ARITMETICA UNIVERSALE

di Isaac Newton

Traduzione dal Latino in Francese di Noel Beaudeax
Traduzione dal francese: prof. Gianluigi Trivia

Parte 1

TRATTATO DI ARITMETICA
Composizione e Scomposizione Aritmetiche

I calcoli si eseguono o con i Numeri, come nell'Aritmetica Comune, o con lettere come nell'analisi. Sono entrambi fondati sugli stessi principi, e mira allo stesso risultato, l'Aritmetica, il Definito e il Particolare, l'algebra, l'Indefinito e il Generale. Ma in quest'ultimo metodo, quasi tutti gli enunciati, e in particolare le conclusioni, possono essere chiamati Teoremi.

Ma l'Algebra è particolarmente eccellente in questo, cioè dove nell'Aritmetica i problemi sono risolti solo procedendo dalle quantità assegnate alle quantità cercate, l'Algebra procede, in modo inverso, dalle quantità cercate quando sono date, alle quantità date quando sono cercate, per giungere ad una conclusione o Equazione, dalla quale si può ottenere la quantità cercata. E con questo metodo si risolvono i problemi più difficili, laddove la risoluzione sarebbe cercata invano nella comune Aritmetica. L'*Aritmetica* in tutte le sue operazioni si serve dell'*Algebra*, per determinare una perfetta scienza del calcolo; e pertanto tratterò entrambe nella loro interazione.

Chiunque vuole occuparsi di questa scienza, deve prima conoscere il significato di termini e note, [o segni] e conoscere le operazioni fondamentali, cioè *Addizione*, *Sottrazione*, *Moltiplicazione* e *Divisione*; *Estrazione di Radice, Riduzione delle Frazioni,* e *Quantità Radicali*; e *i Metodi per ordinare i termini delle Equazioni*, e d*i determinazione delle quantità incognite* (che possono essere una o più). Poi procedere ad esercitare queste operazioni, impostando Problemi con le Equazioni; e, infine, valutare Natura e Soluzioni delle Equazioni.

Notazioni; Significato di alcuni termini; impiego dei segni. Per *Numero* si intende, meno una raccolta di più unità, che un rapporto astratto di una quantità qualsiasi con un'altra della stessa specie, che si considera come l'unità. Il numero è di tre specie, *l'intero*, il *frazionario* e l'assurdo. L'intero è misurato dall'unità; il frazionario da un sottomultiplo dell'unità; il sordo è incommensurabile con l'unità.

I segni dei numeri interi sono $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Tutti conoscono questi caratteri: tutto il mondo conosce il modo in cui li si combina per esprimere tutti i numeri interi possibili: ma proprio come un numero , al primo posto a sinistra dell'unità, si indicano le decine di unità, al secondo, delle centinaia, al terzo, delle migliaia, ecc, analogamente un numero, al primo posto a destra dell'unità indica i decimi di questa unità, al secondo i centesimi, al terzo i millesimi ecc. Chiamiamo questi ultimi numeri *frazioni decimali*, poiché decrescono sempre in ragione decupla; e per distinguere gli interi dai decimali, li si separa con una virgola, o un punto, o una linea. Così il numero $732,569$ o 732.569 o anche $732|569$ sono tre modi diversi di esprimere lo stesso numero, che è settecento trentadue unità, cinque decimi, sei centesimi e nove millesimi. Così il numero $57104,2083$ indica cinquantasette mila centoquaranta unità, due decimi, otto millesimi, e tre decimillesimi parti dell'unità. Il numero $0,064$ indica sei centesimi e quattro millesimi.

Parleremo anche di numeri assurdi e di altre frazioni.

Quando si vogliono trattare le quantità, sia note, sia incognite, come indeterminati, non è possibile esprimerli con numeri, e li si indica con lettere dell'alfabeto. Si impiegano le prime $a, b, c, d, ecc.$ per le note e le ultime z, y, x, ecc per le incognite. Alcuni autori che esprimono le note con le consonanti, e le incognite con le vocali.

Sono dette *quantità positive* quelle maggiori di zero, e *negative*, quelle minori di zero. Nella vita civile, si potrebbe dire che un bene è una quantità positiva, e un debito una quantità negativa. Così nel moto di un corpo in avanti, potrebbe chiamarsi positivo, e il moto all'indietro negativo. Analogamente in Geometria, se si chiamano positive le linee che vanno in un verso, allora le linee tracciate al contrario saranno negative.

Una quantità negativa è indicata con il segno $-$; il segno è per una positiva; e $\mp$ indica un segno dubbio, e $\pm$ uno dubbio contrario.

Per esempio, (Fig. 1) se AB è tracciato verso destra e BC verso sinistra, e sia considerato AB positivo, allora BC sarà negativo, poiché tende a diminuire AB che si trova ridotto ad AC, o anche a zero, se il punto C cade sul punto A, o a un valore minore di zero, se BC fosse maggiore di AB dal quale va sottratto.

Si usa far precedere le quantità negative dal segno $-$, e le positive dal segno . I segni $\mp$ o $\pm$ sono arbitrari, ma il primo è sempre il contrario del secondo.

In un insieme di numerose quantità il segno davanti ad una di esse, significa che la si deve sommare, e il segno $-$ che si deve sottrarre. Di questi due segni, il primo si esprime con *più* e il secondo con *meno.* Pertanto $2\ 3$, o 2 più 3 indica la somma dei due numeri 2 e 3, cioè 5; e $5 - 3$, o 5 meno 3, denota la differenza che si ottiene sottraendo 3 da 5, cioè 2; e $-5\ 3$ è la differenza che si ottiene sottraendo 5 da 3, che è -2; e $6 - 1\ 3$ fa 8; infine $a\ b$ è la somma delle quantità a e b, e $a - b$ la differenza che si ottiene sottraendo b da a; e $a - b\ c$ è la somma di questa differenza e della quantità c.

Ad esempio, se $a\ \ 5$, $b\ \ 2$ e $c\ \ 8$, allora $a\ b$ sarà 7, e $a - b\ \ 3$, e $a - b\ c$ sarà 11. Così $2a\ 3a$ è $5a$, e $3b - 2a - b\ 3a$ è $2b\ a$; $3b - b$ vale $2b$, e $-2a\ 3a$ vale a, pertanto la somma è $2b\ a$. Queste notazioni e $-$ sono dette *segni.* Quando una quantità non è preceduta da alcun segno, si sottintende sempre il segno .

Moltiplicazione. propriamente detta, è quella che è fatta con numeri interi. È un'operazione con la quale si cerca una nuova quantità che contiene il moltiplicando, tante volte quanto il moltiplicatore contiene l'unità. Ma avendo bisogno di un'espressione più corretta, si è convenuto di chiamare Moltiplicazione, un'operazione simile che si fa con i numeri incommensurabili o frazionari, e con la quale si cerca una nuova quantità che stia al moltiplicando, nello stesso rapporto che esiste tra il moltiplicatore e l'unità. La moltiplicazione non si fa solo con i numeri *astratti*, ma anche con quantità *concrete*, come linee, superfici, moti, pesi, ecc.

Infatti, tutte queste quantità hanno con una quantità nota della loro specie, prese per unità, rapporti che si possono esprimere con numeri. Ad esempio, se si deve moltiplicare A per una linea di 12 piedi, supponendo che l'unità sia una linea di 2 piedi, il prodotto sarà $6A$; cioè, quanto si otterrebbe moltiplicando A per il numero astratto 6. In effetti $6A$ sta ad A come la linea di 12 piedi sta quella di 2 piedi, presa per unità.

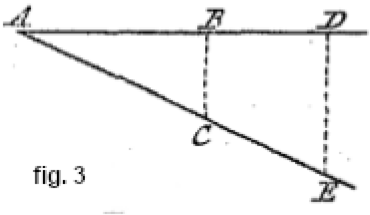


fig. 3

Così, quando si devono moltiplicare due linee, AC e AD (Fig.3), si prenderà AB come unità; si uniranno i punti B e C con la retta BC, si traccerà DE parallela ad BC, e AE sarà il prodotto di questa moltiplicazione; poiché AE sta a AD come AC all'unità AB. Inoltre, la convenzione ha ottenuto che la generazione di una superficie, mediante una linea che si muove ad angolo retto attorno ad un'altra, si chiamasse *moltiplicazione di queste linee*, poiché sebbene una linea, comunque moltiplicata, non possa mai produrre una superficie, e di conseguenza questa generazione della superficie mediante linee, sia molto diversa da una moltiplicazione, tuttavia poiché esse si assomigliano: e si concorda che il numero di unità in una moltiplicato per il numero di unità dell'altra, dà un numero astratto contenente tante volte l'unità astratta, quante la superficie compresa tra le due linee, conterrà l'unità di superficie, purché si intenda per unità di superficie, ciò che comunemente si intende; un quadrato di cui ogni lato è uguale all'unità lineare.

Ad esempio, se la linea retta AB ha 4 unità, e AC ne ha 3, allora il rettangolo AD conterrà quattro volte tre, o 12 unità quadrate, come si può vedere dalla figura sottostante.

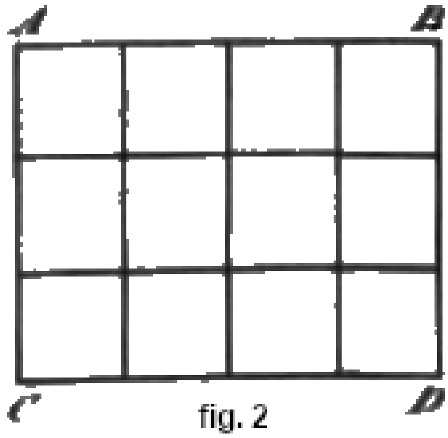


fig. 2

E vi è una simile analogia per i solidi, che si considerano come il prodotto della superficie per una linea. Inversamente, i termini *contenuto*, *rettangolo*, *quadrato*, *cubo*, *dimensione*, e altri che appartengono alla Geometria, sono frequentemente impiegati nell'Aritmetica; poiché non si intende sempre con *quadrato*, o *rettangolo*, o quantità di due dimensioni, una superficie, ma molto spesso una quantità che è il prodotto di altre due, o una linea che è il prodotto di altre due linee. Intendiamo pure con *cubo* o *parallelepipedo*, o *quantità di tre dimensioni*, il prodotto di due moltiplicazioni successive.

Un numero posto immediatamente prima di una lettera, denota quante volte bisogna sommare questa lettera a se stessa. Così $2a$ indica due a, $3b$ tre b, $15x$ quindici x.

Due o più lettere di seguito, senza interposizione di segno, indicano un prodotto o quantità data dalla moltiplicazione di tutte le lettere insieme. Pertanto ab indica il prodotto di a per b, e abx quello di a per b e per x. Ad esempio, se a è uguale a 2, e b uguale a 3 e x uguale a 5, allora ab sarà 6, e abx 30.

Talvolta si pone tra le quantità che si moltiplicano il segno $\times$, cioè che le quantità che sono da un lato di questo segno, devono essere moltiplicate per quelle che stanno nell'altro. Così 3×5, o 3 moltiplicato 5 significano la stessa cosa e sono entrambe uguali a 15. Ma l'uso principale di questo simbolo, si ha per indicare la moltiplicazione tra quantità complesse. Così, se $y - 2b$ si deve moltiplicare per $y\ b$, si traccia sui termini di ogni fattore una piccola linea, e si scrive $\overline{y - 2b} \times \overline{y\ b}$.

La DIVISIONE. è quella che è utilizzata per i numeri interi e con la quale si cerca una nuova quantità più piccola del dividendo, tante volte quante l'unità è essa stessa più piccola del divisore. Ma, per analogia, si usa chiamare divisione, ogni operazione con la quale si cerca una nuova quantità che stia al dividendo in un rapporto qualunque, purché sia lo stesso di quello dell'unità al divisore, potendo questo divisore essere un numero frazionario o assurdo, o altra quantità di altro tipo. Così, (fig. 3) per dividere la linea AE con la linea AC, essendo AB presa come unità, si deve tracciare ED parallela a CB, e AD sarà il quoziente. Se si ha un rettangolo di una superficie nota, e si vuole dargli per base una linea arbitraria, si troverà, con una operazione analoga, l'altezza che si dovrà assegnare, e questa operazione è ancora detta divisione.

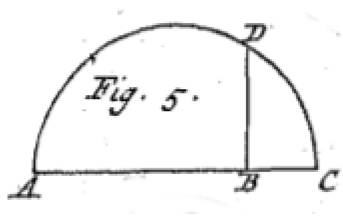
Se una quantità è posta sotto un'altra, e separata da una piccola linea, l'insieme di queste due quantità indica un quoziente, o il risultato della divisione tra la quantità posta sopra con quella posta sotto. Pertanto $\frac{6}{2}$ indica una quantità che si ottiene dividendo 6 per 2, che è 3; e $\frac{4}{8}$ una quantità che si ottiene dalla divisione di 4 con 8, che è un'ottava parte del numero 4. E $\frac{a}{b}$ è il risultato della divisione di a per b. Se, ad esempio, a 15 e b 3, allora $\frac{a}{b}$ varrà 5. Analogamente allora $\frac{ab-bb}{ax}$ indica la quantità ottenuta dividendo $ab - bb$ per a x; e così per altri casi.

Questi tipi di quantità sono dette *Frazioni*, e la parte superiore è detta *Numeratore*, e quella inferiore *Denominatore*.

Sebbene quantità poste immediatamente di seguito le une alle altre, annunciano una moltiplicazione, tuttavia se un numero intero precede un numero frazionario, senza interposizione di segno, ciò indica un'addizione di entrambi; allora $3\,\frac{1}{2}$ indica tre più una metà.

Se una quantità è moltiplicata per se stessa, il numero di volte in cui il prodotto è eseguito, per brevità, è posto in alto alla lettera. Allora invece di aaa si può scrivere a^3, per $aaaa$ a^4, per $aaaaa$ a^5, e per $aaabb$ scriviamo a^3bb o a^3b^2; se a 5 e b 2, allora a^3 sarà $5 \times 5 \times 5$ o 125, e a^4 sarà $5 \times 5 \times 5 \times 5$ o 625, e a^3b^2sarà $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$ o 500. Notiamo qui, che un numero scritto tra due lettere appartiene sempre alla prima; così il numero 3 nella quantità a^3bb, non indica che bb va preso tre volte, ma che a è moltiplicato tre volte per se stesso. Si noti, inoltre, che in una quantità, il numero di fattori che si moltiplicano tra loro annuncia sempre il numero di dimensioni, o il grado di una sua potenza, e il numero che si scrive sopra questa quantità, è detto indicatore, o esponente della potenza o delle dimensioni. Così aa è (una quantità) di due dimensioni, o della seconda potenza, e a^3 della terza, quando il numero 3 è in alto. aa è anche detto un Quadrato, a^3 un Cubo, a^4 un [Biquadrato] o QuadratoQuadrato, a^5 un Quadrato-Cubo, a^6 un Cubo-Cubo, a^7 un Quadrato-Quadrato-Cubo, e così via. E la quantità a, dalla moltiplicazione della quale con se stessa è generata la potenza, è detta Radice di queste potenze. Ad esempio, a è la radice quadrata di aa, la radice cubica di aaa, ecc.

Ma quando una radice, moltiplicata per se stessa, restituisce un quadrato; il quadrato moltiplicato per la radice restituisce un cubo, ecc. Così, dalla definizione di moltiplicazione, si vede che vi è uno stesso rapporto tra l'unità e la radice come tra la radice e il quadrato, come tra il quadrato e il cubo, ecc. Pertanto, la radice quadrata di una certa quantità, è sempre medio proporzionale tra l'unità e la quantità stessa; e la radice cubica è la prima di due medi proporzionali tra l'unità e questa e questa stessa quantità; e la radice quarta è la prima dei tre medi proporzionali, e così via. Si potranno quindi riconoscere le radici per due caratteristiche; moltiplicando se stesse, producono le potenze e sono termini medi tra queste potenze e l'unità. Pertanto, 8 è la radice quadrata del numero 64, e 4 la radice cubica di quest'ultimo, è quindi evidente, poiché 8×8, e $4 \times 4 \times 4$ fanno 64, o poiché 1 8 8 64, e 1 4 4 16 16 64; pertanto, se deve essere estratta la radice quadrata di una linea, come AB, bisogna prolungare la linea AB di una quantità BC come unità e su AC, come diametro, descrivere un semicerchio, e innalzando da B la perpendicolare, che interseca la semicirconferenza in D; allora BD sarà la radice cercata, poiché è media proporzionale tra AB e l'unità BC (fig. 5).



Per indicare la radice di una quantità, la si fa precedere dal simbolo $\sqrt{\ }$ per una radice quadrata, e $\sqrt[3]{\ }$ se la radice è cubica, e $\sqrt[4]{\ }$ per una radice biquadratica, ecc. Pertanto $\sqrt{64}$ indica 8, e $\sqrt[3]{64}$ è 4; $\sqrt{aa}$ vale a; e $\sqrt{ax}$ indica la radice quadrata di ax; e $\sqrt[3]{4ax^2}$ la radice cubica di $4ax^2$, di modo che se a vale 3 e x 12, allora $\sqrt{ax}$ sarà $\sqrt{36}$, o 6; e $\sqrt[3]{4ax^2}$ sarà $\sqrt[3]{1728}$, o 12. E quando questa radice non può essere estratta, le quantità sono dette *irrazionali*, come $\sqrt{ax}$; o *numeri irrazionali*, come $\sqrt{12}$.

Vi sono alcuni autori, che per indicare lun quadrato fanno uso del caratrere q; di c per indicare un cubo, qq per il biquadrato, e qc per il quadrato-cubo, ecc. Così per esprimere il quadrato di A, scriveranno Aq; per il suo cubo Ac; per la sua quarta potenza Aqq; e per la radice cubica di $ab^2 - x^3$, scriveranno $\sqrt[c]{sb^2 - x^3}$. Si impiegano ancora altri simboli, ma il loro uso è pressoché abbandonato.

Il segno significa che le quantità che separa sono uguali. Così x b indica che x è uguale a b. La notazione significa che le quantità da entrambe le parti sono proporzionali. Pertanto a b c d significa che a sta a b come c sta a d; e a b e e d f significa che a, b, c stanno tra loro rispettivamente come c, d, f, stanno tra loro; o che a, b, e e c, d, f stanno tra loro nello stesso rapporto.

L'interpretazione di ogni segno che può essere composto da questi, sarà facilmente riconosciuta per analogia. Pertanto $\frac{3}{4}a^3bb$ indica che bisogna prendere i tre quarti di a^3bb, e $3\frac{a}{c}$ significa il triplo di $\frac{a}{c}$, e $7\sqrt{ax}$ sette volte $\sqrt{ax}$, infine $\frac{a}{b}x$ indica il prodotto di x per $\frac{a}{b}$; e $\frac{5ee}{4age}z^3$ indica il prodotto ottenuto moltiplicando z^3 per $\frac{5ee}{4age}$, che è il quoziente che si ottiene dalla divisione tra $5ee$ e $4a\ \ ge$; e $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$, che è ottenuto moltiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$, e $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ il quoziente che si ottiene dalla divisione di $7\sqrt{ax}$ con c; e $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a\sqrt{cx}}$ il quoziente della divisione di $8a\sqrt{cx}$ con la somma delle quantità $2a\ \ \sqrt{cx}$. E quindi $\frac{3axx-x^3}{ax}$ denota il quoziente ottenuto dalla divisione della differenza $3axx-x^3$ con la somma $a\ \ x$, e $\frac{\sqrt{3axx-x^3}}{ax}$ denota la radice di quel quoziente, e $\overline{2a\ \ 3c}\frac{\sqrt{3axx-x^3}}{ax}$ denota il prodotto della moltiplicazione di quella radice con la somma $2a\ \ 3c$. Anche $\sqrt{\frac{1}{4}aa\ \ bb}$ indica la radice della somma delle quantità $\frac{1}{4}aa$ e bb, e $\sqrt{\frac{1}{2}a\ \ \sqrt{\frac{1}{4}aa\ \ bb}}$ denota la radice della somma delle quantità $\frac{1}{2}a$ e $\sqrt{\frac{1}{4}aa\ \ bb}$, e $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a\ \ \sqrt{\frac{1}{4}aa\ \ bb}}$ indica quella radice moltiplicata per $\frac{2a^3}{aa-zz}$, e così per altri casi.

Ma si noti, che nelle quantità complesse di questa natura, non vi è alcuna necessità di prestar loro una particolare attenzione, o di tener presente il significato di ogni lettera; sarà sufficiente in generale per comprendere, che $\sqrt{\frac{1}{2}a\ \ \sqrt{\frac{1}{4}aa\ \ bb}}$ significa la radice della somma di $\frac{1}{2}a\ \ \sqrt{\frac{1}{4}aa\ \ bb}$, o qualunque cosa la somma possa essere, quando numeri o linee sono sostituite nella radice alle lettere. E quindi che $\frac{\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}aabb}}{a-\sqrt{ab}}$ significa il quoziente che si ottiene dalla divisione della quantità $\sqrt{\frac{1}{2}a\ \ \sqrt{\frac{1}{4}aa\ \ bb}}$ per la quantità $a-\sqrt{ab}$, così come se queste quantità fossero semplici e note, sebbene si possa ignorare cosa siano, e non prestare una particolare attenzione alla struttura o significato di ognuna delle loro parti.

ADDIZIONE

L'addizione tra numeri, quando non sono troppo complicati, è un'operazione che non ha bisogno di regole. Infatti è evidente a prima vista che 7 e 9, o 7 9, fa 16, e 11 15 dà 26. Ma quando i numeri da sommare sono più composti, si risolve scrivendo i numeri gli uni sotto gli altri e facendo la somma di ognuna delle colonne. Ad esempio, se si deve fare la somma dei numeri 1357 e 172, bisogna scrivere 172 sopra o 1357, così che le unità 2 di 172, sia esattamente incolonnata con le unità 7 di 1357; e le sue 7 decine nella stessa colonna delle decine 5, e le centinaia sotto le centinaia, cioè 1 sotto le centinaia dell'altro, cioè 3. Allora iniziando dalla parte destra, 2 e 7 fa 9, che scrivo sotto; poi 7 e 5 fa 12; la cifra 2 la scrivo sotto e tengo a mente l'altra, cioè 1, che aggiungo alle due successive, cioè 1 e 3; poi 1 e 1 fa 2, che aggiunto a 3 dà 5, che scrivo sotto, e rimarrà solo 1, la prima figura della riga superiore del numero, che deve pure essere trascritta sotto; e poi si ha l'intera somma, cioè 1529.

1	3	5	7
	1	7	2
1	5	2	9

Quindi, per sommare i numeri 87899 13403 885 12920, scriveteli uno sotto l'altro, così che le unità formino una colonna, le decine un'altra, le centinaia una terza, e il posto delle migliaia una quarta, e così via. Allora dico, 5 e 3 fa 8, e 8 9 fa 17; poi scrivo 7 sotto, e l'1 lo aggiungo al valore successivo, e 1 e 8 fa 9, 9 2 fa 11, e 11 9 fa 20; e avendo scritto lo 0 sotto, dico ancora come prima, 2 e 8 fa 10, e 10 9 fa 19, e 19 4 fa 23, e 23 8 fa 31; poi tenendo a mente 3 scrivo sotto 1 come prima, e dico ancora, 3 1 fa 4, 4 3 fa 7, e 7 7 fa 14, e scrivo sotto 4, e infine dico, 1 2 fa 3, e 3 8 fa 11, che nell'ultimo posto scrivo sotto, e si avrà la somma di tutti.

	8	7	8	9	9
	1	3	4	0	3
		1	9	2	0
			8	8	5
1	1	4	1	0	7

Sempre allo stesso modo possiamo sommare i decimali, come si può vedere nel seguente esempio:

6	3	0,	9	5	3	
	5	1,	0	8	0	7
3	0	5,	3	7		
9	8	7,	4	0	3	7

L'addizione di quantità algebriche si fa considerando le quantità da sommare con i loro segni; e inoltre, unendo in una somma quelli che possono essere uniti. Pertanto a e b fa $a\ b$; a e $-b$ fa $a-b$; $-a$ e $-b$ fa $-a-b$; $7a$ e $9a$ fa $7a\ 9a$; $-a\sqrt{ac}$ e $b\sqrt{ac}$ fa $-a\sqrt{ac}\ b\sqrt{ac}$, o $b\sqrt{ac}-a\sqrt{ac}$; essendo indifferente l'ordine con cui sono scritti.

Quantità si devono sommare quantità algebriche positive e espresse *con la stessa lettera*,basta scrivere una sola volta questa lettera, assegnandole come coefficiente la somma dei coefficienti di ognuna delle parti da sommare. Pertanto $7a\ 9a$ fa $16a$. E $11bc\ 15bc$ fa $26bc$. Anche $3\frac{a}{c}\ 5\frac{a}{c}$ fa $8\frac{a}{c}$; e $2\sqrt{ac}\ 7\sqrt{ac}$ fa $9\sqrt{ac}$; e $6\sqrt{ab-xx}\ 7\sqrt{ab-xx}$ fa $13\sqrt{ab-xx}$. E nello stesso modo, $6\sqrt{3}\ 7\sqrt{3}$ fa $13\sqrt{3}$. Inoltre, $a\sqrt{ac}\ b\sqrt{ac}$ fa $\left(a\ b\right)\sqrt{ac}$, sommando a e b come fossero numeri che moltiplicano $\sqrt{ac}$.

E così $\frac{2a3c\sqrt{3axx-x^3}}{ax}\ \frac{3a\sqrt{3axx-x^3}}{ax}$ fa $\frac{5a3c\sqrt{3axx-x^3}}{ax}$ poiché $2a\ 3c\ 3a$ fanno $5a\ 3c$.

Frazioni positive, che hanno lo stesso denominatore, sono sommate addizionando i loro numeratori. Così $\frac{1}{4}\ \frac{2}{4}$ fa $\frac{3}{4}$ e $\frac{2ax}{b}\ \frac{3ax}{b}$ fa $\frac{5ax}{b}$ e $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a\sqrt{cx}}\ \frac{17a\sqrt{cx}}{2a\sqrt{cx}}$ fa $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a\sqrt{cx}}$, e $\frac{aa}{c}\ \frac{bx}{c}$ fa $\frac{aabx}{c}$.

La somma di quantità negative non è diversa da quella delle quantità positive. Così -2 e -3 fa -5; $-\frac{4ax}{b}$ e $-\frac{11ax}{b}$ fa $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ e $-b\sqrt{ax}$ fa $\overline{-a-b}\sqrt{ax}$.

Ma quando una quantità negativa deve essere sommata ad una positiva, la positiva deve essere diminuita di tutto il valore di quella negativa. Così, 3 e -2 fa 1; $\frac{11ax}{b}$ e $-\frac{4ax}{b}$ fa $-\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ e $b\sqrt{ac}$ fa $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. E si noti, che quando la quantità negativa è maggiore di quella positiva, la somma sarà negativa. Pertanto 2 e -3 fa -1; $-\frac{11ax}{b}$ e $\frac{4ax}{b}$ fa $-\frac{7ax}{b}$ e $2\sqrt{ac}$ e $-7\sqrt{ac}$ fa $-5\sqrt{ac}$.

Nella somma di un maggior numero di quantità, o più composti, è necessario osservare un procedimento regolato, come si è fatto in precedenza per l'addizione dei numeri. Così $17ax-14a\ 3$ e $4a\ 2-8ax$, e $7a-9ax$, dovendo essere sommati, li si scrive gli uni al di sotto degli altri in colonne, in modo che i termini che hanno più affinità tra loro, siano nelle stesse colonne. Ad esempio, i numeri 3 e 2 in una colonna, le lettere $14a$, $4a$, e $7a$, in un'altra colonna, e le lettere $17ax$, e $-8ax$, e $-9ax$ in una terza. Si sommano poi i termini di ogni colonna tra loro, dicendo, 2 e 3 fa 5, che scrivo sotto, poi $7a$ e $4a$ fa $11a$ e con $-14a$ fa $-3a$, che ancora scrivo sotto; infine, $-9ax$, e $-8ax$ fa $-17ax$, ai quali aggiungo $17ax$ e fa 0; così la somma diviene $-3a\ 5$.

17ax	-14a	+3
-8ax	+4a	+2
-9ax	+7a	
0	-3a	+5

Allo stesso modo la procedura è mostrata nei seguenti esempi:

1° ESEMPIO			2° ESEMPIO			3° ESEMPIO				
12x	+	7a	11bc	-	$7\sqrt{ac}$	$-\frac{4ax}{b}$	+	$6\sqrt{3}$	+	$\frac{1}{3}$
7x	+	9a	15bc	+	$2\sqrt{ac}$	$\frac{11ax}{b}$	-	$7\sqrt{3}$	+	$\frac{2}{3}$
19x	+	16a	26bc	-	$5\sqrt{ac}$	$\frac{7ax}{b}$	-	$\sqrt{3}$	+	1

4° ESEMPIO

$$\begin{array}{ccccc} & & a^2y & 2a^3 & -\frac{a^4}{2y} \\ & -2ay^2 & -4a^2y & a^3 & \\ y^3 & 2ay^2 & -\frac{1}{2}a^2y & & \\ \hline y^3 & 0 & -3\frac{1}{2}a^2y & 3a^3 & -\frac{a^4}{2y} \end{array}$$

5° ESEMPIO

$$\begin{array}{ccc} & -6x^2 & \frac{3}{7}x \\ 5x^3 & & \frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3 & -6x^2 & \frac{8}{7}x \end{array}$$

6° ESEMPIO

$$\begin{array}{ccl} 5x^4 & 2ax^3 & \frac{3}{7}x \\ -3x^4 & -2ax^3 & 8\frac{1}{4}a^3\sqrt{a^2\ x^2} \\ -2x^4 & 5bx^3 & -20a^3\sqrt{a^2-x^2} \\ & -4bx^3 & -7\frac{1}{4}a^3\sqrt{a^2\ x^2} \\ \hline 0 & bx^3 & a^3\sqrt{a^2\ x^2}-20a^3a^3\sqrt{a^2-x^2} \end{array}$$

SOTTRAZIONE

Quando i numeri sono non troppo composti, niente è più facile che trovare la differenza. Infatti, se si tratta di sottrarre 9 da 17, chi non sa che rimane 8? Ma quando le quantità sono più composte, la sottrazione è eseguita scrivendo il numero da sottrarre sotto a quello da cui va sottratto, per poi sottrarre ogni figura inferiore dalla superiore corrispondente. Così, per sottrarre 63543 da 782579, scrivete 63543 sotto 782579 come si vede sotto. E dite: 3 da 9 resto 6, che scrivete sotto; poi 4 da 7 e rimane 3, che scrivete sotto come prima; poi 5 da 5 e non rimane nulla, che mettete ugualmente sotto; poi 3 deve essere sottratto da 2, ma poiché 3 è maggiore di 2 devo prendere in prestito 1 dalla cifra a sinistra 8, questa unità aggiunta a 2 fa 12, dal quale si deve togliere 3, e rimarrà 9, che scrivete ancora sotto. Rimane ora da sottrarre non a 6 ma da 6 aggiunto a 1, e la somma dà

7, che tolta da 8 dà 1, che come prima scrivete sotto. Infine, quando nella posizione più bassa del numero non rimane nulla da togliere al 7, riportate sotto 7, e così si ha la differenza dei due numeri 719036.

$$\begin{array}{cccccc} 7 & 8 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ & 6 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}$$

Ma si deve prestare una particolare attenzione, affinché le cifre del sottraendo siano scritte nel loro posto omogeneo; cioè, le unità dell'uno sotto le unità dell'altro, e le decine sotto le decine, e i decimali sotto i decimali, così come mostrato nell'addizione. Pertanto, per togliere il decimale $0,63$ dall'intero 547, non bisogna scrivere

$$\begin{array}{ccc} 5 & 4 & 7 \\ 0, & 6 & 3 \end{array} \quad \text{ma} \quad \begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 7 & & \\ & & 0, & 6 & 3 \end{array}$$

cioè, in modo che lo 0 che occupa il posto dell'unità nel decimale, sia posto sotto l'unità dell'altro numero. Essendo poi noto che gli spazi vuoti del numero sopra sono occupati da 0 sottrarre 3, ciò è impossibile, per cui si deve prendere in prestito 1 dal posto precedente, che lo fa diventare 10, dal quale togliendo 3, rimane 7, che si scrive sotto.

Poi quell'1 va aggiunto a 6 che dà 7, e questo deve essere tolto dallo 0 sopra; ma poiché ancora non si può fare, si deve di nuovo prendere 1 in prestito dal posto precedente, diventando 10; poi 7 tolto da 10 dà 3, che si scrive sotto nel solito modo; poi quell'1 deve essere aggiunto a 0, dando 1, che tolto da 7 dà 6, che si scrive nuovamente sotto. Infine scrivete le due cifre 54 sotto, e avrete la differenza $546,37$. Indichiamo alcuni esempi per esercitare i principianti:

$$\begin{array}{r} 1673 \\ 1541 \\ \hline 132 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1373 \\ 1580 \\ \hline 93 \end{array} \quad \begin{array}{r} 458074 \\ 9205 \\ \hline 44869 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35{,}72 \\ 14{,}32 \\ \hline 21{,}40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 46{,}5003 \\ 3{,}078 \\ \hline 43{,}4223 \end{array} \quad \begin{array}{r} 308{,}7 \\ 25{,}74 \\ \hline 282{,}96 \end{array}$$

Se un numero maggiore deve essere tolto dal minore, si deve prima sottrarre il minore dal maggiore, e poi mettere davanti ad esso un segno negativo. Se da 1541 si deve sottrarre 1673, sottraggo al contrario 1541 da 1673, e al restante 132 premetto il segno $-$.

In termini algebrici, la sottrazione si esegue cambiando prima i segni di tutti i sottraendi, e unendo insieme quelli che possono essere uniti, così come detto nell'addizione. Pertanto $7a$ tolto da $9a$ dà $9a - 7a$ o $2a$; $-7a$ da $9a$ lascia $9a\ 7a$, o $16a$; $7a$ da $-9a$ lascia $-9a - 7a$, o $-16a$; e $-7a$ da $-9a$ lascia $-9a\ 7a$, o $-2a$; così $3\frac{a}{e}$ da $5\frac{a}{e}$ lascia $2\frac{a}{e}$; $7\sqrt{ac}$ da $2\sqrt{ac}$ lascia $-5\sqrt{ac}$; $\frac{2}{9}$ da $\frac{5}{9}$ lascia $\frac{3}{9}$; $-\frac{4}{7}$ da $\frac{3}{7}$ lascia $\frac{7}{7}$; $-\frac{2ax}{b}$ da $\frac{3ax}{b}$ lascia $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a\sqrt{cx}}$ da $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a\sqrt{cx}}$ lascia $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a\sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ da $\frac{bx}{c}$ lascia $\frac{bx-aa}{c}$; $a - b$ da $2a\ b$ lascia $2a\ b - a\ b$, o $2a\ b$; $3az - zz\ ac$ da $3az$ lascia $3az - 3az\ zz - ac$, o $zz - ac$; $\frac{2aa-ab}{c}$ da $\frac{aaab}{c}$ lascia $\frac{aaab-2aaab}{c}$, o $\frac{-aa2ab}{c}$; e $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ da $\overline{a\ x}\sqrt{ax}$ lascia $\overline{a\ x - a\ x}\sqrt{ax}$, o $2x\sqrt{ax}$, e così in altri casi. Ma quando le quantità consistono di più termini, l'operazione può essere gestita come per i numeri, come nei seguenti esempi:

$$\begin{array}{cc} 12x & 7a \\ 7x & 9a \\ \hline 5x & -2a \end{array} \quad \begin{array}{cc} 15bc & 12\sqrt{ac} \\ -11bc & 7\sqrt{ac} \\ \hline 26bc & 5\sqrt{ac} \end{array} \quad \begin{array}{cc} 5x^3 & \frac{5}{7}x \\ 6x^2 & -\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3 - 6x^2 & \frac{8}{7}x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \frac{11ax}{b} & -7\sqrt{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{4ax}{b} & -6\sqrt{3} & -\frac{1}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b} & \sqrt{3} & \frac{3}{5} \end{array}$$

Sulla MOLTIPLICAZIONE

Bisogna imparare a memoria tutti i numeri che provengono dalla moltiplicazione di due numeri qualsiasi, non maggiori di 9: così 5 per 7 fa 35, e 8 per 9 fa 72, ecc. La moltiplicazione dei numeri più grandi deve essere eseguita con l'aiuto di questi.

