le distanza $r_{2,2}; r_{1,2}; r_{2,1}; r_{1,1}$: ciò che rende il valore trovato per il momento prodotto dall'azione di due poli sul conduttore mobile, identico a quello che abbiamo già ottenuto, per ciò che risulta dall'azione sullo stesso conduttore di un solenoide le cui estremità sarebbero posto a questi poli, e le cui correnti elettriche avrebbero un'intensità i e distanze rispettivamente tale che fosse

$$\frac{\lambda i i'}{2g} = \rho$$

essendo i' l'intensità della corrente del conduttore.

Essendo il momento di rotazione sempre nullo nella prima ipotesi, la parte mobile del circuito voltaico non ruoterà mai per l'azione di un magnete posto, come abbiamo detto, attorno al proprio asse; nelle due altre ipotesi, essa deve al contrario ruotare in virtù del momento di rotazione di cui abbiamo calcolato il valore, sempre lo stesso, in queste due ipotesi. M. Faraday, che per primo produsse questo movimento, conseguenza necessaria delle leggi che avevo stabilito sull'azione reciproca dei conduttori voltaici, e del modo in cui avevo considerato i magneti come insiemi di correnti elettriche, ha dimostrato che la direzione dell'azione esercitata dal polo di un magnete su un elemento di filo conduttore passa in effetti per il mezzo dell'elemento, conformemente alla spiegazione che ho dato di tale azione, e non per il polo del magnete. Da allora l'insieme dei fenomeni elettrodinamici non può più essere spiegato dalla sostituzione dell'azione di molecole magnetiche australi e boreali, distribuite nel modo che ho spiegato su due superfici molto ravvicinate e terminate dai fili conduttori del circuito voltaico, al posto dell'azione, espressa dalla mia formula, che esercitano le correnti di questi fili. Questa sostituzione non può avvenire quando si tratta dell'azione di circuiti solidi e chiusi, e la sua principale utilità è di dimostrare l'impossibilità di un movimento indefinitamente accelerato, sia dall'azione reciproca di due conduttori solidi e chiusi, sia da quella di un conduttore di questo tipo e di un magnete.

Quando il magnete è mobile, bisogna pure distinguere tre casi: quello in cui tutte le parti del circuito voltaico che agisce su questo magnete sono immobili; quello dove qualche parte di questo circuito è mobile, ma senza legame con il magnete, potendo queste porzioni d'altronde essere formate da un filo metallico, o da un liquido conduttore; infine quello in cui una parte della corrente passa per il magnete, o per una parte del conduttore collegato al magnete.

Nel primo caso, il circuito totale composto da conduttori e dalla pila, è necessariamente chiuso; e poiché tutte le sue parti sono immobili, le somme dei tre momenti delle forze esercitate sui punti del magnete considerato, sia come molecole di fluidi australe e boreale, sia come estremità di solenoidi elettrodinamici, sono identiche nelle tre ipotesi, così come lo sono le risultanti stesse di queste forze; di modo che i movimenti impressi al magnete, e tutte le circostanze di questi moti, sono precisamente gli stessi, qualunque sia quella di queste ipotesi che si adotta. È quanto avviene, per esempio, per la durata delle oscillazioni fatte dal magnete, sotto l'influsso di questo circuito chiuso e immobile; ed è per questo che le ultime esperienze di M. Biot, dalle quali risulta che la forza che produce queste oscillazioni è proporzionale alla tangente dell'angolo che formano i due rami del conduttore che impiego, si accordano così ben con questa conseguenza della mia teoria che le direzioni delle forze che agiscono sul magnete passano per i punti medi degli elementi del filo conduttore, che con l'ipotesi che ho adottato e nella quale ammetto che queste direzioni passano per i punti del magnete in cui pone le molecole magnetiche.

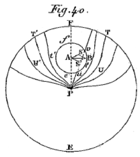
L'identità che ha luogo in questi casi tra le tre ipotesi, mostra nello stesso tempo l'impossibilità che il movimento del magnete acceleri indefinitamente, e prova che l'azione del circuito voltaico non può che tendere a riportarlo in una posizione determinata di equilibrio.

Sembra, al primo colpo d'occhio, che la stessa impossibilità dovrà esserci nel secondo caso, cosa contraria all'esperienza, almeno quando una parte del circuito è formata da un liquido. In effetti, è evidente che la mobilità di una porzione del conduttore non impedisce che questa parte non agisca in ogni istante come se fosse fissata nella posizione che occupa in questo istante; e non si vede come questa mobilità possa cambiare talmente le condizioni del moto del magnete, che diviene soggetto ad una accelerazione indefinita la cui impossibilità è dimostrata quando tutte le parti del circuito voltaico sono immobili.

Ma esaminando con attenzione ciò che deve succedere, dalle leggi dell'azione reciproca di un corpo conduttore e di un magnete, quando il conduttore è liquido, e un cilindro magnetizzato verticale fluttua in questo liquido, e la superficie del cilindro è ricoperta di una vernice isolante affinché la corrente non possa attraversarlo, ciò che darebbe luogo al terzo caso, si riconosce subito come risulta dalla mobilità della parte liquida del circuito voltaico che il magnete fluttuante acquista un movimento che accelera indefinitamente: basta perciò applicare a questo caso la spiegazione che ho dato, negli *Annales de chimie e de physique* (tomo XX, pag. 69-70), dello stesso movimento, quando si suppone che il magnete non essendo verniciato, le correnti del liquido dove fluttua lo attraversano liberamente.

Infatti, essendo questa spiegazione fondata sul fatto che le porzioni di corrente che si trovano nel magnete non possono avere su di esso alcuna azione, e che quelle che sono nel liquido al di fuori del magnete agiscono tutte per accelerare il suo movimento sempre nello stesso verso, ne segue evidentemente che tutto ciò che si ha in questo caso deve ancora arrivare quando la sostanza isolante, con cui si riveste il magnete, sopprime solo precisamente quelle porzioni di corrente che non avevano alcuna azione, e che lascia sussistere e agire, sempre allo stesso modo, quelle che, essendo esterne al magnete, tendono tutte ad accelerare il suo movimento costantemente nello stesso verso. Perché si possa meglio valutare che non vi è, infatti, nulla da cambiare nella spiegazione espressa, credo di dover qui ricordare, applicandola al caso in cui il magnete è ricoperto da una sostanza isolante. Supporrò per maggiore semplicità in questa spiegazione, che si sostituisca al magnete un solenoide elettro-dinamico, le cui estremità siano ai poli di questo magnete, sebbene, secondo la mia teoria, debba essere considerato come un fascio di solenoidi. Questa supposizione non cambia gli effetti prodotti, poiché le correnti del mercurio agiscono allo stesso modo e nello stesso verso su tutti i solenoidi del fascio, imprimendogli un movimento simile a quello che darebbero a un solo di essi, e si può sempre supporre che le correnti elettriche di questo abbiamo molta intensità perché il suo moto sia sensibilmente lo stesso di quello del fascio.

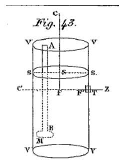
Sia quindi $ETFT'$ (fig. 40) la sezione orizzontale di un contenitore di vetro pieno di mercurio a contatto con un cerchio di rame che ne guarnisce il bordo interno e che comunica con uno dei reofori, per esempio quello negativo, mentre fa immergere in P il reoforo positivo; allora si formano nel mercurio delle correnti che vanno dal centro P del cerchio $ETFT'$ alla sua circonferenza.



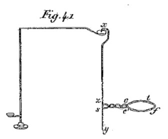
Rappresentiamo la sezione orizzontale del solenoide con il piccolo cerchio $etft'$, il cui centro è in A e la cui circonferenza $etft'$ è una delle correnti elettriche di cui è composto: supponendo che questa corrente si muove nel verso $etft'$, sarà attratta dalle correnti del mercurio come PUT, che si trovano, in figura, a destra di $etft'$, poiché la semi circonferenza etf, dove la corrente va nello stesso verso, ne più più vicina di ft' dove va in verso contrario. Sia AS questa attrazione uguale alla differenza delle forze esercitate dalle correnti PUT sulle due semicirconferenze, e che passa necessariamente per il loro centro A, poiché essa risulta da forze che queste correnti esercitano su tutti gli elementi della circonferenza $etft'$ che sono loro perpendicolari, e sono, di conseguenza, dirette lungo i raggi di tale circonferenza. La stessa corrente $etft'$ del solenoide è, al contrario, respinta dalle correnti che, come PUT', sono, nella figura, a sinistra di questa corrente $etft'$, poiché sono in verso contrario nella semicirconferenza ft' e la più vicina a PUT'. Sia AS' la repulsione che risulta dalla differenza delle azioni esercitate dalle correnti PUT' sulle due semicirconferenze $ft'e, etf$, essa sarà uguale a AS, e formerà con il raggio PAF, l'angolo $FAS' = PAS$, poiché tutto è uguale dai due lati di questo raggio: la risultante AR di queste due forze gli sarà quindi perpendicolare; e siccome essa passerà per il centro A, così come le sue due componenti AS, AS', il solenoide non avrà alcuna tendenza a ruotare attorno al suo asse, come si osserva in effetti riguardo al magnete fluttuante che rappresenta questo solenoide; ma tenderà, in ogni istante, a muoversi lungo la perpendicolare AR al raggio PAF, e siccome, quando si fa questa esperienza con un magnete fluttuante, la resistenza del mercurio distrugge in ogni istante la velocità acquisita, si vede questo magnete descrivere la curva perpendicolare a tutte le rette che passano come PAF per il punto P, cioè la circonferenza ABC di cui questo punto è il centro.

Questa bella esperienza, dovuta a M. Faraday, è stata spiegata dai fisici che ammettono la mia teoria, attribuendo il movimento del magnete al reoforo immerso in P nel mercurio, al quale si dà comunemente una direzione perpendicolare alla superficie del mercurio. È vero che, in questo caso, la corrente di questo reoforo tende a portare il magnete nel verso in cui si muove effettivamente; ma è facile assicurarsi, da esperienze comparative, che è con una forza troppo piccola per vincere la resistenza del mercurio, e produrre, malgrado questa resistenza, il movimento osservato. Ero dapprima sorpreso di vedere che questi fisici non tenevano conto dell'azione che le correnti del mercurio devono esercitare nella loro teoria, la mia sorpresa è aumentata quando ho riconosciuto la causa in un errore manifesto che si trova enunciato in questi termini nell'opera già citata[19]: "L'azione trasversale di questo filo fittizio (la corrente elettrica che è nel mercurio) sul magnetismo astrale di A (fig. 43), tenderà quindi anche costantemente a spingere A da destra verso sinistra di un osservatore con la testa in C' e i piedi in Z. Ma una tendenza contraria si eserciterà sul polo B, e anche con un'energia uguale, se la linea orizzontale $C'FF'Z$ si trova all'altezza precisa del centro della barra; di modo che, tutto sommato, non ne risulterà alcun movimento di traslazione. Ciò sarà quindi allora la sola forza esercitata da CF che determinerà la rotazione della barra AB". Come l'autore non abbia visto che le azioni che il *filo fittizio*, posto come disse, esercita sui due poli della barra AB, tendente a portarlo nello stesso verso, e che esse si aggiungono invece di distruggere, poiché essendo di specie contrarie, questi poli si trovano da due parti opposte del filo?

[19] *Précis élémentaire de physique expérimentale*, terza edizione, t. II, p. 753.