Se 795 deve essere moltiplicato per 4, scrivete 4 sotto 795, come si vede sotto.

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 9 & 5 \\ & & & 4 \\ \hline 3 & 1 & 8 & 0 \end{array}$$

Poi dite, 4 per 5 fa 20, la cui ultima cifra, cioè 0, pongo sotto il quattro, e tengo il 2 per la successiva operazione. Dite inoltre, 4 per 9 fa 36, al quale aggiungo il precedente 2, e ottengo 38, la cui ultima cifra 8 scrivo sotto come prima, e tengo il 3. Infine, 4 per 7 fa 28, al quale aggiungo il precedente 3 e ottengo 31, che metto sotto, e avrò il numero 3180, che deriva dalla moltiplicazione dell'intero 795 per 4.

Inoltre, se 9043 deve essere moltiplicato per 2305, scrivo uno di essi, cioè 2305 sotto l'altro 9043 come prima, e moltiplico il numero sopra 9043 per 5, con il metodo mostrato, e otterrò 45215; poi per 0, e otterrò 0000; per terzo, moltiplico per 3, e avrò 27129; infine per 2, e otterrò 18086. Poi dispongo questi numeri in successione discendente [o uno sotto l'altro] in modo che l'ultima cifra di ogni riga inferiore si trovi un posto più avanti a sinistra dell'ultima della riga superiore. Poi sommo tutti questi insieme, e otterrò 20844115, il numero che è prodotto dalla moltiplicazione di tutto il 9043 per tutto il 2305.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 9 & 0 & 4 & 3 \\
 & & & & 2 & 3 & 0 & 5 \\
\hline
 & & & 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 2 & 7 & 1 & 2 & 9 & & \\
1 & 8 & 0 & 8 & 6 & & & \\
\hline
2 & 0 & 8 & 4 & 4 & 1 & 1 & 5
\end{array}
$$

Allo stesso modo si moltiplicano i decimali, per gli interi, o per altri decimali, o entrambi, così come mostrato nei seguenti esempi:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 7 & 2, & 4 \\
 & & & 29 & & \\
\hline
 & 6 & 5 & 1 & 6 & \\
1 & 4 & 4 & 8 & & \\
\hline
2 & 0 & 9 & 9, & 6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 5 & 0, & 1 & 8 \\
 & & & & 2, & 7 & 5 \\
\hline
 & & 2 & 5 & 0 & 9 & 0 \\
 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & \\
1 & 0 & 0 & 3 & 6 & & \\
\hline
1 & 3 & 7, & 9 & 9 & 5 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 3, & 9 & 0 & 2 & 5 \\
 & & & & 0, & 0 & 1 & 3 & 2 \\
\hline
 & & & & 7 & 8 & 0 & 5 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 7 & 0 & 7 & 5 & \\
 & & & 3 & 9 & 0 & 2 & 5 & \\
\hline
0, & 0 & 5 & 1 & 5 & 1 & 3 & 0 & 0
\end{array}
$$

Ma si noti che bisogna segnare nel prodotto tante cifre decimali sulla destra, quante sono nel moltiplicando e nel moltiplicatore. E se per caso non vi sono molte cifre nel prodotto, il posto mancante deve essere riempito dagli zeri aggiunti a sinistra, come qui nel terzo esempio.

La moltiplicazione di quantità algebriche semplici si effettua scrivendo uno accanto all'altro senza interposizione di segno, il moltiplicando e il moltiplicatore, e dando al prodotto il segno , se i fattori hanno entrambi il segno positivo, o entrambi il segno negativo; oppure dando il segno negativo, se i fattori hanno segno diverso.

Così $2a$ per $3b$, o $-2a$ per $-3b$ fa $6ab$, o $6ba$ perché l'ordine è indifferente. Così $2a$ per $-3b$, o $-2a$ per $3b$ fa $-6ab$. E quindi, $2ac$ per $8bcc$ fa $16abccc$, o $16abc^3$; e $7axx$ per $-12aaxx$ fa $-84a^3x^4$; e $-16cy$ per $31ay^3$ fa $-496acy^4$; e $-4z$ per $-3\sqrt{az}$ fa $12z\sqrt{az}$. E così 3 per -4 fa -12, e -3 per -4 fa 12.

La moltiplicazione delle frazioni si fa moltiplicando i numeratori tra loro e i denominatori tra loro. Così $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{7}$ fa $\frac{6}{35}$; e $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ fa $\frac{ac}{bd}$; e $2\frac{a}{b}$ per $3\frac{c}{d}$ fa $6\frac{ac}{bd}$; e $\frac{3acy}{2bb}$ per $\frac{-7cyy}{4b^3}$ fa $\frac{-21accy^3}{8b^5}$; e $\frac{-4z}{c}$ per $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$ fa $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$; e $\frac{a}{b}x$ per $\frac{c}{d}x^2$ fa $\frac{ac}{bd}x^3$. Ancora, 3 per $\frac{2}{5}$ fa $\frac{6}{5}$, come può apparire, se 3 può essere ridotto alla forma di una frazione, cioè $\frac{3}{1}$, facendo uso dell'unità come denominatore.

E quindi $\frac{15aaz}{cc}$ per $2a$ fa $\frac{30a^3z}{cc}$. Si noti inoltre che $\frac{ab}{c}$ e $\frac{a}{c}b$ sono uguali; così come $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$, e $\frac{a}{c}bx$, anche $\frac{\overline{ab}\sqrt{cx}}{a}$ e $\frac{ab}{a}\sqrt{cx}$; e così via.

Quando le quantità radicali hanno la stessa denominazione, cioè, sono tutte radici quadrate, o tutte radici cubiche, o tutte radici biquadratiche, ecc., la moltiplicazione si fa moltiplicando i termini sotto le stesso segno di radice e dando al prodotto il radicale comune.

Pertanto $\sqrt{3}$ per $\sqrt{5}$ fa $\sqrt{15}$; e $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$ fa $\sqrt{abcd}$; e $\sqrt[3]{5ayy}$ per $\sqrt[3]{7ayz}$ fa $\sqrt[3]{35aay^3z}$; e $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ per $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ fa $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$, cioè $\frac{aab}{c}$; e $2a\sqrt{az}$ per $3b\sqrt{az}$ fa $6ab\sqrt{aazz}$, cioè $6aabz$; e $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ per $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ fa $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$, cioè $\frac{-6x^3}{ac}$; e $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ fa $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$.

Quando le quantità sono complesse, la moltiplicazione si fa moltiplicando ogni parte del moltiplicando per ogni parte del moltiplicatore, come mostrato nella moltiplicazione di numeri.

Pertanto $c - x$ per a fa $ac - ax$, e $aa\ 2ac - bc$ per $a - b$ fa $a^3\ 2aac - aab - 3bac\ bbc$. E $aa\ 2ac - bc$ per $-b$ fa $-aab - 2acb\ bbc$, e per a fa $a^3\ 2aac - abc$, la somma è $a^3\ 2aac - aab - 3abc\ bbc$.

Ecco qui un esempio di moltiplicazione, insieme con altri esempi simili

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a^2 & 2ac & -bc \\
 & & & a & -b \\
\hline
 & & -a^2b & -2abc & b^2c \\
a^3 & 2ac^2 & & -abc & \\
\hline
a^3 & 2ac^2 & -a^2b & -3abc & b^2c
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & & a & b \\
 & & a & b \\
\hline
a^2 & ab & ab & b^2 \\
\hline
a^2 & 2ab & b^2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & y^2 & 2ay & -\frac{1}{2}a^2 \\
 & & y^2 & -2ay & a^2 \\
\hline
 & & a^2y^2 & 2a^3y & -\frac{1}{2}a^4 \\
 & -2ay^3 & -4a^2y^2 & a^3y & \\
y^4 & 2ay^3 & -\frac{1}{2}a^2y^2 & & \\
\hline
y^4 & 0 & -3\frac{1}{2}a^2y^2 & 3a^3y & -\frac{1}{2}a^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \frac{2ax}{c} & -\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\
 & & 3a & \sqrt{\frac{ab^2}{c}} \\
\hline
 & & \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{ab^2}{c}} & -\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}} \\
 & \frac{6a^2x}{c} & -3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} & \\
\hline
\frac{6a^2x}{c} & -3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} & \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{ab^2}{c}} & -\frac{a^2b}{c}
\end{array}
$$

Sulla DIVISIONE

La divisione è eseguita per i numeri, cercando quante volte il divisore è contenuto nel dividendo, e scrivendo al quoziente una cifra che indica questo numero di volte. Si ripete questa operazione tante volte quante il divisore può essere sottratto dal dividendo.

Pertanto, per dividere 63 per 7, cercate quante volte il 7 è contenuto nel 63, e saranno precisamente 9 volte. Di conseguenza $\frac{63}{7}$ è uguale a 9. Inoltre, per dividere 371 per 7, scrivete 7 di seguito al numero 371 iniziando dalla prima cifra a sinistra del dividendo, dite: quante volte 7 è contenuto nel 37, e trovate 5; poi scrivete 5 al quoziente, moltiplicate 5×7, o 35, e sottraetelo da 37, ne rimane 2, a fianco del quale discendete l'ultima cifra del dividendo, cioè 1, e il resto sarà 21 sul quale si ricomincia la successiva operazione. Dite pertanto come prima, quante volte 7 sta nel 21? e la risposta sarà 3; scrivete 3 al quoziente, sottraete 3×7, o 21, da 21 e rimarrà 0. Da qui è manifesto che 53 è precisamente il numero che si ottiene dalla divisione di 371 con 7.

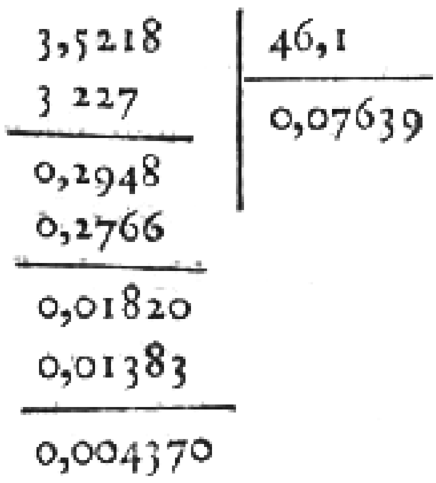
$$
\begin{array}{ccc|cc}
3 & 7 & 1 & 7 & \\
\cline{4-5}
3 & 5 & & 5 & 3 \\
\cline{1-3}
 & 2 & 1 & & \\
 & 2 & 1 & & \\
\cline{1-3}
 & & 0 & &
\end{array}
$$

E quindi per dividere 4798 per 23, iniziate con le prime cifre 47, e dite, quante volte 23 è contenuto nel 47? Risposta 2; scrivete pertanto 2 al quoziente, e da 47 sottraete 2×23, o 46, e avrete come resto 1, al quale associate il numero successivo del dividendo, cioè 9, e avrete 19 per proseguire. Dite pertanto, quante volte 23 è contenuto nel 19? Risposta 0; scrivete quindi 0 al quoziente; e da 19 sottraete 0×23, o 0, e rimane 19, al quale associate l'ultima cifra 8, e avrete 198 per proseguire. Come ultimo posto dite, quante volte 23 è contenuto in 198 (che può essere risolta prendendo le prime cifre di ognuno, 2 e 19, tenendo conto di quante volte 2 è contenuto in 19)? Risposta 8; pertanto scrivette 8 al quoziente, e da 198 sottraete 8×23, o 184, e avrete come resto 14 da dividere poi per 23; e così il quoziente sarà $208\frac{1}{2}\frac{4}{3}$.

$$
\begin{array}{l|l}
4798 & 23 \\
\cline{2-2}
46 & 208{,}608\text{, etc.} \\
\hline
\;198 & \\
\;184 & \\
\hline
\;\;140 & \\
\;\;138 & \\
\hline
\;\;\;200 & \\
\;\;\;184 & \\
\hline
\;\;\;160 &
\end{array}
$$

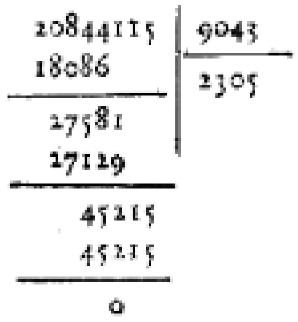
E se questa frazione non è gradita, si può continuare la divisione in frazioni decimali a piacere, aggiungendo sempre la cifra 0 al numero rimanente. Allora al resto 14 aggiungete 0, e diviene 140. Allora dite, quante volte 23 è contenuto in 140? Risposta 6; scrivete pertanto 6 al quoziente; e da 140 sottraete 6×23, o 138, e rimarrà 2; al quale associate la cifra 0 come prima. E la procedura può continuare a piacere, fino ad ottenere la lunghezza voluta del quoziente, cioè, $208, 6086$.

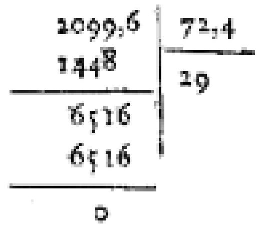
Si procede allo stesso modo dividendo la frazione decimale $3, 5218$ con la frazione decimale $46, 1$, e si ottiene $0, 07639$.

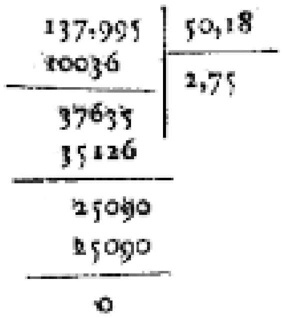


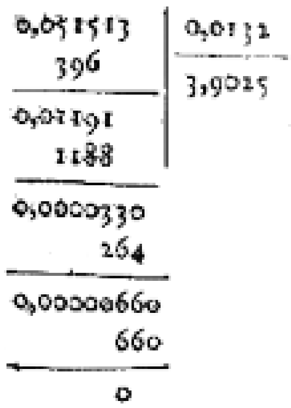
Si noti che il quoziente può avere in sospeso molte cifre, come decimali, come nell'ultima divisione dove, se il dividendo ha dopo il 6 solo la cifra 1, il divisore può averne assai di più, come mostrato da 3, 521800.

Come ulteriore chiarimento, presentiamo altri esempi:









La divisione di quantità algebriche si fa scomponendo come si è fatto per la moltiplicazione. Così, ab diviso a dà come quoziente b. $6ab$ diviso $2a$ dà $3b$; e diviso per $-2a$ dà $-3b$. $-6ab$ diviso per $2a$ dà $-3b$, e diviso per $-2a$ dà $3b$. $16abc^3$ diviso per $2ac$ dà $8bcc$. $-84a^3x^4$ diviso per $-12aaxx$ dà $7axx$. Analogamente $\frac{6}{35}$ diviso per $\frac{2}{5}$ dà $\frac{3}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ diviso per $\frac{a}{b}$ dà $\frac{c}{d}$. $\frac{-21accy^3}{8b^5}$ diviso per $\frac{3acy}{2bb}$ dà $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{6}{5}$ diviso per 3 dà $\frac{2}{5}$; e reciprocamente $\frac{6}{5}$ diviso per $\frac{2}{5}$ dà $\frac{3}{1}$, o 3. $\frac{30a^3z}{cc}$ diviso per $2a$ dà $\frac{15aaz}{cc}$; e reciprocamente diviso per $\frac{15aaz}{cc}$ dà $2a$. Allo stesso modo $\sqrt{15}$ diviso per $\sqrt{3}$ dà $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ divisa per $\sqrt{cd}$ dà $\sqrt{ab}$. $\sqrt{a^3c}$ diviso per $\sqrt{ac}$ dà $\sqrt{aa}$, o a. $\sqrt[3]{35aay^3z}$ diviso per $\sqrt[3]{5ayy}$ dà $\sqrt[3]{7ayz}$. $\frac{\sqrt{a^4bb}}{cc}$ divisa per $\frac{\sqrt{a^3}}{c}$ dà $\frac{\sqrt{abb}}{c}$. $\frac{12ddx\sqrt{5ayz}}{70acc}$ divisa per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ dà $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. E così $\overline{a\ b}\sqrt{ax}$ diviso per $a\ b$ dà $\sqrt{ax}$; e reciprocamente divisa per $\sqrt{ax}$ dà $a\ b$. E $\frac{a}{ab}\sqrt{ax}$ diviso per $\frac{1}{ab}$ dà $a\sqrt{ax}$, o divisa per a dà $\frac{1}{ab}\sqrt{ax}$ o $\frac{\sqrt{ax}}{ab}$; e reciprocamente divisa per $\frac{\sqrt{ax}}{ab}$ dà a.

Ma nelle divisioni di questo tipo bisogna fare attenzione, che le quantità siano divise tra loro della stessa specie, cioè, numeri con numeri, lettere con lettere, radicali con radicali, i numeratori delle frazioni con i numeratori, e i denominatori con i denominatori, ecc. Inoltre, nei numeratori, denominatori, e radicali, le quantità di ogni tipo devono essere divise da altre a loro omogenee.

Se le quantità da dividere non può essere scomposta dal divisore, è sufficiente, quando le due quantità sono intere, scrivere il divisore sotto il dividendo, separandoli con una linea. Così per dividere ab per c, si scrive $\frac{ab}{c}$; e per dividere $\overline{a\ b}\sqrt{cx}$ per a, si scrive $\frac{\overline{ab}\sqrt{cx}}{a}$, o $\frac{ab}{a}\sqrt{cx}$.

E così $\sqrt{ax-x^2}$ diviso per $\sqrt{cx}$ dà $\frac{\sqrt{ax-x^2}}{\sqrt{cx}}$, o $\sqrt{\frac{ax-{}^2x}{cx}}$. E $\overline{a^2\ ab}\sqrt{a^2-2x^2}$ diviso per $\overline{a-b}\sqrt{a^2-x^2}$ dà $\frac{a^2ab}{a-b}\sqrt{\frac{ax-2x^2}{a^2-x^2}}$. E $12\sqrt{5}$ diviso per $4\sqrt{7}$ dà $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ma quando queste quantità sono frazioni, si moltiplica il numeratore del dividendo per il denominatore del divisore, e il denominatore per il numeratore, e il primo prodotto sarà il numeratore, e l'ultimo il denominatore del quoziente. Allora per dividere $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ si scrive $\frac{ad}{bc}$, cioè, si moltiplica a per d e b per c. Analogamente, $\frac{3}{7}$ diviso per $\frac{5}{4}$ dà $\frac{12}{35}$. E $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ diviso per $\frac{2c}{5a}$ dà $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$, e diviso per $2c\frac{\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dà $\frac{15a^3x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$.

Con la stessa modalità, $\frac{ad}{b}$ diviso per c (o per $\frac{c}{1}$) dà $\frac{ad}{bc}$. E c (o $\frac{c}{1}$) diviso per $\frac{ad}{b}$ dà $\frac{bc}{ad}$. E $\frac{3}{7}$ diviso per 5 dà $\frac{3}{35}$. E 3 diviso per $\frac{5}{4}$ dà $\frac{12}{5}$. E $\frac{ab}{c}\sqrt{cx}$ diviso per a dà $\frac{ab}{ac}\sqrt{cx}$. E $\overline{a\ b}\sqrt{cx}$ diviso per $\frac{a}{c}$ dà $\frac{acbc}{a}\sqrt{cx}$. E $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ diviso per $3\sqrt{cd}$ dà $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{ccd}}$; e diviso per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dà $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. E $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ diviso per $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ dà $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$, e così per altri.

Quando il dividendo è complesso, bisogna dividere ciascuno dei suoi termini per il divisore. Così, $a^2\ 3ax-x^2$ diviso per a dà $a\ 3x-\frac{x^2}{a}$. Ma quando anche il divisore è complesso, la divisione è calcolata come per i numeri.

Così per dividere $a^3\ 2a^2c-a^2b-3abc\ b^2c$ per $a-b$, dite, quante volte a è contenuto in a^3, cioè il primo termine del divisore nel primo termine del dividendo? Risposta a^2. Poi scrivete a^2 al quoziente; e sottraete $a-b$ moltiplicato per a^2, cioè a^3-a^2b dal dividendo, rimarrà $2a^2c-3abc\ b^2c$ che dovrà essere diviso. Poi dite ancora, quante volte a in $2a^2c$? Risposta $2ac$. Poi scrivete $2ac$ nel quoziente, e sottraete $a-b$ per $2ac$, o $2a^2c-2abc$ dall'anzidetto resto, rimarrà $-abc\ b^2c$. Poi dite ancora, quante volte a in $-abc$? Risposta $-bc$, e poi scrivete $-bc$ al quoziente; e avendo, nell'ultimo posto, sottratto $a-b$ per $-bc$, cioè $-abc\ b^2c$ dall'ultimo resto, non rimarrà nulla; ciò mostra che la divisione è conclusa, e il quoziente ottenuto è $a^2\ 2ac-bc$.

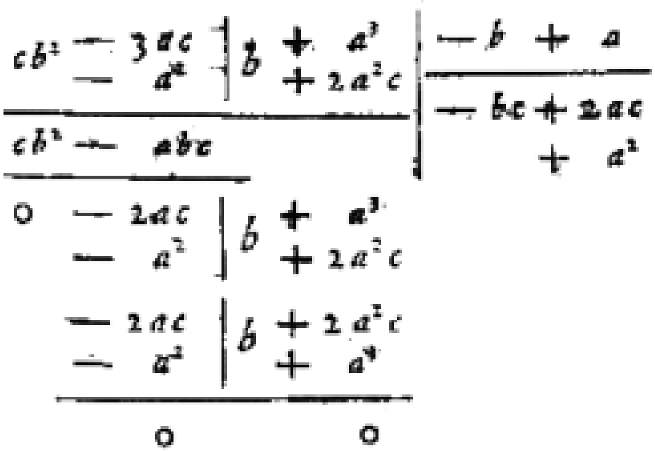
Ma queste operazioni possono essere puntualmente ridotte alla forma impiegata nella divisione fra numeri, ordinando i termini del dividendo e del divisore rispetto alle potenze di una stessa lettera, in modo che che i porrà al primo posto il termine dove questa lettera ha il grado maggiore; al secondo posto quella il cui grado è più vicina a quella del primo posto, e così di seguito fino a quella dove la lettera non è del tutto coinvolta, che occupa l'ultimo posto. Così, nell'esempio proposto, se i termini sono disposti secondo le potenze della lettera a, il seguente schema mostra come si opera.

$$\begin{array}{lllll|l}
a^3 & +\,2a^2c & -\,3abc & +\,b^2c & & a-b \\
 & -\,a^2b & & & & \hline a^2+2ac-bc \\ \cline{1-4}
a^3 & -\,a^2b & & & & \\ \cline{1-4}
0 & +\,2a^2c & -\,3abc & +\,b^2c & & \\
 & +\,2a^2c & -\,2abc & & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & -\,abc & +\,b^2c & & \\
 & & -\,abc & +\,b^2c & & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & 0 & &
\end{array}$$

Come si può vedere, il termine a^3, o a alla terza potenza, si trova al primo posto del dividendo, e i termini $2a^2c$ e $-a^2b$, nei quali a è della seconda potenza, si trova al secondo posto, e così via. Il dividendo potrebbe anche essere scritto

$$a^3 \quad \begin{matrix} 2c \\ -b \end{matrix} \quad a^2-3bca\ b^2c$$

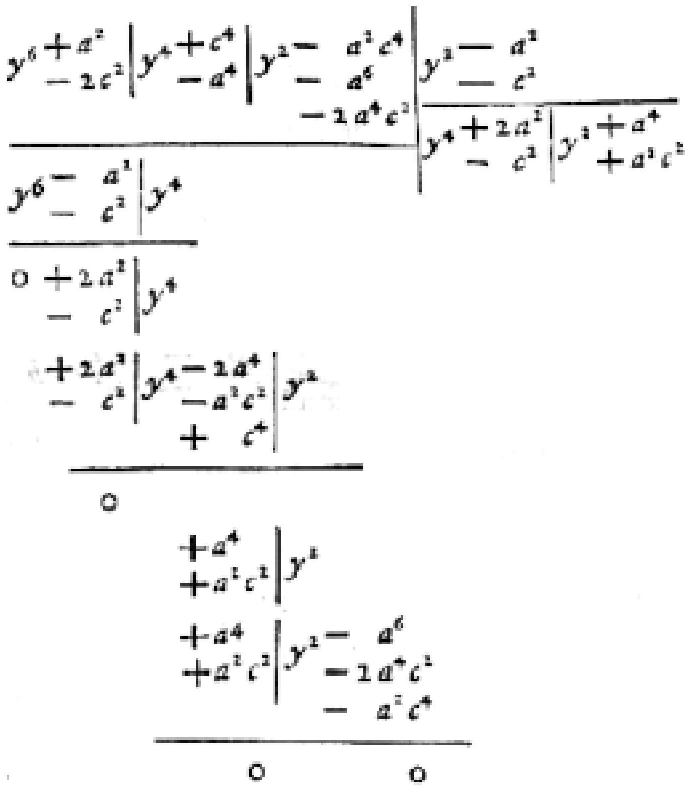
Qui i termini che occupano il secondo posto sono uniti, raccogliendoli insieme i fattori [o coefficienti] della lettera della stessa potenza. E quindi, se i termini fossero disposti secondo la potenza della b, il procedimento dovrebbe essere eseguito come nel seguente schema:



Dico , quante volte $-b$ è contenuto in cb^2? Risposta $-cb$. Scrivete $-cb$ nel quoziente, sottraete $\overline{-b\ a} \times -cb$, o $b^2c - abc$, e rimarrà al secondo posto $\begin{matrix}-2ac\\-a^2\end{matrix}$ b. A questo resto, aggiungo, se si vuole, le quantità che stanno nell'ultimo posto, cioè $\begin{matrix}a^3\\2ac^2\end{matrix}$ e dite ancora, quante volte $-b$ è contenuto in $\begin{matrix}-2ac\\-a^2\end{matrix}$ b? Risposta $\begin{matrix}2ac\\a^2\end{matrix}$. Questo sarà scritto nel quoziente, e sottraggo $-b\ a$ Sulla per $\begin{matrix}2ac\\a^2\end{matrix}$, o $\begin{matrix}-2ac\\-a^2\end{matrix}$ b $\begin{matrix}2ac^2\\a^3\end{matrix}$, e non si avrà alcun resto.

Da ciò è chiaro che la divisione è conclusa e il quoziente ottenuto è $-cb\ 2ac\ a^2$, come prima.

E così, per dividere $a^2y^4 - a^2c^4\ y^2c^4\ y^6 - 2y^4c^2 - a^5 - 2a^4c^2 - a^4y^2$ per $y^2 - a^2 - c^2$, si ordinano le quantità secondo le potenze della lettera y, pertanto:



Poi divido come nello schema seguente.

Sono qui aggiunti altri esempi, nei quali si deve notare che quando le potenze delle lettere, che risultano ordinate, non sempre continua nella stessa progressione aritmetica, ma a volte per mezzo di salti, nei posti mancanti denotati da $*$.

$$
\begin{array}{l|l}
y^4 \quad * \quad -3\tfrac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 & y^2 - 2ay + a^2 \\
\hline
y^4 - 2ay^3 + a^2y^2 & y^2 + 2ay - \tfrac{1}{2}a^2 \\
\hline
0 + 2ay^3 - 4\tfrac{1}{2}a^2y^2 & \\
\quad + 2ay^3 - 4a^2y^2 + 2a^3y & \\
\hline
\qquad 0 - \tfrac{1}{2}a^2y^2 + a^3y & \\
\qquad\quad - \tfrac{1}{2}a^2y^2 + a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a^4 \quad * \quad * \quad * \quad + \quad b^4 & a^2 + ab\sqrt{2} + b^2 \\
\hline
a^4 + a^3b\sqrt{2} + a^2b^2 & a^2 - ab\sqrt{2} + b^2 \\
\hline
\quad - a^3b\sqrt{2} - a^2b^2 & \\
\quad - a^3b\sqrt{2} - 2a^2b^2 - ab^3\sqrt{2} & \\
\hline
\qquad + a^2b^2 + ab^3\sqrt{2} & \\
\qquad + a^2b^2 + ab^3\sqrt{2} + b^4 & \\
\hline
\qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Alcuni iniziano la divisione dall'ultimo termine, ma si ottiene la stessa cosa, se, invertendo l'ordine dei termini, si inizia dal primo. Vi sono anche altri metodi per dividere, ma è sufficiente conoscere il più facile e comodo.

(75)

ESTRAZIONE DI RADICE

Quando si deve estrarre la radice quadrata di un numero, si deve prima dividere questo numero in blocchi di due cifre ciascuno, con una piccola virgola, iniziando dall'unità; poi si deve scrivere al quoziente o alla radice, la Figura il cui quadrato è uguale alle Figure che precedono la prima virgola, o almeno la Figura il cui quadrato avvicina maggiormente le Figure o la Figura precedente la prima virgola.

E dopo aver sottratto questo quadrato, si troveranno in successione le altre cifre della radice, dividendo il resto per il doppio della parte trovata della radice, avendo cura ogni volta che si trova una nuova Figura della radice da moltiplicare per se stessa, e per il doppio delle Figure già trovate, e di sottrarre questo prodotto dal resto.

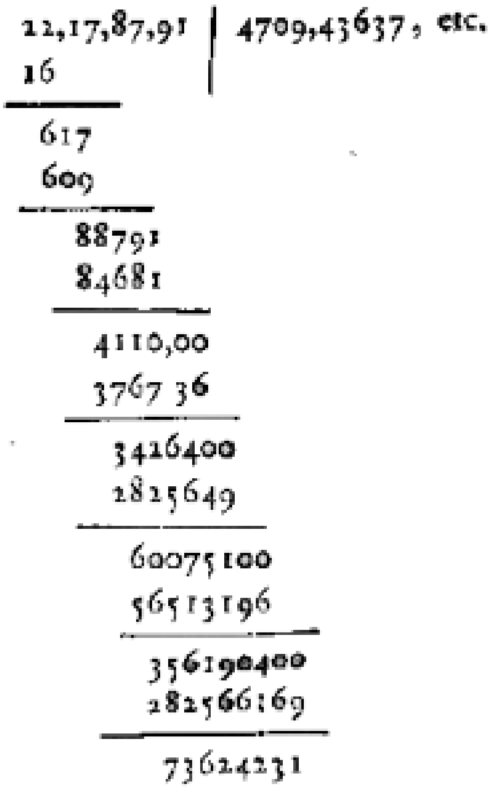
Così, per estrarre la radice di 99856, separate con delle virgole in in questo modo $9, \dot{9}8, 56$, poi cercate il numero il cui quadrato sia uguale alla prima Figura 9, cioè 3. Scrivetela nel quoziente; e poi avendo sottratto da 9, 3×3, o 9, rimarrà 0; a fianco del quale discenderete il blocco successivo 98; e trascurando l'ultima Figura 8, dite: quante volte il doppio di 3, o 6, è contenuto nella prima 9? Risposta 1. Scrivete quindi 1 nel quoziente, e sottraete 1×61, o 61, da 98, e rimarrà 37, a fianco del quale discendete le ultime Figure 56, e verrà 3756, numero sul quale bisogna ricominciare l'operazione. Quindi, trascurando ancora l'ultima Figua, cioè 6, dite: quante volte il doppio di 31, o 62, è contenuto ne 375? (Si può facilmente immaginare la risposta vedendo quante volte la prima Figura del divisore 6 è contenuta nelle prime due 37 del dividendo) Risposta 6; e scrivete 6 nel quoziente, e sottraete 6×626, o 3756, rimarrà 0; ciò che mostra che il calcolo è ottenuto e che la radice è 316.

9,	98	56	3 1 6
9			
0	98		
	61		
	37	56	
	37	56	
		0	

E se si vuole estrarre la radice quadrata di 22178791, cominciate col separare in blocchi di due cifre andando da destra a sinistra, e operando sulle due cifre che precedono la prima virgola, cercate qual è il numero il cui quadrato si avvicina di più a 22 (dico, avvicina di più, poiché non c'è alcun numero il cui quadrato è 22), troverete che è 4. Poiché 5×5, o 25, è maggiore di 22; e 4×4, o 16 è minore; allora 4 sarà la prima cifra della radice. Scrivete allora 4 alla radice, e da 22 togliete 4×4, o 16, e resterà 6.

A fianco di questo resto, discendete il blocco seguente 17, e avrete 617 che, diviso per il doppio di 4 vi darà la seconda cifra della radice. Trascurando l'ultima cifra 7, dite: quante volte 8 è contenuto nel 61? Risposta 7; scrivete 7 nel quoziente, e da 617 sottraete il prodotto di 7 per 87, o 609, e rimarrà 8. A fianco di questo resto discendete le due cifre successive 87, e avrete 887 che, diviso per il doppio di 47, o 94, vi darà la terza cifra della radice. Dite pertanto: quante volte 94 è contenuto in 88? Risposta 0; scrivete 0 nel quoziente e discendete ancora a lato del vostro numero le due ultime cifre 91, e avrete 88791, che diviso per il doppio di 470, o 940, darà l'ultima cifra della radice. Dite allora, quante volte 940 è contenuto nel 8879? Risposta 9; trascrivete 9 nel quoziente e avrete per radice 4709.

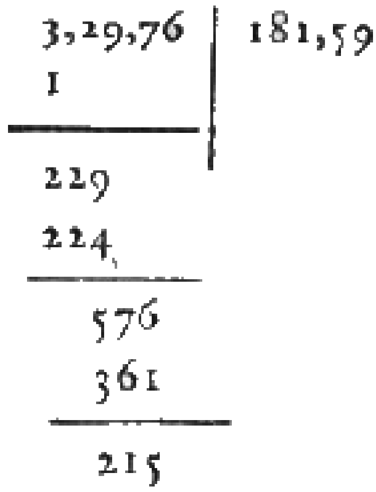
Ma poiché il prodotto 9×9409, o 84681, sottratto da 88791, dà 4110, e ciò è un segnale che il numero 4709 non è la radice esatta del numero 22178791, ma che è minore di esso. Allora in questo caso, e in altri simili, se si vuole avvicinare maggiormente la radice con una migliore approssimazione, si deve continuare l'operazione con i decimali, aggiungendo, per ogni nuova aggiungendo al resto due zeri in ogni operazione. Pertanto l'ultimo resto 4110 con l'aggiunta dei due zeri, diviene 411000; dividendo per il doppio di 4709, o 9418, si avrà la prima cifra decimale 4. Scrivete 4 nel quoziente, sottraete 4×94184, o 376736 da 411000, e rimarrà 34264. E aggiungendo altri due zeri, la procedura può proseguire a piacere, dando una radice $4709,43637$, ecc.



Ma quando la radice è calcolata in modo approssimato, il resto delle cifre può essere ottenuto dalla sola divisione. Come in questo esempio, se si vuole estrarre la radice fino alla nona cifra, dopo le prime cinque $4709,4$, le quattro successive si possono ottenere dividendo il resto per il doppio di $4709,4$.