È importante osservare a tale scopo, che se porzioni di correnti facenti parte di quella del mercurio, potrebbero trovarsi all'interno del piccolo cerchio $etft'$ e agire su di esso, esse tenderebbero a farlo ruotare attorno al punto P in verso contrario, e con una forza che, invece di essere la differenza delle azioni esercitate sulle due semicirconferenze etf, $ft'e$, ne è la somma, poiché se uv rappresenta una di queste parti, è evidente che essa attirerà l'arco utv e respingerà l'arco $vt'u$, da cui risultano due forze che tendono a muovere $etft'$ nella direzione AZ opposto a AR. Questa circostanza non può evidentemente avvenire con il magnete fluttuante che occupa l'interno del piccolo cerchio $etft'$, poiché ne esclude le correnti quando è rivestito da materia isolante, e poiché, nel caso contrario, le parti di corrente comprese in questo cerchio, aventi luogo nelle particelle del magnete invariabilmente legate a quelle sulle quali esse agiscono, l'azione che esse producono è annullata da una reazione uguale e opposta; di modo che ne rimane, in entrambi i casi, che le forze esercitate dalle correnti del mercurio, che tendono tutte a muovere il magnete lungo AR.



È unicamente per questo che ruota attorno al punto P in questo verso, come ce ne si assicura sostituendo il magnete con un conduttore mobile $xzetft'sy$ (fig. 41), formato da un filo di rame molto sottile, rivestito di seta, la cui parte intermedia $etft'$ è piegata a cerchio, e le estremità, piegate insieme da c a z, vanno, l'una ezx a rendere in x in una coppa di mercurio comunicante con uno dei due reofori, e l'altra $t'sy$ a immergersi in P (fig. 40) nel mercurio che comunica, come abbiamo detto, con l'altro reoforo: si sospende questo conduttore mobile in modo che il cerchio $etft'$ (fig, 41) sia molto vicino alla superficie del mercurio, e si vede che rimane immobile, in virtù dell'equilibrio che si stabilisce tra le forze esercitate dalle porzioni di corrente comprese nel cerchio $etft'$, e quelle che lo sono dalle correnti e porzioni di correnti esterne a questo cerchio. Ma sopprimendo le porzioni di correnti comprese nello spazio $etft'$ (fig. 40), affondando nel mercurio al di sotto del cerchio $etft'$(fig. 41) un cilindro di materia isolante la cui base sia uguale per imitare ciò che avviene al magnete flottante, lo si vede muovere, come questo magnete, nel verso AB. Quando si lascia il cilindro di materia isolante dove era prima il cerchio $etft'$, quello non ruota indefinitamente come il magnete, ma tende a fermarsi, dopo qualche oscillazione, in una posizione di equilibrio; differenza che deriva dal fatto che il magnete lascia dietro di se, riempirsi di mercurio lo spazio che prima occupava, e caccia il mercurio successivamente dai diversi posti dove si trova trasportato. È questo cambiamento nella situazione di una parte del mercurio che trascina uno nelle correnti elettriche, e fa che, sebbene il circuito voltaico totale sia chiuso, il moto continuo del magnete, che è impossibile per l'azione di un circuito solido e chiuso, non avvenga in questo caso dove il circuito chiuso cambia forma per il movimento dello stesso magnete. Per produrre questo movimento impiegando, invece del magnete, il conduttore mobile descritto, bisogna, quando si è constatato che si muove solo quando si sopprime, con il cilindro di materia isolante, le porzioni di correnti interne al piccolo cerchio $etft'$, e che lasciando questo cilindro nella stessa posizione, esso si ferma in una data posizione di equilibrio dopo aver oscillato attorno ad essa, a imitazione di ciò che avviene quando si tratta di un magnete fluttuante, facendo scivolare il cilindro di materia isolante sul fondo del recipiente, in modo che sia sempre sotto il cerchio $etft'$ (fig. 41), e che il suo centro corrisponda sempre verticalmente a quello del cerchio, il conduttore mobile si mette allora a ruotare indefinitamente attorno al punto P (fig. 40) come il magnete.

In generale, sostituendo ai magneti dei conduttori mobili piegati a cerchio, è possibile farsi un'idea giusta delle cause dei diversi movimenti dei magneti, quando si vuole analizzare questi movimenti sperimentalmente senza ricorrere al calcolo, poiché questa sostituzione dà la possibilità di far variare le condizioni in diversi modi, cosa che sarebbe spesso impossibile ottenere con dei magneti, e che possono solo chiarirci le difficoltà che presentano fenomeni spesso così complessi. È così, per esempio, che in quanto detto, è impossibile, con un magnete, verificare questo risultato della teoria, che se parti di correnti del mercurio possano attraversare il magnete, e agire malgrado ciò su di esso conservando l'intensità e la direzione che hanno nel mercurio quando si toglie il magnete, questo non ruoterà attorno al punto P, e che la verifica diviene facile quando gli si sostituisce, come abbiamo detto, il conduttore mobile rappresentato in fig 41.

L'identità d'azione che si osserva costantemente tra i movimenti di un conduttore mobile e quelli di un magnete, tutte le volte che si trovano nelle stesse condizioni, non permette di dubitare, quando si esegue l'esperienza precedente, che il magnete non resti così immobile, quando è attraversato dalle parti di correnti interni al cerchio $etft'$, se queste parti possano agire su di esso; e, come si vede, al contrario, che, quando non è rivestito da una sostanza isolante, e le correnti lo attraversano liberamente, si muove e che nessuna porzione di corrente può più penetrare nell'interno di questo magnete, si ha una prova diretta del principio sul quale si basa una parte delle spiegazioni che ho dato, cioè: che le porzioni di correnti che attraversano il magnete non agiscono in alcun modo su di esso, poiché le forze che risulteranno dalla loro azione sulle correnti proprie del magnete, o su quelle che si chiamano molecole magnetiche, aventi luogo tra le particelle di uno stesso corpo solido, sono necessariamente distrutte da una reazione uguale e opposta.

Confesso che questa prova sperimentale di un principio che è una conseguenza necessaria delle prime leggi della meccanica, mi sembra completamente inutile, come sarebbe apparsa a tutti i fisici che hanno considerato questo principio come uno dei fondamenti della scienza. Non avrei fatto l'osservazione, se non si fosse supposto che la mutua azione di un elemento del filo conduttore e di una molecola magnetica, consisteva in una coppia composta da due forze uguali e parallele senza essere direttamente opposte, in virtù della quale una parte di corrente che si ha in un magnete potrebbe muoverla; supposizione contraria al principio in questione, e che si trova smentito dall'esperienza precedente secondo la quale non vi è azione esercitata sul magnete dalle parti di corrente che lo attraversano quando non è rivestito da isolante, poiché il moto che avviene in questo caso rimane lo stesso quando si impedisce alla corrente di attraversare il magnete, mantenendola in questo rivestimento.

È da questo principio che si deve partire per vedere quali sono i fenomeni che deve presentare un magnete mobile sotto l'azione della corrente voltaica, nel terzo caso che rimane da considerare, quello dove una porzione di corrente passa per il magnete, o per una porzione di filo conduttore invariabilmente legato con esso. Abbiamo detto che quando si tratta di movimento di rivoluzione di un magnete attorno a un filo conduttore, il movimento deve essere lo stesso e lo è in effetti, sia che la corrente attraversi oppure no il magnete. Ma così non è quando si tratta di moto di rotazione continua di un magnete attorno alla retta che unisce i due poli.

Ho dimostrato sia con la teoria che con le esperienze svolte in diversi modi, i cui risultati hanno sempre confermato quelli della teoria, che la possibilità o impossibilità di questo movimento riguarda unicamente il fatto che una porzione del circuito voltaico complessivo sia in tutti i suoi punti separato dal magnete, o sia in questo magnete, sia in una porzione di conduttore collegato invariabilmente con esso. Infatti, nel primo caso, l'insieme della pila e dei fili conduttori forma un circuito sempre chiuso, e tutte le sue parti agiscono allo stesso modo sul magnete, sia che esse siano fisse o mobili; in quest'ultimo caso, esse esercitano, in ogni istante, precisamente le stesse forze come se fossero fisse nella posizione in cui si trovano in quell'istante. Ora abbiamo dimostrato, dapprima sinteticamente con l'aiuto delle considerazioni che ci hanno fornito le figure 30 e 31, poi calcolando direttamente i momenti di rotazione, che un circuito chiuso non può imprimere a un magnete un moto continuo attorno alla retta che unisce i suoi due poli, sia che li si consideri, conformemente alla mia teoria, come le due estremità di un solenoide equivalente al magnete, o come due molecole magnetiche la cui intensità sia molto grande affinché le azioni esercitate restino le stesse quando le si sostituisce a tutte quelle che guardano il magnete come composto nell'ipotesi dei due fluidi. L'impossibilità del movimento di rotazione del magnete attorno al proprio asse, fintanto che il circuito totale chiuso ne è dappertutto separato, si trova così completamente dimostrata, non solo applicando la mia formula alle correnti del solenoide sostituito al magnete, ma anche partendo dalla considerazione di una forza che si manifesterebbe tra un elemento del filo conduttore e una molecola magnetica perpendicolarmente al piano che passa per questa molecola e per la direzione dell'elemento, in ragione inversa del quadrato della distanza, e che sarebbe proporzionale al seno dell'angolo compreso tra la retta che misura questa distanza e la direzione dell'elemento. Ma quando si suppone, in quest'ultimo caso, che la forza passa per il punto medio dell'elemento, sia che essa agisca su di esso o reagisca sulla molecola magnetica, così come avviene, secondo la mia teoria, per il solenoide, lo stesso movimento diviene possibile non appena una porzione di corrente passa per il magnete, o per una porzione del conduttore invariabilmente collegato con esso; poiché tutte le azioni esercitate da questa porzione sulle particelle sono distrutte dalle reazioni uguali e opposte che su di esse esercitano queste particelle, rimangono sole le azioni esercitate dal resto del circuito totale che non è più chiuso e può, di conseguenza, far ruotare il magnete.

Per ben immaginare tutto ciò che si riferisce a questo tipo di moto, immaginiamo che l'asta $TUVS$ (fig. 13), che sostiene la piccola coppetta S nella quale si immerge la punta o del conduttore mobile *oab*, sia piegata in V e U come si vede in figura, in modo da lasciare libera la porzione VU della retta TS presa come asse di rotazione, affinché possa sospendere il magnete cilindrico GH, per un filo molto sottile ZK, al gancio K attaccato in U a questa asta, e che il conduttore mobile *oab* mantenuto nella posizione in cui si vede nella figura dal contrappeso *c*, sia chiuso in *b* da una lamina di rame bef, che si pesca nell'acqua acidificata che riempie il recipiente MN, affinché questo conduttore comunichi con il reoforo pP immerso nel mercurio della coppetta P, mentre l'altro reoforo rR è in contatto con l'asta $TVUS$ tramite il mercurio che si mette nella coppetta R, e che la pila *pr* chiuda il circuito totale.

Nell'istante in cui si stabilisce la corrente in questo dispositivo, si vede il conduttore mobile ruotare attorno alla retta TS; ma il magnete è solo portato in una posizione determinata attorno alla quale oscilla per qualche tempo, e dove resta poi immobile. In virtù del principio di uguaglianza tra l'azione e la reazione, che si ha riguardo ai momenti di rotazione attorno ad uno stesso asse come rispetto alle forze, se si rappresenta con M il momento di rotazione impresso, dall'azione del magnete, al conduttore mobile *oab*, la reazione di questo tenderà necessariamente a far ruotare il magnete attorno al suo asse con il momento $-M$ uguale a M, ma agente in verso contrario.

L'immobilità del magnete deriva evidentemente dall'azione possibile del conduttore mobile *oab* su di esso, il resto $bMPprRTS$ del circuito totale non può mancare di farlo pure; il momento dell'azione che esercita sul magnete, riunito a quello di *oab*, dà il momento del circuito chiuso $oabMPprRTS$ che è nullo; da cui segue che il momento $bMPprRTS$ è M, uguale e opposto a $-M$.

Ma se si collega il magnete GH al conduttore mobile *oab*, ne deriva un sistema di forma invariabile, nella quale l'azione e la reazione che essi esercitano l'uno sull'altro si annullano reciprocamente; e questo sistema resterà evidente immobile, se la parte $bMPprRTS$ non agisse come prima sul magnete per farlo ruotare imprimendogli il momento di rotazione M. È grazie a questo momento che il magnete e il conduttore mobile, riuniti in un sistema di forma invariabile, ruotano attorno alla retta TS; e siccome questo momento ha, come visto, lo stesso valore e segno di quello che imprimeva il magnete al conduttore oab quando questo conduttore ne era separato e ruotava soltanto, si vede che questi due movimenti avverranno necessariamente nello stesso verso, ma con velocità reciprocamente proporzionali al momento d'inerzia del conduttore e alla somma di questo momento d'inerzia e di quello del magnete.

Ho trascurato, nelle considerazioni precedenti, l'azione esercitata dalla parte $bMPprRTS$ del circuito totale sul conduttore mobile oab, sia nel caso in cui questo conduttore è separato dal magnete, sia quando gli è unito, non solo perché essa è molto piccola rispetto a quella esercitata dal magnete, ma perché tende unicamente a portare il conduttore mobile nella posizione determinata dalla repulsione reciproca degli elementi di queste due parti del circuito totale, e non contribuisce, di conseguenza, nei due casi, ai moti di rotazione di oab, se non per far variare un poco la velocità, che altrimenti sarebbe costante.

Per poter facilmente unire e separare alternativamente il magnete e il conduttore mobile, senza interrompere le esperienze, conviene fissare al gancio Z con il quale il magnete è sospeso al filo ZK, un pezzo di filo di rame ZX chiuso in X da una forcella i cui rami Xx, Yy abbracciano il conduttore mobile oab, che si trova chiuso tra essi, quando si piega opportunamente l'asta ZX; piagandola in verso contrario, gli dà la posizione come è rappresentata nella figura, e il conduttore ritorna libero.

Ho spiegato in dettaglio questa esperienza, poiché sembra, più di altre, appoggiare l'ipotesi della coppia iniziale, quando non si analizza come si deve fare. Infatti, si ammette come me, in questa ipotesi, che le forze esercitate dal magnete GH, sugli elementi del conduttore mobile oab, passano per questi elementi, e che supponendoli tutti nel piano verticale $TSab$, tracciata dalla retta TS, le forze sono normali a questo piano, esse tendono quindi a far ruotare oab sempre nello stesso verso attorno a TS: queste forze sono, secondo la legge proposta da M. Biot, precisamente le stesse, in modulo, in direzione e relativamente ai loro punti di applicazione, come le forze date dalla mia formula; esse producono quindi lo stesso momento di rotazione M in virtù del quale si esegue il movimento del conduttore oab quando è libero. Ma, secondo i fisici che ammettono l'ipotesi che qui si discute, le forze dovute alla reazione degli elementi del conduttore sul magnete non sono più le stesse se non in modulo e sono perpendicolari al piano $TSab$; essi pensano che queste forze sono applicate alle molecole magnetiche, o ai due poli del magnete GH che sono sulla retta TS; nel momento in cui i loro momenti di rotazione sono nulli rispetto a questa retta. A questa causa essi attribuiscono l'immobilità del magnete quando non è collegato ad alcuna parte del circuito voltaico; ma per spiegare il movimento di rotazione del magnete nel caso in cui lo si unisce al conduttore mobile oab, grazie all'asta ZX, essi suppongono che l'unione di questi due corpi in un sistema di forma invariabile, non impedisca al magnete di agire sempre per imprimere al conduttore mobile lo stesso momento di rotazione M, senza che questo conduttore reagisca sul magnete in modo da porre ostacolo al movimento del sistema, che deve ruotare di conseguenza nello stesso verso in cui ruoterebbe il conduttore prima di essere collegato invariabilmente al magnete, ma con una velocità minore in ragione reciproca dei momenti di inerzia del conduttore solo e del conduttore unito al magnete.

In questo modo si trovano in questa ipotesi gli stessi risultati di quando si suppone l'azione opposta alla reazione lungo la stessa retta, e si tiene conto dell'azione esercitata sul magnete dal resto $bMPprRTS$ del circuito voltaico. Risulta da quanto dimostrato in questa memoria, che questa identità degli effetti prodotti e dei valori delle forze trovate, nel caso esaminato, tra il modo in cui ho spiegato i fenomeni e l'ipotesi della coppia originaria, è una conseguenza necessaria in quanto il circuito voltaico che si fa agire sul magnete è sempre chiuso, e che si tratta di un circuito chiuso, non solo le tre forze parallele ai tre assi che risultano dall'azione di un tale circuito esercita su un magnete, ma anche i tre momenti di rotazione attorno a questi tre assi, sono gli stessi nei due modi di immaginare le cose, così come il movimento del magnete, che può dipendere solo da queste sei quantità.

La stessa identità si ritroverà, di conseguenza, in tutte le esperienze dello stesso genere, e questa non è, né per queste esperienze, né per la misura delle forze che si sviluppano tra i filo conduttori e il magnete, che una tale questa questione può essere decisa; essa lo deve essere:

1° Per la necessità del principio, che la mutua azione delle diverse parti di un sistema di forma invariabile non può, in alcun caso, imprimere a questo sistema un movimento qualunque; principio che è solo una conseguenza dell'idea che abbiamo delle forze e dell'inerzia della materia.

2° Per questa circostanza, che l'ipotesi di una coppia originaria non è stata immaginata, da coloro che l'hanno proposta, se non perché hanno creduto che i fenomeni dai quali sono partiti non potessero essere spiegato altrimenti, bisogna tener conto dell'azione che esercita sul magnete la totalità del circuito voltaico; poiché non hanno prestato attenzione al fatto che tale circuito è sempre chiuso, e che non hanno dedotto, come io ho fatto, dalla legge proposta da M. Biot, questa conseguenza rigorosa che, per un circuito chiuso, sia che si supponga che le direzioni delle forze esercitate sul magnete passano per le molecole magnetiche o per i mezzi degli elementi dei fili conduttori.

3° Su questo, quando si ammette che i fenomeni in questione possono essere prodotti, in ultima analisi, dalle forze espresse in funzione delle distanze che esercitano le molecole dei fluidi elettrici, e che si attribuisce così ai due fluidi magnetici quando li si considera come la causa dei fenomeni, puramente elettrici secondo me, che presentano i magneti, si può ben pensare che se queste molecole sono in movimento nei fili conduttori, ne risultano tra i loro elementi forze che non dipendono soltanto dalle distanze tra tali elementi, ma anche dalle direzioni lungo le quali avviene il moto delle molecole elettriche che le percorrono, tali precisamente come le forze che esprime la mia formula, purché queste forze soddisfino alla condizione che l'azione e la reazione siano dirette lungo la stessa retta, mentre è contraddittorio supporre che delle forze, qualunque siano d'altra parte i loro valori in funzione delle distanze, dirette lungo le rette congiungenti le molecole tra le quali esse si esercitano, possano produrre, per qualunque combinazione possibile, quand'anche queste molecole fossero in movimento, forze per le quali l'azione e la reazione non siano dirette lungo la stessa retta, ma lungo due rette parallele, come nell'ipotesi della coppia originaria.

Si sa, infatti, che quando anche delle molecole elettriche o magnetiche sono in movimento, esse agiscono in ogni istante come se fossero a riposo nella condizione in cui si trovano in quell'istante. Se quindi si considerano due sistemi di molecole, tali che ogni molecola dell'uno esercita su ogni molecola dell'altro una forza uguale e opposta, lungo la congiungente, alla forza esercitata dalla seconda molecola sulla prima, e che si fermino tutte queste molecole nella condizione in cui esse si trovano in un istante dato, si suppone che esse siano tutte legate invariabilmente insieme in questa condizione, vi sarà necessariamente equilibrio nel sistema di forma invariabile, composto da due altre, che risulterà da questa ipotesi, poiché vi sarà equilibrio tra le forze elementari prese a due a due. La risultante di tutte le forze esercitate dal primo sistema sul secondo sarà quindi uguale e opposto, lungo la stessa retta, a quella di tutte le forze esercitate dal secondo sul primo; e queste due risultanti non potranno mai produrre una coppia capace di far ruotare il sistema totale, quando tutte le sue parti sono invariabilmente legate tra loro, come suppongono coloro che, adottando l'ipotesi di una coppia nell'azione reciproca di una molecola magnetica e di un elemento del filo conduttore, pretendono tuttavia che questa azione risulti dal fatto che l'elemento non agisce sulla molecola se non perché è esso stesso un insieme di molecole magnetiche, le cui azioni su quella che si considera sono come Coulomb ha stabilito, cioè dirette lungo le rette che le uniscono a quest'ultima, in ragione inversa del quadrato delle distanze.

Basta leggere con qualche attenzione ciò che ha scritto M. Biot sui fenomeni di cui ci occupiamo, nel libro nono della terza edizione del suo *Traité élémentaire de physique expérimentale*, per vedere che dopo aver considerato costantemente le forze che gli elementi dei fili conduttori esercitano sui magneti, come applicate alle molecole magnetiche perpendicolarmente ai piani passanti per ogni elemento di ciascuna molecola, suppone poi, quando parla del moto dei fili conduttori attorno ai magneti, che le forze esercitate dalle molecole magnetiche sugli elementi dei fili, passano per questi elementi in direzioni parallele a quelle delle forze esercitate sul magnete, e formanti, di conseguenza, coppie con le prime, invece di esser loro opposte lungo le stesse rette; che egli spiega in particolare, alla pagina 754, tomo II di quest'opera, il movimento di rotazione di un magnete attorno al suo asse, quando una porzione di corrente lo attraversa, supponendo che il magnete ruoti per l'azione che questa porzione stessa esercita sul resto del magnete, che forma tuttavia con essa un sistema di forma invariabile le cui parti sono invariabilmente legate tra loro[20]: ciò che presuppone evidentemente che l'azione e la reazione di questa parte di corrente e del resto del magnete formino una coppia. Come immaginare che i fisici che ammettono una simile ipotesi, possano esprimersi in questi termini alla pagina 769 dello stesso libro: "Se si calcola l'azione che eserciterebbe a distanza un ago magnetizzato di lunghezza infinitamente piccola e quasi molecolare, si vedrà facilmente che si possono formare dei raggruppamenti di tali aghi, che eserciterebbero forze trasversali. L'unica difficoltà, ma molto grande senza dubbio, è combinare tali sistemi, in modo che risulti, per le parti di un filo congiungente di dimensioni osservabili, le leggi precise di azioni trasversali che l'esperienza fa riconoscere, e che abbiamo esposto in precedenza".

Senza dubbio dall'azione di due sistemi di piccoli magneti, le cui molecole australi e boreali si attraggono o si respingono in ragione inversa del quadrato delle loro distanze, lungo rette che le uniscono a due a due, può risultare dalle *azioni trasversali* ma non da *azioni che non siano uguali e opposte a reazioni dirette lungo le stesse rette*, come quelle che suppone M. Biot.