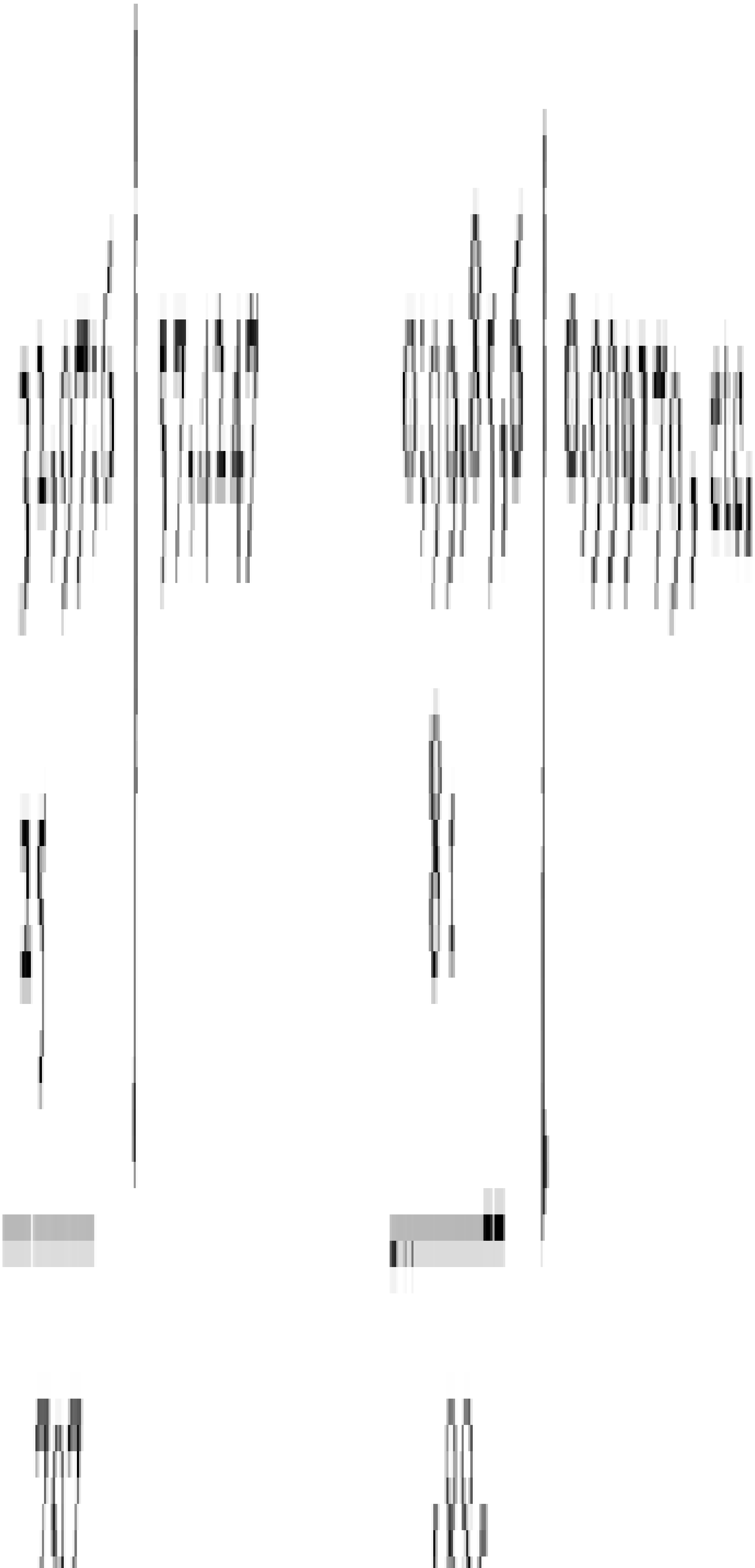
E dopo questa procedura, se si deve estrarre la radice di 32976 fino a un numero di cinque cifre, dopo aver suddiviso questo numero in blocchi, scrivete 1 nel quoziente, e poiché il suo quadrato è 1×1, o il quadrato di 1 è il maggiore quadrato contenuto nel 3 che precede la prima virgola; sottraete 1 da 3, e rimarrà 2, a fianco del quale discendete il blocco seguente 29, ciò che farà 229. Trascurate l'ultimo 9 e dividete 22 per il doppio di 1, o 2, e troverete che è più di dieci volte; ma non è mai permesso prendere il divisore dieci volte, perché 9×29, o 261, è maggiore di 229, dal quale dovreste sottrarlo. Così scrivete solamente 8 al quoziente e sottraendo 8×28, o 224, rimarrà 5, a fianco del quale discendete 76, e avrete 576.

Cercate quante volte il doppio di 18, o 36, è contenuto in 57, e troverete 1. Scrivete 1 nel quoziente; e e sottraete 1×361, o 361 da 576, rimarrà 215. Infine, per ottenere le cifre restanti, dividete questo numero 215 per il doppio di 181, o 362, troverete 59, che scriverete nel quoziente, e la radice sarà $181,59$.

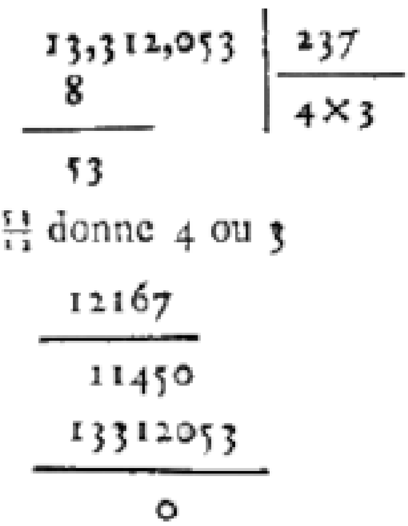


In seguito si possono estrarre anche i numeri decimali. Pertanto la radice di $329,76$ è $18,159$; e la radice di $3,2976$ è $1,8159$; e la radice di $0,032976$ è $0,18159$, e così via. Ma la radice di $3297,6$ è $57,4247$; e la radice di $32,976$ è $5,74247$. E quindi la radice di $9,9856$ è $3,10$. Ma la radice di $0,99856$ è $0,999279$, ecc.

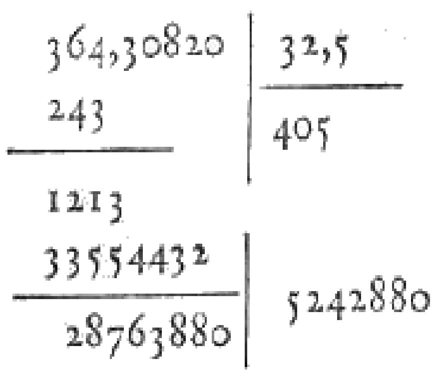
Ci si può convincere della verità di questi risultati con gli esempi nella figura sotto. Un punto con una virgola separa i decimali dagli interi.



Pertanto per estrarre la radice cubica di 13312053, bisogna cominciare col dividere questo numero con virgole, cioè 13, 312, 053 . Si deve poi scrivere la cifra 2, il cui cubo è 8, cubo che avvicina il più possibile il valore di 13, perché non vi è un cubo uguale a 13. Sottraete questo cubo, rimarrà 5 a fianco del quale discendete 3, e avrete 53, che diviso per il triplo del quadrato di 2, o 12, è contenuto 4 volte nel 53. Ma siccome la radice 24 elevata al cubo darebbe 13824, numero troppo grande per poter essere sottratto da 13312 che precede la seconda virgola, si deve scrivere solo 3 nel quoziente. Allora, su un foglio a parte, fate il prodotto di 23 per 23 e avrete 529, che moltiplicato ancora per 23 dà il cubo 12167, e questo sottratto da 13312, dà come resto 1145; a fianco di questo resto discendete 0, o prima cifra dell'ultimo blocco, e ciò dà 11450; dividetelo per il triplo del quadrato di 23, o per 3×529, o 1587, avrete 7 al quoziente, ed è la terza cifra della radice. Allora 237 moltiplicato per 237, dà 56169, che moltiplicato ancora per 237 dà il cubo 13312053, e questo sottratto dal numero dato, dà come resto 0. Pertanto è evidente che la radice cercata è 237.



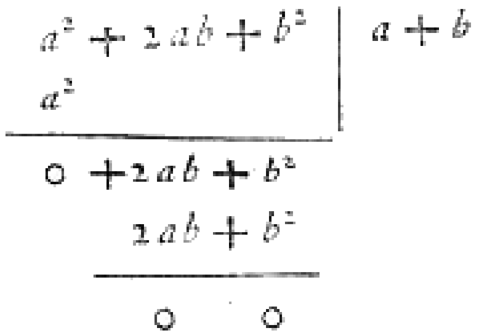
E così per estrarre la radice quinta di 36430820, separatge con una virgola cinque cifre verso destra, e 3, la cui quinta potenza 243 è la più vicina a 364, che è a sinistra della virgola, e deve essere scritta nella radice. Sottraete la sua quinta potenza 243 da 364, e rimarrà 121, a fianco del quale discendete 3, prima cifra del secondo gruppo, e avrete 1213, che diviso per il quintuplo della quarta potenza di 3, o per 5×81, o 405, darà al quoziente 2 come seconda cifra della radice. Il quoziente 32 moltiplicato tre volte per se stesso sarà elevato alla sua quarta potenza 1048576; e questo moltiplicato per 32, dà la quinta potenza 33554432, che sottratta dal numero dato dà come resto 2876388. Così 32 è un numero intero della radice, ma non è esatto. Se quindi si vuole proseguire l'operazione con i decimali, bisogna porre uno 0 a fianco dell'ultimo resto e dividere il numero che deriverà dal quintuplo della quarta potenza del quoziente già trovato, cercando, ad esempio, quante volte 5×1048576, o 5242880, è contenuto nel $2876388, 0$ e si otterrà la terza cifra della radice, o il primo decimale 5. E così sottraendo dal numero dato la quinta potenza di $32, 5$, e dividendo il resto per il quintuplo della sua quarta potenza, si potrà ottenere la quarta cifra della radice. E così all'*Infinito*.



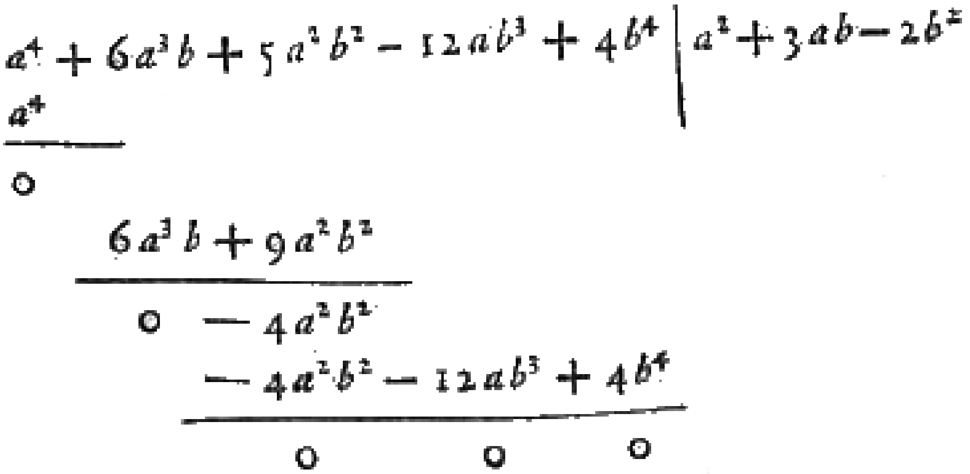
Per estrarre la radice quadrata-quadrata è possibile estrarre due volte la radice quadrata, poiché $\sqrt[4]{}$ è pari alla radice quadrata della radice quadrata. E quando si deve estrarre la radice cubo-cubica, bisogna dapprima estrarre la radice cubica e poi quella quadrata, poiché $\sqrt[6]{}$ è pari a $\sqrt[3\times 2]{}$. Alcuni hanno creduto che non si potesse chiamare questa specie di radice cubo-cubica, ma quadrato-cubica. Bisogna estendere questa osservazione a tutte le radici i cui esponenti non sono numeri primi.

L'estrazione di radici di quantità algebriche semplici, l'operazione non presenta alcuna difficoltà. È chiaro, per esempio, che $\sqrt{aa}$ è a, e che $\sqrt{aacc}$ è ac, e che $\sqrt{9aacc}$ è $3ac$, e che $\sqrt{49a^4xx}$ è $7ax$. E anche che $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$, o $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$ è $\frac{aa}{c}$, e che $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ è $\frac{aa}{c}$, e che $\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ è $\frac{3az}{5b}$, e che $\sqrt{\frac{4}{9}}$ è $\frac{2}{3}$, e che $\sqrt[3]{\frac{8b6}{27a^3}}$ è $\frac{2bb}{3a}$, e che $\sqrt[4]{aabb}$ è $\sqrt{ab}$. Inoltre, che $b\sqrt{aacc}$, o b per $\sqrt{aacc}$, è b per ac o abc. E che $3c\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ è $3c \times \frac{3az}{5b}$, o $\frac{9acz}{5b}$. E che $\frac{a3x}{c}\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$ è $\frac{a3}{c} \times \frac{2bxx}{9a}$, o $\frac{2abxx6bx^3}{9ac}$.

Dico, la cosa è del tutto evidente, che le quantità sono ottenute dalla moltiplicazione della radice con se stessa (come $a \times a$, $aacc$ da ac per ac, $9aacc$ da $3ac$ per $3ac$, ecc.). Ma quando le quantità sono formate da parecchi termini, la procedura ricalca quella numerica. Pertanto, per estrarre la radice quadrata di aa $2ab$ bb, al primo posto, si scrive la radice del primo termine aa, cioè a nel quoziente, e dopo aver sottratto il suo quadrato $a \times a$, rimarrà $2ab$ bb per trovare il resto della radice. Dico quindi, quante volte il doppio del quoziente, o $2a$, è contenuto nel primo termine del resto $2ab$? Rispondo b [volte], e scrivo quindi b nel quoziente, e dopo aver sottratto il prodotto di b per $\overline{2a\ b}$, o $2ab$ bb, non rimarrà nulla. Ciò indica la fine del lavoro, la radice ottenuta è a b.



E quindi, per estrarre la radice di a^4 $6a^3b$ $5a^2bb - 12ab^3$ $4b^4$, prima, porre nel quoziente la radice del primo termine a^4, cioè aa, e dopo aver sottratto il suo quadrato $aa \times aa$, o a^4, rimarrà $6a^3b$ $5aabb - 12ab^3$ $4b^4$ per trovare il resto della radice. Dico pertanto, quante volte $2aa$ è contenuto in $6a^3b$? Risposta $3ab$; da ciò scrivo $3ab$ nel quoziente, e dopo aver sottratto il prodotto $3ab$ per $2aa$ $3ab$, o $6a^3b$ $9aabb$, rimarrà $-4aabb - 12ab^3$ $4b^4$ per completare il lavoro. Pertanto dico ancora, quante volte il doppio del quoziente, cioè $2aa$ $6ab$ è contenuto in $-4aab - 12ab^3$, o, che è la stessa cosa, dico, quante volte il doppio del primo termine del quoziente, o $2aa$, è contenuto nel primo termine del resto $-4aabb$? Risposta $-2bb$. Poi dopo aver scritto $-2bb$ nel quoziente, e sottratto il prodotto $-2bb$ per $2aa$ $6ab - 2bb$, o $-4aabb - 12ab^3$ $4b^4$, non rimarrà nulla. Da ciò segue, che la radice è aa $3ab - 2bb$.



E quindi la radice della quantità $xx - ax$ $\frac{1}{4}aa$ è $x - \frac{1}{2}a$; e la radice della quantità y^4 $4y^3 - 8y$ 4 è yy $2y - 2$; e la radice della quantità $16a^4 - 24aaxx$ $9x^4$ $12bbxx - 16aabb$ $4b^4$ è $3xx - 4aa$ $2bb$, come mostrato nella figura:

$$\begin{array}{l|l}
x^2 - ax + \frac{a^2}{4} & x - \frac{1}{2}a \\ \cline{2-2}
x^2 & \\ \cline{1-1}
0 & \\
\quad - ax + \frac{a^2}{4} & \\
\quad - ax + \frac{a^2}{4} & \\ \cline{1-1}
\quad\ 0 \quad\ 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
9x^4 \begin{array}{l} -24a^2 \\ +12b^2 \end{array} \Big| \; x^2 \begin{array}{l} +16a^4 \\ -16a^2b^2 \\ +4^4b \end{array} & 3x^2 - 4a^2 + 2b^2 \\ \cline{2-2}
9x^4 & \\ \cline{1-1}
0 & \\
\quad \begin{array}{l} -24a^2 \\ +12b^2 \end{array} \Big| \; x^2 \begin{array}{l} +16a^4 \\ -16a^2b^2 \\ +4b^4 \end{array} & \\ \cline{1-1}
\quad 0 \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Se si vuole estrarre la radice cubica di a^3 $3aab$ $3abb$ b^3, l'operazione è eseguita così:

$$\begin{array}{l|l}
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & a + b \\ \cline{2-2}
a^3 & 3a^2 \\ \cline{1-1}
0 & \\
\quad + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Estrarre prima la radice cubica del primo termine a^3, cioè a, e lo poniamo nel quoziente: poi, sottraendo il suo cubo a^3, dico, quante volte il suo triplo quadrato, o $3aa$, è contenuto nel termine successivo del resto $3aab$? e si ottiene b; si scrive quindi b nel quoziente, e sottraendo il cubo del quoziente, rimarrà 0. Pertanto a b è la radice.

Con la stessa modalità, se deve essere estratta la radice cubica di z^6 $6z^5 - 40z^3$ $96z - 64$, si otterrà zz $2z - 4$. E così per le radici superiori.

Sulla RIDUZIONE DI FRAZIONI E RADICALI [Quantità]

La riduzione di frazioni e quantità radicali sia ai loro minimi termini, sia allo stesso denominatore, è molto utile per le precedenti operazioni.

Sulla RIDUZIONE DI FRAZIONI AI MINIMI TERMINI

Le frazioni sono ridotte ai minimi termini dividendo i numeratori e denominatori per il massimo comun divisore. Così la frazione $\frac{a^2c}{bc}$ è ridotta ad una più semplice $\frac{a^2}{b}$ dividendo sia a^2c che bc per c; e $\frac{203}{667}$ è ridotta ad una più semplice dividendo sia 203 che 667 per 29; e $\frac{203a^2c}{607bc}$ è ridotta a $\frac{7a^2}{23b}$ dividendo per $29c$. E così $\frac{6a^3-9ac^2}{6a^23ac}$ diviene $\frac{2a^2-3c^2}{2ac}$ dividendo per $3a$. E $\frac{a^3-a^2bab^2-b^3}{a^2-ab}$ diviene $\frac{a^2b^2}{a}$ dividendo per $a-b$.

Succede spesso che si possa ridurre con questo metodo, i risultati di una moltiplicazione o divisione. Così se si vuole moltiplicare $\frac{2ab^3}{3c^2d}$ per $\frac{9ac^2}{bd^2}$, o dividerlo per $\frac{bd^2}{9ac^2}$, si otterrà $\frac{18a^2b^3c^2}{3bc^2d^3}$, e per riduzione $\frac{6a^2b^2}{d^3}$. Ma in questi casi, è meglio ridurre le quantità prima dell'operazione, dividendoli per il massimo comun divisore.

Così, nell'esempio di prima, dividerà $2ab^3$ e bd^2 per il divisore comune b, e $3c^2d$ e $9ac^2$ per il divisore comune $3c^2$ e si otterrà la frazione $\frac{2ab^2}{d}$ da moltiplicare per $\frac{3a}{d^2}$, o dividere per $\frac{d^2}{3a}$, ottenendo $\frac{6a^2b^2}{d^3}$ come prima. E così

$\frac{a^2}{c}$ moltiplicato per $\frac{c}{b}$ dà $\frac{a^2}{1}$ moltiplicato per $\frac{1}{b}$, o $\frac{a^2}{b}$. E $\frac{a^2}{c}$ diviso per $\frac{b}{c}$ diviene a^2 diviso per b, o $\frac{a^2}{b}$. E $\frac{a^3-ax^2}{xx}$ moltiplicato per $\frac{cx}{a^2ax}$ diviene $\frac{a-x}{x}$ moltiplicato per $\frac{c}{1}$, o $\frac{ac}{x}-c$. E 28 diviso per $\frac{7}{3}$ dà 4 diviso per $\frac{1}{3}$, o 12.

Modo di trovare i Divisori

In questo paragrafo si introduce il metodo di trovare i divisori, per i quali si può dividere una quantità.

Se vi è una semplice quantità, dividetela per il suo minimo divisore, dividete poi il quoziente per il suo minimo divisore, finché rimarrà solo un quoziente indivisibile; allora avrete tutti i divisori primi di quella quantità. Poi moltiplicate tutti questi divisori, a coppie o a terne, quaterne ecc, e avrete anche tutti i divisori composti.

Se si vuole ottenere tutti i divisori del numero 60, dividete per 2, e il quoziente 30 per 2, e il quoziente 15 per 3, e rimarrà il quoziente indivisibile 5. Pertanto i divisori primi sono $1, 2, 2, 3, 5$; quelli composti formati dalle coppie $4, 6, 10, 15$; dalle terne $12, 20, 30$; e da tutti 60.

Ancora, se si vogliono tutti i divisori della quantità $21ab^2$, dividete per 3, e il quoziente $7ab^2$ per 7, e il quoziente ab^2 per a, e il quoziente b^2 per b, e rimarrà il quoziente primo b. Pertanto i divisori primi sono $1, 3, 7, a, b, b$; e quelli composti da coppie $21, 3a, 3b, 7a, 7b, ab, bb$; quelli composti da terne $21a, 21b, 3ab, 3b^2, 7ab, 7b^2, ab^2$; e quelli dalle quaterne $21ab, 21b^2, 3ab^2, 7ab^2$; quelli dalle cinquine $21ab^2$.

Allo stesso modo tutti i divisori di $2abb-6acc$ sono $1, 2, a$, b^2-3ac, $2a$, $2bb-6ac$, $ab^2-3a^2c, 2ab^2-6a^2c$.

Se una quantità, dopo essere stata divisa per tutti i suoi divisori semplici, rimane composta, e si sospetta avere alcuni divisori composti, la si dispone secondo le potenze di ogni lettera, e al posto di quella lettera si sostituiscono successivamente tre o più termini della progressione aritmetica, cioè, $3, 2, 1, 0, -1, -2$. Ne risulteranno tanti valori differenti, che si scrivono con i loro divisori a fianco dei termini della progressione che li avranno prodotti; facendo attenzione a scrivere ogni divisore con un segno positivo o negativo.

Si confrontano poi i divisori che si trovano in un linea con quelli delle altre linee, per vedere se essi non formeranno una progressione aritmetica. E per questo, si inizia del maggiore, per discendere agli inferiori che opera per i divisori di tutti i numeri che procedono dal termine maggiore al minore, seguendo la stessa sequenza della progressione aritmetica $3, 2, 1, 0-1, -2$. Se questa ricerca fornisce qualche progressione nello stesso ordine della prima, ponendo ognuno dei suoi termini a fianco della linea dei divisori che l'ha prodotta, e il termine che, in questa progressione, corrisponderà al termine 0 della progressione iniziale, diviso per la differenza dei termini, e unendo alla lettera che aveva sostituito, formerà una quantità con la quale si eseguirà la divisione.

Se la quantità proposta è $x^3-x^2-10x\ 6$, sostituite uno a uno, i termini di questa progressione $1, 0.-1$, al posto di x. Si avranno i numeri $-4, 6\ 14$. Ponete ognuno di essi con tutti i suoi divisori nella linea del termine della progressione $1, 0, -1$, che l'ha prodotta, come mostrato nell'esempio seguente.

1	4	1. 2. 4.	+. 4.
0	6	1. 2. 3. 6	+ 3.
—1	14	1. 2. 7. 14	+ 2.

Allora, poiché il termine più grande x^3 è divisibile solo per l'unità, cercate tra i divisori qualche progressione i cui termini differiscano solo di una unità, e (procedendo dal più alto al più basso) decrescono come i termini della progressione $1, 0.-1$. Si trova solo una progressione di questo tipo, cioè $4, 3, 2$. Prendete quindi il termine 3, che si trova nella stessa linea del termine 0 della prima progressione $1, 0, -1$, e provate la divisione per $x\ 3$, se va bene, si ottiene $x^2-4x\ 2$.

Di nuovo, se nella quantità $6y^4-y^3-21y^2\ 3y\ 20$, sostituisco di seguito $2, 1, 0, -1-2$ e ottengo i numeri $7, 20, 9$ con tutti i loro divisori, li dispongo come segue:

1	7	1. 7.	7.
0	20	1. 2. 4. 5. 10. 20	4.
—1	9	1. 3. 9	1.

E tra i divisori verifico la presenza di questa progressione aritmetica decrescente $7, 4, 1$. La differenza tra i termini di questa progressione, cioè 3, divide il termine più alto della quantità $6y^4$. Aggiungo quindi il termine 4 che si trova [nella riga] opposta al termine 0, diviso per la differenza tra i termini, cioè 3, e provo la divisione per $y\ \frac{4}{3}$, o, che è la stessa cosa, per $3y\ 4$, e lo scopo è raggiunto, ottenendo $2y^3-3yy-3y\ 5$.

E così, se la quantità è $24a^5-50a^4\ 49a^3-140a^2\ 64a\ 30$, l'operazione sarà la seguente:

2	42	1. 2. 3. 6. 7. 14. 21. 42	+ 3. + 3. + 7.
1	23	1. 23.	+ 1. — 1. + 1.
0	30	1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30	— 1. — 5. — 5.
— 1	297	1. 3. 9. 11. 27. 33. 99. 297	— 3. — 9. — 11.

Qui vi sono tre progressioni, i cui termini $-1. -5. -5$ divisi per le differenze dei termini $2, 4, 6$, dà tre divisori da provare $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$, $a - \frac{5}{6}$. E la divisione per l'ultimo divisore $a - \frac{5}{6}$, o $6a - 5$, funziona, dando $4a^4 - 5a^3 \ 4aa - 20a - 6$.

Se con questo metodo non si trova alcun divisore, o nessuna che divide la quantità proposta, si conclude che questa quantità non ammette un divisore di nessuna potenza. Ma forse è possibile, se vi è una quantità superiore alla terza potenza, ammettere un divisore di seconda potenza. Se il divisore può essere trovato con questo metodo. Sostituire in quella quantità alle lettere, come prima, quattro o più termini di questa progressione $3, 2, 1, 0. -1. -2. -3$. Aggiungere e sottrarre singolarmente tutti i divisori dei numeri che si ottengono o dai quadrati o dai corrispondenti termini di quella progressione, moltiplicati per un certo divisore numerico del termine maggiore della quantità data, e porre a destra contro la progressione la somma e la differenza. Annotare poi tutte le progressioni collaterali che operano attraverso queste somme e differenze. Supporre poi $\mp C$ essere un termine di una tale prima progressione, e $\mp B$ la differenza che si ottiene sottraendo $\mp C$ dal termine superiore successivo che sta contro il termine 1 della prima progressione, e A sia l'anzidetto divisore del termine maggiore, e l sia una lettera che è nella quantità data, allora $All \pm Bl \pm C$ sarà il divisore cercato.

Si supponga che la quantità data sia $x^4 - x^3 - 5xx \ 112x - 6$, per x scrivo in successione $3, 2, 1, 0, -1$, e i numeri che si ottengono $39.6.1. -6. -21. -26$. Li dispongo insieme ai loro divisori in un'altra colonna nella stessa linea, e aggiungo e sottraggo i divisori ai e dai quadrati dei termini della prima progressione, moltiplicati per il divisore numerico del termine x^4, che è l'unità, cioè, ai e dai termini 9.4.1.0.1.4, e dispongo analogamente somme e differenze sul lato. Poi scrivo, come segue la progressione che si hanno tra lo stesso. Faccio poi uso dei termini di questa progressione 2 e -3, che si trova opposta al termine 0 in quella progressione che si trova nella prima colonna, successivamente per $\mp C$ e utilizzo le differenze che si ottengono sottraendo questi termini dai termini superiori 0 e 0, cioè -2 e 3 rispettivamente per $\mp B$. Anche unità per A; e x per l. E così nello spazio di $All \pm Bl \pm C$, ho questi due divisori da provare, cioè $xx \ 2x - 2$, e $xx - 3x \ 3$, che vanno bene entrambi.

3	39	1.3.13.39	9	−30. −4.6.8.10.12.22.48	−4.	6
2	6	1.2. 3. 6	4	−2. 1.2.3.5.6.7.10.	−2.	3
1	1	1.	1	0. 2.	0.	0
0	6	1.2. 3. 6	0	−6. −3. −2. −1. 1.2.3.6	2	−3
−1	21	1.3. 7.21	1	−20. −6. −2 0.2.4.8.22	4	−6
−2	26	1.2.13.26	4	−22. −9.2.3.5.6.17.30	6	−9

Se è assegnata la quantità $3y^5 - 6y^4 \ y^3 - 8yy - 14y \ 14$, l'operazione si farà nel modo seguente: primo, provare aggiungendo e sottraendo i quadrati ai e dai termini della progressione $1.0. -1$, facendo uso dei primo 1, ma non funziona.

3	170		27		−7.	17
2	38	1.2.19.38	12	−16 −7.10.11.13.14.31.50	−7.	−11
1	10	1.2. 5.10	3	−7. −2. 1.2.4.5.8.13	−7.	5
0	14	1.2. 7.14	0	−14 −7. −2. −1.1.2.7.14	−7.	−1
−1	10	1.2. 5.10	3	−7. −2. 1.2.4 5.8.13	−7.	−7
−2	190		12		−7.	−13

Poi nella posizione di A, uso il 3, l'altro divisore del termine maggiore; e a questi quadrati moltiplicati per 3, aggiungo e tolgo i divisori ai e dai prodotti, cioè, 12.3.0.3, e trovo queste due progressioni nei termini risultanti, $-7. -7. -7. -7$, e $11.5. -1. -7$. Ho trascurato i divisori dei termini agli estremi 170 e 190. Poi, continuando la progressione in avanti e indietro, prendo i termini successivi, cioè -7 e 17 in alto, e -7 e -13 in basso, e provo se questi possono essere tolti dai numeri 27 e 12, che stanno dirimpetto a quelli nella quarta colonna, le [loro] differenze dividono questi numeri 170 e 190, che stanno di fronte a quelli nella seconda colonna. E la differenza tra 27 e -7, cioè 34, divide 170; e la differenza tra 12 e -7, cioè 19, divide 190. Anche la differenza tra 12 e 13, cioè 10, divide 170, ma la differenza tra 27 e 17, cioè 25, non divide 190. Non considero quindi l'ultima progressione. In accordo con la precedente, $\mp C$ è -7, e $\mp B$ è zero; il termine della progressione avente differenza nulla. Pertanto il divisore da provare $All \pm Bl \pm C$ sarà $3yy \ 7$. E la divisione funzione, dando come risultato $y^3 - 2yy - 2y \ 2$.

Se dopo questa procedura, non si trovano divisori, concludiamo che la quantità proposta non ammetterà un divisore di potenza due. Lo stesso metodo può essere esteso alla ricerca di divisori di potenza maggiore, cercando nelle somme e nelle differenze, non progressioni aritmetiche, ma altre progressioni qualsiasi, le cui differenze prime, seconde, terze, ecc., saranno in progressione aritmetica; ma non bisogna fermarvi le iniziali.

Quando una quantità proposta contiene due dimensioni e tutti i suoi termini contengono lo stesso numero di potenza, mettete al posto di una di queste l'unità; poi, con le regole precedenti, cercate il divisore di questa quantità e completate le dimensioni del divisore, rimettendo al posto dell'unità la potenza che avete eliminato.

Per esempio, se la quantità fosse $6y^4 - cy^3 - 21c^2y^2 \ 3c^3y \ 20c^4$,nella quale tutti i termini sono di quarto grado; al posto di c mettete 1 e la quantità diverrà $6y^4 - y^3 - 21y^2 \ 3y \ 20$, da cui si troverà, come sopra, che il divisore è $3y$ 4 e completando la potenza mancante all'ultimo termine rimettendo c, il divisore cercato sarà $3y$ $4c$. Se la quantità fosse $x^4 - bx^3 - 5b^2x^2$ $12b^3x - 6b^4$,mettete 1 per b, avrete per risultato $x^4 - x^3 - 5x^2$ $12x - 6$, il cui divisore è x^2 $2x - 2$. Completo le potenze che gli mancano rimettendo b e il divisore trovato diviene x^2 $2bx - 2b^2$.

Quando vi sono tre o un maggior numero di potenze nella quantità proposta e tutti i suoi termini hanno lo stesso numero di potenze [*grado*], se ne può trovare il divisore con le regole precedenti; ma si potrebbe abbreviare l'operazione in questo modo: Cercate tutti i divisori di tutti i termini nei quali una delle lettere non si trova; cercate analogamente tutti i divisori di tutti i termini nei quali una seconda lettera non si trova; cercate di nuovo tutti i divisori di tutti i termini nei quali una terza, una quarta, una quinta lettera non si trova. Percorrete in questo modo tutte le lettere. Scrivete rispettivamente tutti questi divisori sulla stessa linea orizzontale delle lettere; esaminate poi se in qualche serie di divisoti i cui termini sono presi da una linea orizzontale all'altra, esaminate, dico, se le parti di questi divisori, composti da una sola lettera, si ripetono tante volte meno una rispetto alle lettere presenti nella quantità proposta e se le parti dei divisori, composti di due lettere si ripetono tante volte meno due delle lettere della quantità proposta. Se è così, tutte queste parti prese una sola volta con il loro segno formeranno il divisore cercato.

Sia la quantità proposta $12x^3 - 14bx^2$ $9cx^2 - 12b^2x - 6bcx$ $8c^2x$ $8b^3 - 12b^2c - 4bc^2$ $6c^3$; cercando con le regole precedenti i divisori di una potenza [*primo grado*] dei termini $8b^3 - 12b^2c - 4bc^2$ $6c^3$, nei quali non vi sono x, si troverà che questi divisori sono $2b - 3c$ e $4b - 6c$. L'unico divisore di $12x^3$ $9cx^2$ $8c^2x$ $6c^3$,dove b non è presente, è $4x$ $3c$ e i divisori dei termini $12x^3 - 14bx^2 - 12b^2x$ $8b^3$, nei quali manca c, sono $2x - b$ e $4x - 2b$. Dispongo questi divisori nelle righe delle lettere, come potete vedere nell'esempio sotto, cioè pongo i divisori dei termini dove manca x, sulla linea delle x; i divisori dei termini dove manca c sulla linea dei c; e quelli dei termini dove manca b sulla linea dei b.

$$\begin{array}{c|l} x & 2b - 3c,\ 4b - 6c. \\ b & 4x + 3c. \\ c & 2x - b,\quad 4x - 2b. \end{array}$$

Siccome vi sono tre lettere nella quantità proposta e ogni parte dei divisori ne contiene uno solo, bisogna che nella serie dei divisori queste parti si trovino ripetute due volte; ma nei divisori $4b - 6c$ e $2x - b$, le parti $4b, 6c, 2x, b$ si incontrano solo una volta, non vi sono più al di fuori divisori di cui fanno parte; di conseguenza trascuro questi divisori e me ne restano solo tre, che sono $2b - 3c$, $4x$ $3c$ e $4x - 2b$. Questi divisori formano una serie che se continua con tutte le lettere x, b, c e ognuna delle loro parti $2b, 4x, 3c$ si trovano due volte ripetute nella serie, come deve essere e con gli stessi segni, purché si cambino quelli del divisore $2b - 3c$ e che si scriva come $-2b$ $3c$, ciò che è sempre permesso, poiché quando una quantità è il divisore di un'altra, essa lo sarà ancora se si cambiano i suoi segni. Prendo quindi una sola volta ciascuna delle parti di questi divisori con i loro segni e la somma $-2b$ $3c$ $4x$ sarà il divisore cercato. Infatti, se si impiega come divisore la quantità proposta, si ottiene per quoziente $3x^2 - 2bx$ $2c^2 - 4b^2$.