In una parola, il valore dell'azione dei due elementi di fili conduttori, che ho dedotto unicamente dall'esperienza, dipende dagli angoli che determinano la direzione rispettiva dei due elementi: secondo la legge proposta da M. Biot, la forza che si sviluppa tra un elemento di filo conduttore e una molecola magnetica, dipende pure dall'angolo che determina la direzione dell'elemento. Se ho chiamato *elementare* la forza di cui ho determinato il valore, poiché essa si esercita tra due elementi di fili conduttori e poiché essa non è stata ancora riportata a forze più semplici: è detta pure elementare la forza che egli ammette tra una molecola magnetica e un elemento di filo conduttore. Fin qua tutto è simile riguardo questi due tipi di forza; ma per quella che ho ammesso, l'azione e la reazione sono opposte lungo una stessa retta, e nulla impedisce di immaginare che essa risulta dalle attrazioni e repulsioni inerenti le molecole in movimento nei fili conduttori, per rendere ragione dell'influenza della direzione degli elementi di questi fili sul valore della forza; mentre M. Biot, ammettendo una forza per la quale l'azione

[20]Non so se è necessario ricordare a tale scopo quanto ho già osservato, cioè che i fluidi elettrici, dall'insieme dei fatti, soprattutto secondo la nullità d'azione sui corpi più leggeri dell'elettricità che si muove nel vuoto, devono essere considerati come incapaci di agire in virtù della loro massa che si può dire infinitamente piccola rispetto a quella dei corpi ponderabili, e che ogni attrazione o repulsione esercitata tra questi corpi e i fluidi elettrici può ben mettere questi in movimento, ma non i corpi ponderabili. Affinché questi ultimi si muovano, serve, quando si tratta di attrazioni e repulsioni elettriche ordinarie, che dell'elettricità sia trattenuta sulla loro superficie, affinché la forza che sovrasta l'inerzia dell'uno, si appoggi, se così si può dire, sull'inerzia dell'altra. Serve pure, affinché l'azione reciproca di due fili conduttori metta questi fili in movimento, che le scomposizioni e ricomposizioni del fluido neutro che avvengono in ogni istante in tutti gli elementi di lunghezza dei due fili, determinano tra le loro particelle ponderabili forze capaci di vincere l'inerzia di queste particelle imprimendo ai due fili velocità reciprocamente proporzionali alle loro masse. Quando si parla dell'azione reciproca di due correnti elettriche, non si è mai inteso, ed è evidente che non si possa intendere, che quelle dei conduttori che essi percorrono: i fisici che ammettono molecole magnetiche agenti sugli elementi di un filo conduttore, conformemente alla legge proposta da M. Biot, ammettono senza dubbio anche che questa azione non muove il filo perché la molecola magnetica è trattenuta dalle particelle ponderabili del magnete che costituiscono l'elemento magnetico di cui fa parte; e se è evidente che supponendo che il magnete si muova per l'azione della parte di corrente elettrica che lo attraversa, si suppone necessariamente che il suo movimento risulta dall'azione reciproca che avviene tra ognuna di quelle delle sue particelle che attraversa la corrente in tutte le altre particelle dello stesso corpo.

e la reazione non sono dirette in verso contrario lungo una stessa retta, ma su rette parallele e formanti una coppia, si mette nell'impossibilità assoluta di riportare questa forza ad attrazioni e repulsioni dirette lungo le rette che uniscono a due a due le molecole magnetiche, come ammettono tutti i fisici che non se ne sono serviti per spiegare l'azione reciproca di due magneti. Non è evidente che è da questa ipotesi di M. Biot, su forze di rotazione per le quali l'azione e la reazione non sono opposte lungo una stessa retta, che si dovrebbe dire come egli dice (pagina 771) all'argomento dell'azione reciproca di due elementi di fili conduttori, come ho già determinato con le mie esperienze e i calcoli che ne ho dedotto, cioè: che una simile ipotesi *è dapprima in se stessa completamente al di fuori delle analogie che presentano tutte le altre leggi di attrazione*? Vi è un'ipotesi più contraria a queste analogie, nell'immaginare forze tali che l'azione reciproca di diverse parti di un sistema di forma invariabile possa mettere questo sistema in movimento?

È un allontanarsi da una delle leggi che Newton ha presentato tra i fondamenti della teoria fisica dell'universo, dopo aver scoperto un gran numero di fatti che nessuno aveva osservato prima di me, ho determinato, con la sola esperienza e seguendo il cammino tracciato da questo grand'uomo, dapprima le leggi dell'azione elettrodinamica e poi l'espressione analitica della forza che si sviluppa tra due elementi di fili conduttori, e che infine ho dedotto da questa espressione tutte le conseguenze esposte in questa Memoria.

M. Biot, citando i nomi di una parte dei fisici che hanno osservato nuovi fatti o inventato strumenti che si sono rivelati utili alla scienza, non ha parlato né del mezzo con il quale sono giunto a rendere mobili le parti di fili conduttori, sospendendole su punte di acciaio in coppette piene di mercurio, mezzo senza il quale non si sarebbero esercitate su azioni su questi fili, sia da altri conduttori, sia dal globo terrestre o da magneti; né di strumenti che ho costruito per evidenziare tutte le caratteristiche che presentano queste azioni, e determinare con precisione i casi di equilibrio dai quali ho concluso le leggi alle quali sono soggetti; né di queste stesse leggi determinate dalle mie esperienze; né della formula che ho derivato; né delle applicazioni che ho fatto di tale formula. E riguardo ai fenomeni che ho osservato per primo, ne cita uno solo, quello della mutua attrazione di due fili conduttori; e se lo cita, è per darne la spiegazione che era stata dapprima proposta da qualche fisico straniero, in un periodo in cui non si erano ancora fatte le esperienze che hanno dimostrato dopo lungo tempo che essa era completamente inammissibile. Questa spiegazione consiste, come si sa, nel supporre che due fili conduttori agiscono l'uno sull'altro, come se lo facessero in virtù dell'azione reciproca di aghi magnetizzati infinitamente piccoli, tangenti alle sezioni circolari che si possono fare in tutta la lunghezza di fili supposti cilindrici; l'insieme dei piccoli aghi di una stessa sezione formanti così un anello magnetizzato, simile a quello utilizzato da MM. Gay-Lussac e Velter per fare, nel 1820, un'esperienza decisiva per la spiegazione di cui qui si tratta. Questa esperienza ha provato, come si sa, che un simile anello non esercita assolutamente alcuna azione, tanto che forma così una circonferenza intera, sebbene sia talmente magnetizzato essendo formato da un acciaio atto a conservare, quando si rompe, porzioni sempre molto fortemente magnetizzate.

Sir H. Davy e M. Erman hanno ottenuto lo stesso risultato riguardo a un anello di acciaio di forma qualunque. Del resto, è una conseguenza necessaria della teoria dei due fluidi magnetici come la mia, così che è stato facile assicurarsi con un calcolo del tutto simile a quello con il quale ho dimostrato, in questa Memoria, l'assenza di azione di un solenoide formante una curva chiusa, conformemente a quanto trovato da M. Savary, per primo, con un calcolo che non differisce essenzialmente dal mio, e che si può vedere, sia nell'aggiunta che si trova nel seguito di questa Memoria sull'applicazione del calcolo ai fenomeni elettrodinamici, che ha pubblicato nel 1823, sia nel *Journal de physique*, tomo XCVI, pagg. 295 e seguenti. Dando di nuovo questa spiegazione, M. Biot mostra di non conoscere né l'esperienza di Gay-Lussac e Velter, né il calcolo di M. Savary.

Inoltre, i piccoli aghi tangenti alle circonferenze delle sezioni dei fili conduttori, sono considerati da Biot come le particelle stesse della superficie del filo conduttore magnetizzato dalla corrente elettrica che separerebbero in queste particelle il fluido australe dal boreale, portandoli in verso contrario, senza che le molecole di questi fluidi possano uscire dalle particelle del filo dove si trovavano prima riunite in un fluido neutro. Quando la corrente è stabilita dopo qualche tempo nel fluido e continua indefinitamente, la distribuzione delle molecole magnetiche nei fili conduttori non può più cambiare; è quindi come se vi fosse in questi fili una moltitudine di punti determinati che non cambierebbero posizione fintanto che la corrente continuerebbe con la stessa intensità, e da cui emanerebbero forze attrattive e repulsive dovute alle molecole magnetiche, e di conseguenza reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze.

Così due fili conduttori agirebbero l'uno sull'altro solo grazie a forze espresse da una funzione delle distanze tra punti fissi in uno dei fili e di altri punti pure fissi nell'altro filo; ma allora uno di questi fili, supposto immobile, non potrebbe che portare l'altro in una condizione di equilibrio dove l'integrale delle forze vive, che si ottiene sempre in funzione delle coordinate dei punti del filo mobile quando le forze sono funzioni delle distanze, raggiungerebbe il suo valore massimo. Mai tali forze potrebbero produrre un moto di rotazione la cui velocità andasse sempre crescendo nello stesso verso, fino a divenire costante, a causa degli attriti, o della resistenza del fluido nel quale devono essere immersi i conduttori mobili per mantenere i contatti. Ora, ho ottenuto questo moto di rotazione facendo agire un conduttore a spirale, formante pressapoco un cerchio, su un filo conduttore rettilineo, ruotante attorno a una delle sue estremità poste al centro del cerchio, mentre l'altra estremità si trovava molto vicino al conduttore a spirale.

Questa esperienza, dove il moto è molto rapido e può durare parecchie ore, quando di usa una pila molto potente, è in palese contraddizione con il modo di vedere di M. Biot; e se non lo è con l'opinione che l'azione di due fili conduttori risulta da forze attrattive e repulsive dovuto alle molecole dei due fluidi elettrici, allora queste molecole non rimangono circoscritte, come quelle che sono supposte formare i due fluidi magnetici, negli spazi molto piccoli in cui la loro distribuzione è stabilita da una causa permanente, ma che al contrario esse percorrono tutta la lunghezza di ogni filo con una serie di composizioni e scomposizioni, che si succedono a intervalli molto brevi; da cui possono risultare, come ho già osservato, movimenti sempre continui nello stesso verso, incompatibili con l'ipotesi che i punti da cui provengono le forze attrattive e repulsive non cambiano posizione nei fili.

Infine, M. Biot ripete nella terza edizione del suo *Traité élémentaire de physique* (libro II, pagina 773), quanto aveva già detto nella nota che ha pubblicato, negli *Annales de chimie et de physique*, sulle prime esperienze relative all'argomento in questione, che aveva fatto con M. Savart, cioè: che quando un elemento del filo di collegamento molto sottile e indefinito agisce su una molecola magnetica, "la natura della sua azione è la stessa di quella di un ago magnetizzato posto sul contorno del filo in un verso stabilito e sempre costante rispetto alla direzione della corrente voltaica."

Tuttavia l'azione di questo ago su una molecola magnetica è diretta lungo la stessa retta della reazione della molecola sull'ago, ed è allora facile vedere che la forza che ne deriva è in ragione inversa del cubo, e non del quadrato della distanza, come M. Biot ha trovato essere quella dell'elemento del filo.

Mi resta ora da estendere all'azione reciproca di due circuiti chiusi, di grandezza e forma qualsiasi, le considerazioni relative alle superfici contornate da questi circuiti e i cui punti agiscono come ciò che è detto molecole di fluido australe e boreale, che ho in precedenza applicato all'azione reciproca si un circuito chiuso qualunque e di un elemento di filo conduttore. Ho trovato che l'azione dell'elemento $d^2\sigma'$ sulle due facce chiuse dal contorno s, era espressa dalle tre forze

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \tfrac{u^2 d\varphi}{r^3} \quad \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \tfrac{v^2 d\chi}{r^3} \quad \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \tfrac{w^2 d\psi}{r^3}$$

applicate a ciascuno degli elementi ds di questo contorno, farò ora rispetto al circuito s', ciò che ho fatto allora riguardo al circuito s. Immaginiamo per questo una nuova superficie delimitata da tutti i lati, come la superficie σ', dalla curva chiusa s', e che sia tale le parti delle normali della superficie σ' comprese tra essa e questa nuova superficie, siano dappertutto molto piccole. Supponiamo, sulla nuova superficie, del fluido di specie contraria a quello della superficie σ', in modo che abbia le stesse quantità dei due fluidi nelle parti corrispondenti alle due superfici. Indicando con ξ', η', ζ' gli angoli che la normale nel punto m', le cui coordinate sono x', y', z', forma con i tre assi, e con h' la piccola parte di questa normale che è compresa tra le due superfici, potremo, come abbiamo fatto per l'elemento $d^2\sigma'$, ridurre l'azione dell'elemento della nuova superficie che è rappresentata da $d^2\sigma'$, sull'insieme di due superfici delimitate dal contorno s, a forze applicate ai diversi elementi di questo contorno; ciò che è relativo all'elemento ds e parallelo a x si otterrà sostituendo nell'espressione che abbiamo trovato per questa forza

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3}$$

o

$$-\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{(y'-y)\,dz-(z'-z)\,dy}{r^3}$$

le nuove coordinate $x'+h'\cos\xi'$, $y'+h'\cos\eta'$, $z'+h'\cos\zeta'$ al posto di x', y', z'. Siccome le forze così ottenute agiscono in verso contrario alle prime, bisogna sottrarle, ciò che si riduce, quando si trascurano in questo calcolo le potenze di h superiori alla prima, a differenziare

$$-\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{(y'-y)\,dz-(z'-z)\,dy}{r^3}$$

facendo variare x', y', z', sostituendo $\delta x', \delta y', \delta z'$ con $h'\cos\xi'$, $h'\cos\eta'$, $h'\cos\zeta'$ e cambiando il segno del risultato, mentre x, y, z e dx, dy, dz, devono essere considerate come costanti poiché esse appartengono all'elemento ds.