Se la quantità proposta è [*polinomio omogeneo*]

$$\begin{gathered} 12x^5 - 10ax^4 - 9bx^4 - 26a^2x^3\ 12abx^3\ 6b^2x^3\ 24a^3x^2 \\ -8a^2bx^2 - 8ab^2x^2 - 24b^3x^2\ 4a^3bx\ 6a^2b^2x - 12ab^3x \\ 18b^4x\ 12a^4b\ 32a^2b^3 - 12b^5 \end{gathered}$$

pongo i divisori dei termini in cui manca x sulla riga delle x; quelli dei termini in cui manca a sulla riga delle a; e quelli dei termini in cui manca b sulla riga delle b, come si può vedere nell'esempio.

$$\begin{array}{c|l} x & b,\ 2b,\ 4b,\ a^2 + 3b^2,\ 2a^2 + 6b^2,\ 4a^2 + 12b^2,\ b^2 - 3a^2,\ 2b^2 - \\ & 6a^2,\ 4b^2 - 12a^2. \\ a & 4x^2 - 3bx + 2b^2,\ 12x^2 - 9bx + 6b^2. \\ b & x,\ 2x,\ 3x - 4a,\ 6x - 8a,\ 3x^2 - 4ax,\ 6x^2 - 8ax,\ 2x^2 + \\ & ax - 3a^2,\ 4x^2 + 2ax - 6a^2. \end{array}$$

Poi è chiaro che bisogna eliminare tutti i divisori di una dimensione [1°*grado*], poiché i semplici, come $b, 2b, 4b, x, 2x$, ecc., e le parti composte $3x - 4a$, $6x - 8a$ si trovano una sola volta tra i divisori; vi sono tre lettere nella quantità proposta e i divisori semplici di una sola dimensione e le parti di una sola dimensione dei divisori composti come $3x - 4a$ contenendo una sola lettera, dovranno comparire due volte.

Serve pure eliminare i divisori di due dimensioni [2°*grado*], come a^2 $3b^2$, $2a^2$ $6b^2$, $4a^2$ $12b^2$, $b^2 - 3a^2$ poiché le parti di questi divisori, $a^2, 2a^2, 4a^2, b^2$ e $4b^2$ contengono ciascuno un'unica lettera, cioè a, cioè b e si trovano una sola volta tra i divisori. Ma il divisore $2b^2 - 6a^2$ che rimane solo nella riga delle x, ha due parti che contengono ciascuna una sola lettera, ma queste parti si trovano ripetute in altri divisori; la parte $2b^2$, per esempio, si ritrova nel divisore $4x^2 - 3bx$ $2b^2$ e la parte $6a^2$ si ritrova nel divisore $4x^2$ $2ax - 6a^2$. Vi è di più, questi tre divisori $2b^2 - 6a$, $4x^2 - 3bx$ $2b^2$ e $4x^2$ $2ax - 6a^2$ formano una serie che percorre le righe delle te lettere x, a, b; e tutte le loro parti $2b^2, 6a^2, 4x^2$,che contengono una sola lettera, o b, o a, o x, si ritrovano due volte con gli stessi segni; le altre parti di questi stessi divisori $3bx, 2ax$ si ritrovano in verità una sola volta; ma siccome esse sono composte ognuna da due lettere devono essere ammesse. Così unendo le parti differenti di questi tre divisori $2b^2, 6a^2, 4x^2, 3bx, 2ax$ con i loro rispettivi segni, esse formeranno il divisore cercato $2b^2 - 6a^2$ $4x^2 - 3bx$ $2ax$. Dividete quindi la quantità proposta per questo divisore e otterrete come quoziente $3x^3 - 4ax^2 - 2a^2b - 6b^3$.

Se tutti i termini della quantità proposta non hanno lo stesso numero di dimensioni [*stesso grado*], bisogna ricondurli moltiplicando i termini meno elevati per le dimensioni di una lettera qualunque; poi, avendo trovato il divisore con le regole precedenti, bisogna cancellare la lettera introdotta.

Sia, per esempio, la quantità proposta [*polinomio non omogeneo*]

$$12x^3 - 14bx^2 \ 9x^2 - 12b^2x - 6bx \ 8x \ 8b^3 - 12b^2 - 4b \ 6$$

Prendete la lettera qualsiasi c e con le sue dimensioni completate quelle della quantità proposta in questa maniera:

$$12x^3 - 14bx^2 \ 9cx^2 - 12b^2x - 6bcx \ 8c^2x \ 8b^3 - 12b^2c - 4bc^2 \ 6c^3$$

Avendo trovato il divisore $4x - 2b \ 3c$ di questa nuova quantità, eliminate c e il divisore della quantità proposta è $4x - 2b \ 3$.

Qualche volta si trovano i divisori più facilmente che con le regole precedenti. Per esempio, quando nella quantità proposta una lettera si trova in una sola dimensione, bisogna cercare il massimo divisore comune dei termini nei quali questa lettera si trova e dei termini nei quali non è presente e questo divisore comune dividerà tutta la quantità proposta; e se non si trova alcun divisore comune, può essere che la proposta non abbia divisore. Per esempio, sia la quantità proposta

$$x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 \ 18a^3x \ cx^3 - acx^2 - 8a^2cx \ 6a^3c - 8a^4$$

cercate il divisore comune dei termini $cx^3 - acx^2 - 8a^2cx \ 6a^3c$, dove c ha una dimensione sola e degli altri termini $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 \ 18a^3x - 8a^4$ e questo divisore comune $x^2 \ 2ax - 2a^2$ dividerà la quantità intera.

Quando la sola ispezione di due quantità non basta a scoprire il loro divisore comune, si giunge a individuarlo togliendo continuamente la più piccola delle due quantità dalla più grande e poi il resto, della più piccola; e il divisore cercato sarà infine quello che non lascerà alcun resto.

Così, per trovare il massimo divisore comune dei numeri 203 e 667, sottraete tre volte 203 da 667, sottraete poi tre volte il resto 58 da 203 e due volte il resto 29 da 58 e avrete resto zero. Ciò indica che 29 è il divisore cercato.

Il modo per trovare il divisore comune delle quantità letterali non è diverso da quello dei numeri. Quando sono composte, vi si giunge eliminando la più piccola, o i suoi multipli, della più grande, ma bisogna per questo ordinare le due quantità e il resto, rispetto a una stessa lettera, come si fa per la divisione; e a ogni sottrazione, ridurre le quantità dividendole per i loro divisori semplici o per qualche quantità che divide tutti i loro termini, come faremmo dei divisori semplici. Così per trovare il divisore comune del numeratore e del denominatore della frazione

$$\frac{x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 \ 18a^3x - 8a^4}{x^3 - ax^2 - 8a^2x \ 6a^3}$$

moltiplicate il denominatore per x, affinché il suo primo termine divenga uguale al primo termine del numeratore; fate po la sottrazione e resterà $-2ax^3 \ 12a^3x - 8a^4$; quantità che si può ridurre dividendola per $-2a$ e che diviene $x^3 - 6a^2x \ 4a^3$. Eliminandola dal denominatore, resterà $-ax^2 - 2a^2x \ 2a^3$. Dividete ancora quest'ultima quantità per $-a$ ed essa diverrà $x^2 \ 2ax - 2a^2$. Moltiplicatela per x, affinché il suo primo termine divenga uguale al primo termine dell'ultima quantità sottratta $x^3 - 6a^2x \ 4a^3$ e dalla quale bisogna ora sottrarre; e fatta l'operazione, resterà $-2ax^2 \ 4a^2x \ 4a^3$ e siccome quest'ultima quantità è assolutamente la stessa del resto precedente, se la elimina non rimarrà nulla: di conseguenza, è il divisore cercato. Dividete ora il numeratore e il denominatore della frazione data per questo divisore ed essa sarà ridotta alla frazione più semplice

$$\frac{x^2 - 5ax \ 4a^2}{x - 3a}$$

Analogamente se si avesse la frazione a^{2}-ab+b^{2}

$$\frac{6a^5 \ 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2}{9a^3b - 27a^2bc - 6abc^2 \ 18bc^3}$$

bisognerebbe cominciare col ridurre o suoi termini dividendo il numeratore per a^2e il denominatore per $3b$; poi togliendo il doppio di $3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 \ 6c^3$ da $6a^3 \ 15a^2b - 4ac^2 - 10bc^2$, rimarrà

$$\begin{array}{r|cr} 15b & \multirow{2}{*}{a^2} & -10bc^2 \\ 18c & & -12c^3 \end{array}$$

quantità che può essere ridotta dividendo ognuno dei suoi due termini per $5b \ 6c$ (come se $5b \ 6c$ fosse un divisore semplice) ed essa diviene $3a^2 - 2c^2$. Moltiplicatela per a, e toglietela da $3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 \ 6c^3$ e il secondo resto sarà $-9a^2c \ 6c^3$ che si può semplificare dividendolo per $-3c$ e diviene $3a^2 - 2c^2$come il precedente; per questo $3a^2 - 2c^2$è il divisore comune cercato. Dividete quindi il numeratore e il denominatore della frazione proposta per questo divisore ed essa si troverà ridotta a

$$\frac{2a^3 \ 5a^2b}{3ab - 9bc}$$

Quando non si è potuto trovare con questo metodo un divisore comune, si può essere sicuri che non c'è, a meno che non venga da quantità che sono servite a ridurre il numeratore e il denominatore, come per esempio, nella frazione

$$\frac{a^2d^2 - c^2d^2 - a^2c^2\ c^4}{4a^2d - 4acd - 2ac^2\ 2c^3}$$

se si dispongono tutti i termini secondi le dimensioni della lettera d, il numeratore diverrà

$$\begin{array}{r|cc} a^2 & & -a^2c^2 \\ -c^2 & d^2 & c^4 \end{array}$$

e il denominatore

$$\begin{array}{r|cc} 4a^2 & & -2ac^2 \\ -4ac & d^2 & 2c^3 \end{array}$$

Bisogna cominciare con il ridurli dividendo ogni termine del numeratore per $a^2 - c^2$ e ogni termine del denominatore per $2a - 2c$, come se $a^2 - c^2$ e $2a - 2c$ fossero quantità semplici. Allora il numeratore sarà ridotto a $d^2 - c^2$e il denominatore a $2ad - c^2$ e queste due quantità così preparate non hanno più alcun divisore comune; ma i termini $a^2 - c^2$e $2a - 2c$ che sono serviti a ridurre il numeratore e il denominatore, hanno il divisore comune $a - c$, per mezzo del quale si può ridurre la frazione proposta a questa:

$$\frac{ad^2 - cd^2 - ac^2\ c^3}{4ad - 2c^3}$$

Ma se i termini $a^2 - c^2$e $2a - 2c$ non avessero alcun divisore comune, la frazione sarebbe stata irriducibile.

Questo è il metodo generale per trovare i divisori comuni. Ma li si trova quasi sempre in una maniera più semplice cercando tutti i divisori primi dell'uno e dell'altro termine della frazione e provando così, tra questi divisori primi se ve ne è qualcuno che divide l'altro termine senza resto. Così, per ridurre la frazione

$$\frac{a^3 - a^2b\ ab^2 - b^3}{a^2 - ab}$$

ai suoi minimi termini, bisogna trovare i divisori della quantità $a^2 - ab$, che sono a e $a - b$; bisogna provare poi se a o $a - b$ possono dividere senza resto $a^3 - a^2b\ ab^2 - b^3$: $a - b$ lo divide e il quoziente è $a^2\ b^2$. Di modo che la frazione proposta si riduce a

$$\frac{a^2\ b^2}{a}$$

Riduzione delle frazioni ad un denominatore comune

Le frazioni si riducono a un denominatore comune, moltiplicando ogni termine dell'una per il denominatore dell'altra e reciprocamente.

Supponiamo che si abbiano le due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ da ridurre allo stesso denominatore. Moltiplicate i due termini di $\frac{a}{b}$ per d e i due termini di $\frac{c}{d}$ per b ed esse diverranno $\frac{ad}{bd}$ e $\frac{bc}{bd}$. Ora, queste due frazioni hanno il denominatore comune bd. Analogamente, a o $\frac{a}{1}$ e $\frac{ab}{c}$ divengono $\frac{ac}{c}$ e $\frac{ab}{c}$. Ma quando i denominatori hanno un divisore comune, basterà moltiplicare reciprocamente per i quozienti. Così le frazioni $\frac{a^3}{bc}$ e $\frac{a^3}{bd}$ possono essere ricondotte a queste, $\frac{a^3d}{bcd}$ e $\frac{a^3}{bcd}$, moltiplicando alternativamente per i quozienti che si ottengono, dividendo i denominatori per il loro divisore comune b.

Questa riduzione a un denominatore comune è soprattutto utile nell'addizione e sottrazione delle frazioni. Poiché quando due frazioni hanno i denominatori differenti, esse non possono essere unite, prima di essere state ridotte allo stesso denominatore. Così $\frac{a}{b}\ \frac{c}{d}$ diviene, con la riduzione, $\frac{ad}{bd}\ \frac{bc}{bd}$ o $\frac{adbc}{bd}$. E $a\ \frac{ab}{c}$ diviene $\frac{acab}{c}$. E $\frac{a^3}{bc} - \frac{a^3}{bd}$ diviene $\frac{a^3d - a^3c}{bcd}$ o $\frac{\overline{d-c}\cdot a^3}{bcd}$. E $\frac{c^4x^4}{c^2-x^2} - c^2 - x^2$ diviene $\frac{c^4x^4 - c^4 - c^2x^2c^2x^2x^4}{c^2-x^2}$ che si riduce a $\frac{2x^4}{c^2-x^2}$. Analogamente $\frac{2}{3}\ \frac{5}{7}$ diviene $\frac{14}{21}\ \frac{15}{21}$ o $\frac{1415}{21}$ che equivale a $\frac{29}{21}$. E $\frac{11}{6} - \frac{1}{4}$ diviene $\frac{22}{12} - \frac{9}{12}$o $\frac{13}{12}$. E $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$ diviene $\frac{9}{12} - \frac{5}{12}$ o $\frac{4}{12}$,cioè $\frac{1}{3}$. E $3\frac{4}{7}$ o $\frac{3}{1}\ \frac{4}{7}$ diviene $\frac{21}{7}\ \frac{4}{7}$ o $\frac{25}{7}$. E $25\frac{1}{2}$ diviene $\frac{51}{2}$.

Quando le frazioni sono in numero maggiore, bisogna ridurle per parti. Se avete, per esempio, $\frac{a^2}{x} - a\ \frac{2x^2}{3a} - \frac{ax}{a-x}$ cominciate a sottrarre a da $\frac{a^2}{x}$, il resto sarà $\frac{a^2-ax}{x}$; aggiungete a questa quantità $\frac{2x^2}{3a}$ e avrete $\frac{3a^3-3a^2x2x^3}{3ax}$. Sottraete infine da questa ultima quantità $\frac{ax}{a-x}$ e il resto sarà $\frac{3a^4-6a^3x2ax^3-2x^4}{3a^2x-3ax^2}$. Analogamente se avete $3\frac{4}{7} - \frac{2}{3}$, bisogna cominciare col trovare la somma di $3\frac{4}{7}$ che è $\frac{25}{7}$ e poi da quest'ultimo numero sottrarre $\frac{2}{3}$ e il resto è $\frac{61}{21}$.

Riduzione dei radicali ai loro minimi termini

Quando è impossibile estrarre la radice di tutta una quantità radicale, la si può spesso ridurre estraendo quella di uno dei suoi divisori.

È così che $\sqrt{a^2bc}$ diviene $a\sqrt{bc}$, estraendo la radice del divisore a^2. E $\sqrt{48}$ o $\sqrt{16\cdot 3}$ diviene $4\sqrt{3}$ estraendo la radice del divisore 16. $\sqrt{48a^2bc}$ diviene $4a\sqrt{3bc}$, estraendo la radice del divisore $16a^2$. E $\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^24ab^3}{c^2}}$ o

$\sqrt{\frac{\left(a^2-4ab4b^2\right)ab}{c^2}}$ diviene $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$, estraendo la radice del divisore $\frac{a^2-4ab4b^2}{c^2}$. E $\sqrt{\frac{a^2o^2m^2}{p^2z^2}\ \frac{4a^2m^2}{pz^2}}$. o riducendo i due termini allo stesso denominatore $\sqrt{\frac{a^2c^2m^24a^2pm^2}{p^2z^2}}$ diviene estraendo la radice del divisore $\frac{a^2m^2}{p^2z^2}$ comune ai due termini diviene, dico, $\frac{am}{pz}\sqrt{o^2\ 4p}$. E $6\sqrt{\frac{25}{49}\cdot\frac{3}{2}}$ diviene $6\cdot\frac{5}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$ (estraendo la radice del divisore $\frac{25}{49}$) oppure $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, oppure $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$ ed estraendo ancora la radice del denominatore 4, diviene $\frac{15}{7}\sqrt{6}$. È così che $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, o analogamente, $a\sqrt{\frac{ab}{a^2}}$ diviene $\frac{a}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}$ (estraendo la radice del denominatore a^2), o infine $\sqrt{ab}$. E $\sqrt[3]{8a^3b\ 16a^4}$, o ciò che è la stessa cosa, $\sqrt[3]{8a^3\left(b\ 2a\right)}$ diviene $2a\sqrt[3]{b\ 2a}$, estraendo la radice cubica del divisore $8a^3$. Analogamente se si ha $\sqrt[4]{a^3x}$, si può estrarre la radice quarta del suo fattore a^2 che diviene allora $\sqrt{a}$ e moltiplicando per $\sqrt[4]{ax}$, si ha $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{ax}$,o estraendo la radice quarta del fattore a^4, essa diviene $a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$. Allo stesso modo $\sqrt[6]{a^7x^5}$ può essere cambiato in $a\sqrt[6]{ax^5}$, oppure in $xa\sqrt[6]{\frac{a}{x}}$, o ancora in $\sqrt{ax}\sqrt[3]{a^3x}$.

Del resto, questa riduzione non serve solo a semplificare le espressioni delle quantità radicali, ma anche a sommarle e a sottrarle, quando esse sono ridotte ai loro minimi termini, purché i loro segni radicali[*indici delle radici*] abbiano lo stesso grado; poiché altrimenti l'addizione e la sottrazione sarebbero impossibili: è così che $\sqrt{48}\ \sqrt{75}$, o che è la stessa cosa $\sqrt{16\cdot 3}\ \sqrt{25\cdot 3}$ divengono, con la riduzione, $4\sqrt{3}\ 5\sqrt{3}$ o $9\sqrt{3}$. E $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$diviene $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$ o $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. Allo stesso modo $\sqrt{\frac{4ab^2}{c^2}}\ \sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^24ab^3}{c^2}}$, oppure $\sqrt{\frac{4b^2\cdot ab}{c^2}}\ \sqrt{\frac{\left(a^2-4ab4b^2\right)ab}{c^2}}$ diviene, tirando fuori dal radicale ciò che questa quantità contiene di razionale $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}\ \frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$, che si riduce a $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. E $\sqrt[3]{8a^3b\ 16a^4}-\sqrt[3]{b^4\ 2ab^3}$, o che è la stessa cosa, $\sqrt[3]{8a^3\left(b\ 2a\right)}-\sqrt[3]{b^3\left(b\ 2a\right)}$ ed estraendo da questa quantità tutto ciò che è razionale, essa diviene $2a\sqrt[3]{b\ 2a}\ b\sqrt[3]{b\ 2a}$ che si riduce a $\overline{2a-b}\sqrt[3]{b\ 2a}$.

Riduzione dei radicali allo stesso indice

Quando si hanno quantità radicali di differenti indici da moltiplicare o dividere, bisogna dapprima ricondurli allo stesso indice; e ciò si fa assegnando per esponente al loro radicale comune il più piccolo numero che possa essere diviso senza resto dagli altri esponenti; e moltiplicando gli esponenti delle quantità sotto il segno per lo stesso numero che è servito a moltiplicare l'esponente del segno. Così $\sqrt{ax}$ da moltiplicare per $\sqrt[3]{a^2x}$ diviene dapprima $\sqrt[6]{a^3x^3}$ che bisogna moltiplicare per $\sqrt[6]{a^4x^2}$ ottenendo $\sqrt[6]{a^7x^5}$. E $\sqrt{a}$ per $\sqrt[4]{ax}$, diviene $\sqrt[4]{a^2}$ da moltiplicare per $\sqrt[4]{ax}$ ottenendo $\sqrt[4]{a^3x}$. E $\sqrt{6}$ per $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$ diviene $\sqrt[4]{36}$ da moltiplicare per $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$ ottenendo $\sqrt[4]{\frac{180}{6}}$ o $\sqrt[4]{30}$. Per lo stesso motivo, $a\sqrt{bc}$ diviene $\sqrt{a^2}$ moltiplicando per $\sqrt{bc}$ o $\sqrt{a^2bc}$. E $4a\sqrt{3bc}$ diviene $\sqrt{16a^2}$, moltiplicando per $\sqrt{3bc}$ o $\sqrt{48a^2bc}$. E $2a\sqrt[3]{b\ 2a}$ diviene $\sqrt[3]{8a^3}$,moltiplicando per $\sqrt[3]{b\ 2a}$ o $\sqrt[3]{8a^3b\ 16a^4}$. Analogamente ancora $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ diviene $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{b^2}}$ o $\sqrt{\frac{ac}{b^2}}$. E $\frac{6ab^2}{\sqrt{18ab^2}}$diviene $\frac{\sqrt{38a^2b^4}}{\sqrt{18ab^2}}$ o $\sqrt{2ab}$. E così via.

Riduzione dei radicali alle loro espressioni radicali più semplice mediante l'estrazione di radici

Quando le radici sono composte da una parte razionale e da una parte radicale quadrata, bisogna estrarre la radice nel modo seguente:

A indicherà la parte più considerevole di una quantità qualsiasi proposta e B la minore; $\frac{A\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ sarà il quadrato della parte maggiore della radice e $\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ sarà il quadrato della più piccola che bisognerà unire alla maggiore con il segno di B.

Se la quantità proposta è, per esempio, $3\ \sqrt{8}$, scrivendo 3 per A e $\sqrt{8}$ per B; $\sqrt{A^2-B^2}$sarà 1 e il quadrato della parte maggiore della radice sarà $\frac{31}{2}$ o 2 e il quadrato della parte più piccola sarà $\frac{3-1}{2}$ o 1; pertanto la radice della quantità proposta è $\sqrt{1}\ \sqrt{2}$ o $1\ \sqrt{2}$.

Se si tratta di trovare la radice di $\sqrt{32}-\sqrt{24}$, pongo $A\ \ \sqrt{32}$ e $B\ \ \sqrt{24}$, allora $\sqrt{A^2-B^2}$ diviene $\sqrt{32-24}\ \ \sqrt{8}$ e $\frac{A\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ diviene $\frac{\sqrt{32}\sqrt{8}}{2}$ o $3\sqrt{2}$; e $\frac{A\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ diviene $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$ o $\sqrt{2}$. Cioè, il quadrato della parte maggiore della radice è $3\sqrt{2}$ e il quadrato della più piccola è $\sqrt{2}$. Di conseguenza, la radice quadrata della proposta è $\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$.

Allo stesso modo se si ha $a^2\ 2x\sqrt{a^2-x^2}$di cui bisogna estrarre la radice quadrata, posti $A\ \ a^2$ e $B\ \ 2x\sqrt{a^2-x^2}$ e avrete $A^2-B^2\ \ a^4-4x^2\left(a^2-x^2\right)$ o $a^4-4a^2x^2\ 4x^4$ la cui radice è a^2-2x^2. Il quadrato della parte più grande sarà quindi $\frac{2a^2-2x^2}{2}$ o a^2-x^2e il quadrato della più piccola $\frac{a^2-\left(a^2-2x^2\right)}{2}$ o x^2 e, di conseguenza, la radice della proposta è $\sqrt{x^2}\ \sqrt{a^2-x^2}$ o $x\ \sqrt{a^2-x^2}$. Se si ha la quantità $a^2\ 5ax-2a\sqrt{ax\ 4x^2}$ di cui bisogna estrarre la radice quadrata, posti $a^2\ 5ax\ \ A$ e $2a\sqrt{ax\ 4x^2}\ \ B$, allora A^2-B^2 diverrà $a^4\ 10a^3x\ 25a^2x^2-4a^2x-16a^2x^2$ che si riduce a $a^4\ 6a^3x\ 9a^2x^2$,la cui radice quadrata è $a^2\ 3ax$, valore di $\sqrt{A^2-B^2}$. Ora il quadrato della parte maggiore della radice o $\frac{A\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ $\frac{a^2 5ax a^2 3ax}{2}$ a^2 $4ax$ e il quadrato della parte più piccola è $\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ $\frac{a^2 5ax-\left(a^2 3ax\right)}{2}$ ax. Pertanto, la radice quadrata della quantità proposta è $\sqrt{a^2 \ 4ax}-\sqrt{ax}$.

Infine se si chiede la radice di $6 \ \sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$, pongo $6 \ \sqrt{8} \ \ A$ e $B \ \ -\sqrt{12}-\sqrt{24}$;allora $A^2-B^2 \ \ 8$. Pertanto la parte più grande della radice è $\sqrt{3 \ \sqrt{8}} \ \ 1 \ \sqrt{2}$ come sopra e la parte più piccola della radice è $\sqrt{3}$. Pertanto alla fine la radice della proposta è $1 \ \sqrt{2} \ \sqrt{3}$.

Del resto, quando si hanno numerose radici di questa specie, si possono trovare le parti della radice molto più rapidamente dividendo il prodotto di due qualsiasi di queste quantità radicali per un'altra quantità radicale che dà per quoziente un numero razionale e intero; la radice del doppio di questo quoziente sarà il doppio della parte della radice cercata. Prendiamo l'ultimo esempio in cui abbiamo $\sqrt{2}, \sqrt{12}, \sqrt{24}$ e facciamo dapprima $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{24}} \ \ 2$; poi $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{24}}{\sqrt{12}} \ \ 4$ e infine $\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{24}}{\sqrt{8}} \ \ 6$; pertanto le parti della radice sono sono $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ come sopra.

Vi sono pure regole per trovare le radici più elevate di quantità numeriche, composte di due parti che, elevate al quadrato, divengono commensurabili.

Sia una quantità composta di due parti $A \pm B$; A sia la più+ grande e il grado della radice sia indicato da c. Cercate il più piccolo numero n la cui potenza n^2sia divisibile senza resto per A^2-B^2 e sia Q il quoziente; prendete in numeri interi il valore più vicino di $\sqrt[c]{A \ B\cdot\sqrt{Q}}$ e il risultato sia r. Dividete $A\sqrt{Q}$ per il suo più grande divisore razionale e il quoziente sia s. Prendete il valore più vicino in numeri interi di $\frac{r\frac{n}{r}}{2s}$ e sia t questo valore; e $\frac{ts\pm\sqrt{t^2s^2-n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ sarà la radice cercata se essa può essere estratta.

Si debba, per esempio, estrarre la radice cubica di $\sqrt{968} \ 25$; si avrà $A^2-B^2 \ \ 343$ i cui divisori sono $7, 7, 7$. Pertanto, $n \ \ 7$ e $Q \ \ 1$. Ne segue $\overline{A \ B}\sqrt{Q}$ o $\sqrt{968} \ 25$ ha un valore un poco più grande di 56; poiché, estraendo la radice approssimata del primo termine, si trova 31, che, aggiunto a 25 dà 56, la cui radice cubica più vicina è 4. Pertanto $r \ \ 4$. Inoltre, $A\sqrt{Q}$ o $\sqrt{968}$ diviene, estraendo tutto ciò che vi è di razionale, $\sqrt{4\cdot 121\cdot 2}$ o $22\sqrt{2}$. Così dividendo $22\sqrt{2}$ per tutta la sua parte razionale, il quoziente è $\sqrt{2}$. Quindi $s \ \ \sqrt{2}$ e $\frac{r\frac{n}{r}}{2s}$ diviene $\frac{4\frac{7}{4}}{2\sqrt{2}} \ \ \frac{\frac{167}{4}}{2\sqrt{2}} \ \ \frac{\frac{23}{4}}{2\sqrt{2}}$, accontentandosi di prendere in numeri interi la sua parte più vicina, $\frac{5}{2\sqrt{2}}$. E prendendo ancora in questa ultima quantità il valore più vicino in numeri interi, essa diviene 2. Si ha quindi $t \ \ 2$ e $ts \ \ 2\sqrt{2}$ e $\sqrt{t^2s^2-n} \ \ \sqrt{8-7} \ \ 1$ e $\sqrt[2c]{Q} \ \ 1$. Pertanto $2\sqrt{2} \ \ 1$ è la radice cercata se la radice la radice della proposta è passibile di estrazione. Ho provato quindi elevando al cubo $2\sqrt{2} \ \ 1$ e mi viene $\sqrt{968} \ 25$. Pertanto la radice è esatta.

Sia ancora $68-\sqrt{4374}$, di cui è facile estrarre la radice cubica. Si avrà $A^2-B^2 \ \ 250$. I suoi divisori sono: $5, 5, 5, 2$. Poniamo $n \ \ 2\times 5 \ \ 10$. E $n^c \ \ 1000$ che si divide senza resto per 250 e dà come quoziente 4. Pertanto $Q \ \ 4$. E $\sqrt[c]{\sqrt{\overline{A \ B}\sqrt{Q}}}$o $\sqrt[3]{\left(68 \ \sqrt{4374}\right)\cdot\sqrt{4}}$ essendo presa in numeri interi più vicini al suo valore, dà $7 \ \ r$. Inoltre $A\sqrt{Q}$ o $68\sqrt{4}$, estraendo tutto ciò che è razionale, è $136\sqrt{1}$. Pertanto $s \ \ 1$ e $\frac{r\frac{n}{r}}{2s}$ o $\frac{7\frac{10}{7}}{2} \ \ \frac{59}{14} \ \ 4$, limitandosi ai numeri interi più vicini. Pertanto $ts \ \ 4$ e $\sqrt{t^2s^2-n} \ \ \sqrt{16-10} \ \ \sqrt{6}$ e $\sqrt[2c]{Q}$ o $\sqrt[6]{4} \ \ \sqrt[3]{2}$. Di conseguenza la radice che bisogna analizzare è $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Se si domanda la radice quadrata-cubica[1] di $29\sqrt{6} \ 41\sqrt{3}$, si avrà $A^2-B^2 \ \ 3$, si avrà pure $n \ \ 3$, $Q \ \ 81$, $r \ \ 5$, $s \ \ \sqrt{6}$, $t \ \ 1$, $ts \ \ \sqrt{6}$ e $\sqrt{t^2s^2-n} \ \ \sqrt{6-3} \ \ \sqrt{3}$; e $\sqrt[2c]{Q} \ \ \sqrt[10]{81}$ o $\sqrt[5]{9}$. Così la radice che bisogna analizzare è $\frac{\sqrt{6}\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Del resto, nelle operazioni di questo tipo, se la quantità contiene una frazione, bisogna ridurre tutto allo stesso denominatore e prendere separatamente la radice del numeratore e del denominatore. Se i termini della quantità avessero un divisore comune, bisognerebbe prendere separatamente la radice di ciascuno dei fattori. Se si domandasse, per esempio, la radice cubica di $\sqrt{242}-12\frac{1}{2}$, bisognerebbe dapprima ridurre tutto al denominatore comune e si avrebbe $\frac{\sqrt{968}-25}{2}$ ed estraendo separatamente la radice cubica del numeratore e del denominatore, si troverebbe $\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{2}}$, poiché abbiamo già visto che la radice cubica di $\sqrt{968}-25$ era $\sqrt{2}-2$.

Se si tratta di estrarre la radice qualunque di $\sqrt[3]{3993} \ \ \sqrt[6]{17578125}$, le due parti hanno il divisore comune $\sqrt[3]{3}$ e l'altro fattore è $11 \ \sqrt{125}$, così la quantità proposta è $\left(11 \ \sqrt{125}\right)\times\sqrt[3]{3}$. E si otterrà la radice, estraendo separatamente la radice di ciascuno dei suoi fattori $\sqrt[3]{3}$ e $11 \ \sqrt{125}$.

[1]più comunemente radice quinta.

Sulla forma dell'equazione

Le equazioni sono un raggruppamento di parecchie quantità o uguali tra loro o uguali a zero. Si considerano le equazioni sotto due rapporti differenti; o come le ultime conclusioni alle quali si giunge nella risoluzione dei problemi o come i mezzi con i quali si giunge alle equazioni finali.

Della prima specie sono le equazioni uniche che contengono una sola incognita assieme a termini noti, purché tuttavia il problema sia determinato e che richieda una cosa possibile.

Della seconda specie sono le equazioni uniche che contengono una sola incognita unita con altre quantità note, purché tuttavia il problema sia determinato, e che si richieda una cosa possibile.

Della seconda specie sono le equazioni che contengono numerose incognite che bisogna confrontare e combinare tra loro, in modo che ne risulti una nuova equazione che contenga una sola incognita unita a termini noti. Per ottenere più facilmente il valore di questa incognita, è quasi sempre necessario dare all'equazione risultante forme diverse, finché non la si è ridotta alla sua forma più semplice possibile e che essa si riferisca, secondo il suo grado, a qualcuna delle formule seguenti, nelle quali tutti i termini sono ordinati rispetto alle dimensioni di x, che rappresenta l'incognita. p, q, r, s sono quantità determinate e note, per mezzo delle quali si giunge a trovare il valore di x con metodi che spiegheremo.

$$\begin{array}{lcl} x \;\; p & & x - p \;\; 0 \\ x^2 \;\; px \;\; q & & x^2 - px - q \;\; 0 \\ x^3 \;\; px^2 \;\; qx \;\; r & \textit{oppure} & x^3 - px^2 - qx - r \;\; 0 \\ x^4 \;\; px^3 \;\; qx^2 \;\; rx \;\; s & & x^4 - px^3 - qx^2 - rx - s \;\; 0 \\ \textit{ecc.} & & \textit{ecc} \end{array}$$

È sul modello di queste formule che bisogna sempre ordinare i termini delle equazioni, secondo il numero delle dimensioni dell'incognita, ponendo al primo posto il termine dove l'incognita è la più alta, al secondo il termine dove ha una dimensione minore e così di seguito. I segni dei diversi termini non influiscono su questa disposizione; supponendo pure che manchi qualche termine intermedio, deve sussistere ancora. Così $x^3 - b^2x \;\; b^3 \;\; 0$, o $x^3 \;\; b^2x - b^3$ è un'equazione di terzo grado;

$$z^4 \quad \begin{array}{c} a \\ -b \end{array} \Bigg| \quad z^3 \quad \begin{array}{c} ab^3 \\ -b^4 \end{array} \quad 0$$

è un'equazione di quarto; poiché il grado di una equazione si valuta dalla più alta dimensione dell'incognita, senza tener conto delle quantità note e dei termini intermedi. Tuttavia l'assenza di qualche termine intermedio rende molto spesso l'equazione più semplice e si può anche diminuirla di grado. Così $x^4 \;\; qx^2 \;\; s$ può essere vista come un'equazione di secondo grado, poiché è scomponibile in due equazioni di secondo grado; poiché supponendo $x^2 \;\; y$ e sostituendo y al posto di x^2 nell'equazione si avrà la nuova equazione $y^2 \;\; qy \;\; s$ che è visibilmente un'equazione di secondo grado; e quando, tramite essa, si sarà determinato il valore di y, l'altra equazione di secondo grado $y \;\; x^2$ servirà ad ottenere x.

Tali sono i risultati ai quali i problemi devono essere ricondotti. Ma prima di intraprendere la loro risoluzione, è necessario insegnare il metodo per trasformare le equazioni riducendole e arrivare tramite le equazioni intermedie a quelle finali. Io racchiuderò nelle regole seguenti tutti i mezzi per ridurre a un'unica equazione.

Modo di ridurre ad un'unica equazione

Regola prima. Quando vi sono in una equazione quantità che si eliminano reciprocamente o che possono unirsi sia per addizione che per sottrazione, bisogna effettuare queste eliminazioni o riunioni; ciò diminuisce il numero dei termini.

Se si ha, per esempio, $5b - 3a \;\; 2x \;\; 5a \;\; 3x$; sottraendo da una parte e dall'altra $2x$ e aggiungendo $3a$, si avrà $5b - 3a \;\; 2x \;\; 3a - 2x \;\; 5a \;\; 3x - 2x \;\; 3a$, che si riduce a $5b \;\; 8a \;\; x$. Analogamente sia $\frac{2abbx}{a} - b \;\; a \;\; b$. Moltiplichiamo tutti i termini per a, l'equazione diverrà $2ab \;\; bx - ab \;\; a^2 \;\; ab$, che si riduce, eliminando le quantità che si distruggono, che si riduce, dico, a $bx \;\; a^2$.

Si deve riferire a questa regola la disposizione dei termini di una equazione, che consiste nel trasportarli da una parte all'altra del segno di uguaglianza con un segno contrario. Per esempio, nell'equazione $5b \;\; 8a \;\; x$, se si vuole avere il valore di x, bisogna togliere da una parte e dall'altra $8a$, o, che è lo stesso, trasportare $8a$ dalla parte opposta cambiando il suo segno e si avrà $5b - 8a \ \ x$. Analogamente se si avesse $a^2 - 3ay \ \ ab - b^2 \ \ by$ e si volesse trovare y, basterà trasportare $-3ay$ e $ab - b^2$in modo che tutti i termini contenenti y si trovino in un solo membro e tutto il resto nell'altro e si avrà $a^2 - ab \ b^2 \ \ 3ay \ by$; e mettendo in evidenza y, come si insegnerà nella regola quinta, cioè dividendo ogni membro dell'equazione per $3a \ b$, essa diverrà

$$\frac{a^2 - ab \ b^2}{3a \ b} \ \ y$$

Analogamente l'equazione $abx \ \ a^3 - a^2x \ \ ab^2 - 2abx - x^3$, diviene, trasportando e ordinando

$$x^3 \quad \begin{array}{c} a^2 \\ -3ab \end{array} \left| x \ \begin{array}{c} -a^3 \\ ab^2 \end{array} \right.$$

oppure

$$x^3 \ \begin{array}{c} -a^2 \\ 3ab \end{array} \left| x \ \begin{array}{c} a^3 \\ -ab^2 \end{array} \right. \ \ 0$$

Regola II. Se tutti i termini di un'equazione sono moltiplicati per una stessa quantità, divideteli tutti per questa quantità; e reciprocamente se essi sono divisi per una stessa quantità, moltiplicateli tutti per questa quantità.

Così nell'equazione $15b^2 \ \ 24ab \ 3bx$, dividete tutti i suoi termini per b ed essa diverrà $15b \ \ 24a \ 3x$; poi dividete tutto per 3 ed essa sarà ridotta a $5b \ \ 8a \ x$. Sia ancora l'equazione $\frac{b^2}{ac} - \frac{b^3x}{c^2} \ \ \frac{x^2}{c}$; moltiplicate tutto per c e avrete $\frac{b^2}{a} - \frac{b^3x}{c} \ \ x^2$.

Regola III. Se si trova una frazione irriducibile, il cui denominatore contiene la lettera stessa rispetto alla quale l'equazione deve essere ordinata, bisogna moltiplicare tutti i termini per questo denominatore o per qualcuno dei suoi divisori.

Sia l'equazione $\frac{ax}{a-x} \ \ b \ \ x$ e che si debba ordinare rispetto alla lettera x; moltiplicate tutti i suoi termini per $a - x$, denominatore della frazione $\frac{ax}{a-x}$, poiché x si trova in questo denominatore; e l'equazione diverrà $ax \ ab - bx \ \ ax - x^2$, o $ab - bx \ \ -x^2$, oppure, trasponendo ogni membro con segni contrari, $x^2 \ \ bx - ab$.

Si abbia ancora l'equazione $\frac{a^3 - ab^2}{2cy - c^2} \ \ y - c$, e si debba ordinarla rispetto alla y; moltiplicate tutti i suoi termini per $2cy - c^2$, o almeno per uno dei suoi fattori $2y - c$ per far scomparire y dal denominatore e voi avrete $\frac{a^3 - ab^2}{c} \ \ 2y^2 - 3cy \ c^2$. È così che $\frac{a^2}{x} - a \ \ x$ moltiplicata tutta per x, diviene $a^2 - ax \ \ x^2$ e $\frac{a^2b^2}{cx^2} \ \ \frac{x^2}{ab-x}$, moltiplicata per x^2 e poi per $a \ b - x$, diviene $\frac{a^3b^2a^2b^3 - a^2b^2x}{c} \ \ x^4$.

Regola IV. Se la lettera rispetto alla quale l'equazione deve essere ordinata si trova unita con una quantità irrazionale, bisogna trasportare tutti gli altri termini non compresi nella quantità irrazionale nell'altro membro dell'equazione, con i segni contrari, e moltiplicare ogni membro dell'equazione un volta per se stesso, se la quantità irrazionale è una radice quadrata; due volte, se è una radice cubica e così via.

Così per ordinare l'equazione $\sqrt{a^2 - ax} \ a \ \ x$, rispetto a x, bisogna trasportare a nell'altro membro e si ha $\sqrt{a^2 - axa} \ \ x - a$ ed elevando ogni membro al quadrato si ha $a^2 - ax \ \ x^2 - 2ax \ a^2$, o $0 \ \ x^2 - ax$ che dà $x \ \ a$. Sia ancora $\sqrt[3]{a^2x \ 2ax^2 - x^3} - a \ x \ \ 0$, trasportando $-a \ x$, questa equazione diviene $\sqrt[3]{a^2x \ 2ax^2 - x^3} \ \ a - x$ ed elevando ogni membro al cubo, si ha, $a^2x \ 2ax^2 - x^3 \ \ a^3 - 3a^2x \ 3ax^2 - x^3$, o eliminando tutto ciò che distrugge, $x^2 \ \ 4ax - a^2$.

Sia pure $y \ \ \sqrt{ay \ y^2 - a\sqrt{ay - y^2}}$;se si eleva ognuno dei suoi membri al quadrato, si avrà $y^2 \ \ ay \ y^2 - a\sqrt{ay - y^2}$;facendo poi le trasposizioni necessarie, dopo aver eliminato y^2da una parte e dall'altra, l'equazione diviene $ay \ \ a\sqrt{ay - y^2}$,oppure $y \ \ \sqrt{ay - y^2}$ ed elevando di nuovo tutto al quadrato, $y^2 \ \ ay - y^2$e trasportando ancora, $2y^2 \ \ ay$, o $2y \ \ a$.

Regola V. Quando si sono ordinati tutti i termini di una equazione rispetto alle potenze di una stessa lettera, come è stato insegnato dalle regole precedenti, se la potenza maggiore di questa lettera è moltiplicata per una quantità nota, bisogna dividere tutta l'equazione per questa stessa quantità.

Sia $2y \ \ a$, dividendo tutto per 2, si ha $y \ \ \frac{a}{2}$; e $\frac{bx}{a} \ \ a$ diviene $bx \ \ a^2$, o $x \ \ \frac{a^2}{b}$, dividendo tutto per $\frac{b}{a}$. E

$$\begin{array}{c} 2ac \\ -c^2 \end{array} \left| x^3 \ \begin{array}{c} a^3 \\ a^2c \end{array} \right| x^2 \ \begin{array}{c} -2a^3c \\ a^2c^2 \end{array} \left| x - a^3c^2 \ \ 0 \right.$$

diviene, dividendo tutto per $2ac - c^2$,

$$x^3 \ \frac{\begin{array}{c} a^3 \\ a^2c \end{array} \left| x^2 \ \begin{array}{c} -2a^3c \\ a^2c^2 \end{array} \right| x - a^3c^2}{2ac - c^2} \ \ 0$$

o

$$x^3 \ \frac{a^3 \ a^2c}{2ac - c^2} \cdot x^2 - a^2x \frac{-a^3c}{2a - c} \ \ 0$$

Regola VI. Si può talvolta operare una riduzione dividendo l'equazione per una quantità composta

È così che

$$y^3 \quad \begin{array}{c} -2c \\ b \end{array} \left| y^2 \ 3bcy - b^2c \right.$$

si può ridurre a $y^2 \ \ -2cy \ bc$ trasportando dapprima tutti i termini da una stessa parte in questo modo,

$$y^3 \quad \begin{array}{c} 2c \\ -b \end{array} \left| y^2 - 3bcy \ b^2c \ \ 0 \right.$$

e poi dividendo per $y - b$, come è stato insegnato al capitolo della divisione. Ma è difficile trovare questi tipi di divisori; del resto noi ne abbiamo precedentemente indicato il metodo.

Regola VII. Si può qualche volta ridurre una equazione estraendo la radice di ognuno dei suoi membri.

Infatti, sia $x^2 \ \ \frac{1}{4}a^2 - b^2$, estraendo la radice quadrata di ogni membro si ha, $x \ \ \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Analogamente. se si ha $x^2 \ \ a^2 \ \ 2ax \ b^2$, bisogna trasportare $2ax$ e l'equazione diviene $x^2 - 2ax \ \ a^2 \ \ b^2$e estraendo la radice quadrata di ogni membro, si ha, $x - a \ \ \pm b$ o $x \ \ a \pm b$.

Se avete $x^2 \ \ ax - b^2$, aggiungete a ogni membro $-ax \ \ \frac{1}{4}a^2$ e l'equazione diverrà $x^2 - ax \ \ \frac{1}{4}a^2 \ \ \frac{1}{4}a^2 - b^2$ ed estraendo la radice quadrata da una parte e dall'altra, $x - \frac{1}{2}a \ \ \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ o $x \ \ \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.

Prendiamo come esempio generale $x^2 \ \ px \ q$. Il valore di x sarà, $x \ \ \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} \ q}$, dove si vede che $\frac{p}{2}$ e q hanno lo stesso segno della prima equazione, ma $\frac{p^2}{4}$ deve essere accompagnato dal segno . Questo esempio è una formula alla quale si possono riferire tutte le equazioni di secondo grado. Per esempio, se si propone l'equazione $y^2 \ \ \frac{2x^2y}{a} \ \ x^2$e si chiede la radice di y, basta eguagliare $\frac{2x^2}{a}$ a p e x^2a q. Di conseguenza, $\frac{x^2}{a} \ \ \frac{p}{2}$ e $\frac{x^4}{a^2} \ \ x^2 \ \ \frac{p^2}{4} \ \ q$ e si avrà $y \ \ \frac{x^2}{a} \pm \sqrt{\frac{x^4}{a^2} \ x^2}$. Così anche nell'equazione $y^2 \ \ ay - 2cy \ \ a^2 - c^2$, ponete $a - 2c \ \ p$ e $a^2 - c^2 \ \ q$ e il valore di y sarà $y \ \ \frac{1}{2}a - c \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4} - ac}$. Vi è di più, si può anche, con questa regola, ottenere il valore di x nell'equazione di quarto grado $x^4 \ \ -a^2x^2 \ \ ab^3$, dove i termini dispari mancano; si avrà dapprima, con la regola stabilita, $x^2 \ \ -\frac{a^2}{2} \ \ \sqrt{\frac{a^2}{4} \ ab^3}$ ed estraendo di nuovo la radice quadrata, $x \ \ \sqrt{-\frac{a^2}{2} \ \ \sqrt{\frac{a^2}{4} \ ab^3}}$ e così di seguito.

Queste sono le regole per ridurre una equazione unica. Quando ci si sarà familiarizzati con il loro utilizzo per poter ordinare una equazione qualsiasi rispetto alle dimensioni di una sua lettera e ottenere il valore di questa lettera, nel caso in cui essa abbia una dimensione, oppure il valore della sua massima potenza, quando ne ha parecchie, sarà facile confrontare tra loro parecchie equazioni ed è di questo confronto che vado a proporre il metodo.

Metodo per ridurre due o più equazioni a una sola al fine di liberare le incognite

Quando nella soluzione di un problema si hanno parecchie equazioni che descrivono lo stato del problema e ognuna delle quali contiene più incognite, bisogna confrontare a due a due le equazioni (se ve ne sono più di due) e ripetere questi confronti tante volte quante è necessario e a ogni operazione si avrà una nuova equazione, che conterrà una incognita di meno della precedente. Se si ha, per esempio, $2x \ \ y \ 5$ e $x \ \ y \ 2$, è chiaro che dalla prima si ha $2x - 5 \ \ y$ e che dalla seconda $x - 2 \ \ y$, da cui eliminando da una parte e dall'altra le quantità uguali si avrà $x \ \ 3$.

È una regola generale, che per mezzo di ogni equazione si può eliminare una incognita. Quindi, quando si hanno tante equazioni quante sono le incognite, tutte le equazioni possono ridursi a una sola che contiene solo una incognita. Se si avesse una ulteriore incognita che non ha equazione, si troverebbero ancora due incognite nell'equazione risultante; se ne troverebbero tre, se il numero delle incognite superasse di due il numero delle equazioni, e così di seguito.

Non è qualche volta impossibile eliminarne due, o anche un numero maggiore di incognite per mezzo di due equazioni. Se si ha, per esempio, $ax - by \ \ ab - az$, e $bx \ by \ \ b^2 \ az$. La prima dà $az \ \ ab - ax \ by$ e la seconda, $az \ \ bx \ by - b^2$; pertanto $ab - ax \ by \ \ bx \ by - b^2$, da cui si ricava, cancellando ciò che si distrugge e trasponendo, $bx \ ax \ \ ab \ b^2$, da cui si vede che y e z sono eliminate. Ma casi di questo tipo o un vizio nascosto nello stato del problema, o un errore, o un difetto nel calcolo. Mostriamo ora il metodo di eliminare una incognita per mezzo di ogni equazione.

Eliminazione di una incognita tramite l'uguaglianza dei suoi valori

Quando la quantità che si vuole eliminare ha una sola dimensione in ogni equazione, se ne troverà il valore con le regole che abbiamo già dato e allora si confronteranno questi valori tra loro.

Siano le due equazioni $a \ x \ \ b \ y$ e $2x \ \ y \ \ 3b$. Se vogliamo eliminare y, la prima equazione ci darà, $a \ x - b \ \ y$ e la seconda $3b - 2x \ \ y$; di conseguenza, $a \ x - b \ \ 2b - 2x$, o, liberando x, $x \ \ \frac{4b-a}{3}$.

È così che le due v $2x \ \ y$ e $5 \ x \ \ y$ danno $2x \ \ 5 \ x$, o $x \ \ 5$. E le equazioni $ax - 2by \ \ ab$ e $xy \ \ b^2$ danno, la prima $\frac{ax-ab}{2b} \ \ y$ e la seconda $y \ \ \frac{b^2}{x}$. Pertanto $\frac{b^2}{x} \ \ \frac{ax-ab}{2b}$, o, ordinando, $x^2 - bx - \frac{2b^3}{a} \ \ 0$.

Si si hanno ancora le due equazioni $\frac{b^2x-aby}{a}\ \ ab\ xy$ e $bx\ \ \frac{ay^2}{c}\ \ 2a^2$; liberando x, la prima dà $x\ \ \frac{a^2baby}{b^2-ay}$ e la seconda, $x\ \ \frac{2a^2c-ay^2}{bc}$, si ha quindi $\frac{a^2baby}{b^2-ay}\ \ \frac{2a^2c-ay^2}{bc}$ e riducendo $y^3-\frac{b^2}{a}y^2-\left(\frac{2a^2c-b^2c}{a}\right)y\ \ b^2c\ \ 0$.

Infine se si ha, $x\ \ y-z\ \ 0$ e $ay\ \ xz$, liberando z, la prima diviene $x\ \ y\ \ z$ e la seconda $\frac{ay}{x}\ \ z$. Pertanto $\frac{ay}{x}\ \ x\ y$, o $x^2\ \ xy\ \ ay$, moltiplicando tutto per x. Si arriva agli stessi risultati sottraendo uno dei valori dell'incognita dall'altra ed eguagliando il resto a zero. Così, nel primo esempio, sottraete $3b-2x$ da $a\ \ x-b$ e verrà $a\ \ x-b-3b\ \ 2x\ \ 0$ o $a\ \ 3x-4b\ \ 0$ e infine $x\ \ \frac{4b-a}{3}$.

Eliminazione di una incognita per sostituzione del suo valore

Quando in una delle equazioni, l'incognita che si vuole eliminare ha una sola dimensione, è in questa equazione che si deve prendere il valore dell'incognita e sostituirla al posto dell'incognita dell'altra equazione. Se si hanno le due equazioni $xy^2\ \ b^3$ e $x^2\ \ y^2\ \ by-ax$, eliminando x, la prima darà $x\ \ \frac{b^3}{y^2}$; al posto della x sostituite il suo valore nella seconda e avrete $\frac{b^6}{y^4}\ \ y^2\ \ by-\frac{ab^3}{y^2}$, o $\frac{b^6y^6}{y^4}\ \ \frac{by^3-ab^3}{y^2}$ o $b^6\ \ y^6\ \ by^5-ab^3y^2$e, ordinando, $y^6-by^5\ \ ab^3y^2\ \ b^6\ \ 0$.

Se si ha, $ay^2\ \ a^2y\ \ z^3$e $yz-ay\ \ az$ e si vuole eliminare la y, bisognerà prendere il suo valore nella seconda equazione che dà, $y\ \ \frac{az}{z-a}$ e sostituendo questo valore al posto di y nella prima equazione, si ha $\frac{a^2z^2}{\left(z-a\right)^2}\ \ \frac{a^3z}{z-a}\ \ z^3$ e riducendo $z^4-2az^3\ \ a^2z^2-2a^3z\ \ a^4\ \ 0$.

Analogamente, se si ha $\frac{xy}{c}\ \ z$ e $cy\ \ zx\ \ c^2$ e si vuole eliminare z, bisogna sostituire nella seconda equazione il suo valore $\frac{xy}{c}$ e si ha $cy\ \ \frac{x^2y}{c}\ \ c^2$.

Del resto, quando ci si è esercitati in questi tipi di calcoli, si notano spesso metodi più spediti per eliminare un'incognita.

Siano date le equazioni $ax\ \ \frac{b^2x-b^3}{z}$ e $x\ \ \frac{az}{x-b}$, moltiplicando la prima per z essa diviene $azx\ \ b^2\left(x-b\right)$ e moltiplicando la seconda per x, essa diviene $x^2\ \ \frac{axz}{x-b}$ e poi per $x-b$, essa diviene infine $x^2\left(x-b\right)\ \ axz$; di conseguenza $\frac{b^2\left(x-b\right)}{x^2\left(x-b\right)}\ \ 1$, quindi $x\ \ 1$.

Ma lascio casi particolari di questo tipo alla sagacia degli uomini studiosi.

Eliminazione di una incognita che è di parecchie dimensioni in ogni equazione

Quando la quantità che si vuole eliminare è più di una dimensione in ogni equazione, determinate in ognuna il valore della sua più alta potenza e se le equazioni non hanno lo stesso grado, moltiplicate quella che è meno elevata per l'incognita che volete eliminare, o per il suo quadrato, o per il suo cubo, in modo che essa divenga di una potenza uguale a quella dell'altra equazione. Allora uguagliate tra loro queste più alte potenze e ne risulterà una nuova equazione, dove quella con la potenza più alta non si troverà più. Reiterando l'operazione tante volte quanto sarà necessario, voi finirete per far svanire questa incognita.

Per esempio, se si aveva $x^2\ \ 5x\ \ 3y^2$ e $2xy\ \ 3x^2\ \ 4$, ricavo dalla prima di queste due equazioni $x^2\ \ 3y^2-5x$ e dalla seconda $\frac{2xy-4}{3}\ \ x^2$; confrontando insieme i due valori di x^2,ho $3y^2-5x\ \ \frac{2xy-4}{3}$ dove x si trova solo alla prima potenza; così lo si può eliminare con le regole fornite in precedenza. Infatti, riducendo l'ultima equazione, essa diviene $9y^2-15x\ \ 2xy-4$. Da cui, $x\ \ \frac{9y^24}{2y15}$, e mettendo questo valore di x in una qualsiasi di queste due equazioni proposte, nella $x^2\ \ 5x\ \ 3y^2$, per esempio, verrà

$$\frac{81y^4\ \ 72y^2\ \ 16}{4y^2\ \ 60y\ \ 225}\ \ \frac{45y^2\ \ 20}{2y\ \ 15}\ \ 3y^2$$

e moltiplicando tutto per $4y^3\ \ 60y\ \ 225$ e ordinando, si ottiene,

$$81y^4\ \ 72y^2\ \ 16\ \ 90y^3\ \ 40y\ \ 675y^2\ \ 300\ \ 124y^4\ \ 180y^3\ \ 675y^2$$

o

$$69y^4-90y^3\ \ 72y^2\ \ 40y\ \ 316\ \ 0$$

Si abbiano ancora le due equazioni, $y^3\ \ xy^2\ \ 3x$ e $y^2\ \ x^2-xy-3$. Se si vuole eliminare y, bisogna moltiplicare la seconda per y ed essa diviene $y^3\ \ x^2y-xy^2-3y$, che dello stesso numero di dimensioni della prima; ed eguagliando tra loro i valori di y^3, si ha $xy^2\ \ 3x\ \ x^2y-xy^2-3y$ e y diminuisce di una dimensione *[grado]*. Per mezzo di questa nuova equazione e della più semplice delle prime due, di $y^2\ \ x^2-xy-3$, per esempio, si può eliminare y, ripetendo l'operazione prima vista.

Vi sono ancora altri metodi per giungere agli stessi risultati e spesso in un modo più breve. Si vuole far scomparire y dalle equazioni $y^2\ \ \frac{2x^2y}{a}\ \ x^2$ e $y^2\ \ 2xy\ \ \frac{x^4}{a^2}$? si prende in ogni equazione il valore di y, con il metodo della regola 7 e si avrà $y\ \ \frac{x^2}{a}\pm\sqrt{\frac{x^4}{a^2}\ \ x^2}$e $y\ \ x\pm\sqrt{x^2\ \ \frac{x^4}{a^2}}$ e confrontando questi due valori di y, si ha $\frac{x^2}{a}\pm\sqrt{\frac{x^4}{a^2}\ \ x^2}\ \ x\pm\sqrt{x^2\ \ \frac{x^4}{a^2}}$ ed eliminando da una parte e dall'altra tutto ciò che si distrugge, si ottiene infine $\frac{x^2}{a}\ \ x$ o $x^2\ \ ax$ e $x\ \ a$.

Per far scomparire x dalle equazioni, $x \ y \ \frac{y^2}{x} \ \ 20$ e $x^2 \ y^2 \ \frac{y^4}{x^2} \ \ 140$, togliete y da ogni membri della prima e resterà $x \ \frac{y^2}{x} \ \ 20 - y$ e quadrando, $x^2 \ 2y^2 \ \frac{y^4}{x^2} \ \ 400 - 40y \ y^2$ ed eliminando y^2 da entrambe le parti resterà $x^2 \ y^2 \ \frac{y^4}{x^2} \ \ 400 - 40y$. Ora $400 - 40y$ e 140 essendo uguali alle stesse quantità saranno pure uguali tra loro; quindi $400 - 40y \ \ 140$, o $40y \ \ 260$ o $y \ \ 6\frac{1}{2}$. È così che in quasi tutte le equazioni si troveranno metodi per abbreviare il lavoro.

Del resto, quando la quantità che bisogna eliminare ha molte dimensioni, il calcolo che si è obbligati a fare per giungere a y è qualche volta molto penoso. Gli esempi seguenti, considerati come regole, potranno dare metodi per facilitare.

REGOLA PRIMA. Siano, $ax^2 \ bx \ c \ \ 0$ e $fx^2 \ gx \ h \ \ 0$, dovendo eliminare x, si ha

$$(ah - bg - 2cf)\, ah \ (bh - cg)\, bf \ (ag^2 \ cf^2)\, c \ \ 0 \tag{1}$$

REGOLA SECONDA. Siano, $ax^3 \ bx^2 \ cx \ d \ \ 0$ e $fx^2 \ gx \ h \ \ 0$, eliminando x, si ha

$$(ah - bg - 2cf)\, ah^2 \ (bh - cg - 2df)\, bfh \ (ch - dg)\, (ag^2 \ cf^2) \ (3agh \ bg^2 \ df^2)\, df \ \ 0$$

REGOLA TERZA. Siano, $ax^4 \ bx^3 \ cx^2 \ dx \ e \ \ 0$ e $fx^2 \ gx \ h \ \ 0$. Eliminando la x, si ha

$$\begin{gathered}(ah - bg - 2cf)\, ah^3 \ (bh - cg - 2df)\, bfh^2 \ (ag^2 \ cf^2)\, (ch^2 - dgh \ eg^2 \ 2efh)\\ (3agh \ bg^2 \ df^2)\, dfh \ (2ah^2 \ 3bgh - dfg \ ef^2)\, ef^2 \ (-bg - 2ah)\, efg^2 \ \ 0\end{gathered}$$

REGOLA QUARTA. Siano $ax^3 \ bx^2 \ cx \ d \ \ 0$ e $fx^3 \ gx^2 \ hx \ k \ \ 0$. eliminando x, si ha

$$\begin{gathered}(ah - bg - 2cf)\, (adh^2 - achk) \ (ak \ bh - cg - 2df)\, bdfh \ (-ak \ bh \ 2cg \ 3df)\, a^2k^2\\ (cdh - d^2g - c^2k \ 2bdk)\, (ag^2 \ cf^2) \ (3agh \ bg^2 \ df^2 - 3afk)\, d^2f\\ (-3ak - bh \ cg \ df)\, bcfk \ (bk - 2dg)\, b^2fk \ (-b^2k - 3adh - cdf)\, agk \ \ 0\end{gathered}$$

Per esempio, se si vuole fare scomparire x dalle equazioni $x^2 \ 5x - 3y^2 \ \ 0$ e $3x^2 - 2xy \ 4 \ \ 0$ e se si impiega la formula della prima regola, e si mettono, invece di $a, b, c; f, g, h$ i loro rispettivi valori, $1, 5, -3; 3 - 2y, 4$ si avrà $(4 \ 10y \ 18y^2)\, 4 \ (20 - 6y^3)\, 15 \ (4y^2 - 27y^2)\, (-3y^2) \ \ 0$. che si riduce a $16 \ 40y \ 72y^2 \ 300 - 90y^3 \ 69y^4 \ \ 0$, equazione priva della x.

Analogamente, per far scomparire y dalle equazioni $y^3 - xy^2 - 3x \ \ 0$ e $y^2 \ xy - x^2 \ 3$, impiegate la formula della seconda regola, mettendo per $a, b, c, d; f, g, h, x$, i rispettivi valori $1, -x, 0, -3x; 1, x, -x^2 \ 3, y$; e avrete

$$(-x^2 \ 3 \ x^2)\, (x^4 - 6x^2 \ 9) \ (x^3 - 3x \ 6x)\, (x^3 - 3x) \ 3x^2 \cdot x^2 \ (-3x^3 \ 9x - 3x - x^3)\, (-3x) \ \ 0$$

e togliendo ciò che si distrugge e facendo le moltiplicazioni indicate, verrà

$$3x^4 - 18x^2 \ 17 \ x^6 - 9x^2 \ 3x^4 \ 11x^4 - 18x^2 \ \ 0$$

e riducendo e ordinando $x^6 \ 18x^4 - 45x^2 \ 27 \ \ 0$

Fin qui abbiamo dovuto eliminare una sola incognita tra due equazioni; se si avessero più incognite da eliminare da un maggior numero di equazioni, lo si otterrebbe con operazioni successive. Per esempio, se si volesse estrarre il valore di y dalle equazioni, $ax \ \ yz$, $x \ y \ \ z$ e $5x \ \ y \ 3z$, cominciate con far svanire una delle due incognite x o z; x(suppongo) sostituendo il suo valore $\frac{yz}{a}$ ricavato dalla prima nella seconda e nella terza, e avrete $\frac{yz}{a} \ y \ \ z$ e $\frac{5yz}{a} \ \ y \ 3z$. Fate scomparire z da queste due equazioni, come sopra, e avrete una sola equazioni nella sola incognita y.

Metodo per eliminare tutte le quantità irrazionali dalle equazioni

È qui che conviene porre il metodo per eliminare le quantità irrazionali o incommensurabili, supponendole uguali a lettere qualsiasi. Per esempio, se si ha l'equazione $\sqrt{ay} - \sqrt{a^2 - ay} \ \ 2a \ \sqrt[3]{ay^2}$;ponendo $t \ \ \sqrt{ay}$, $v \ \ \sqrt{a^2 - ay}$ e $x \ \ \sqrt[3]{ay^2}$, l'equazione proposta diviene $t - v \ \ 2a \ x$. Ma d'altra parte, poiché $x \ \ \sqrt[3]{ay^2}$, ne segue che $x^3 \ \ ay^2$ e per lo stesso motivo $t^2 \ \ ay$ e $v^2 \ \ a^2 - ay$. Se, per mezzo di queste quattro equazioni, si eliminano in successione t, v e x ne risulterà una nuova interamente liberata dagli incommensurabili.

Metodo per tradurre un problema in equazione

Quando ci si sarà sufficientemente esercitati nel trasformare e ridurre equazioni, bisogna testare le proprie forze traducendo problemi in equazioni. Proposto un problema, una parte importante della capacità del calcolatore consiste nell'esprimere con equazioni ciascuna delle condizioni del problema. Per riuscirvi, esaminerà dapprima se tutte queste condizioni possono essere espresse in forma algebrica, allo stesso modo in cui esprimiamo i nostri pensieri per mezzo delle lettere dell'alfabeto. Se la cosa è possibile (come lo è sempre, quando il problema riguarda numeri o quantità astratte), allora assegnerà nomi alle quantità note, così come a quelle incognite; e il significato del problema sarà espresso, se così si può dire, con un discorso analitico. E le condizioni così tradotte in linguaggio algebrico, daranno tante equazioni quante ne servono per risolvere il problema.

Per esempio, se si chiedono tre numeri in proporzione continua, la cui somma sia 20 e la somma dei quadrati 140, chiamerò questi tre numeri incogniti con x, y, z; e il problema sarà tradotto dal linguaggio comune in quello algebrico, in questo modo:

Problema enunciato in linguaggio ordinario	*Lo stesso in linguaggio algebrico*
Si cerchino tre numeri che abbiano queste condizioni	x, y, z
1°. Che essi siano in proporzione continua	$x \;\; y \;\; y \;\; z$, oppure $xz \;\; y^2$
Che la loro somma faccia 20	$x \;\; y \;\; z \;\; 20$
Che la somma dei loro quadrati faccia 140	$x^2 \;\; y^2 \;\; z^2 \;\; 140$

Così il problema è ridotto alle equazioni $xz \;\; y^2$, $x \;\; y \;\; x \;\; 20$, $x^2 \;\; y^2 \;\; z^2 \;\; 140$. Con l'aiuto di queste equazioni e delle regole date in precedenza, si troveranno i valori di x, y, z.

Bisogna osservare che la risoluzione dei problemi è tanto più facile e più elegante quanto è minore il numero delle incognite impiegate. Così nel problema dato, ponendo x come prima incognita, y come seconda, la terza sarà $\frac{y^2}{x}$, che è in proporzione continua con le altre due. Enuncio quindi il problema in questo modo:

In linguaggio ordinario	*In linguaggio algebrico*
Cercare tre numeri in proporzione continua	$\div x \;\; y \;\; \frac{y^2}{x}$
la cui somma sia 20	$x \;\; y \;\; \frac{y^2}{x} \;\; 20$
e la somma dei quadrati 140	$x^2 \;\; y^2 \;\; \frac{y^2}{x} \;\; 140$

Le due equazioni $x \;\; y \;\; \frac{y^2}{x} \;\; 20$ e $x^2 \;\; y^2 \;\; \frac{y^2}{x} \;\; 140$ una volta ridotte, restituiranno i valori di x e y.

Ecco un altro esempio. Un mercante aumenta il suo argento di un terzo ogni anno, meno cento sterline che egli spende nello stesso spazio di tempo per i bisogni della sua famiglia; dopo tre anni la sua ricchezza è raddoppiata; si domanda quanto argento aveva. Ecco tutte le proposizioni che sono racchiuse implicitamente in questo problema e che devono essere espresse per giungere alla sua risoluzione.

Problema espresso in linguaggio ordinario	*Lo stesso in linguaggio algebrico*
Un mercante ha un certo numero	x
di scudi, dei quali spende cento sterline il primo anno	$x - 100$
Aumenta ciò che gli resta di un terzo	$x - 100 \;\; \frac{x-100}{3}$ o $\frac{4x-400}{3}$
Il secondo anno spende ancora cento sterline e aumenta ciò che gli resta di un terzo	$\frac{4x-400}{3} - 100$ o $\frac{4x-700}{3}$ $\frac{4x-700}{3} \;\; \frac{4x-700}{9}$ o $\frac{16x-1800}{9}$
Il terzo anno spende ancora cento sterline e aumenta ciò che gli resta di un terzo e si trova due volte più ricco che all'inizio del primo anno	$\frac{16x-1800}{9} - 100$ o $\frac{16x-3700}{9}$ $\frac{16x-3700}{9} \;\; \frac{16x-3700}{27}$ o $\frac{64x-14800}{27}$ $\frac{64x-14800}{27} \;\; 2x$

In questo modo il problema è espresso dall'equazione $\frac{64x-14800}{27} \;\; 2x$ e risolvendola si ricaverà il valore di x. Moltiplicatela per 27 e avrete $64x - 14800 \;\; 54x$; togliete da ogni membro $54x$ e il resto sarà $10x - 14800 \;\; 0$ o $10x \;\; 14800$ e dividendo per 10, si avrà $x \;\; 1480$. Così 1480 è il numero di sterline che egli aveva all'inizio del primo anno.

Vedete che, nei problemi che contengono solo numeri o quantità arbitrarie, non vi è, per così dire, null'altro da fare che tradurre il problema dal linguaggio ordinario in linguaggio algebrico; cioè, esprimere le sue condizioni con caratteri atti ad esprimere le nostre idee sui rapporti di quantità. Si ha spesso che il discorso per il quale lo stato di un problema è espresso, non sembra poter essere tradotto in linguaggio algebrico; ma lo si disporrà facilmente operando qualche cambiamento e soprattutto attaccandosi di più ai significati delle parole che alle parole stesse.

È così che tutti i linguaggi aventi il loro idioma particolare, quando bisogna far passare un'opera da una in un altra, non sono le parole, ma il pensiero che bisogna tradurre. Del resto, siccome le arti si apprendono assai più facilmente con esempi che con precetti, mostro qui la soluzione di numerosi problemi.

PROBLEMA 1. La somma di due numeri uguali ad a; la differenza dei loro quadrati è b; si chiede quali sono questi due numeri?

SOLUZIONE. Sia x il più piccolo. l'altro sarà $a - x$; i loro quadrati saranno rispettivamente x^2 e $a^2 - 2ax\ x^2$; la differenza di questi quadrati è $a^2 - 2ax$ che si suppone uguale a b. Si ha, di conseguenza, l'equazione $a^2 - 2ax\ \ b$ e riducendo, $a^2 - b\ \ 2ax$ o $\frac{a^2-b}{2a}\ \ x\ \ \frac{a}{2} - \frac{b}{2a}$.