La formula nella quale si deve sostituire $h'\cos\xi'$, $h'\cos\eta'$, $h'\cos\zeta'$ a $\delta x', \delta y', \delta z'$ è quindi

$$\mu g\varepsilon' \left(dz d^2\sigma' \delta' \frac{y'-y}{r^3} - dy d^2\sigma' \delta' \frac{z'-z}{r^3} \right)$$

che bisogna integrare dopo questa sostituzione su tutta la superficie σ' per avere l'azione totale di questa superficie e di quella che è unita sull'insieme delle due superfici delimitate dal contorno s. Si può fare questa doppia integrazione separatamente su ognuno dei due termini che compongono questa espressione. Eseguiamo dapprima quello che è relativo al primo termine

$$\mu g\varepsilon' dz d^2\sigma' \delta' \frac{y'-y}{r^3}$$

Per questo, scomponiamo la superficie σ' in una infinità di zone infinitamente strette con una serie di piani perpendicolari al piano xz tracciato dalla coordinata y del mezzo o dell'elemento ds. Prendiamo, su una di queste zone, per $d^2\sigma'$ l'elemento della superficie σ' che ha per espressione

$$\frac{vd'vd'\chi}{\cos\eta'}$$

e dovremo allora integrare la quantità

$$\mu g\varepsilon' dz \frac{vd'vd'\chi}{\cos\eta'} \delta' \frac{y'-y}{r^3}$$

che si cambierà, con una trasformazione del tutto simile a quella prima applicata relativamente a

$$d^2\sigma = \frac{udud\varphi}{\cos\xi}$$

in questa

$$-\mu g dz h' \varepsilon' d' \chi d' \frac{v^2}{r^3}$$

Supponendo, come abbiamo fatto per la superficie σ, che le quantità h', ε' variano insieme in modo che il loro prodotto mantiene un valore costante g', si integrerà quest'ultima espressione, supponendo l'angolo χ costante, in tutta la lunghezza della zona delimitata dalla superficie σ' tra i due piano che comprendono l'angolo $d'\chi$ da uno dei bordi del contorno s' fino all'altro. Questa prima integrazione si effettua immediatamente e da

$$-\mu g g' dz d' \chi d' \left(\frac{v_2^2}{r_2^3} - \frac{v_1^2}{r_1^3}\right)$$

dove r_1, v_1 e r_2, v_2 rappresentano i valori di r e di v per i due bordi del contorno s'. Le due parti di questa espressione devono ora essere integrate rispetto a χ rispettivamente nelle due porzioni del contorno s' determinate dai due piani tangenti a questo contorni tracciati dall'ordinata y dell'elemento ds; e dall'osservazione fatta riguardo al valore della forza parallela alle x nel calcolo relativo alle due superfici delimitate dal contorno s, è facile vedere che si ha

$$-\mu g g' dz \int \frac{v^2 d' \chi}{r^3}$$

prendendo questo integrale in tutta l'estensione del contorno chiuso s'; essendo le variabili r, v, χ relative solo a questo contorno.

Si eseguirà allo stesso modo la doppia integrazione dell'altro termine che è uguale a

$$-\mu g \varepsilon' dy d^2 \sigma' \delta' \frac{z' - z}{r^3}$$

esteso all'intera superficie σ'. Bisognerà, per questo, dividere questa superficie in una infinità di zone, con piani tracciati dalla coordinata z del punto medio dell'elemento ds, e prendere, su una di queste zone, per $d^2\sigma'$ l'area infinitamente piccola che ha per espressione $\frac{wd'wd'\psi}{\cos\zeta'}$. La formula, dopo essere stata trasformata come la precedente, si integrerà dapprima sull'intera lunghezza della zona; l'integrale conterrà allora solo quantità relative al contorno s'. In seguito la seconda integrazione fatta rispetto a ψ sull'intero contorno chiuso s', darà

$$\mu g g' dy \int \frac{w^2 d' \psi}{r^3}$$

Riunendo infine i due risultati ottenuti da queste doppie integrazioni, si avrà

$$\mu g g' \left(dy \int \frac{w^2 d' \psi}{r^3} - dz \int \frac{v^2 d' \chi}{r^3}\right)$$

per il valore della forza parallela alle x, la cui direzione passa per il punto medio dell'elemento ds, e che deriva dall'azione delle due superfici delimitate dal contorno s' sulle due superfici delimitate dal contorno s.

Si avranno pure, parallelamente agli altri due assi, le forze

$$\mu g g' \left(dz \int \frac{u^2 d' \varphi}{r^3} - dx \int \frac{w^2 d' \psi}{r^3}\right)$$

$$\mu g g' \left(dx \int \frac{v^2 d' \chi}{r^3} - dy \int \frac{u^2 d' \varphi}{r^3}\right)$$

Così, supponendo applicate a ogni elemento ds del contorno s sulle forze che abbiamo determinato, si avrà l'azione che risulta dalle attrazioni e repulsioni dei due fluidi magnetici, distribuiti e fissi sui due insiemi di superfici delimitate dai due contorni s, s'.

Ma queste forze applicate agli elementi ds differiscono solo per il segno da quelle in precedenza ottenute, per l'azione di due circuiti s, s', supponendoli percorsi da correnti elettriche, purché si abbia $\mu g g' = \frac{1}{2} i i'$. Questa differenza deriva dal fatto che nel calcolo eseguito, i differenziali $d'\varphi, d'\chi, d'\psi$ sono stati supposti dello stesso segno dei differenziali $d\varphi, d\chi, d\psi$, mentre essi devono essere presi con segni contrari quando le due correnti si muovono nello stesso verso; allora le forze prodotte dall'azione reciproca di queste correnti sono precisamente le stesse di quelle che risultano dall'azione di due superfici σ' sulle due superfici σ, ed è così completamente dimostrato che la mutua azione di due circuiti solidi e chiusi, percorsi da correnti elettriche, può essere sostituita da quella di due insiemi composti ciascuno da superfici aventi per contorno questi due circuiti, e sui quali sarebbero fissate molecole di fluido australe e boreale, attirandosi o respingendosi lungo le rette che le uniscono, in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Combinando questo risultato con la conseguenza rigorosa del principio generale della conservazione delle forze vive, già richiamato parecchie volte in questa Memoria, che ogni azione riducibile a forze, funzioni delle distanze, agenti tra punti materiali formanti due sistemi solidi, uno fisso, l'altro mobile, non può mai produrre un moto che sia indefinitamente continuo, malgrado le resistenze e gli attriti che subisce il sistema mobile, ne concluderemo, come fatto quando si trattava di un magnete e di un circuito voltaico solido chiuso, che questo tipo di movimento non può mai risultare dall'*azione reciproca di due circuiti solidi chiusi*.

Invece di sostituire a ogni circuito due superfici molto vicine ricoperte l'una del fluido australe e l'altra di quello boreale, essendo questi fluidi distribuiti come è stato detto in precedenza, si potrebbe sostituire ogni circuito con una sola superficie sulla quale sarebbero uniformemente distribuiti gli elementi magnetici come li ha definiti M. Poisson, nella Memoria all'Accademia delle Scienze, il 2 febbraio 1824.

L'autore di questa Memoria, calcolando le formule con le quali fa rientrare nel dominio dell'analisi tutte le questioni relative alla magnetizzazione dei corpi, qualunque sia la causa che le assegna, ha espresso[21] i valori di tre forze esercitate da un elemento magnetico su una molecola di fluido australe o boreale; questi valori sono identici a quello che ho dedotto dalla mia formula per le tre quantità A, B, C, nel caso di un circuito molto piccolo chiuso e piano, quando si suppone che i coefficienti costanti sono gli stessi, è facile concluderne un teorema secondo il quale si vede immediatamente:

1° Che l'azione di un solenoide elettrodinamico, calcolata dalla mia formula, è, in ogni caso, la stessa di quella di una serie di elementi magnetici della stessa intensità, distribuiti uniformemente lungo la retta o curva che circonda tutti i piccoli circuiti del solenoide, dando, in ognuno dei suoi punti, agli asse degli elementi, la direzione stessa di questa linea;

2° Che l'azione di un circuito voltaico solido e chiuso, calcolata dalla mia formula, è precisamente quella che eserciterebbero elementi magnetici della stessa intensità, distribuiti uniformemente su una superficie qualunque delimitata da questo circuito, quando gli assi degli elementi magnetici sono dappertutto normali a questa superficie.

Lo stesso teorema porta ancora a questa conseguenza, che se si immagina una superficie contenente da tutti i lati un piccolo spazio; e si suppongono, d'altra parte, molecole di fluido australe e boreale in uguali quantità distribuite su questa piccola superficie, come devono essere affinché costituiscano l'elemento magnetico come l'ha considerato M. Poisson, e, d'altra parte, la stessa superficie ricoperta di correnti elettriche, formanti su questa superficie piccoli circuiti chiusi in piani paralleli equidistanti, e si calcola l'azione di queste correnti con la mia formula, le forze esercitate, in entrambi i casi, sia su un elemento di filo conduttore, sia su una molecola magnetica, sono precisamente le stesse, indipendenti dalla forma della piccola superficie, e pro-

[21] *Mémoire sur la théorie du magnetisme*, di M. Poisson, p. 22.

porzionali al volume da essa contenuto, essendo gli assi degli elementi magnetici rappresentati dalla retta perpendicolare ai piani dei circuiti.

L'identità di queste forze una volta dimostrata, si potrebbe considerare come fossero solo semplici corollari, tutti i risultati che ho dato in questo Memoria, sulla possibilità di sostituire ai magneti, senza cambiare gli effetti prodotti, insiemi di correnti elettriche formanti circuiti chiusi attorno alle loro particelle. Penso che sarà facile per il lettore dedurre questa conseguenza, e il teorema sul quale si basa, dai calcoli precedenti; ho d'altra parte sviluppato in un'altra Memoria dove ho discusso nello stesso tempo, sotto questo nuovo punto di vista, tutto quanto è relativo all'azione reciproca di un magnete e di un conduttore voltaico.

Mentre scrivevo questa, M. Arago ha scoperto un nuovo genere d'azione esercitata sui magneti. Questa scoperta, così importante quanto inattesa, consiste in una mutua azione che si sviluppa tra un magnete e un disco o anello di una sostanza qualunque la cui posizione relativa cambia continuamente. M. Arago avendo avuto l'idea che si doveva poter, in questa esperienza, sostituire un conduttore piegato a elica alla barra magnetizzata, mi spinse a verificare questa congettura con un'esperienza il cui successo poteva essere incerto. Le carenze della strumentazione con la quale provai a constatare l'esistenza di questa azione nelle esperienze che feci con M. Arago, ci impedirono di ottenere un risultato decisivo; ma M. Colladon avendo ben voluto incaricarsi di disporre più opportunamente la strumentazione di cui ci eravamo serviti, ha verificato con lui nel modo più completo, oggi 30 agosto 1826, l'idea di M. Arago, usando una doppia elica molto corta, le cui spire avevano circa due pollici di diametro.