ESEMPIO: se ad esempio la somma è $a\ \ 8$ e la differenza dei quadrati è $b\ \ 16$, si ha

$$x\ \ \frac{64 - 16}{16}\ \ 3$$

e $a - x\ \ 5$; i due numeri saranno pertanto 3 e 5

PROBLEMA 2. Si hanno tre quantità x, y, z. Si conosce la somma di queste quantità prese a due a due, si chiede il valore di ognuno di loro?

SOLUZIONE. Sia a la somma delle due quantità x e y e b quella di x e z; infine c quella di y e z. Per determinare le tre quantità x, y, z si hanno quindi le tre equazioni $x\ y\ \ a$, $x\ z\ \ b$ e $y\ z\ \ c$. Ora per eliminare due delle tre incognite y e z, per esempio, togliete x nella prima e nella seconda equazione e avrete $y\ \ a - x$ e $z\ \ b - x$, sostituite questi valori di y e z nella terza $y\ z\ \ c$, essa diverrà $a - x\ b - x\ \ c$ e riducendo e liberando x. avrete, $x\ \ \frac{ab-c}{2}$. Trovato x, si sostituirà il suo valore nelle due equazioni $y\ \ a - x$ e $z\ \ b - x$ e si avranno i valori di y e z. Per esempio, se la somma di y e x è 9; quella di x e z è 10; e quella di y e z è 13; allora sostituite nelle equazioni 9 al posto di a, 10 al posto di b e 13 al posto di c e $a\ b - c$ sarà uguale a 6. E $x\ \ \frac{ab-c}{2}\ \ 3$; $y\ \ a - x\ \ 6$ e $z\ \ b - x\ \ 7$.[2]

2

OSSERVAZIONE. *In linguaggio moderno siamo di fronte alla necessità di risolvere un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite che scriviamo nel modo seguente*

$$\begin{cases} x\ y & a \\ x\ z & b \\ y\ z & c \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione (per seguire la procedura newtoniana) ricavando y e z in funzione di x nelle prime due equazioni, e avremo

$$\begin{cases} y\ \ a - x \\ z\ \ b - x \\ a - x\ b - x\ \ c \end{cases}$$

dalla terza equazione ricaviamo x,

$$\begin{cases} \frac{ab-c}{2}\ \ x \\ z\ \ b - x \\ y\ \ a - x \end{cases}$$

sostituendo il valore di x trovato, otterremo anche quelli di y e z.

$$\begin{cases} \frac{ab-c}{2}\ \ x \\ z\ \ b - \frac{ab-c}{2}\ \ \frac{b-ac}{2} \\ y\ \ a - \frac{ab-c}{2}\ \ \frac{a-bc}{2} \end{cases}$$

Il sistema può essere espresso anche in forma matriciale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

e, dopo aver verificato le ipotesi del teorema di Rouché-Capelli, si può risolvere con la regola di Cramer

$$x\ \ \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad y\ \ \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad z\ \ \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Calcoliamo i determinanti, cominciando da quello comune a tutti i denominatori.

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\ \ \left(-1\right)^{1,1} \cdot 1 \cdot \left(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1\right)\ \ \left(-1\right)^{2,1} \cdot 1 \cdot \left(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0\right)\ \ -1 - 1\ \ -2$$

Calcoliamo ora i determinanti dei numeratori con lo stesso procedimento

$$\det\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}\ \ \left(-1\right)^{1,2} \cdot 1 \cdot \left(b - c\right)\ \ \left(-1\right)^{3,1} \cdot 1 \cdot \left(a - 0\right)\ \ -b\ c - a$$

per cui $x\ \ \frac{-a-b-c}{-2}\ \ \frac{ab-c}{2}$ e analogamente per le altre incognite.

Problema 3. Si tratta di dividere un numero dato in parti tali che ognuna delle più grandi superi la più piccola di una quantità data.

Soluzione. Sia a la quantità che bisogna dividere in quattro parti e x la prima e la più piccola di queste parti; b l'eccesso della seconda sulla prima; c l'eccesso della terza; d l'eccesso della quarta. La seconda parte sarà quindi $x\ \ b$, la terza $x\ \ c$ e la quarta $x\ \ d$. La somma di tutte queste parti sarà $4x\ \ b\ \ c\ \ d$ che deve essere uguale ad a. Pertanto $4x\ \ b\ \ c\ \ d\ \ a$. Togliamo da entrambe le parti $b\ \ c\ \ d$ e avremo $4x\ \ a-b-c-d$ o $x\ \ \frac{a-b-c-d}{4}$.

Per esempio. se si tratta di dividere una linea di 20 piedi in quattro parti in modo che l'eccesso della seconda sulla prima sia di due piedi; quello della terza sulla prima di 3 piedi, e infine quello della quarta di 7 piedi. Il valore di x sarà,

$$x\ \ \frac{a-b-c-d}{4}\ \ \frac{20-2-3-7}{4}\ \ 2$$

$x\ \ b\ \ 4$, $x\ \ c\ \ 5$, $x\ \ d\ \ 9$.

Si seguirà lo stesso procedimento per dividere un'altra quantità qualsiasi, in un numero di parti a piacere.

Problema 4. Un uomo vuole distribuire argento ai poveri. Se avesse otto denari in più, potrebbe darne tre a ciascuno; ne dà loro quindi due e gliene restano tre. Si chiede il numero dei poveri.

Soluzione. Sia x il numero dei poveri. Sono necessari otto denari affinché l'uomo ne possa distribuire $3x$. Il suo argento può essere quindi rappresentato da $3x-8$. Egli distribuisce su questo argento $2x$ di denari: di conseguenza, ciò che gli resta dopo la distribuzione sarà rappresentato da $3x-8-2x$ o $x-8$; ma noi abbiamo detto che quanto restava era uguale a tre denari; di conseguenza, $x-8\ \ 3$, o $x\ \ 11$.

Problema 5. Due messaggeri A e B sono lontani uno dall'altro 59 miglia; essi partono la mattina per incontrarsi. A percorre 7 miglia in due ore e B ne fa 8 in tre ore, ma A è partito un'ora prima di B. Si chiede quante miglia farà A prima di incontrare B.

Soluzione. Chiamate questo numero di miglia x. Allora $59-x$ sarà il cammino fatto da B. E siccome A fa 7 miglia in due ore, farà x miglia in $\frac{2x}{7}$ ore: [Infatti, se consideriamo il moto uniforme, $s\ \ vt$ e quindi $t\ \ \frac{s}{v}\ \ \frac{x}{\frac{7}{2}}\ \ \frac{2x}{7}\ ore$] ciò che si trova facendo questa proporzione $7\,miglia\ \ 2\,ore\ \ x\,miglia\ \ \frac{2x}{7}\ ore$. Analogamente, siccome B fa 8 miglia in 3 ore, farà $59-x$ miglia in $\frac{177-3x}{8}$ ore. Ora, siccome la differenza tra questi due tempi è 1 ora, essi diverranno uguali, aggiungendo 1 ora al più piccolo, cioè a $\frac{177-3x}{8}$ e si avrà l'equazione $1\ \ \frac{177-3x}{8}\ \ \frac{2x}{7}$. Riducendo, si trova $x\ \ 35$. Infatti se si moltiplica l'equazione $1\ \ \frac{177-3x}{8}\ \ \frac{2x}{7}$ per 8essa diviene, $8\ \ 177-3x\ \ \frac{16x}{7}$, o $185-3x\ \ \frac{16x}{7}$ e moltiplicando di nuovo tutto per 7, si ha infine, $1295-21x\ \ 16x$, o, $1295\ \ 37x$ e dividendo per 37 si ha $x\ \ 35$. Così A farà 35 miglia prima di incontrare B.

Lo stesso problema in modo più generale. Si danno le velocità di due mobili A e B; si dà pure la differenza dei tempi e dei luoghi di partenza; si chiede di determinare il luogo in cui si incontrano.

Soluzione. Supponiamo che la velocità di A sia tale che egli percorre lo spazio c nel tempo f; e quella del mobile B tale che percorra lo spazio d nel tempo g; supponete ancora che la differenza dei punti di partenza sia e e la differenza degli istanti h.

Caso 1. Se i due mobili vanno nello stesso senso e A insegue B, il cammino di A sarà uguale a quello di B più l'intervallo che separa i due mobili all'inizio del moto: chiamate x il cammino di A; togliete e da x e il resto $x-e$ sarà il cammino di B. E siccome A percorre lo spazio c nel tempo f, si troverà il tempo che impiega per percorrere x da questa proporzione, $spazio\,c\ \ tempo\,f\ \ spazio\,x\ \ tempo\,\frac{fx}{c}$. E siccome B percorre lo spazio d nel tempo g, percorrerà lo spazio $x-e$ nel tempo $\frac{gx-ge}{d}$. E siccome si suppone la differenza dei tempi uguale a h, basterà aggiungerà h al più piccolo per renderli uguali; per esempio a $\frac{fx}{c}$ se è B che ha iniziato a muoversi per primo e si avrà l'equazione $\frac{fx}{c}\ \ h\ \ \frac{gx-ge}{d}$; e riducendo viene, $\frac{cgecdh}{cg-df}\ \ x$. Se al contrario è A che si mosso per primo, allora bisogna aggiungere h a $\frac{gx-ge}{d}$, e si avrà $\frac{fx}{c}\ \ h\ \ \frac{gx-ge}{d}$ e riducendo si ottiene $x\ \ \frac{cge-cdh}{cg-df}$.

Caso 2. Se i due mobili vanno a incontrarsi tra loro e si suppone, come prima, che la distanza iniziale di A, al punto di incontro sia x, la distanza iniziale di B allo stesso punto sarà $e-x$; il tempo impiegato da A, per percorrere lo spazio x, sarà $\frac{fx}{c}$ e $\frac{gc-gx}{d}$ sarà il tempo impiegato dal mobile B, per percorrere lo spazio $e-x$. Al più piccolo di questi due aggiungete, come prima, la differenza h, cioè a $\frac{fx}{c}$ se è B che si è mosso per primo, e avrete $\frac{fx}{c}\ \ h\ \ \frac{gc-gx}{d}$ e riducendo, $x\ \ \frac{cge-cdh}{cgdf}$; ma se è A a muoversi per primo, aggiungete h al tempo $\frac{gc-gx}{d}$ e la vostra equazione sarà $\frac{fx}{c}\ \ h\ \ \frac{gc-gx}{d}$ e, riducendo, $x\ \ \frac{cgecdh}{cgdf}$.

Esempio. 1°. Se ogni giorno il sole percorre un grado e la luna 13; e in un certo periodo, il sole si trova all'inizio del cancro e tre giorni dopo, la luna all'inizio dell'Ariete, si domanda dove avverrà la loro prima congiunzione.

Risposta: a $10^\circ\,45'$ dal cancro. Infatti, i due corpi si muovono nello stesso verso; ma siccome il moto della luna si conta solo dopo il sole si è già mosso per tre giorni, bisogna indicarla con A e il sole sarà B, e $\frac{cgecdh}{cg-df}$ sarà la lunghezza del cammino che farà la luna. E se si sostituisce nella formula, 13 al posto di c; 1 al posto di f, d, g; 90 al posto di e e 3 al posto di h, essa diverrà

$$\frac{13 \times 1 \times 90 \quad 13 \times 1 \times 3}{13 \times 1 - 1 \times 1} \quad \frac{1209}{12} \quad 100\frac{3}{4}$$

Contate quindi questi 100 gradi e tre quarti dall'inizio dell'Ariete e arriverete a $10^\circ\frac{3}{4}$ o $10^\circ\,45'$ del cancro.

Esempio. 2°. Se due messaggeri, A e B, lontani tra loro 59 miglia, partono la mattina per andare al loro incontro; se A fa 7 miglia in due ore e B 8 miglia in 3 ore; se B si mette in viaggio un'ora dopo A, si chiede il percorso che farà A prima di incontrare B.

Risposta: 35 miglia. Infatti, poiché vanno ad incontrarsi e A è il primo a muoversi, si userà la formula $\frac{cgecdh}{cgdf}$ che indicherà il cammino fatto da A prima di incontrare B. E se si sostituisce in questa formula 7 per c, 2 per f, 8 per d, 3 per g, 59 per e e 1 per h, essa diverrà

$$\frac{7 \times 3 \times 59 \quad 7 \times 8 \times 1}{7 \times 3 \quad 8 \times 2} \quad \frac{1205}{37} \quad 35$$

Problema 6. Data la potenza di un agente qualsiasi, trovare quanti agenti dello stesso tipo dovrebbero agire per produrre, in un tempo dato b, un effetto richiesto a.

Soluzione. Sia la potenza di questo agente tale che in un tempo dato d, esso produca un effetto c, bisogna cercare quale effetto produrrà questa stessa potenza nel tempo b; ciò si troverà con questa proporzione $d \;\; c \;\; b \;\; \frac{bc}{d}$. Ecco l'effetto di un solo agente durante il tempo b. Per trovare quanto deve operare un tale agente per produrre l'effetto richiesto a, fatta questa proporzione $\frac{bc}{d} \;\; 1 \;\; a \;\; \frac{ad}{bc}$, che significa, in linguaggio ordinario, $\frac{bc}{d}$ (l'effetto di un agente unico) sta a 1 (questo agente unico) come a (l'effetto di tutti gli agenti) sta a $\frac{ad}{bc}$ (tutti questi agenti).

Esempio. Se uno scrivano può, in 8 giorni, scrivere 15 fogli, quanti scrivani serviranno per scrivere 405 fogli in 9 giorni?

Risposta: 24. Poiché se si mette 8 al posto di d, 15 al posto di c, 405 al posto di a e 9 al posto di b, il numero di scrivani $\frac{ad}{bc}$ diverrà $\frac{405 \times 8}{9 \times 15} \;\; \frac{3240}{135} \;\; 24$.

Problema 7. Assegnate le forze di numerosi agenti, determinare il tempo x nel quale, tutte insieme, possono produrre un effetto richiesto d.

Soluzione. Siano gli agenti A, B, C tali che nei tempi e, f, g producono rispettivamente gli effetti a, b, c; questi agenti produrranno rispettivamente nel tempo x gli effetti $\frac{ax}{c}$, $\frac{bx}{f}$, $\frac{cx}{g}$, così la somma di tutti questi effetti sarà $\frac{ax}{c} \;\; \frac{bx}{f} \;\; \frac{cx}{g} \;\; d$ e liberando x, si ha, $x \;\; \frac{d}{\frac{ax}{c}\,\frac{bx}{f}\,\frac{cx}{g}}$

Esempio. Tre operai possono fare un'opera qualsiasi in un certo tempo; A, suppongo, può farlo una volta in tre settimane, B tre volte in otto settimane, e C cinque volte in dodici settimane. Si chiede in quanto tempo, tutti insieme potranno fare questa opera. Ora, poiché gli agenti A, B, C producono rispettivamente gli effetti $1, 3, 5$ nei tempi $3, 8, 12$ e si cerca in quale tempo i loro sforzi riuniti produrranno l'effetto 1, si scrivono nella formula prima trovata, i numeri $1, 3, 5, 3, 8, 12$, al posto delle lettere a, b, c, d, e, f, g e si avrà $x \;\; \frac{1}{\frac{1}{3}\,\frac{3}{8}\,\frac{5}{12}} \;\; \frac{8}{9}$ di una settimana, cioè 6 giorni e $5\frac{1}{3}$ ore, tempo nel quale i loro sforzi riunito faranno l'opera.

Problema 8. Si hanno differenti mescolanze di diverse sostanze, si vuole formarne una nuova, in modo che queste diverse sostanze vi si trovino in proporzioni date.

Soluzione. Sia una di queste mescolanze $dA\ eB\ fC$; una seconda $gA\ hB\ kC$ e una terza $lA\ mB\ nC$. In queste espressioni, le lettere A, B, C indicano le sostanze mescolate e d, e, f, g, h, k le proporzioni nelle quali queste sostanze si trovano in ogni miscela. Sia $pA\ qB\ rC$ la nuova miscela che si vuole comporre prendendo parti delle altre. Supponete che x, y, z siano i valori con i quali bisogna moltiplicare rispettivamente le tre prime miscele affinché la loro somma divenga $pA\ qB\ rC$. Si avrà quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} dxA\ exB\ fxC \\ gyA\ hyB\ kyC \\ lzA\ mzB\ nzC \end{array} \right\} \qquad pA\ qB\ rC$$

Così le lettere A, B, C, essendo le stesse in tutti i due membri dell'equazione, anche i loro coefficienti dovranno essere uguali; si ha quindi

$$\begin{array}{c} dx\ gy\ lz\ \ p \\ ex\ hy\ mz\ \ q \\ fx\ ky\ nz\ \ r \end{array}$$

Ed eliminando x in queste tre equazioni, si ha $x\ \ \frac{p-gy-lz}{d}\ \ \frac{q-hy-mz}{e}\ \ \frac{r-ky-nz}{f}$. Riducendo di nuovo, si trova $y\ \ \frac{cp-dqdmz-elz}{cg-dh}\ \ \frac{fq-cr-enz-fmz}{fh-ck}$. Facciamo, per abbreviare, $\alpha\ \ ep-dq$; $\beta\ \ dm-el$; $\gamma\ \ eg-dh$; $\delta\ \ fq-cr$; $\zeta\ \ cn-fm$ e $\theta\ \ fh-ek$. Allora il primo valore di y diverrà, $y\ \ \frac{\alpha\beta z}{\gamma}$ e il secondo, $y\ \ \frac{\delta\zeta z}{\theta}$. Pertanto $\frac{\alpha\beta z}{\gamma}\ \ \frac{\delta\zeta z}{\theta}$ ed ricavando z da quest'ultima equazione, si ha $z\ \ \frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}$. Il valore di z trovato, sostituitelo nell'equazione $y\ \ \frac{\alpha\beta z}{\gamma}$, il valore di y sarà allora dato in quantità tutte note: si tratterà di sostituire i valori di z e di y nell'equazione $x\ \ \frac{p-gy-lz}{d}$ per avere così il valore di x in quantità tutte note.

Esempio. Si hanno tre miscele di metalli in fusione: una libbra della prima miscela contiene 12 once d'argento, un'oncia di rame e 3 di stagno; una libbra della seconda miscela contiene un'oncia d'argento, 12 once di rame e 3 di stagno; una libbra della terza contiene 14 once di rame, 2 di stagno e non contiene argento. Si tratta, con queste tre miscele, di formarne una nuova che, in ogni libbra, contenga 4 once d'argento, 9 once di rame e 3 di stagno. Invece delle lettere $d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r$ scrivete rispettivamente i loro valori $12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3$; allora $\alpha\ \ ep-dq\ \ 1\times 4-12\times 9\ \ -104$, $\beta\ \ dm-el\ \ 12\times 14-1\times 0\ \ 168$. Si troverà analogamente che $\gamma\ \ -143$, $\delta\ \ 24$, $\zeta\ \ -40$, $\theta\ \ 33$. Così l'equazione $z\ \ \frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}\ \ \frac{-34323432}{5720-5544}\ \ 0$; $y\ \ \frac{\alpha\beta z}{\gamma}\ \ \frac{-1040}{-143}\ \ \frac{8}{11}$ e $x\ \ \frac{p-gy-lz}{d}\ \ \frac{4-\frac{8}{11}}{12}\ \ \frac{3}{11}$. Di conseguenza se si prende, per ogni libbra, $\frac{8}{11}$ della seconda miscela e $\frac{3}{11}$ della prima, senza prendere nulla dalla terza, ogni libbra della nuova miscela conterrà quattro once d'argento, nove di rame e tre di stagno.

Problema 9. Si conosce il prezzo di diverse miscele e le proporzioni di ciascuna delle cose le compongono; si tratta di determinare il prezzo di ciascuna delle cose componenti in particolare.

Soluzione. Gli oggetti che entrano nella prima miscela sono indicati rispettivamente con A, B, C; le loro proporzioni con d, g, l e il prezzo di questa miscela con p. Questa miscela e il suo prezzo saranno espressi dall'equazione $dA\ gB\ lC\ \ p$. Una seconda miscela, $eA\ hB\ mc$ ha come prezzo q; e una terza, $fA\ kB\ nC$ ha per prezzo r. Si domanda il prezzo di A, B, C. Siano rispettivamente questi prezzi x, y, z. È evidente che si avranno queste tre equazioni $dx\ gy\ lz\ \ p$, $ex\ hy\ mz\ \ q$ e $fx\ ky\ nz\ \ r$; e trattando queste tre equazioni come abbiamo fatto con quelle del problema precedente, si troverà $z\ \ \frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}$, $y\ \ \frac{\alpha\beta z}{\gamma}$ e $x\ \ \frac{p-gy-lz}{d}$.

Esempio. Un uomo acquista 40 staia di frumento, 24 di orzo e 20 di avena, al prezzo di 15 libbre, 12 sterline. Fa un secondo acquisto di 26 staia di frumento, 30 di orzo e 50 di avena al prezzo di 16 libbre. Infine fa un terzo acquisto di 24 staia di frumento, 120 di orzo e 100 di avena al prezzo di 34 libbre. Si chiede il prezzo della staia di ogni specie di granaglie. **Risposta**: la staia di frumento gli è costata 5 sterline, quella di orzo 3 sterline e quella di avena 2 sterline. Infatti invece di $d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, r$ sostituite rispettivamente nelle equazioni $40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; 15\frac{3}{5}, 16, 34$ e avrete $\alpha\ \ ep-dq\ \ 26\times 15\frac{3}{5}-40\times 16\ \ -234\frac{2}{5}$, $\beta\ \ dm-el\ \ 40\times 50-26\times 20\ \ 1480$. Analogamente $\gamma\ \ -576$, $\delta\ \ -500$, $\zeta\ \ 1400$ e $\theta\ \ -2400$. Così, $z\ \ \frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}\ \ \frac{562560-288000}{-8064003552000}\ \ \frac{274560}{2745600}\ \ \frac{1}{10}$; $y\ \ \frac{\alpha\beta z}{\gamma}\ \ \frac{-234\frac{2}{5}148}{-576}\ \ \frac{3}{20}$; $x\ \ \frac{p-gy-lz}{d}\ \ \frac{15\frac{3}{5}-\frac{18}{5}-2}{40}\ \ \frac{1}{4}$. Pertanto la staia di frumento è costata $\frac{1}{4}$ di libbra, quella di orzo $\frac{3}{20}$ e quella di avena $\frac{1}{10}$.

Problema 10. Conoscendo il peso specifico di un composto e quello di ciascuno dei suoi componenti, determinare in quale proporzione questi ultimi sono presenti.

Soluzione. Sia e il peso specifico del composto, le cui parti componenti sono $A\ B$; sia inoltre a il peso specifico della parte componente A e b il peso specifico della parte componente B. Si sa che il peso assoluto di un corpo è uguale al suo volume moltiplicato per il suo peso specifico; così aA è il peso assoluto o il peso della parte componente A e bB il peso assoluto di B. D'altro canto $eA\ eB$ è il peso del composto; così $aA\ bB\ \ eA\ eB$ o $aA - eA\ \ eB - bB$, oppure $e - b\ \ a - e\ \ A\ \ B$.

Esempio. Sia il peso specifico dell'oro come 19; quello dell'argento come $10\frac{1}{3}$ o $\frac{31}{3}$ e quello della corona di Gerone come 17. Si troverà che la proporzione tra il volume d'oro e quello d'argento nella corona starà come $1\ \ 3\ \ e - .b\ \ a - e\ \ A\ \ B$. E la proporzione tra il peso dell'oro e quello dell'argento in questa stessa corona starà come $190\ \ 31\ \ 19 \times 10\ \ \frac{31}{3} \times 3\ \ a\left(e - b\right)\ \ b\left(a - e\right)$. Il peso della corona sta al peso dell'argento che esso contiene come $221\ \ 31$.

Problema 11. Si hanno tre prati di una uguale qualità e nei quali si suppone che l'erba cresca uniformemente, Il primo b può nutrire un numero di buoi a nel tempo c; il secondo e può nutrire un numero di buoi d per il tempo f; si domanda quanto il terzo g può nutrirne nel tempo h.

Soluzione. Se i buoi a nel tempo c mangiano il prato b, si vede che in proporzione serviranno $\frac{ac}{b}$ buoi per mangiare il prato e nello stesso tempo o i buoi $\frac{ace}{bf}$ per mangiarlo durante f o i buoi $\frac{ace}{bh}$ per mangiarlo nel tempo h, supponendo che le erbe cessino di crescere dopo il tempo c. Ma a causa della crescita uniforme dell'erba, serve una mandria d per mangiare il prato e nel tempo f. Ne segue che l'erba che sarà cresciuta in questo prato nel tempo $f - c$, basterà a nutrire nel tempo f un numero di buoi espresso da $d - \frac{cea}{bf}$; o per nutrire nel tempo h un numero di buoi espresso da $\frac{df}{h} - \frac{ace}{bh}$. E in proporzione, l'erba che sarà cresciuta in questo prato nel tempo $h - c$ sarà sufficiente a nutrire nel tempo h un numero di buoi espresso da $\left(\frac{h-c}{f-c}\right)\left(\frac{df}{h}\ \frac{ace}{bh}\right)\ \ \frac{bdfh-aceh-bdcfaec^2}{bfh-bch}$. Aggiungete queste mandrie di buoi a quella che è espressa da $\frac{ace}{bh}$ e verrà $\frac{bdfh-aceh-bdcfacef}{bfh-bch}$, numero di buoi sufficiente per mangiare il prato e nel tempo h. Ora una proporzione ci fa conoscere il numero di buoi che servono per mangiare il prato g nello stesso tempo h e questo numero è $\frac{bdfgh-acegh-bcdgfacefg}{befh-bceh}$[3].

Esempio. 12 buoi pascolano l'erba di $3\frac{1}{3}$ arpenti *[antica misura agraria equivalente a circa* $3000\,m^2$*]* in 4 settimane; 21 buoi pascolano quella di 10 arpenti in 9 settimane; si chiede quanti buoi serviranno per mangiare l'erba di 24 arpenti in 18 settimane. **Risposta**: Si sono supposti i prati di pari qualità. si troverà la risposta a questo problema sostituendo rispettivamente $12, 3\frac{1}{3}, 4, 21, 10, 9, 24, 18$ al posto delle lettere a, b, c, d, e, f, g, h nella formula $\frac{bdfgh-acegh-bcdgfacefg}{befh-bceh}$. Ma l'operazione non sarebbe meno breve, se la si riprendesse dall'inizio modellandola su quanto abbiamo fatto in lettere. Infatti, se 12 buoi hanno pascolato in 4 settimane l'erba di $3\frac{1}{3}$ arpenti, serviranno in proporzione, o 36 buoi in 4 settimane $[12\ \ 36\ \ 3\frac{1}{3}\ \left(\frac{10}{3}\right)\ \ 10]$ o 16 buoi in 9 settimane *[proporzionalità inversa,* $36\ \ 16\ \ 9\ \ 4]$ o 8 buoi in 18 settimane $[16\ \ 8\ \ 18\ \ 9$ per pascolare l'erba di 10 arpenti, supponendo, ben inteso, che l'erba cessi di crescere dopo le quattro settimane. Ma siccome l'erba non cessa di crescere, 21 buoi in 9 settimane ne possono pascolare solo 10 arpenti; serve quindi che l'erba che è cresciuta on questi 10 arpenti nell'eccesso di 9 settimane su quattro settimane, o per 5 settimane, sia sufficiente a nutrire, per 9 settimane, l'eccesso di 21 buoi su 16 buoi, o 5 buoi, oppure $\frac{5}{2}$ buoi per 18 settimane. Analogamente, l'erba cresciuta in 14 settimane (eccesso di 18 settimane su 4) deve nutrire 7 buoi per 18 settimane, come si vede facendo questa proporzione, $5 settimane\ \ 14 settimane\ \ \frac{5}{2} buoi\ \ 7 buoi$. Così, 10 arpenti bastano a nutrire gli 8 buoi per 18 settimane, nell'ipotesi che l'erba avrebbe cessato di crescere dopo le prime quattro settimane; ora, vediamo che l'erba che è cresciuta durante queste 14 settimane di surplus, era sufficiente a nutrire 7 buoi per 18 settimane). Pertanto questi 10 arpenti hanno potuto nutrire 15 buoi per 18 settimane, quanto 24 arpenti potranno nutrire durante lo stesso tempo? Si troverà, facendo la proporzione, che possono nutrirne 36 *[*$10\ \ 24\ \ 15\ \ x$*, cioè* $x\ \ 36$*]*.

Problema 12. Date le grandezze e le rispettive quantità di moto di due corpi sferici che si muovono sulla stessa retta e si urtano; determinare le loro quantità di moto rispettive dopo l'urto.

Soluzione. La risoluzione di questo problema dipende dalle due proposizioni seguenti: 1° Ogni corpo subisce una reazione uguale all'azione che fatto sull'altro. 2° La velocità relativa per allontanarsi dopo l'urto è uguale a quella che avevano prima durante l'avvicinamento. Ciò posto, siano A e B i due corpi e a, b le loro rispettive velocità; le loro quantità di moto siano aA e bB (poiché la quantità di moto di un corpo è uguale al prodotto della sua massa per la sua velocità). Supponiamo che i due corpi si muovano dalla stessa parte, ma che la velocità di A sia la più considerevole e che egli tende, di conseguenza, a raggiungere B; supponiamo inoltre che x sia la quantità di moto che aA perderà per l'urto, di conseguenza, x sarà anche la quantità di moto acquistata da bB. Così, dopo la riflessione, le quantità di moto rispettive saranno $aA - x$ e $bB\ x$; e le velocità saranno $\frac{aA-x}{A}$ e

[3]Nota: La migliore spiegazione che si possa dare di questo problema si trova nell'esempio che segue.

$\frac{bBx}{B}$ *[quantità di moto diviso la massa]*. Ora la differenza delle velocità dopo l'urto deve essere uguale a $a-b$, differenza delle velocità prima dell'urto *[ciò che noi chiamiamo, conservazione della quantità di moto]*. Avremo quindi, $\frac{bBx}{B} - \left(\frac{aA-x}{A}\right) \quad a-b$. E riducendo, si ha,

$$x \quad \frac{2aAB - 2bAB}{A \quad B}$$

E sostituendo questo valore di x nell'espressione delle velocità $\frac{aA-x}{A}$ e $\frac{bBx}{B}$, la velocità di A diviene, dopo l'urto, $\frac{aA-aB2bB}{Ab}$ e quella d B, $\frac{2aA-bAbB}{Ab}$. Se i due mobili andassero in senso direttamente opposto, bisognerebbe cambiare dappertutto il segno di b; e le velocità rispettive di A e di B, dopo la riflessione, saranno $\frac{aA-aB-2bB}{Ab}$ e $\frac{2aAbA-bB}{Ab}$. Se una o l'altra di queste velocità è negativa, è una prova che il mobile al quale appartiene è spinto in una direzione contraria a quella che aveva A prima dell'urto. Si deve intendere la stessa cosa del moto di A nel caso precedente.

Esempio. Siano due mobili di materia omogenea che abbiano, il primo A una massa di 3 libbre e 8 gradi di velocità; il secondo B, 9 libbre di massa e 2 gradi di velocità e supponiamo che questi due corpi si muovano nello stesso verso. Allora al posto di A, a, B, b, sostituite rispettivamente $3, 8, 9, 2$ e $\frac{aA-aB-2bB}{Ab} \quad -1$ e $\frac{2aAbA-bB}{Ab} \quad 5$. Così. dopo la riflessione, A ritornerà in senso contrario con un grado di velocità e B continuerà il suo moto nella direzione iniziale con 5 gradi di velocità.

Problema 13. Trovare tre numeri in proporzione continua la cui somma sia 20 e la cui somma dei quadrati sia 140.

Soluzione. Sia il primo di questi numeri x, e il secondo y, il terzo sarà $\frac{y^2}{x}$ *[proporzione continua: $x \quad y \quad y \quad z$, da cui $z \quad \frac{y^2}{x}$]*. Si avrà quindi $x \quad y \quad \frac{y^2}{x} \quad 20$ e $x^2 \quad y^2 \quad \frac{y^4}{x^2} \quad 140$. E riducendo, la prima equazione diviene $x^2 \quad \left(y-20\right) x \quad y^2 \quad 20$. E la seconda $x^4 \quad \left(y^2-140\right) x^2 \quad y^4 \quad 0$. Per eliminare x da queste due equazioni, impiegate il metodo della regola terza sull'eliminazione e sostituite nella formula al posto delle lettere a, b, c, d, e, f, g, h i loro valori rispettivi $1, 0, y^2-140, 0, y^4; 1, y-20, y^2$, si otterrà

$$\left(-y^2 \quad 280\right) y^6 \quad \left(2y^2 - 40y \quad 260\right) \left(260y^4 - 40y^3\right) \quad 3y^4 \cdot y^4 - 2y^2 \left(y^6 - 40y^5 \quad 400y^4\right) \quad 0$$

e, facendo le moltiplicazioni indicate, si ha, $1600y^6 - 20800y^5 - 67600y^4 \quad 0$. che si riduce a $4y^2 - 52y \quad 169 \quad 0$, o risolvendo, $2y - 13 \quad 0$ o $y \quad 6\frac{1}{2}$. È lo stesso numero che abbiamo trovato prima, con un metodo molto più rapido, ma meno diretto. Infine, per trovare x, sostituite $6\frac{1}{2}$ al posto di y nell'equazione $x^2 \quad \left(y-20\right) x \quad y^2 \quad 20$ e avrete $x^2 - 13\frac{1}{2}x \quad 42 \quad 0$, ne risulterà questa equazione $x \quad 6\frac{1}{4} \pm \sqrt{3\frac{5}{16}}$, cioè $6\frac{1}{4} \quad \sqrt{3\frac{5}{16}}$ è il maggiore dei tre numeri cercati e $6\frac{1}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ è il più piccolo; poiché x può essere indifferentemente l'uno o l'altro degli estremi della proporzione: da ciò risultano per x due valori; e quando uno di questi valori è il primo estremo, $\frac{y^2}{x}$ è il secondo, e viceversa.

Lo stesso problema in un altro modo

Supporremo, come prima, che i numeri cercati sono $x, y, \frac{y^2}{x}$. Di conseguenza si avrà, $x \quad y \quad \frac{y^2}{x} \quad 20$ o $x^2 \quad \left(y-20\right) x \quad y^2 \quad 20$ e risolvendo questa equazione si trova $x \quad 10 - \frac{y}{2} \pm \sqrt{100 - 10y - \frac{1}{4}y^2}$. Se sottraiamo y e il valore che troviamo per x, dal numero 20, la differenza sarà il valore del terzo termine $\frac{y^2}{x}$ *[cioè $\frac{y^2}{x} \quad 20 - x - y$]*. Avremo quindi $\frac{y^2}{x} \quad 10 - \frac{y}{2} \mp \sqrt{100 - 10y - \frac{y^2}{4}}$. Facciamo ora il quadrato di questi tre numeri, la loro somma deve essere uguale a 140. Avremo quindi

$$\left(10 - \frac{y}{2} \pm \sqrt{100 - 10y - \frac{y^2}{4}}\right)^2 \quad y^2 \quad \left(10 - \frac{y}{2} \mp \sqrt{100 - 10y - \frac{y^2}{4}}\right)^2 \quad 140$$

[le radici che compaiono nei doppi prodotti si annullano] quantità che si riduce, fatte tutte le operazioni, a $400 - 40y \quad 140$, o a $y \quad 6\frac{1}{2}$, come abbiamo trovato prima. Sostituiamo questo valore di y nell'equazione che dà il valore di x e il primo numero sarà $6\frac{3}{4} \quad \sqrt{3\frac{5}{16}}$ e l'ultimo $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ come prima.

Problema 14. Si vogliono trovare quattro numeri in proporzione continua, dove la somma dei due medi faccia 12 e quella dei due estremi 20.