Questa esperienza completa l'identità degli effetti prodotti, sia dai magneti, sia dall'insieme di circuiti voltaici solidi e chiusi[22]; finisce di dimostrare che la serie di scomposizioni e ricompo-

[22]Sembra innanzitutto che questa identità debba avvenire solo nei confronti di circuiti voltaici chiusi di diametro molto piccolo; ma è facile vedere che avviene anche per circuiti di qualsiasi dimensione, dato che abbiamo visto che questi possono essere sostituiti da elementi magnetici distribuiti uniformemente su superfici delimitate da questi circuiti, e che si può moltiplicare a piacimento il numero di superfici che circoscrivono uno stesso circuito. L'insieme di queste superfici può essere considerato come un fascio di magneti equivalenti al circuito. La stessa considerazione dimostra che senza nulla modificare delle forze risultanti, è sempre possibile sostituire le correnti elettriche molto piccole che circondano le particelle di una barra magnetizzata, con correnti elettriche di grandezza finita, formando queste correnti circuiti chiusi attorno all'asse della barra quando quelli delle particelle sono distribuiti simmetricamente attorno a questo asse. Basta per questo immaginare in questa barra superfici, delimitate da quella del magnete, che intersecano ovunque ad angolo retto le linee di magnetizzazione e che passano attraverso gli elementi magnetici che si può sempre presumere che si trovino nei punti in cui queste linee sono incontrate dalle superfici. Quindi, se tutti gli elementi di una stessa superficie si trovassero di uguale intensità su aree uguali, dovrebbero essere sostituiti da un'unica corrente elettrica che percorre la curva formata dall'intersezione di questa superficie e di quella del magnete; se variassero aumentando di intensità dalla superficie all'asse del magnete, sarebbe necessario sostituirle prima con una corrente in questa intersezione come dovrebbe essere secondo l'intensità minima di correnti di particolari della superficie normale alle linee di magnetizzazione che si considera, poi, ad ogni linea che circoscrive le porzioni di questa superficie dove le piccole correnti diventerebbero più intense, si immaginasse una nuova corrente concentrica alla precedente e tale che richiederebbe la differenza di intensità di correnti adiacenti, le une esterne, le altre all'interno di questa linea; se l'intensità delle correnti particolari tendesse a diminuire dalla superficie all'asse della barra, sarebbe necessario immaginare, sulla linea di separazione, una corrente concentrica alla precedente, ma di verso contrario; infine, un aumento di intensità che seguisse questa diminuzione, richiederebbe una nuova corrente concentrica diretto come prima.

Faccio questa osservazione qui solo per non omettere una conseguenza notevole dei risultati ottenuti in questa Memoria, e non per dedurne alcune probabilità a favore dell'ipotesi che le correnti elettriche dei magneti formano circuiti chiusi attorno ai loro assi. Dopo aver prima esitato tra questa ipotesi e l'altro modo di concepire queste correnti, considerandole come circondanti le particelle dei magneti: ho riconosciuto, da molto tempo, che quest'ultima era la più conforme all'insieme dei fatti, e non ho cambiato la mia opinione al riguardo.

Questa conseguenza è, inoltre, utile in quanto rende la similitudine di azioni prodotte, da un lato da un'elica elettrodinamica, dall'altro da un magnete, tanto completa, dal punto di vista della teoria, come la si trova quando consultiamo l'esperienza, e in questo giustifica le spiegazioni dove si sostituisce, come ho fatto in quello che ho dato prima del movimento di rivoluzione di un magnete fluttuante, un unico circuito chiuso sizioni del fluido neutro, che costituisce la corrente elettrica, è sufficiente a produrre, in questo caso come in tutti gli altri, gli effetti che di solito sono spiegati dall'azione di due fluidi differenti dell'elettricità e che indicano sotto il nome di *fluido australe* e di *fluido boreale*.

Dopo aver riflettuto a lungo su tutti questi fenomeni e sull'ingegnosa spiegazione fornita di recente da M. Poisson del nuovo tipo di azione scoperto dal signor Arago, mi sembra che ciò che possiamo ammettere come più probabile allo stato attuale della scienza, si compone delle seguenti proposizioni:

1° Senza essere autorizzato a respingere le spiegazioni basate sulla reazione dell'etere innescata da correnti elettriche, finora nulla obbliga a farvi ricorso.

2° Le molecole dei due fluidi elettrici, distribuite sulla superficie di corpi conduttori, sulla superficie o all'interno di corpi che non lo sono e che rimangono nei punti di questi corpi dove essi si trovano, sia in equilibrio nel primo caso, sia perché sono trattenuti nel secondo dalla forza coercitiva dei corpi non conduttori, producono, per le loro attrazioni e repulsioni reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze, tutti i fenomeni di elettricità ordinaria.

3° Quando le stesse molecole sono in movimento nei fili conduttori, che si riuniscono in un fluido neutro e si separano in ogni momento, risulta dalla loro azione reciproca di forze che dipendono innanzitutto dalla durata di periodi estremamente brevi compresi tra due incontri o due separazioni consecutive, poi dalle direzioni lungo le quali operano queste composizioni e scomposizioni alternative del fluido neutro. Le forze così prodotte sono costanti non appena questo stato dinamico dei fluidi elettrici nei fili conduttori sono diventati permanenti; sono loro che producono tutti i fenomeni di attrazione e repulsione che ho scoperto tra due di questi fili.

4° L'azione di cui ho riconosciuto l'esistenza, tra la terra e i conduttori voltaici, difficilmente ci lascia dubitare che ci siano correnti, simili a quelli dei fili conduttori, all'interno del nostro globo. Si può presumere che queste correnti siano la causa del calore gli è proprio; che avvengono principalmente dove lo strato ossidato che lo circonda su tutti i lati poggia su un nucleo metallico, in accordo con la spiegazione che Sir H. Davy ha dato dei vulcani, e che sono loro che magnetizzano i minerali magnetici e i corpi esposti in circostanze idonee all'azione elettrodinamica della terra. Tuttavia, non esiste e non può esistere, secondo l'identità degli effetti spiegati nella nota precedente, alcuna inconfutabile che le correnti terrestri non sono stabilite solo intorno alle particelle del globo.

5° Lo stesso stato elettrodinamico permanente costituito da una serie di scomposizioni e ricomposizioni del fluido neutro che avviene nei fili conduttori, esiste intorno alle particelle dei corpi magnetizzati, e produce azioni simili a quelle esercitate da questi fili.

6° Calcolando queste azioni secondo la formula che rappresenta quella di due elementi di correnti voltaiche, troviamo precisamente, per le forze risultanti, sia quando un magnete agisce su un filo conduttore, sia quando due magneti agiscono l'uno sull'altro, i valori forniti dagli ultimi esperimenti di M. Biot nel primo caso, e quelli di Coulomb nel secondo.

7° Questa identità, puramente matematica, conferma nel modo più completo l'opinione , fondata peraltro su tutti i fatti, che le proprietà dei magneti sono proprio dovute al movimento continuo dei due fluidi elettrici attorno alle loro particelle.

8° Quando l'azione di un magnete, o quella di un filo conduttore, stabilisce questo movimento attorno alle particelle di un corpo, le molecole di elettricità positiva e negativa, che devono costituirsi nello stato elettrodinamico permanente da cui derivano le azioni che allora esercita, o su un filo conduttore o su un corpo magnetizzato, possono raggiungere questo stato solo dopo un tempo molto breve, ma che non è mai nullo, e la cui durata dipende generalmente dalla resistenza che il corpo si oppone allo spostamento dei fluidi elettrici che contiene. Durante questo spostamento, sia prima di raggiungere uno stato di moto permanente, sia quando questo stato cessa, esse devono esercitare forze che probabilmente producono i singolari effetti che M. Arago ha scoperto. Questa spiegazione è, inoltre, solo quella di M. Poisson, applicata alla

al magnete che si considera.

mia teoria, perché una corrente elettrica formante un piccolissimo circuito chiuso che agisce esattamente come due molecole, uno di fluido australe, l'altra di fluido boreale, posti sul suo asse, su entrambi i lati del piano della piccola corrente, a distanze da questi piani uguali tra loro, e tanto maggiori quanto la corrente elettrica è più intensa, dobbiamo necessariamente trovare gli stessi valori per le forze che si sviluppano, sia quando supponiamo che la corrente si stabilisca o cessi di esistere gradualmente, sia quando immaginiamo che le molecole magnetiche, prima unite in fluido neutro, si separano, allontanandosi successivamente a distanze sempre più grandi, e poi si avvicinano per incontrarsi nuovo.

Credo di dover osservare concludendo questa Memoria, che non ho ancora avuto tempo di far costruire gli strumenti rappresentati nella figura 4 della prima tavola e nella figura 20 della seconda. Le esperienze per le quali sono destinate non sono ancora state eseguite; ma, poiché questi esperimenti hanno solo per scopo quello di verificare i risultati ottenuti altrimenti, e che sarebbe d'altra parte utile farli come contro-prova di quelli che hanno fornito questi risultati, non ho ritenuto necessario sopprimere la descrizione.

NOTE

Alcuni nuovi sviluppi sui temi trattati nella memoria precedente

I. *Sul modo di dimostrare con i quattro casi di equilibrio esposti all'inizio di questa Memoria, che il valore della mutua azione di due elementi di fili conduttori è*

$$-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \cdot \frac{dsds'}{d^2r} dsds'$$

Seguendo l'ordine delle trasformazioni che ho in sequenza fatto subire a questo valore, si trova dapprima, in virtù dei primi due casi di equilibrio, che esso è

$$\frac{ii'\left(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega + k\cos\theta\cos\theta'\right)dsds'}{r^n}$$

si deduce dal terzo, tra n e k, la relazione $n + 2k = 1$ e dal quarto $n = 2$, da cui $k = -\frac{1}{2}$; questo quarto caso di equilibrio è allora quello che si impiega in ultimo luogo per la determinazione del valore della forza che si sviluppa tra due elementi di fili conduttori: ma si può seguire un altro percorso partendo da una considerazione di cui si è servito M. de Laplace, quando ha concluso dalle prime esperienze di M. Biot sull'azione reciproca di un magnete e di un conduttore rettilineo indefinito, che quella che un elemento di questo filo esercita su uno dei poli del magnete è in ragione inversa del quadrato della loro distanza, quando questa distanza cambia solo valore mentre l'angolo compreso tra la retta che la misura e la direzione dell'elemento rimane lo stesso. Applicando questa considerazione all'azione reciproca di due elementi di fili conduttori, è facile vedere, indipendentemente da ogni ricerca preliminare sul valore della forza che ne risulta, che questa forza è pure reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza quando essa varia da sola e gli angoli che determinano la condizione rispettiva di due elementi non subiscono alcun cambiamento. Infatti, dalle considerazioni sviluppate all'inizio di questa Memoria, la forza qui trattata è necessariamente diretta lungo la retta r, e ha come valore

$$ii'f\left(r, \theta, \theta', \omega\right)dsds'$$

da cui segue che chiamando α, β, γ gli angoli che questa retta forma con i tre assi, le sue tre componenti saranno espresse da

$$ii'f\left(r, \theta, \theta', \omega\right)\cos\alpha dsds' \quad ii'f\left(r, \theta, \theta', \omega\right)\cos\beta dsds' \quad ii'f\left(r, \theta, \theta', \omega\right)\cos\gamma dsds'$$

e le tre forze parallele ai tre assi che ne risultano tra due circuiti dagli integrali doppi di queste espressioni, essendo i e i' costanti.