SOLUZIONE. Sia x il secondo di questi numeri, allora $12 - x$ sarà il terzo; e facendo la proporzione $12 - x \;\; x \;\; x \;\; \frac{x^2}{12-x}$ che sarà il nostro primo numero. Troveremo il quarto con quest'altra proporzione; x (il secondo numero) $12 - x$ (il terzo) $12 - x \;\; \frac{144-24xx^2}{x}$ che sarà infine il quarto numero cercato. Ora una delle condizioni del problema è che la somma del primo e del quarto deve essere uguale a 20, serve dunque che $\frac{x^2}{12-x} \;\; \frac{144-24xx^2}{x} \;\; 20$ o riducendo $x^2 - 12x \;\; -30\frac{6}{7}$ e risolvendo $x \;\; 6 \pm \sqrt{5}$. Una volta trovato questo numero , si otterranno successivamente tutti gli altri, sostituendo il suo valore nelle equazioni precedenti.

PROBLEMA 15. Trovare quattro numeri in proporzione continua la cui somma sia a e la somma dei quadrati b.

SOLUZIONE. Sebbene la nostra consuetudine sia stata finora cercare nel modo più diretto le quantità incognite, tuttavia quando si trovano due di queste quantità talmente equivoche che le stesse condizioni possono convenire (come sono qui i due estremi o i due medi della nostra proporzione continua), in questo caso, non serve cercare né l'uno né l'altro; basta cercarne uno nuovo che possa servire a determinarli, come sarebbe, per esempio, o la loro somma, o la loro differenza, o il loro prodotto. Supponiamo quindi che la somma dei nostri medi sia s e che il loro prodotto sia r, è evidente che la somma degli estremi è $a - s$ e che il loro prodotto è r, lo stesso di quello dei medi. Ora è da queste quantità che si devono ricavare i quattro termini della nostra proporzione. Sia quindi x il primo e y il secondo, allora $s - y$ sarà il terzo e $a - s - x$ il quarto. Il prodotto dei medi sarà $sy - y^2 \;\; r$. Di conseguenza, il valore del primo medio y sarà $y \;\; \frac{1}{2}s \;\; \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - r}$, e quella del secondo sarà $s - y \;\; \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - r}$. Infine il prodotto degli estremi è, $ax - sx - x^2 \;\; r$. Si vede da ciò che il valore del primo estremo è $x \;\; \frac{a-s}{2} \;\; \sqrt{\frac{s^2-2asa^2}{4} - r}$; quello del secondo estremo è, $a - s - x \;\; \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{s^2-2asa^2}{4} - r}$.

La somma dei quadrati di questi quattro numeri è $2s^2 - 2as \;\; a^2 - 4r$ che è uguale a b. Ricavando da questa equazione il valore di r si ha, $r \;\; \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}as \;\; \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b$; e mettendo al posto di r il suo valore nelle nostre quattro equazioni, ecco quelle che avremmo per i nostri numeri.

$$I\,due\,medi \quad \begin{cases} \frac{1}{2}s \;\; \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{2}s^2 \;\; \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2} \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{2}s^2 \;\; \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2} \end{cases}$$

$$I\,due\,estremi \quad \begin{cases} \frac{a-s}{2} \;\; \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2} \\ \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2} \end{cases}$$

Ci resta ora da determinare il valore di s. Per ottenerlo, poniamo per abbreviare, $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{2}s^2 \;\; \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2} \;\; p$ e $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2} \;\; q$, di modo che l'espressione dei medi sarà $\frac{1}{2}s \;\; p$ e $\frac{1}{2}s - p$. L'espressione degli estremi sarà $\frac{a-s}{2} \;\; q$ e $\frac{a-s}{2} - q$. Facciamo ora uso delle due condizioni racchiuse nell'enunciato del problema: la prima è che il prodotto del secondo e del quarto termine è uguale al quadrato del terzo; e la seconda che il prodotto del primo e del terzo è uguale al quadrato del secondo. La prima condizione ci dà, $\frac{as-a^2}{4} - \frac{1}{2}qs \;\; \frac{pa-ps}{2} - pq \;\; \frac{1}{4}s^2 - ps - p^2$; e la secondo condizione dà, $\frac{as-s^2}{4} \;\; \frac{1}{2}qs - \left(\frac{pa-ps}{2}\right) - pq \;\; \frac{1}{4}s^2 \;\; ps \;\; p^2$. Sottraendo la prima di queste equazioni dalla seconda, resterà $qs - pa \;\; ps \;\; 2ps$, o $qs \;\; pa \;\; ps$. Rimettiamo ora, al posto di p, il suo valore $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{2}s^2 \;\; \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2}$ e al posto di q il suo valore $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2}$ e ciò darà $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2} \;\; (a \;\; s) \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{2}s^2 \;\; \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2}$. Ed elevando al quadrato ogni membro $s^2 \;\; -\frac{b}{a}s \;\; \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b$ o $s \;\; -\frac{b}{2a} \;\; \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} \;\; \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b}$. Una volta determinata la quantità s, si potranno dedurre tutte le altre dalle equazioni trovate sopra.

PROBLEMA 16. Una pensione di una somma annuale, deve essere pagata per cinque anni; qualcuno acquista questa pensione per una somma c d'argento in contanti. Si chiede a quale percentuale ammonta, in questo contratto, l'interesse degli interessi di ogni anno.

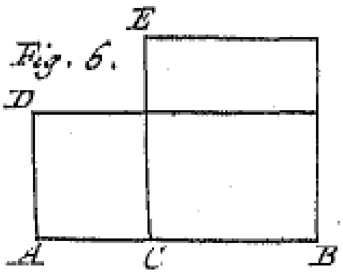
SOLUZIONE. Sia $1 - x$ l'interesse degli interessi della somma x per anno. Cioè se si dovesse pagare, dopo l'anno trascorso, una somma 1, si pagherebbe lo stesso debito pagando soltanto all'inizio dell'anno una somma x, più piccola di 1. Quindi, per analogia, se si dovesse pagare alla fine dell'anno una somma a, questa stessa somma pagata all'inizio varrebbe solo una somma ax. a pagabile dopo due anni, varrebbe, in argento contante, solo ax^2; dopo 3 anni, ax^3; dopo 4 anni, ax^4; e dopo 5 anni ax^5. Aggiungete queste cinque somme e avrete $ax^5 \;\; ax^4 \;\; ax^3 \;\; ax^2 \;\; ax \;\; c$; o $x^5 \;\; x^4 \;\; x^3 \;\; x^2 \;\; x \;\; \frac{c}{a}$, equazione di quinto grado. Quando, con le regole che saranno insegnate in seguito, si sarà determinato il valore di x[4] si farà questa proporzione x 1 100 y. Si avrà quindi $y - 100$ per l'interesse annuale.

Crediamo di aver assai moltiplicato gli esempi di problemi dove si cercano solo i rapporti delle quantità, è tempo di occuparci di quelli in cui si cerca inoltre la posizione delle rette, cioè dei problemi geometrici.

[4]Cioè quando si troveranno, con una costruzione meccanica qualsiasi, le prime cifre della radice e poi si otterranno le altre con il metodo di Viete.

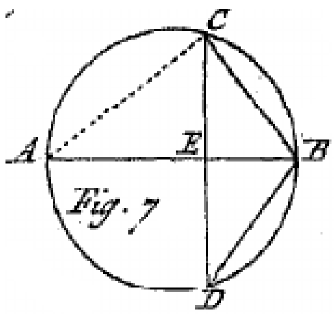
Modo di porre i problemi di Geometria in equazione

È pure qualche volta facile mettere in equazione un problema di geometria al pari di un problema numerico. Del resto, le regole sono le stesse in entrambi i casi. Per esempio si tratta di intersecare in C una retta AB in media ed estrema ragione, cioè dividerla in modo che il quadrato BE della parte maggiore sia uguale al rettangolo BD della linea totale per la più piccola; posti $AB \;\; a$ e $BC \;\; x$, AC uguaglierà $a - x$ e $x^2 \;\; a\left(a - x\right)$. E risolvendo questa equazione, si ottiene $x \;\; -\frac{1}{2}a \;\; \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$.



Ma le posizioni delle linee, i loro rapporti, complicano più spesso i problemi di geometria a un punto che si ha bisogno di metodi e di artifici particolari per riportarli alla forma di semplici quantità algebriche. E sebbene sia molto difficile dare dei criteri generali in una simile materia, dove ciascuno deve contare principalmente sulla propria abilità, io cercherò di indicare il percorso agli iniziati. Bisogna quindi sapere che le stesse linee possono essere confrontate tra loro con diversi rapporti dando origine ad altrettanti problemi differenti, secondo che si prenderanno le une o le altre per incognite e si cercherà il valore di queste incognite per mezzo di quelle che si considereranno come note. Del resto, quali esse siano, in ogni problema, i dati e le incognite, la risoluzione si ottiene sempre con gli stessi metodi analitici che servono a risolvere problemi puramente numerici; la sola differenza è che le lettere che, nei problemi algebrici, indicano quantità astratte, rappresentano qui linee note e incognite.

Per esempio. se si tratta del triangolo CBD inscritto in un cerchio e si vogliono confrontare i sui lati BC e BD e la sua base CD con il diametro del cerchio AB, il problema potrebbe essere cercare il diametro per mezzo dei lati e della base, oppure cercare la base per mezzo dei lati e del diametro, o, infine, cercare i lati per mezzo della base e del diametro. Ma qualunque siano le linee che si vuole scegliere, il problema si metterà in equazione con gli stessi metodi analitici.



Se si cerca il diametro, si pone $AB \;\; x$, $CD \;\; a$ e BC o $BD \;\; b$. Allora se si traccia la corda AC, si avrà, a causa dei triangoli simili ABC e CBE, $AB \;\; BC \;\; BC \;\; BE$ e sostituendo i valori analitici, $x \;\; b \;\; b \;\; BE \;\; \frac{b^2}{x}$. Da un altro lato, $CE \;\; \frac{a}{2}$ e nel triangolo CEB, a causa dell'angolo retto, si ha, $CE^2 \;\; BE^2 \;\; BC^2$, oppure $\frac{1}{4}a^2 \;\; \frac{b^4}{x^2} \;\; b^2$. equazione che è facile da risolvere e che ci darà il valore di x.

Se si cerca la base, allora bisogna porre $AB \;\; c$, $CD \;\; x$ de BC o $BD \;\; b$, e ricavando AC, si ha, per i triangoli simili ABC e CBE, $AB \;\; BC \;\; BC \;\; BE$, o, $c \;\; b \;\; b \;\; BE \;\; \frac{b^2}{c}$. D'altro canto, $CE \;\; \frac{1}{2}CD$. E per il triangolo rettangolo CEB, si ha $CE^2 \;\; BE^2 \;\; BC^2$, oppure $\frac{x^2}{4} \;\; \frac{b^4}{c^2} \;\; b^2$,equazione che, una volta risolta, ci darà il valore di x.

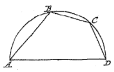
Se si cerca il lato BC o BD, bisogna porre $AB\ \ c$, $CD\ \ a$ e BC o $BD\ \ x$, e ricavare Ac. Per i triangoli simili ABC e CBE, si ha $AB\ \ BC\ \ BC\ \ BE$, o, $c\ \ x\ \ x\ \ BE$. Così $BE\ \ \frac{x^2}{c}$. E poiché $CE\ \ \frac{1}{2}CD$ ed essendo il triangolo CEB retto, si ha $CE^2\ \ BE^2\ \ BC^2$, ne segue che $\frac{1}{4}a^2\ \ \frac{x^4}{c^2}\ \ x^2$, e una volta risolta l'equazione si avrà il valore di x.

Voi vedete quindi che in ogni caso il calcolo con il quale si giunge all'equazione è del tutto simile; che l'equazione che si produce è sempre la stessa, con la sola differenza che la stessa linea è indicata talvolta da una lettera, talvolta da un'altra, secondo che essa è considerata nota o incognita. È vero che, secondo che si prenderà la stessa linea per nota o per incognita, nascerà una differenza nel modo di ridurre l'equazione. Infatti, l'equazione $\frac{1}{4}a^2\ \ \frac{b^4}{x^2}\ \ b^2$ dà, per riduzione, $x\ \ \frac{-2b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, valore di AB; l'equazione $\frac{x^2}{4}\ \ \frac{b^4}{c^2}\ \ b^2$ dà $x\ \ \frac{-2b^2}{\sqrt{4b^2-c^2}}$, valore di CD, e l'equazione $\frac{1}{4}a^2\ \ \frac{x^4}{c^2}\ \ x^2$ dà $x\ \ \sqrt{\frac{1}{2}c^2 \pm \sqrt{\frac{c^4-a^2c^2}{4}}}$, valore di BC o di BD; e per ognuna di queste equazioni si è giunti al valore di x con percorsi diversi (infatti, nell'equazione $\frac{x^2}{4}\ \ \frac{b^4}{c^2}\ \ b^2$ è evidente che bisognerà usare modalità diverse secondo che si vorrà liberare c, oppure a, oppure b); ma tutte queste equazioni sono state trovate allo stesso modo.

Da ciò viene la massima dei geometri, che non bisogna porre alcuna differenza tra i dati e le incognite. Massima alquanto vera, poiché se, in uno stesso problema, si considerasse ognuna di queste quantità come l'incognita, si arriverebbe sempre alla stessa equazione. Bisogna quindi considerare tutte le quantità senza alcuna differenza tra i dati e le incognite, al fine di meglio valutare i loro rapporti e i metodi più opportuni per calcolarle; o meglio ancora, di immaginare che un problema qualsiasi consiste solo nella capacità di classificare le sue quantità in note o incognite in modo da pervenire all'equazione il più facilmente possibile.

Quando quindi un problema vi è proposto, confrontate tra loro tutte le quantità che contiene; stimate come qualcuna di loro vi appare nota e potrete, con un procedimento sintetico, giungere a trovare le altre.

Per questo, non è necessario riconoscere al primo colpo d'occhio quale procedimento di calcolo algebrico condurrà dall'una all'altra, basta cogliere in generale che le une possono essere dedotte dalle altre con un metodo qualsiasi.



Per esempio, se si proponesse un problema che abbia per oggetto il diametro AD e i tre segmenti AB, BC, CD inscritti in un semicerchio e che, essendo dati tutti gli altri, si cercasse BC; a prima vista, si vede che il diametro AD determina necessariamente il semicerchio e ne segue che i segmenti AB e CD, e di conseguenza il segmento BC che si cerca, e ciò con il metodo più diretto. Ma non si scopre con la stessa facilità, per quale percorso l'analisi conduce da quantità note al segmento cercato BC. Ciò sarà la stessa cosa se servisse cercare o AB, o CD, dato tutto il resto.

Ma se, dati AB, BC e CD, si dovesse cercare il diametro AD, si vede all'istante che il problema non è possibile con la sintesi, poiché la distanza dei punti A e D dipende dall'ampiezza degli angoli B e C; questi angoli dipendono dal cerchio nel quale i segmenti dati devono essere inscritti e, non essendo dato questo cerchio, poiché il suo diametro è supposto incognito.

La natura del problema non permette quindi di trovare sinteticamente il diametro AD. Allora bisogna trattarlo come se fosse noto, per risalire alle quantità date.

Quando voi avrete ben colto i diversi metodi con i quali ogni termine di un problema può essere determinato, allora, tra tutti i segmenti che devono entrare nel problema, considerate come note quelle che vi presenteranno la strada più facile per arrivare alla conoscenza delle altre e il cui percorso inverso sarebbe nello stesso tempo più difficile. È sempre da questi segmenti che il calcolo deve cominciare, sebbene nel corso dell'operazione, se ne possano introdurre altri. Il mezzo più breve per arrivare allo scopo, è mettere, per un momento, da parte il problema che si vuole risolvere e immaginarsi che si tratti unicamente di scegliere, tra tutte le quantità che devono entrare nel problema, quelle che, supposte note, porterebbero più facilmente alla conoscenza delle altre.

Così, nell'esempio già citato. se si cerca il diametro AD, è facile vedere che non lo si può trovare con un metodo sintetico; ma si vede presto che, considerando questo diametro noto, si arriva alle altre quantità per la strada più diretta. Considero pertanto AD come noto e stabilisco il mio calcolo come se lo fosse realmente e come se si trattasse di trovare qualcuno dei segmenti dati AB, BC o CD, In questo modo, si ottengono i rapporti che esistono tra le quantità che si trattano come note e le altre, e si arriva sempre a una equazione tra due valori di una stessa quantità, sia che uno dei valori risulti dal nome dato a questa quantità all'inizio dell'operazione e che l'altra sia stata trovata con il calcolo, sia che entrambe siano state ricavate con operazioni diverse di analisi.

Del resto, la cosa più difficile non è pensare le relazioni generali dei termini in questione, ma cogliere certi legami tra i segmenti, certi rapporti più idonei di altri ad essere sottoposti al calcolo. Succede frequentemente che relazioni che appaiono immediate al primo colpo, vi portino lungo percorsi lunghi, quando voi le trattate analiticamente e spesso vi obbligano a ricominciare l'operazione con metodi nuovi. Bisogna quindi impiegare le proposizioni o gli enunciati più adatti ad essere espressi con i calcoli dell'Algebra.

In primo luogo, il calcolo si opera o per somma di segmenti, affinché, dal valore delle parti, si ottenga il valore del tutto; o per la sottrazione, affinché dal valore del tutto e di una parte si ottenga il valore dell'altra parte.

Secondariamente, il calcolo si fa con la proporzione dei segmenti. Questo è un principio che vale in Geometria, che, in una proporzione, se si divide il prodotto dei medi per uno degli estremi, il quoziente restituisce l'altro estremo; o, ciò che è una conseguenza dello stesso principio, se si hanno i valori di quattro quantità proporzionali, vi è sempre uguaglianza tra il prodotto degli estremi e dei medi. La proporzione dei segmenti si ricava soprattutto dalla similitudine dei triangoli; e questa similitudine si riconosce dall'uguaglianza degli angoli. Ci si deve quindi esercitare molto nel confronto degli angoli e per questo, bisogna essere ben preparati su tutte le proposizioni elementari che hanno rapporto con queste parti.

In terzo luogo, il calcolo si opera con l'addizione o la sottrazione dei quadrati. Ciò che, nei triangoli rettangoli, la somma dei quadrati dei due lati minori e uguale al quadrato del maggiore; oppure dal quadrato del maggiore meno il quadrato di uno dei minori dà il quadrato dell'altro minore.

Su questo piccolo numero di principi si basa tutta l'arte di applicare l'analisi alla geometria delle rette; basterà aggiungere qualche proposizione presente tra gli elemento, per i casi in cui si tratterà di superfici o di solidi. Inoltre, i problemi più difficili potrebbero essere risolti con questi due teoremi: la composizione dei segmenti per mezzo delle loro parti e la similitudine dei triangoli. Così non si avrà la necessità di utilizzarne altri, poiché questi bastano per tutto. Per darne una prova, ho risolto, senza l'aiuto della 47^a proposizione del primo libro degli Elementi[5], il problema che consiste nell'abbassare una perpendicolare sulla base di un triangolo non rettangolo. Ma sebbene sia infinitamente utile conoscere i principi più semplici da cui dipendono le soluzioni dei problemi, poiché con essi tutti li possono risolvere; tuttavia è spedito impiegare la 47^a proposizione del primo libro degli Elementi, il cui uso è quasi continuo e anche altri teoremi.

Per esempio, se si abbassa una perpendicolare sulla base di un triangolo non rettangolo e si vuole coinvolgere i segmenti della base nel calcolo, è bene sapere che la differenza dei quadrati dei lati è uguale al doppio prodotto della base per la distanza dal mezzo della base alla perpendicolare.

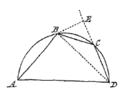
Sarà anche molto utile, in questi tipi di operazioni, sapere che se si taglia l'angolo al vertice di un triangolo in due parti uguali, non solo la base sarà divisa in parti proporzionali ai lati, ma anche che l'eccesso del rettangolo dei lati, sul rettangolo dei segmenti della base è uguale al quadrato della retta che divide l'angolo.

Quando si tratta di figure inscritte nel cerchio, si vede ritornare spesso al teorema con il quale si dimostra che, in tutti i quadrilateri inscritti in un cerchio, il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti.

L'analisi deve avere in serbo questi mezzi e altri simili per le necessità; ma si devono usare con economia e preferire loro, finché è possibile, principi più semplici, rendendo il calcolo un poco più difficile. Di conseguenza, deve imprimere nella sua memoria i primi tre principi che abbiamo posto e sforzarsi di applicarli a tutti i casi, come fossero i più semplici, i più noti e più generali; che è difficile ridurli a un numero minore e che tuttavia bastano a tutto.

Ma, perché teoremi di questo tipo possano servire alla risoluzione dei problemi, è molto spesso necessario aggiungerci costruzioni particolari, come prolungare certe linee fino a intersecarne altre per determinarne la lunghezza; o tracciare da qualche punto significativo linee parallele o perpendicolari ad altre; o unire questi punti significativi o, infine, fare altri tipi di costruzione in base alle esigenze del problema e i teoremi che si impiegano alla sua soluzione: come, per esempio, se due linee che non si incontrano formano con una terza angoli noti; prolungandole, la loro intersezione formerà un triangolo i cui angoli e, di conseguenza, anche i rapporti tra i lati, saranno noti. Se un angolo ci è dato oppure è uguale ad un altro, ciò basta spesso, prolungando qualche linea, a determinare il tipo di triangolo o la sua similitudine con un altro.

Se il triangolo non è retto, lo si scompone spesso in due triangoli rettangoli, tracciando una perpendicolare da uno degli angoli sul lato opposto. Se si tratta di figure con un numero maggiore di lati, le si scompone in triangoli, tracciando le diagonali, facendo in modo di riportare tutto a questi semplici principi: che ogni figura può sempre scomporsi in triangoli dati, o simili o retti.



Nell'esempio proposto ho tracciato la diagonale BD e il trapezio $ABCD$ si trova scomposto in due triangoli; l'uno ABD rettangolo e l'altro, BCD, scaleno. Poi scompongo il triangolo scaleno in due rettangoli abbassando una perpendicolare da uno qualunque dei suoi angoli B, C o D sul lato opposto; per esempio, dall'angolo B sul lato CD prolungato fino a E in modo da incontrare la perpendicolare BE. Si sa che la somma degli angoli BAD e BCD è uguale a due angoli retti[6]; e che la somma di due angoli BCE e BCD è pure uguale a due retti, non mi è quindi difficile osservare che gli angoli BAD e BCE sono uguali e che, di conseguenza, i triangoli BCE e

[5]Nota: Questa proposizione è il noto teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli.

[6]Nota: *per la 22^a proposizione del libro 3 degli Elementi riguardanti quadrilateri iscritti in un cerchio*

BAD sono simili. Così, considerando AD, AB e BC come noti, e DC come incognito, ecco in quale modo si può impostare il calcolo. Per mezzo dei segmenti noti AD e AB e per il triangolo rettangolo ABD, sarà facile ricavare il valore di BD. E per mezzo dei due triangoli simili ABD e BCE e dei segmenti noti AD, AB, BD, BC, si troveranno BE e CE. E per mezzo dei segmenti BD e BE e del triangolo rettangolo BED, si determinerà ED, e allora $ED - EC$, differenza dei due segmenti noti, ci darà CD, segmento che cerchiamo. Si otterrà pertanto un'equazione tra il valore di CD trovato in questo modo e la lettera con la quale lo si designato. Si può anche fare il calcolo impiegando principi diversi, ciò che da di una stessa quantità due valori, tra i quali si stabilisce una equazione. Così AB, AD, BC ci danno BD, BE, CE come prima, poi $CD \ CE$ dà ED, e infine BD e ED danno BE (per il triangolo rettangolo BED).

Così cercando valori diversamente espressi di una stessa quantità mediante le relazioni con altre quantità, si potranno formare equazioni tra i suoi valori. In questo modo la relazione tra i segmenti BD, DC, BC e CE[7] essendo espressa in questa maniera, $BD^2 - BC^2 - CD^2 \quad 2CD \times CE$, noi potremo trovare BD^2 tramite AD e AB e CE tramite dei noti AD, AB, BC. Allora nell'equazione rimane come sola incognita CD e il suo quadrato. Ma sarà molto facile ottenerne il valore risolvendo l'equazione. L'analista, seguendo questo metodo e altri simili, avanzerà nel suo calcolo e nella sua figura e leggerà nella sua analisi la sua costruzione geometrica.

Io credo che per tutto quanto detto, si deve perfettamente comprendere quanto dicono i geometri: Bisogna considerare ciò che si cerca come se fosse trovato. Così, senza porre alcuna differenza tra le quantità note e incognite, voi potrete prendere quelle che vi piaceranno per iniziare il calcolo, come se tutto fosse già noto da una risoluzione precedente e che non fosse più un problema da risolvere, ma solo da verificare. È così che nel primo dei tre metodi di calcolo, sebbene si cerchi realmente AD, si finge tuttavia che è CD, come se ci si volesse solo assicurare di questo valore di CD, ottenuto tramite AD quadrato con un altro valore dello stesso CD ottenuto in precedenza. Analogamente ancora nei due ultimi metodi di calcolo, il mio scopo non è scoprire una quantità, ma trovare un'equazione per mezzo delle relazioni tra i segmenti. Di conseguenza, considerando AD, BC, CD come segmenti noti, agisco come se il problema fosse già stato risolto e che si tratti solo di esaminare se queste quantità soddisfano esattamente le condizioni del problema e quadrano con le equazioni che i loro rapporti ci hanno dato. Così io comincio sempre la mia operazione e la seguo finché arrivo all'equazione; allora cambiando percorso, è la sola incognita che mi impegna nella riduzione e risoluzione di questa equazione. Così, infine, impieghiamo spesso, come note, più quantità di quelle che si trovano realmente nelle condizioni del problema. Si potrà vedere un esempio significativo di quanto detto, nel 55° problema seguente, dove, per determinare una sezione conica, ho introdotto, come note, nell'equazione $a^2 \ bx \ cx^2 \ y^2$, non solo le linee a, b, c, ma anche le linee r, s, t, v, delle quali il problema, così come proposto, non fa alcuna menzione; è permesso introdurre ogni quantità per mezzo della quale si può giungere all'equazione. Si deve soltanto osservare che bisogna poterne ricavare tante equazioni quante sono le incognite realmente introdotte.

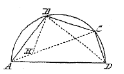
Dopo aver stabilito il proprio metodo di calcolo e prodotto la figura contenente tutte le linee necessarie (cioè tutte quelle che devono dare il valore delle altre, affinché si giunga all'equazione), allora bisogna imporre loro dei nomi, scegliendo quelli che contengono tutte le condizioni del problema (senza contenerne più del necessario) e che sembrano più adatte di altre a rendere la conclusione più semplice. Così basta nominare due lati di un triangolo rettangolo e due o tre termini di una proporzione; poiché il terzo lato del triangolo, il terzo o quarto termine della proporzione possono dedursi dagli altri. Analogamente se si ha una linea e tre sue parti, basterà nominare la linea e due sue parti, potendo dedurre la terza. Per esempio, se pongo $AD \ x$ e $AB \ a$, non assegnerò un nome a BD, perché essendo il terzo lato di un triangolo rettangolo ABD, il suo valore sarà $\sqrt{x^2 - a^2}$. In seguito, nella stessa figura, se pongo $BC \ b$, siccome i due triangoli DAB, BCE sono simili, ho la proporzione $AD \ AB \ BC \ CE$, dove i primi tre termini sono nominati; così lascio senza nome il quarto, poiché posso dedurre il suo valore $\frac{ab}{x}$ dalla proporzione. Infine, se si pone $DC \ c$, non bisogna assegnare nome a DE, poiché conoscendo ognuna delle sue parti, CE e CD, la linea totale sarà $DE \ c \ \frac{ab}{x}$.

Da tutto quanto abbiamo detto, si vede che il problema è già quasi ridotto ad equazione; una volta che si sono indicate con nomi le linee principali, basta solo ricavare da esse, con il metodo prima indicato, i valori delle altre, fino a giungere all'equazione. E per non lasciare l'esempio che ci ha sempre occupato, ci resta soltanto di trovare un doppio valore di BE, per mezzo dei due triangoli rettangoli BCE e BDE. Cioè $BC^2 - CE^2$o $b^2 - \frac{a^2b^2}{x^2} \ BE^2$; ecco la prima. La seconda sarà $BD^2 - DE^2$ o $x^2 - a^2 - c^2 - \frac{2abc}{x} - \frac{a^2b^2}{x^2} \ BE^2$. Confrontando i due valori di BE^2 e eliminando da entrambe le parti $-\frac{a^2b^2}{x^2}$, il restante sarà $b^2 \ x^2 - a^2 - c^2 - \frac{2abc}{x}$. Ridotta questa equazione, diviene $x^3 \ \left(a^2 \ b^2 \ c^2\right) x \ 2abc$.

Siccome ho già dato, per risolvere questo problema, parecchi metodi che differiscono di poco e che, tuttavia, quello che è basato sulla 12^aproposizione del II libro degli Elementi mi pare la più semplice, è questo che impiegherò qui. Sia quindi $AD \ x$, $AB \ a$, $BC \ b$ e $CD \ c$. Allora $BD^2 \ x^2 - a^2$ e $CE \ \frac{ab}{x}$, come sopra.

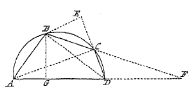
[7]Nota: relazione fondata sulla 12^a proposizione del II libro degli Elementi: Nei triangoli ottusangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo ottuso è maggiore dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo ottuso per due volte il rettangolo compreso da uno solo dei lati intorno all'angolo ottuso, quello su cui cade la perpendicolare, e dalla retta staccata all'esterno dalla perpendicolare all'angolo ottuso. *(N.d.T.)*

Inserite questi valori nel teorema $BD^2 - BC^2 - CD^2 \ \ 2CD \times CE$ e avrete $x^2 - a^2 - b^2 - c^2 \ \ \frac{2abc}{x}$ e riducendo $x^3 \ \ \left(a^2 \ b^2 \ c^2\right) x \ 2abc$, come prima.



Ma per mostrare come le soluzioni di un problema possono essere variate e quanto è facile a un geometra esercitato trovarne almeno una, voglio ancora porre qui più cose dello stesso problema. Per questo, ricavo la diagonale BD e se invece di tracciare, come prima, la perpendicolare BE dal punto B sul prolungamento del lato DC, la traccio dal punto D su BC, o dal punto C su BD, di modo che il triangolo BCD sia risolto in due triangoli rettangoli, si potrà giungere, per ognuno di questi casi, all'equazione e con metodi poco diversi da quelli già indicati; ma ve ne sono altri che differiscono di poco. Per esempio, se si tracciano le due diagonali AC, BD, considerando AB e BD come note, se ne dedurrà BD; analogamente si dedurrà AC dai segmenti AD e CD presi come noti. Poi, per il teorema delle figure quadrilatere inscritte nel cerchio, si ha l'equazione $AD \times BC \ \ AB \times CD \ \ AC \times BD$. Assegnando quindi ai segmenti AD, AB, BC, CD i nomi x, a, b, c, che abbiamo già dato prima, avremo $BD \ \ \sqrt{x^2 - a^2}$e $AC \ \ \sqrt{x^2 - c^2}$ (per il teorema di Pitagora) e sostituendo nell'equazione che ci dato il teorema i valori di questi segmenti, avremo, $bx \ ac \ \ \sqrt{x^2 - a^2} \times \sqrt{x^2 - c^2}$, e quadrando ogni membro e riducendo, si otterrà $x^3 \ \ \left(a^2 \ b^2 \ c^2\right) x \ 2abc$.

Del resto, è molto facile mostrare che le soluzioni ottenute per mezzo del teorema, potevano ricavarsi dalla sola similitudine dei triangoli. Infatti, si tracci BH perpendicolare a BC che interseca AC in H; allora i triangoli BCH e BDA saranno simili, poiché hanno ciascuno un angolo retto in B e gli angoli C e D uguali. Parallelamente i triangoli BCD e BHA sono pure simili, poiché gli angoli inscritti BAC e BDC sono uguali; e poi gli angoli ABH e CBD lo sono pure; eliminando i due angoli retti CBH e DBA, la parte comune HBD. è chiaro che le restanti saranno uguali. Dalle prime due si ricava la proporzione $BD \ \ CD \ \ AB \ \ AH$. Ora $AH \ \ HC \ \ AC$. E se si pone nelle due equazioni, al posto dei segmenti, i loro valori analitici, si troverà che $CH \ \ \frac{bx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ e $AH \ \ \frac{ac}{\sqrt{x^2-a^2}}$, di conseguenza, $CH * AH$ o $AC \ \ \frac{bxac}{\sqrt{x^2-a^2}}$. Ma d'altra parte $AC \ \ \sqrt{x^2 - c^2}$. Pertanto si avrà, $\frac{bxac}{\sqrt{x^2-a^2}} \ \ \sqrt{x^2 - c^2}$ e moltiplicando tutto per $\sqrt{x^2 - a^2}$ e quadrando, si otterrà un'equazione assolutamente simile a quella che già abbiamo trovato parecchie volte.



Per mostrare ancora con maggiore evidenza la moltitudine di mezzi che vi sono di mettere un problema in equazione, prolungate BC e AD fino a che non si incontrano in un punto F, e avrete i triangoli simili ABF e CDF; poiché essi hanno ciascuno un angolo angolo in comune F e gli angoli ABF e CDF sono uguali essendo entrambi supplementari dello stesso angolo CDA [8]. Ora, è del tutto evidente che se, oltre le quattro quantità sulle quali si basa il problema, anche il segmento AF ci fosse dato, noi troveremmo CF con questa proporzione, $AB \ \ AF \ \ CD \ \ CF$; ma $AF - AD$ dà DF e la proporzione $CD \ \ DF \ \ AB \ \ BF$, dà BF, da cui si ricaverebbe l'equazione $BF - CF \ \ BC$. Ma avendo trattato come note due quantità incognite AD e DF, bisogna ancora trovare una nuova equazione. Per questo, abbasso dal punto B sulla base AF la perpendicolare BG e ottengo $AD \ \ AB \ \ AB \ \ AG$; ma, per un teorema della tredicesima proposizione del secondo libro degli Elementi[9], ho anche $BF^2 \ \ 2AF \times AG \ \ AB^2 \ \ AF^2$. Mantenendo i nomi dei nostri primi segmenti, a, b, c, x pongo inoltre $AF \ \ y$. Abbiamo quindi, per la prima proporzione trovata, $CF \ \ \frac{cy}{a}$ e per la seconda $BF \ \ \frac{a\left(y-x\right)}{c}$, da cui segue che $\frac{a\left(y-x\right)}{c} - \frac{cy}{a} \ \ b$, prima equazione trovata; e siccome d'altra parte, $AG \ \ \frac{a^2}{x}$, avremo, $\frac{a^2y^2-2a^2xya^2x^2}{c^2} \ \ \frac{2a^2y}{x} \ \ a^2 \ \ y^2$, seconda equazione; e riducendole ci daranno infine l'equazione cercata. Poiché la prima equazione dà $y \ \ \frac{abca^2x}{a^2-c^2}$, sostituendo questo valore di y nella seconda, dopo aver ridotto e ordinato, si ottiene $x^3 \ \ \left(a^2 \ b^2 \ c^2\right) x \ 2abc$, come in precedenza.