Ora segue dal quarto caso di equilibrio, sostituendo i tre cerchi con curve simili qualunque le cui dimensioni omologhe siano in progressione geometrica continua, che queste tre forze hanno valori uguali nei due sistemi simili; bisogna quindi che gli integrali che le esprimono siano di dimensione nulla rispetto a tutte le linee che vi entrano, secondo l'osservazione di M. de Laplace che ho ricordato, e che sia di conseguenza lo stesso dei differenziali di cui sono composti, comprendendo ds e ds' tra le linee che vi entrano, poiché il numero di questi differenziali, sebbene infiniti di secondo grado, deve essere considerato come lo stesso nei due sistemi.

Ora il prodotto $dsds'$ è di due dimensioni: bisogna quindi che $f(r,\theta,\theta',\omega)\cos\alpha$, $f(r,\theta,\theta',\omega)\cos\beta$, $f(r,\theta,\theta',\omega)\cos\gamma$, abbiano dimensione -2; e siccome gli angoli $\theta,\theta',\omega,\alpha,\beta,\gamma$ sono espressi da numeri che non entrano nelle dimensioni dei valori dei differenziali, e che $f(r,\theta,\theta',\omega)$ contengano la sola linea r, bisogna necessariamente che questa funzione sia proporzionale a $\frac{1}{r^2}$, di modo che la forza che esercitano l'uno sull'altro due elementi dei fili conduttori è espressa da

$$\frac{ii'\varphi(\theta,\theta',\omega)}{r^2}dsds'$$

I primi due casi di equilibrio determinano poi la funzione φ, dove il solo k rimane incognito, e si ha

$$\frac{ii'(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega+k\cos\theta\cos\theta')\,dsds'}{r^2}$$

per il valore della forza cercata: è, come si sa, sotto questa forma che ho dato nella Memoria che ho letto all'Accademia il 4 dicembre 1820. Sostituendo allora $\sin\theta\sin\theta'\cos\omega$ e $\cos\theta\cos\theta'$ con i loro valori

$$-\tfrac{rd^2r}{dsds'}dsds' \quad -\tfrac{dr}{ds}\cdot\tfrac{dr}{ds'}$$

viene

$$\begin{aligned}&-\tfrac{ii'}{r^2}\left(\tfrac{d^2r}{dsds'}+k\tfrac{dr}{ds}\cdot\tfrac{dr}{ds'}\right)dsds'=-\tfrac{ii'(rdd'r+kdrd'}{r^2}=\\&=-\tfrac{ii'r^kdd'r+kr^{k-1}drd'}{r^{k+1}}=-\tfrac{ii'd\left(r^kd'r\right)}{r^{k+1}}=-\tfrac{ii'dd'\left(r^{k+1}\right)}{(k+1)r^{k+1}}\end{aligned}$$

e ponendo $k+1=m$, si ha per il valore della forza cercata questa espressione molto semplice

$$-\frac{ii'dd'(r^m)}{mr^m}$$

Resta allora da determinare solo m dal caso di equilibrio che dimostra che la somma delle componenti delle forze che esercita un filo conduttore su un elemento, prese nella direzione di questo elemento, è sempre nulla quando il filo conduttore forma un circuito chiuso. Questo caso di equilibrio, che ho considerato in questa Memoria come terzo, deve essere allora come il quarto, poiché è l'ultimo che si impiega nella determinazione completa della forza cercata.

Sostituendo $d'r$ con $-\cos\theta' ds'$ nel valore

$$-\frac{ii'dd'(r^{m-1}d'r)}{r^m}$$

della forza che i due elementi esercitano l'uno sull'altro, si ha, per la sua componente, nella direzione dell'elemento ds'

$$-\frac{ii'ds'\cos\theta' d(r^{m-1}\cos\theta')}{r^m}=\frac{1}{2}\frac{ii'ds'd(r^{2m-2}\cos^2\theta')}{r^{2m-1}}$$

per cui serve che l'integrale relativo ai differenziali che dipendono da ds sia nullo tutte le volte che la curva s è chiusa; ma è facile vedere, integrando per parti, che essa è uguale a

$$\frac{1}{2}ii'ds'\left[\frac{\cos^2\theta_2'}{r_2}-\frac{\cos^2\theta_1'}{r_1}+(2m-1)\int\frac{\cos^2\theta' dr}{r^2}\right]$$

La prima parte di questo valore si annulla quando la curva s è chiusa, poiché allora $r_2=r_1$, $\cos^2\theta_2'=\cos^2\theta_1'$, rispetto alla seconda si dimostra facilmente, come abbiamo fatto, che $\int\frac{\cos^2\theta' dr}{r^2}$ non si può annullare, qualunque sia la forma della curva chiusa s; bisogna quindi che si abbia

$2m-1=0$, $m=\frac{1}{2}$ e che il valore della forza dovuta all'azione reciproca di due elementi ds, ds' sia

$$-\frac{ii'dd'\left(r^m\right)}{m\varepsilon^m}=-\frac{2ii'dd'\sqrt{r}}{\sqrt{r}}$$

II. Su una trasformazione atta a semplificare il calcolo dell'azione reciproca di due conduttori rettilinei.

Quando i due conduttori sono rettilinei, l'angolo formato dalle direzioni dei due elementi è costante e uguale a quello delle direzioni stesse di due conduttori; dovrebbe quindi essere noto, indicandolo con ε, si ha

$$r\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}=-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx'}{ds'}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy'}{ds'}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz'}{ds'}=-\cos\varepsilon$$

da cui segue che

$$\frac{dd'\left(r^m\right)}{mr^m}=\frac{(m-1)\,drdr'+rdd'r}{r^2}=\frac{(m-2)\,drdr'-\cos\varepsilon dsds'}{r^2}$$

Indicando con p un altro esponente qualunque, si ha

$$\frac{dd'\left(r^p\right)}{pr^p}=\frac{(p-2)\,drdr'-\cos\varepsilon dsds'}{r^2}$$

e, eliminando $\frac{drdr'}{r^2}$ tra queste due equazioni, si ottiene

$$\frac{(p-2)\,dd'\left(r^m\right)}{mr^m}-\frac{(m-2)\,dd'\left(r^p\right)}{pr^p}=\frac{(m-p)\cos\varepsilon dsds'}{r^2}$$

da cui

$$\frac{dd'\left(r^m\right)}{mr^m}=\frac{m-2}{p-2}\cdot\frac{dd'\left(r^p\right)+rdd'r}{pr^p}+\frac{m-p}{p-2}\cdot\frac{\cos\varepsilon dsds'}{r^2}$$

Sostituendo $\frac{1}{2}$ a m in questa equazione, e moltiplicando i due membri di quella che risulta da questa sostituzione con $-ii'$, si ha il valore dell'azione di due elementi di fili conduttori trasformati, così

$$-\frac{2ii'dd'\sqrt{r}}{\sqrt{r}}=\frac{1}{2}ii'dd'\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\cdot\frac{ii'\cos\varepsilon dsds}{r^2}=\frac{1}{2}ii'dsds'\left(\frac{\cos\varepsilon}{r^2}+r\frac{d^2\frac{1}{r}}{dsds'}\right)$$

Ho già trovato in un altro modo questa espressione della forza che esercitano l'uno sull'altro due elementi di fili conduttori; si può impiegare, per semplificare i calcoli, solo quando i conduttori sono rettilinei, poiché è solo allora che l'angolo ε è costante e noto; ma in questo caso, essa fornisce nel modo più semplice i valori delle forze e dei momenti di rotazione che risultano dall'azione reciproca di due conduttori di questo tipo. Se ho impiegato in questa Memoria altri metodi per calcolare questi valori, è perché nel momento in cui l'ho scritta non conoscevo ancora questa trasformazione della mia formula.

III. Sulla direzione della retta indicata in questa Memoria sotto il nome di direttrice dell'azione elettrodinamica in un punto dato, quando questa azione è quella di un circuito chiuso e piano le cui dimensioni sono tutte piccole.

La retta che ho chiamato *direttrice dell'azione elettrodinamica in un punto dato* è quella che forma con i tre assi degli angoli i cui coseni sono rispettivamente proporzionali alle tre quantità A, B, C i cui valori divengono

$$A=\lambda\left(\frac{\cos\xi}{r^3}-\frac{3qx}{r^5}\right)$$

$$B = \lambda \left(\frac{\cos \eta}{r^3} - \frac{3qy}{r^5} \right)$$

$$C = \lambda \left(\frac{\cos \zeta}{r^3} - \frac{3qz}{r^5} \right)$$

quando si sostituisce a n il numero 2 a cui n è uguale; se quindi si suppone il piccolo circuito di una forma qualunque posto come nella fig. 14, cioè che dopo aver posto l'origine A delle coordinate nel punto dato, si prende per asse z la perpendicolare AZ abbassata dal punto A sul piano del piccolo circuito, e per il piano xz quello che passa per questa perpendicolare e per il centro di inerzia O dell'area LMS al quale si riferiscono le x, y, z che entrano nei valori di A, B, C, è evidente che si avrà $y = 0$, $q = z$, $\xi = \eta = \frac{\pi}{2}$, $\zeta = 0$ e questi valori si ridurranno di conseguenza a

$$A = -\frac{3\lambda xz}{r^5} \quad B = 0 \quad C = \lambda \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) = \frac{\lambda\left(x^2 - 2z^2\right)}{r^5}$$

poiché $r^2 = x^2 + z^2$. Essendo B nullo, la direttrice AE è necessariamente nel piano xz determinato come detto. La tangente dell'angolo EAX che essa forma con l'asse x è evidentemente uguale a $\frac{C}{A}$, cioè $\frac{2z^2 - x^2}{3xz}$; e siccome quello dell'angolo OAX vale $\frac{z}{x}$, si troverà per il valore della tangente di OAE

$$\tan OAE = \frac{\frac{z}{x} - \frac{2z^2 - x^2}{3xz}}{1 + \frac{2z^2 + x^2}{3x^2}} = \frac{(z^2 + x^2)\, x}{(2x^2 + 2z^2)\, z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{z} = \frac{1}{2} \tan COA$$

da cui segue che se si prende $OB = \frac{1}{3} OA$, e si innalza su OA dal punto B un piano perpendicolare a AO che incontra in D la normale OC al piano del piccolo circuito, la retta ADE tracciata dai punti A, D sarà la direttrice dell'azione esercitata nel punto A dalla corrente elettrica che lo percorre, poiché si avrà

$$AB = 2OB \quad \tan BDA = 2 \tan BDO$$

e

$$\tan OAE = \cot BDA = \frac{1}{2} \cot BDO = \frac{1}{2} \tan COA$$

Questa costruzione dà nel modo più semplice la direzione della retta AE lungo la quale abbiamo visto che il polo di un magnete posto in A sarebbe portato dall'azione di questa corrente. Vi è da notare che essa è posta rispetto al piano LMS del piccolo circuito che descrive, come la direzione dell'ago di inclinazione lo è in generale rispetto all'equatore magnetico; poiché il punto O è considerato come il centro della terra, il piano OAC come quello del meridiano magnetico, e la retta AE come la direzione dell'ago di inclinazione, è evidente che l'angolo OAE compreso tra il raggio terrestre OA e la direzione AE dell'ago magnetizzato è il complementare dell'inclinazione, e che l'angolo COA è il complementare della latitudine magnetica LOA; l'equazione precedente diviene così

$$\cot .inclinaz = \frac{1}{2} \cot .latit$$

o

$$\tan .inclinaz = 2 \tan .latit$$

IV. Sul valore della forza che un conduttore angolare indefinito esercita sul polo di un piccolo magnete.

Sia che si consideri il polo B (fig. 34) del piccolo magnete AB come l'estremità di un solenoide elettrodinamico o come una molecola magnetica, si è d'accordo, nei due modi di vedere, riguardo all'espressione della forza esercitata su questo polo da ogni elemento del conduttore angolare

CMZ: si conviene in genere che abbassando dal punto B su uno dei suoi rami $C\mu M$ prolungata verso O la perpendicolare $BO = b$, ponendo $O\mu = s$, $BM = a$, $B\mu = r$, l'angolo $B\mu M = \theta$, l'angolo $CMH = BMO = \varepsilon$, e indicando con ρ un coefficiente costante, la forza esercitata sul polo B dall'elemento ds posto in μ è uguale a

$$\frac{\rho \sin\theta ds}{r^2}$$

che si tratta di integrare da $s = OM = a\cos\varepsilon$ fino a $s = \infty$, o, analogamente, da $\theta = \varepsilon$ fino a $\theta = 0$: ma, nel triangolo $BO\mu$, il cui lato $OB = a = a\sin\varepsilon$, si ha

$$r = \tfrac{a\sin\varepsilon}{\sin\theta} \quad s = a\sin\varepsilon\cot\theta \quad ds = -\tfrac{a\sin\varepsilon d\theta}{\sin^2\theta} \quad \tfrac{ds}{r^2} = -\tfrac{d\theta}{a\sin\varepsilon}$$

così

$$\frac{\rho\sin\theta ds}{r^2} = -\frac{\rho\sin\theta d\theta}{a\sin\varepsilon}$$

il cui integrale è

$$\frac{\rho}{a\sin\varepsilon}(\cos\theta + C)$$

o, prendendolo tra i limite determinati sopra

$$\frac{\rho\,(1-\cos\varepsilon)}{a\sin\varepsilon} = \frac{\rho}{a}\tan\frac{1}{2}\varepsilon$$

valore che basta raddoppiare per avere la forza esercitata sul polo B dal conduttore angolare indefinito CMZ; questa forza, in ragione inversa di $BM = a$, è quindi, per uno stesso valore di a, proporzionale alla tangente della metà dell'angolo CMH, e non a questo stesso angolo, sebbene si pretende che il valore

$$\frac{\rho\sin\theta ds}{r^2}$$

della forza esercitata dall'elemento ds sul polo B, sia stata trovata *analizzando con il calcolo* l'ipotesi che la forza prodotta da filo conduttore CMZ fosse proporzionale all'angolo CMH. Non possiamo dubitare che ci sia qualche errore in questo calcolo; ma sarebbe più curioso conoscerlo, che puntare a determinare il valore di un differenziale da quello dell'integrale definito che risulti tra limiti dati, che nessun matematico sembra, fino ad ora, aver creduto possibile.

Siccome non si può, nella pratica, rendere i rami MC, MZ conduttori angolari realmente infiniti, né allontanare le parti del filo di cui è formato che mettono questi rami in contatto con le due estremità della pila, a una distanza molto grande dal piccolo magnete AB perché non abbiano su di esso alcuna azione, si deve, a rigore, considerare il valore ottenuto solo come una approssimazione. Al fine di dover verificare con l'esperienza un valore esatto, bisogna calcolare quella che esercita sul polo B del piccolo magnete un filo conduttore $PSRMTSN$, le cui parti SP, SN, che comunicano con le due estremità della pila, sono rivestite di seta e attorcigliate assieme, come si vede in SL, fin vicino alla pila, di modo che le azioni che esse esercitano si annullino reciprocamente, e la cui parte restante formi una losanga $SRMT$ posta in modo che la direzione della diagonale SM di questa losanga passi per il punto B. Per questo, conservando le denominazioni precedenti e facendo l'angolo $BRM = \theta_1$, l'angolo $BRO' = \theta_1^{'}$, la distanza $BS = a'$ e la perpendicolare $BO' = b' = -a'\sin\varepsilon$ poiché l'angolo $BSO' = -\varepsilon$, si vedrà facilmente che l'azione della parte RS del filo conduttore sul polo B è uguale a

$$-\frac{\rho\left(\cos\varepsilon - \cos\theta_1^{'}\right)}{b'}$$

siccome, poiché $b = a\sin\varepsilon$, si sarebbe trovato

$$\frac{\rho\,(\cos\theta_1 - \cos\varepsilon)}{b}$$

per quella che esercita la parte MR sullo stesso polo B, prendendo l'integrale precedente da $\theta = \varepsilon$ fino a $\theta = \theta_1$.

Riunendo queste due espressioni e raddoppiando la somma, si ha, per l'azione di tutto il contorno della losanga $MRST$,

$$2\rho\left(\frac{\cos\theta_1}{b} - \frac{\cos\varepsilon}{b} + \frac{\cos\theta_1'}{b'} - \frac{\cos\varepsilon}{b'}\right)$$

Questa espressione può assumere un'altra forma che si ottiene riferendo la posizione dei quattro angoli della losanga a due assi BX, BY tracciati dal punto B parallelamente a questi lati e che li incontrano nei punti D, E, F, G; se si pone $BD = BF = g$, $BE = BG = h$, si avrà

$$b = BO = g\sin 2\varepsilon \quad b' = BO' = h\sin 2\varepsilon$$

$$\cos\theta_1 = \frac{OR}{BR} = \frac{h + g\cos 2\varepsilon}{\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh\cos 2\varepsilon}}$$

$$\cos\theta_1' = \frac{O'R}{BR} = \frac{g + h\cos 2\varepsilon}{\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh\cos 2\varepsilon}}$$

e per mezzo di questi valori, quello della forza esercitata sul polo B diverrà

$$\begin{aligned} &2\rho\left(\frac{h+g\cos 2\varepsilon}{g\sin 2\varepsilon\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos 2\varepsilon}} + \frac{g+h\cos 2\varepsilon}{h\sin 2\varepsilon\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos 2\varepsilon}} - \frac{\cos\varepsilon}{g\sin 2\varepsilon} - \frac{\cos\varepsilon}{h\sin 2\varepsilon}\right) = \\ &= \rho\left(\frac{2\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos 2\varepsilon}}{gh\sin 2\varepsilon} - \frac{1}{g\sin\varepsilon} - \frac{1}{h\sin\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

sostituendo negli ultimi due termini $\sin 2\varepsilon$ con il suo valore $2\sin\varepsilon\cos 2\varepsilon$.

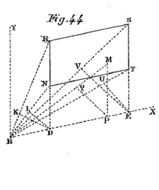
Abbassiamo ora dal punto D le perpendicolari DI, DK sulle rette BM, BR: la prima sarà evidentemente uguale a $g\sin\varepsilon$ e la seconda si otterrà facendo attenzione che moltiplicandolo per $BR = \sqrt{g^2 + h^2 + 2gh\cos 2\varepsilon}$, si ha un prodotto uguale al doppio della superficie del triangolo BDR, cioè $gh\sin 2\varepsilon$, di modo che indicando con $p_{1,1}$ e $p_{1,2}$ questa perpendicolari, viene

$$\frac{1}{p_{1,1}} = \frac{1}{g\sin 2\varepsilon} \quad \frac{1}{p_{1,2}} = \frac{\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos 2\varepsilon}}{gh\sin 2\varepsilon}$$

abbassando dal punto B le due perpendicolari EU, EV sulle rette BT, BS e rappresentandole con $p_{2,1}$e $p_{2,2}$, la prima sarà uguale a DK a causa dell'uguaglianza dei triangolo BDR, BET, e la seconda avrà per valore $h\sin\varepsilon$, di modo che l'espressione della forza esercitata dal contorno della losanga $MRST$ sul polo B si potrà scrivere così:

$$\rho\left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}}\right)$$

Sotto questa forma essa si applica non solo a una losanga di cui una diagonale è diretta in modo da passare per il punto B, ma a un parallelogrammo qualsiasi $NRST$ (fig. 44) il cui perimetro è percorso da una corrente elettrica che agisce sul polo di un magnete posto nel piano di questo parallelogrammo.



Risulta, infatti, da quanto detto, che l'azione di $NRST$ sul polo B è la stessa come se tutti gli elementi $d^2\lambda$ di cui si compone la sua superficie agissero su questo polo con una forza uguale a $\frac{\rho d^2\lambda}{r^3}$; da cui segue che chiamando x e y le coordinate riferite agli assi BX, BY, e all'origine B di un punto qualsiasi M dell'area del parallelogramma questo dà

$$d^2\lambda = dxdy \sin 2\varepsilon \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos 2\varepsilon}$$

si avrà, per la forza totale impressa al polo B,

$$\rho \sin 2\varepsilon \iint \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + 2xy\cos 2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$$

Abbiamo visto che l'integrale indefinito di

$$\frac{dsds'}{(a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss'\cos\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$$

è

$$\frac{1}{a\sin\varepsilon} \arctan \frac{ss'\sin^2\varepsilon + a^2\cos\varepsilon}{a\sin\varepsilon\sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss'\cos\varepsilon}}$$

o

$$-\frac{1}{a\sin\varepsilon} \arctan \frac{a\sin\varepsilon\sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss'\cos\varepsilon}}{ss'\sin^2\varepsilon + a^2\cos\varepsilon}$$

eliminando la costante $\frac{\pi}{2}$. Quando a è nullo, questa quantità si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$; ma siccome l'arco deve essere allora sostituito dalla sua tangente, il fattore nullo $a\sin\varepsilon$ scompare, e si ha

$$\iint \frac{dsds'}{(s^2 + s'^2 - 2ss'\cos\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss'\cos\varepsilon}}{ss'\sin^2\varepsilon}$$

che è facile da verificare mediante differenziazione. Se ne conclude immediatamente che l'espressione della forza che calcoliamo, considerata come un integrale indefinito, è

$$-\frac{\rho\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos 2\varepsilon}}{xy\sin^2\varepsilon} = -\frac{\rho}{p}$$

indicando con p la perpendicolare PQ abbassata dal punto P su BM, poiché il doppio dell'area del triangolo BPM è a sua volta uguale a $p\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos 2\varepsilon}$ e a $xy\sin 2\varepsilon$, ciò che dà

$$\frac{1}{p} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos 2\varepsilon}}{xy\sin^2 2\varepsilon}$$

Rimane solo ora da calcolare i valori che assume questo integrale indefinito ai quattro vertici N, R, T, S del parallelogrammo, e a sommarli con i segni convenzionali; continuando ad indicare rispettivamente con $p_{1,1}, p_{1,2}, p_{2,1}, p_{2,2}$ le perpendicolari DI, DK, EU, EV, è evidente che si ottiene così per il valore della forza cercata

$$\rho\left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}}\right)$$

La direzione perpendicolare al piano del parallelogrammo $NRST$ lungo la quale il polo di un magnete posto in B è portato dall'azione della corrente elettrica che percorre il contorno di questo parallelogrammo, è la direttrice dell'azione elettrodinamica che esercita nel punto B: da cui segue che se si avesse in questo punto un elemento di corrente elettrica posto nel piano del parallelogrammo, formerebbe un angolo retto con la direttrice, e che così l'azione di questa corrente sull'elemento sarebbe una forza posta in questo piano, perpendicolare alla direzione dell'elemento, e uguale a quella che la stessa corrente eserciterebbe sul polo di un magnete posto nel punto B moltiplicata per un rapporto costante, che è qui quello di ρ con $\frac{1}{2}ii'ds$, chiamando questo elemento ds; di modo che la forza così diretta che agirebbe sull'elemento avrebbe per valore

$$\frac{1}{2}ii'ds\left(\frac{1}{p_{1,2}}+\frac{1}{p_{2,1}}-\frac{1}{p_{1,1}}-\frac{1}{p_{2,2}}\right)$$

Quando un elemento posto in B non è nel piano del parallelogrammo, ma forma con questo piano un angolo uguale a ω, si può sostituirlo con due elementi della stessa intensità, uno in questo piano, l'altro che gli è perpendicolare: essendo l'azione della corrente del parallelogrammo su quest'ultimo nulla, si deve tener conto solo di quella che esercita sul primo; è evidentemente nel piano del parallelogrammo, perpendicolare all'elemento e uguale a

$$\frac{1}{2}ii'ds\cos\omega\left(\frac{1}{p_{1,2}}+\frac{1}{p_{2,1}}-\frac{1}{p_{1,1}}-\frac{1}{p_{2,2}}\right)$$