E se si prolunga AB e CD fino ad incontrarsi, la soluzione non presenterà differenze se non nell'essere un poco più facile; così preferisco meglio mettere sotto gli occhi del lettore una nuova soluzione dedotta da un principio del tutto diverso, per esempio, cercando un doppio valore della superficie del quadrilatero. Traccio dapprima la diagonale BD per scomporre il quadrilatero in due triangoli. Poi, conservando ai segmenti gli stessi nomi precedenti x, a, b, c, vedo che $BD \ \ \sqrt{x^2 - a^2}$ e, di conseguenza, $\frac{1}{2}a \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \ \ \frac{1}{2}AB \times BD$, superficie del triangolo ABD. Poi avendo abbassato BE perpendicolarmente su CD, si ha la proporzione $AD \ \ BD \ \ BC \ \ BE$,

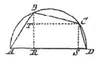
[8] Nota: (per la 13^a proposizione del primo libro e la 22^a del terzo libro degli Elementi

- Se una retta che sta su una retta forma angoli, farà o due angoli retti oppure uguali a due retti (Prop. 1-13).
- Gli angoli opposti dei quadrilateri nei cerchi sono uguali a due retti (Prop. 3-22)

[9] Nei triangoli acutangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo acuto è minore dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo acuto per due volte il rettangolo compreso da uno solo dei lati intorno all'angolo acuto, quello su cui cade la perpendicolare, e dalla retta staccata all'interno dalla perpendicolare all'angolo acuto

a causa dei due triangoli simili ABD e BCE; di conseguenza, $BE \;\; \frac{b}{x}\sqrt{x^2-a^2}$ e $\frac{bc}{2x}\sqrt{x^2-a^2} \;\; \frac{1}{2}CD \times BE$, superficie del triangolo BCD. E sommando queste due superfici si avrà, $\frac{axbc}{2x}\sqrt{x^2-a^2}$, superficie totale del quadrilatero. E tracciando nello stesso modo la diagonale AC, cercando le superfici dei due triangoli ACD e ABC e sommandole, si avrà un nuovo valore della superficie del quadrilatero $\frac{cxba}{2x}\sqrt{x^2-c^2}$. Eguagliando questi due valori e moltiplicandoli per $2x$, verrà $\left(ax \;\; bc\right)\sqrt{x^2-a^2} \;\; \left(cx \;\; ab\right)\sqrt{x^2-c^2}$ ed elevando tutto al quadrato e dividendo per $a^2x - c^2x$,si arriverà infine a questa forma già trovata tante volte, $x^3 \;\; \left(a^2 \;\; b^2 \;\; c^2\right) x \;\; 2abc$.

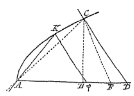
Si può notare da tutti questi esempi di quale varietà di metodi si dispone per risolvere un problema; ma si deve osservare nello stesso tempo che, tra tutti questi metodi, ve ne sono di più rapidi che di altri. È per questo motivo che, quando si è preso una cattiva strada per arrivare alla soluzione di un problema, bisogna ritornare sui propri passi e fare nuovi tentativi fino a trovare un percorso più facile. I metodi che si presentano per primi alla mente, conducono spesso a operazioni molto laboriose quando li si applica.



Per esempio, nel problema in questione, sarebbe stato assai semplice trovare il metodo seguente tra quelli che abbiamo impiegato: sarebbe stato abbassare le perpendicolari BR e CS su AD, così come la perpendicolare CT su BR, allora la figura sarebbe scomposta in triangoli rettangoli; e si vede facilmente che AD e AB danno AR; che AD e CD danno DS; che $AD - AR - AS$ dà RS o TC. Inoltre, AB e AR danno BR; CD e DS danno CS o TR e $RB - RT$ dà BT; e BT e TC danno BC. Da tutto ciò si otterrebbe una equazione. Ma se, con questo metodo, qualcuno tentasse la soluzione, più che in alcuni dei precedenti, i termini algebrici si moltiplicherebbero rendendo, di conseguenza, più difficile da ridurre l'equazione finale.

Ecco ciò che si può dire sulla risoluzione dei problemi rettilinei. Si può ancora osservare che, quando gli angoli o le posizioni dei segmenti dati dagli angoli, entrano nei dati del problema, bisogna, invece degli angoli, prendere i segmenti o i loro rapporti che si possono dedurre dalla conoscenza degli angoli per mezzo del calcolo trigonometrico o la cui conoscenza può reciprocamente far trovare gli angoli con lo stesso calcolo. Si mostreranno numerosi esempi in seguito.

Quanto alle linee curve, si usa considerarle come fossero generate sia dal moto locale delle linee diritte, sia da equazioni indefinite che esprimono la relazione delle linee rette disposte tra loro in un modo invariabile e che vengono a terminarsi alla curva. Gli antichi, tramite la sezione dei solidi, sono giunti allo stesso obiettivo, ma questo percorso era molto meno facile. Il calcolo delle curve descritte dal primo metodo si esegue assolutamente con le stesse regole che abbiamo prima insegnato.

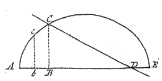


Per esempio, se si ha una curva AKC descritta dal vertice di un angolo retto $AK\phi$,dove uno dei suoi lati scorre liberamente sul punto A dato di posizione, mentre l'altro lato $K\phi$, di lunghezza data, scorre sulla retta AD pure data di posizione; se si ha, dico, una tale curva e si voglia trovare un punto C, nel quale una retta qualunque CD, di posizione data, taglia la curva, bisognerà tracciare dal punto C (che è supposto trovato) le rette AC, CF, formanti un angolo retto in C e che rappresentano le due generatrici, quando esse hanno descritto il punto C della curva: allora considerando le relazioni dei segmenti, senza considerare il loro rapporto con la curva, senza porre differenza tra ciò che è dato e ciò che si cerca, comprendo senza fatica che tutto dipende da CF e da uno dei quattro segmenti BC, BF, AF, AC. Io pongo quindi $CB \;\; a$, $CB \;\; x$; e per cominciare il mio calcolo, ne deduco anzitutto $BF \;\; \sqrt{a^2-x^2}$; e a causa dei due angoli retti ACF e FBC, si ha la proporzione $BF \;\; BC \;\; BC \;\; AB$. Da cui $AB \;\; \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$. D'altro canto, essendo data la posizione di CD, la grandezza di AD è nota. Chiamo quindi AD, b, e siccome il rapporto tra BC e BD è noto (lo suppongo come quello tra d ed e), ho $BD \;\; \frac{ex}{d}$ e $AB \;\; b - \frac{ex}{d}$, da cui ricavo l'equazione $b - \frac{ex}{d} \;\; \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$. E quadrando ogni membro e moltiplicando tutto per $a^2 - x^2$la si ridurrà nella forma

$$x^4 \;\; \frac{bdex^3 \;\; \left(a^2c^2 - b^2d^2\right)x^2 - 2a^2bdex \;\; a^2b^2d^2}{d^2 \;\; e^2}$$

da cui, infine, per mezzo delle lettere note a, b, d, e e delle regole che saranno insegnate in seguito, si determinerà il valore di x. Trovato questo valore, si innalzerà x o BC perpendicolarmente su AD, dalla sua estremità si traccerà una parallela a AD e il punto C dove questa parallela incontrerà la curva sarà il punto cercato.

Se, invece della descrizione geometrica, si producono equazioni per esprimere la natura di una curva, allora il calcolo ne risulterà tanto più facile e breve di quanto servirà a trovare queste equazioni.



Per esempio, se si cercasse il punto di intersezione C di un ellisse dato ACE con una retta CD data di posizione; per designare l'ellisse, prendo qualche equazione che gli sia propria, come $rx - \frac{r}{q}x^2 \quad y^2$, dove x è preso indefinitamente per una parte qualsiasi dell'asse, come Ab o AB e y per la perpendicolare bc o BC terminato sulla curva. È il tipo di ellisse che determina r e q. Poiché CD è dato anche la lunghezza di AD sarà data. Sia quindi $AD \quad a$, allora BD sarà $a - x$. L'angolo ADC è pure dato e, di conseguenza, il rapporto tra BD e BC che suppongo essere come $1 \quad e$. Pertanto, si avrà anche y o $BC \quad ea - ex$ e, quadrando, $BC^2 \left(y^2\right) \quad e^2a^2 - 2e^2ax \quad e^2x^2$, quantità che bisogna eguagliare a $rx - \frac{r}{q}x^2$ e, per la riduzione, si otterrà

$$x^2 \quad \frac{2ae^2x \quad rx - a^2e^2}{e^2 \quad \frac{r}{q}}$$

o

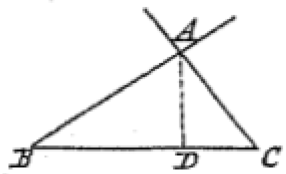
$$x \quad \frac{ae^2 \quad \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar \quad \frac{r^2}{4e^2} - \frac{a^2r}{q}}}{e^2 \quad \frac{r}{q}}$$

Se si ha una curva ottenuta da una descrizione geometrica, o tramite la sezione di un solido, si potrà sempre esprimere la sua natura con una equazione. È quindi a questo unico aspetto, cioè a trovare la loro equazione, che si devono tutte le difficoltà dei problemi proposti sulle curve.

È così che nel primo esempio se si chiama AB, x e BC, y, il terzo proporzionale BF sarà $\frac{y^2}{x}$ e il suo quadrato, sommato a quello di BC, darà quello di CF, cioè $\frac{y^4}{x^2} \quad y^2 \quad a^2$, oppure $y^4 \quad x^2y \quad a^2x^2$. Questa è l'equazione con la quale, per ogni lunghezza determinata AB della base, ogni punto C della curva AKC è determinato e, di conseguenza, pure la curva stessa lo è. Ed è da questa equazione che ci si deve attendere la soluzione di tutti i problemi che si possono proporre su questa curva.

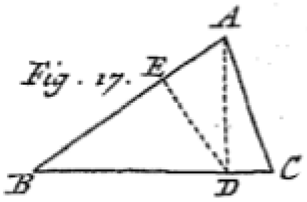
Se una curva non è data, ma si chiede di determinarla, bisogna prendere arbitrariamente una equazione che si supporrà esprimere in un modo generale le proprietà di questa curva. E trattando questa equazione come se fosse assegnata, si otterrà per mezzo di altre equazioni che determineranno le quantità che si erano prima considerate note; e da queste quantità, infine, la natura della curva sarà essa stessa determinata. Si vedranno esempi in alcuni dei problemi seguenti, che ho moltiplicato allo scopo di utilizzarli come esercizio per coloro che studiano e di mettere in maggior luce la dottrina che espongo.

Problema. **1** - Dato un segmento BC di lunghezza nota, sui cui estremi altre due rette BA e CA formano gli angoli dati ABC, ACB; trovare l'altezza AD dal vertice A sul lato dato BC.



Soluzione. Posto $BC \quad a$ e $AD \quad y$; poiché l'angolo ABD è assegnato, sarà dato (tramite la tabella dei seni e delle tangenti) il rapporto tra i segmenti AD e BD che sarà come d a e. Pertanto $d \quad e \quad ADy \quad BD$. Si avrà $BD \quad \frac{ey}{d}$. Allo stesso modo, per l'angolo dato ACD sarà assegnato il rapporto tra AD e DC, che sarà come d a f, così $DC \quad \frac{fy}{d}$. Ma $BD \quad DC \quad BC$, cioè, $\frac{ey}{d} \quad \frac{fy}{d} \quad a$. Riducendo e moltiplicando entrambi i membri per $e \quad f$, diviene $y \quad \frac{ad}{ef}$.

Problema. **2** - Dati i lati AB, AC e la base BC del triangolo qualsiasi ABC, e che si abbassi una perpendicolare AD dal vertice dell'angolo A sulla base, si chiede di trovare i segmenti BD e DC.



Soluzione. Sia $AB\ \ a$, $AC\ \ b$, $BC\ \ c$, e $BD\ \ x$, e sarà $DC\ \ c-x$. Poiché $AB^2 - BD^2\ \ AD^2$ e $AC^2 - DC^2\ \ AD^2$ e inserendo i valori analitici in ognuna di queste equazioni, la prima diviene $\left(a^2 - x^2\right)\ \ AD^2$ e la seconda $b^2 - \left(c-x\right)^2\ \ AD^2$. O $b^2 - \left(c-x\right)^2\ \ a^2 - x^2$ o $b^2 - c^2\ \ 2cx - x^2\ \ a^2 - x^2$ che dà, dopo la riduzione

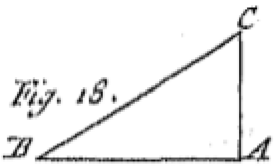
$$x\ \ \frac{a^2 - b^2\ \ c^2}{2c}$$

Del resto, per mostrare che senza l'aiuto della Proposizione 1-47 degli Elementi di Euclide, facendo ricorso alla proporzionalità tra i segmenti, si possono risolvere tutte le difficoltà di tutti i problemi (ciò che, in verità, si fa in un modo meno diretto) ho pensato di proporre una seconda soluzione dello stesso problema.

Dal punto D si abbassi la perpendicolare DE sul lato AB, e mantenendo i valori dei lati già assegnati, si avrà $AB\ \ BD\ \ BD\ \ BE$ o $a\ \ x\ \ x\ \ \frac{x^2}{a}$ e $BA - BE\left(a - \frac{x^2}{a}\right)\ \ EA$. Si può ancora introdurre la proporzione $EA\ \ AD\ \ AD\ \ AB$ e di conseguenza $EA \times AB\ \ AD^2$ o $\left(a^2 - x^2\right)\ \ AD^2$. E così ragionando sul triangolo ACD, troveremo di nuovo $AD^2\ \ b^2 - c^2\ \ 2cx - x^2$, da cui si otterrà come prima

$$x\ \ \frac{a^2 - b^2\ \ c^2}{2c}$$

Problema. **3** - Siano dati l'area e il perimetro del triangolo rettangolo ABC, si chiede di trovare l'ipotenusa BC.

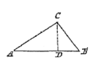


Soluzione. Sia il perimetro uguale ad a, l'area uguale a b^2, si prenda $BC\ \ x$ e $AC\ \ y$; allora sarà $AB\ \ \sqrt{x^2 - y^2}$ e ciò darà un secondo valore del perimetro $BC\ AC\ AB\ \ x\ y\ \sqrt{x^2 - y^2}$. L'area è $\frac{1}{2}AC \times AB$ $\frac{1}{2}y\sqrt{x^2 - y^2}$. Abbiamo quindi ora due equazioni $x\ y\ \sqrt{x^2 - y^2}\ \ a$ e $\frac{1}{2}y\sqrt{x\grave{\imath}2 - y^2}\ \ b^2$.
L'ultima di queste equazioni dà $\sqrt{x - y^2}\ \ \frac{2b^2}{y}$. Sostituisco nella prima, $\frac{2b^2}{y}$ al posto di $\sqrt{x^2 - y^2}$ ed essa diviene $x\ y\ \frac{2b^2}{y}\ \ a$, o, moltiplicando tutto per y, $xy\ y^2\ 2b^2\ \ ay$ e ciò dà $y^2\ \ ay - xy - 2b^2$. Poi elimino da ogni membro della prima equazione, $x\ y$, riducendola a $\sqrt{x^2 - y^2}\ \ a - x - y$ ed elevando tutto al quadrato per eliminare il radicale, si ottiene $x^2 - y^2\ \ a^2 - 2ax - 2ay\ x^2\ 2xy\ y^2$, che ordinata e divisa per 2, dà $y^2\ \ ay\ ax - xy - \frac{1}{2}a^2$. Uguagliamo questo secondo valore di y^2 al primo, avrò $ay\ ax - xy - \frac{a^2}{2}\ \ ay - xy - 2b^2$, che si riduce a $ax - \frac{a^2}{2}\ \ -2b^2$, oppure a $x\ \ \frac{a}{2} - \frac{2b^2}{a}$.

Secondo Metodo

Sia la metà del perimetro $\ a$, l'area $\ b^2$, e $BC\ \ x$. Avremo $AC\ AB\ \ 2a - x$ e $BC^2\left(x^2\right)\ \ AB^2\ AC^2$ e $\frac{AB \times AC}{2}\ \ b^2$, o, $AB \times AC\ \ 2b^2$ o $2AB \times AC\ \ 4b^2$. Pertanto $x^2\ 4b^2\ \ AB^2\ AC^2\ 2AB \times AC\ \ \left(AB\ AC\right)^2\ \ \left(2a - x\right)^2$. Di conseguenza, $x^2\ 4b^2\ \ 4a^2 - 4ax\ x^2$, o, $x\ \ a - \frac{b^2}{a}$.

Problema. **4** - Essendo dati il perimetro e l'altezza di un triangolo rettangolo, trovare questo triangolo.
Costruzione geometrica

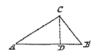


Soluzione. Siano, C l'angolo retto del triangolo ABC e CD la perpendicolare sulla base AB. Siano $AB\ AC\ BC\ \ a$ e $CD\ \ b$. Posta la base $AB\ \ x$, la somma dei lati $AC\ CB\ \ a - x$. Supponete che la differenza di questi stessi lati sia y, allora il lato maggiore AC sarà, $\frac{a-xy}{2}$ e il più piccolo $BC\ \ \frac{a-x-y}{2}$. Ora, per le proprietà del triangolo rettangolo si ha, $AC^2\ BC^2\ \ AC^2$,cioè $\frac{a^2-2axx^2y^2}{2}\ \ x^2$. Si ha ancora la proporzione $AB\ \ AC\ \ BC\ \ DC$ [10], così$AB \times DC\ \ AC \times BC$, e ciò dà $bx\ \ \frac{a^2-2axx^2-y^2}{4}$. Ora dalla prima equazione si ricava, $y^2\ \ x^2\ 2ax - a^2$ e dalla seconda, $y^2\ \ x^2 - 2ax\ a^2 - 4bx$; pertanto $x^2\ 2ax - a^2\ \ x^2 - 2ax\ a^2 - 4bx$, che si riduce a $4ax\ 4bx\ \ 2a^2$ o, $x\ \ \frac{a^2}{2a2b}$.

[10] Nota: S*imilitudine tra i due triangoli ABC e ADC che hanno angoli uguali*

Questo risultato si può enunciare così nel linguaggio geometrico: In tutti i triangoli rettangoli, la somma del perimetro e della perpendicolare sta al perimetro come la metà del perimetro sta alla base. Se si sottrae $2x$ da a rimane $\frac{ab}{ab}$ eccesso dei lati sulla base. Ciò mostra che in tutti i triangoli rettangoli, la somma del perimetro e della perpendicolare sta al perimetro come la perpendicolare sta all'eccesso dei lati sulla base.

PROBLEMA. **5 -** Essendo dati la base di un triangolo e la somma della perpendicolare con i lati $CA\ CB\ CD$, trovare il triangolo. *Costruzione geometrica*



SOLUZIONE. Siano, $CA\ CB\ CD\ \ a$, $AB\ \ b$, $CD\ \ x$, allora $AC\ CB\ \ a-x$. Posto $AC-CB\ \ y$, avrete $AC\ \ \frac{a-xy}{2}$ e $CB\ \ \frac{a-x-y}{2}$. Inoltre $AC^2\ CB^2\ \ AB^2$ o, $\frac{a^2-2axx^2y^2}{2}\ \ b^2$. Si ha ancora, $AC\times CB\ \ AB\times CD$, o $\frac{a^2-2axx^2-y^2}{4}\ \ bx$ e ricavando da queste due equazioni il valore di y^2e confrontandole si ha

$$2b^2-a^2\ 2ax-x^2\ \ a^2-2ax\ x^2-4bx$$

e riducendo $x^2\ \ 2ax\ 2bx-a^2\ b^2$, da cui si ricava $x\ \ a\ b-\sqrt{2ab\ 2b^2}$.

Da quest'ultima equazione si ricava il seguente enunciato geometrico: Dalla somma del perimetro con la perpendicolare, eliminate un medio proporzionale tra questa somma e il doppio della base e resta la perpendicolare.

Lo stesso in un altro modo

SOLUZIONE. Siano $CA\ CB\ CD\ \ a$, $AB\ \ b$, $AC\ \ x$ e si avrà $BC\ \ \sqrt{b^2-x^2}$, $CD\ \ \frac{x\sqrt{b^2-x^2}}{b}$ e $x\ CB\ CD\ \ a$, o $CB\ CD\ \ a-x$. Di conseguenza, $\frac{ba}{b}\sqrt{b^2-x^2\ \ a-x}$. Ed elevando ogni membro al quadrato e moltiplicando tutto per b^2, si avrà

$$-x^4-2bx^3\ 2b^3x\ b^4\ \ a^2b^2-2ab^2x\ b^2x^2$$

E trasportando e ordinando

$$x^4\ 2bx^3\ \left(3b^2\ 2ab\right)x^2\ \left(2b^3\ 2ab^2\right)x\ b^4\ 2ab^3\ a^2b^2$$
$$\left(2b^2\ 2ab\right)x^2\ \left(4b^3\ 4ab^2\right)x\ 2b^4\ 2ab^3$$

Ed estraendo la radice da entrambe le parti,si avrà,

$$x^2\ bx\ b^2\ ab\ \ \left(x\ b\right)\sqrt{2ab\ 2b^2}$$

[11] E risolvendo questa equazione si ha,

$$x\ \ -\frac{1}{2}b\ \sqrt{\frac{1}{2}b^2\ \frac{1}{2}ab}\pm\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2\ \frac{1}{2}ab}-\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab}$$

Costruzione geometrica

Posti $AB\ \ \frac{1}{2}b$, $CB\ \ \frac{1}{2}a$, $CD\ \ \frac{1}{2}AB$, prendete AE medio proporzionale tra b e AC. Prendete inoltre EF medio proporzionale tra b e DE e portate EF da una parte e dall'altra del punto E e i due segmenti BF, BF saranno i due lati del triangolo.

PROBLEMA. **6 -** Dati in un triangolo rettangolo ABC la somma dei lati $AC\ BC$ e la perpendicolare CD, trovare il triangolo.

SOLUZIONE. Siano $AC\ BC\ \ a$, $CD\ \ b$, $AC\ \ x$ si avrà $BC\ \ a-x$ e $AB\ \ \sqrt{a^2-2ax\ x^2}$. Si ha inoltre la proporzione $CD\ \ AC\ \ CB\ \ AB$ [12], ciò dà $AB\ \ \frac{ax-x^2}{b}$. Di conseguenza, $ax-x^2\ \ b\sqrt{a^2-2ax\ x^2}$ e quadrando entrambi i membri e ordinando si ha $x^4-2ax^3\ \left(a^2-2b^2\right)x^2\ 2ab^2x-a^2b^2\ \ 0$. Sommate ad ogni membro $a^2b^2\ b^4$ e avrete $x^4-2ax^3\ \left(a^2-2b^2\right)x^2\ 2ab^2x\ b^4\ \ a^2b^2\ b^4$ [13], e ricavando la radice da ogni parte, $x^2-ax-b^2\ \ -b\sqrt{a^2\ b^2}$. E risolvendo questa equazione

$$x\ \ \frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2\ b^2-b\sqrt{a^2\ b^2}}$$

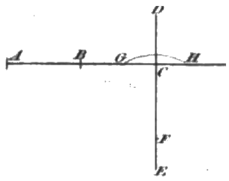
---

[11] *[N.d.T: il polinomio al primo membro è il quadrato di $x^2\ bx\ b^2\ ab$; il polinomio al secondo membro si può scomporre in* $2b\left(a\ b\right)\left(x\ b\right)^2$

[12] Nota: *similitudine tra i triangoli ADC, ACB*

[13] Nota: *completamento del quadrato del trinomio*

Costruzione geometrica



Posti $AB\ \ BC\ \ \frac{1}{2}a$. Innalzate da C la perpendicolare $CD\ \ b$; prolungate CD fino a E, affinché $DE\ \ DA$; prendete un medio proporzionale CF tra CD e CE e dal punto F come centro e con raggio uguale a BC, descrivete l'arco di cerchio GH che taglierà la retta BC in G ed H e i segmenti BG e BH saranno i due lati del triangolo.

Lo stesso in un altro modo

Siano $AC\ BC\ \ a$, $AC - BC\ \ y$, $AB\ \ x$ e $CD\ \ b$, si avrà $AC\ \ \frac{ay}{2}$, $BC\ \ \frac{a-y}{2}$, $\frac{a^2y^2}{2}\ \ AC^2\ BC^2\ \ AB^2\ \ x^2$. $\frac{a^2-y^2}{4b}\ \ \frac{AC\times BC}{DC}\ \ AB\ \ x$. Pertanto $2x^2 - a^2\ \ y^2\ \ a^2 - 4bx$ e $x^2\ 2bx\ \ a^2$; equazione che una volta risolta dà $x\ \ -b\ \sqrt{b^2\ a^2}$. Questa, nella costruzione sopra ci dà CE per ipotenusa del triangolo cercato. Una volta che la base e la perpendicolare sono note, tanto nel problema precedente quanto in questo, ecco in quale maniera si costruisce il triangolo. Preso un parallelogramma CG il cui lato maggiore CE sia la base del triangolo e il minore CF la perpendicolare; su CE, come diametro, si descriva un semicerchio che taglierà il lato opposto FG in H; si traccino dal punto H, alle estremità del diametro, le rette CH e EH e CEH sarà il triangolo cercato.

Problema. **7 -** In un triangolo rettangolo dati la somma dei cateti e la somma tra la perpendicolare e la base, trovare il triangolo.

Soluzione. Siano la somma dei lati $AC\ BC\ \ a$, la somma della base e della perpendicolare $AB\ CD\ \ b$, il lato $AC\ \ x$, la base $AB\ \ y$; si avrà $BC\ \ a - x$, $CD\ \ b - y$, $a^2 - 2ax\ 2x^2\ \ AC^2\ BC^2\ \ AB^2\ \ y^2$,

$$ax - x^2\ \ AC \times BC\ \ AB \times CD\ \ by - y^2\ \ by - a^2\ 2ax - 2x^2$$

e $by\ \ a^2 - ax\ x^2$; e quadrando ogni membro $b^2y^2\ \ a^4 - 2a^3x\ 3a^2x^2 - 2ax^3\ x^4$. Sostituendo nel primo membro al posto di y^2 il suo valore, $a^2 - 2ax\ 2x^2$, trasportando e ordinando, si avrà

$$x^4 - 2ax^3\ \left(3a^2 - 2b^2\right)x^2\ \left(2ab^2 - 2a^3\right)x\ a^4 - a^2b^2\ \ 0$$

E sommando ad ogni membro $b^4 - a^2b^2$[14], essa diverrà

$$x^4 - 2ax^3\ \left(3a^2 - 2b^2\right)x^2\ \left(2ab^2 - 2a^3\right)x\ a^4 - 2a^2b^2\ b^4\ \ b^4 - a^2b^2$$

E ricavando la radice quadrata di ogni membro,

$$x^2 - ax\ a^2 - b^2\ \ -b\sqrt{b^2 - a^2}$$

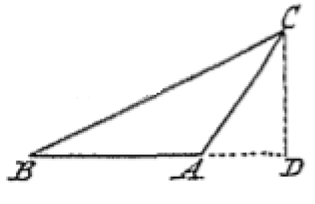
e risolvendo quest'ultima equazione, si avrà infine

$$x\ \ \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}$$

C*ostruzione geometrica*

Prendete un medio proporzionale R tra $b\ a$ e $b - a$; un altro medio proporzionale S tra R e $b - R$; infine un medio proporzionale T tra $\frac{1}{2}a\ S$ e $\frac{1}{2}a - S$; e i lati del triangolo cercato saranno $\frac{1}{2}a\ T$ e $\frac{1}{2}a - T$

Problema. **8 -** Data l'area, il perimetro e uno degli angoli, A, di un triangolo ABC, trovare i restanti



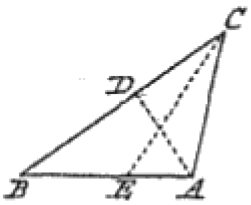
[14]Nota: Metodo del completamento del quadrato

Soluzione. Sia il perimetro a, e l'area b^2, e da uno degli angoli incogniti, C, si tracci la perpendicolare CD al lato opposto AB; e conoscendo A, si conoscerà il rapporto tra AC e CD, che suppongo quello tra d e. Chiamiamo, pertanto, AC x, e CD sarà $\frac{ex}{d}$. Siccome si conosce l'area del triangolo, e si è ricavata l'espressione della perpendicolare, dividendo l'area per il doppio della perpendicolare, si avrà AB $\frac{2b^2d}{ex}$. Si aggiunga a questa base AD $\sqrt{AC^2 - CD^2}$, o $\frac{x}{d}\sqrt{d^2 - e^2}$ e si avrà BD $\frac{2b^2d}{ex}$ $\frac{x}{d}\sqrt{d^2 - e^2}$.Elevando al quadrato ogni membro e aggiungendo CD^2, si otterrà $\frac{4b^4d^2}{e^2x^2}$ x^2 $\frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2}$ BC^2. Inoltre, dal perimetro togliamo AC e AB, e rimarrà $a - x - \frac{2b^2d}{ex}$ BC, il cui quadrato è $a^2 - 2ax$ $x^2 - \frac{4ab^2d}{ex}$ $\frac{4b^2d}{e}$ $\frac{4b^4d^2}{e^2x^2}$ BC^2. Uguagliando i due valori di BC^2 ed eliminando gli equivalenti, avremo $\frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2}$ $a^2 - 2ax - \frac{4ab^2d}{ex}$ $\frac{4b^2d}{e}$. Ponendo $4af$ a^2 $\frac{4b^2d}{e} - \frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2}$ e riducendo si otterrà x^2 $2fx - \frac{2b^2d}{e}$, o x $f \pm \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$.
La stessa equazione si ottiene anche cercando il cateto AB; i lati AB e AC sono allo stesso modo indipendenti da tutte le condizioni del problema. Pertanto se AC $f - \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$, si avrà AB f $\sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$, e viceversa. E la somma dei due lati $2f$ sottratta dal perimetro a, la differenza sarà il terzo lato $a - 2f$ BC.

Problema. **9** - Essendo assegnati l'altezza, la base e la somma dei lati, trovare il triangolo.

Soluzione. Sia l'altezza CD a, metà della base $\frac{AB}{2}$ b, metà della somma dei lati c, e si ponga la loro semi differenza z. Il lato maggiore, BC c z, e il minore AC $c - z$. Si sottragga CD^2da BC^2, si avrà BD. Da cui BD $\sqrt{c^2\ 2cz\ z^2 - a^2}$. Ora $AC^2 - CD^2$ AD^2, per cui AD $\sqrt{c^2 - 2cz\ z^2 - a^2}$. Si sottragga anche AB da BD, e sarà AD $\sqrt{c^2\ 2cz\ z^2 - a^2} - 2b$. Uguagliando questo secondo valore di AD al primo, quadrando e ordinando si avrà b^2 cz $b\sqrt{c^2\ 2cz\ z^2 - a^2}$. Quadrando nuovamente e riordinando, si otterrà $c^2z^2 - b^2z^2$ $b^2c^2 - b^2a^2 - b^4$. Da cui z $b\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2 - b^2}}$. Dal valore di z si possono dedurre facilmente quelli dei lati.

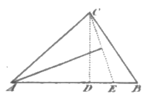
Problema. **10** - Data la base AB e la somma dei lati AC BC, e anche l'angolo al vertice C, trovare il resto del triangolo.



Soluzione. Siano la base a, la semisomma dei lati b e la loro semi differenza x. Il lato maggiore BC b x e il minore AC $b - x$. Da uno degli angoli incogniti, A, si tracci la perpendicolare AD al lato opposto BC, e conoscendo l'angolo C, sapremo il rapporto tra AC e CD, supponiamo che sia di d a e, e allora CD $\frac{eb - ex}{d}$. Per la proposizione 13-2 degli Elementi di Euclide[15] $\frac{AC^2 - AB^2 BC^2}{2BC}$, cioè, $\frac{2b^2 2x^2 - a^2}{2b2x}$ CD; e così si avrà l'equazione tra i due valori di CD. E questa ridotta dà x $\sqrt{\frac{da^2 2eb^2 - 2db^2}{2d2c}}$. Ricordando che x è la semi differenza dei lati e conoscendo la semi somma degli stessi è chiaro che i lati sono ricavabili.

Se si cercassero gli angoli alla base, la conclusione sarebbe più breve. Infatti, tracciando la bisettrice EC dell'angolo dato C che incontra la base in E, si avrà AB $\left(AC\ BC\right)$ AE AC $\sin\left(ACE\right)$ $\sin\left(CEA\right)$. Essendo così noto l'angolo CEA, lo sarà pure il suo supplementare BEC. Per avere l'angolo A, basterà sottrarre la metà dell'angolo dato C dall'angolo trovato BEC. E la metà di C sottratta da AEC, darà l'angolo B.

Problema. **11**. Dati i lati di un triangolo, trovare gli angoli.



[15]Prop. 13-2: Nei triangoli acutangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo acuto è minore dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo acuto per due volte il rettangolo compreso da uno solo dei lati intorno all'angolo acuto, quello su cui cade la perpendicolare, e dalla retta staccata all'interno dalla perpendicolare all'angolo acuto

Soluzione. Siano i lati del triangolo $AB\ \ a$, $AC\ \ b$, $BC\ \ c$ e supponiamo che si cerchi l'angolo A. Abbassate sul lato AB la perpendicolare CD opposta all'angolo A. Ciò fatto, si ha dapprima, $b^2 - c^2\ \ AC^2 - BC^2\ \ AD^2 - BD^2\ \ \left(AD\ BD\right) \times \left(AD - BD\right)\ \ AB \times \left(2AD - AB\right)\ \ 2AD \times a - a^2$.[16]. Così $b^2 - c^2\ \ 2AD \times a - a^2$. Da cui si ricava, $AD\ \ \frac{1}{2}a\ \ \frac{b^2-c^2}{2a}$ e ciò fornisce un primo teorema che si enuncia nel modo seguente:

Teorema. *I - $AB\ \ \left(AC\ BC\right)\ \ \left(AC - BC\right)\ \ N$ con N* quarto proporzionale. Ciò dà $AD\ \ \frac{ABN}{2}$; poi $AC\ \ AD$ *il raggio* $\cos A$.

Inoltre,

$$DC^2\ \ AC^2 - AD^2\ \ \frac{2a^2b^2 2a^2c^2 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2}\ \ \frac{\left(abc\right)\left(ab-c\right)\left(a-bc\right)\left(-abc\right)}{4a^2}$$

E moltiplicando il numeratore e il denominatore della radice del secondo membro di questa equazione per b, si dedurrà il secondo teorema:

Teorema. *II - $2ab$: un medio proporzionale tra $\left(a\ b\ c\right)\left(a\ b - c\right)$ e $\left(a - b\ c\right)\left(-a\ b\ c\right)$ il raggio sta al* $\sin A$.

Prendete su AB la retta $AE\ \ AC$ e tracciate CE, l'angolo AEC sarà uguale alla metà dell'angolo A. Sottraete Ad da AE e resterà $DE\ \ b - \frac{1}{2}a - \frac{\left(b^2-c^2\right)}{2a}\ \ \frac{2ab-a^2-b^2c^2}{2a}\ \ \frac{\left(ca-b\right)\left(c-ab\right)}{2a}$, di conseguenza,

$$DE^2\ \ \frac{\left(c\ a - b\right)\left(c\ a - b\right)\left(c - a\ b\right)\left(c - a\ b\right)}{4a^2}$$

Da ciò si deducono il III e il IV teorema:

Teorema. *III - $2ab\ \ \left(c\ a - b\right)\left(c - a\ b\right)\ \ AC\ \ DE$ raggio* $\sin A$.

Teorema. *IV - Un medio proporzionale tra $a\ b\ c$ e $a\ b - c$ sta a un medio proporzionale tra $c\ a - b$ e $c - a\ b$ $CD\ \ CE$ raggio* $\tan\frac{A}{2}$*, oppure,* $\cot\frac{A}{2}$ *raggio.*

Inoltre, siccome $CE^2\ \ CD^2\ DE^2\ \ \frac{2ab^2bc^2-ba^2-b^3}{a}$, ne segue che $CE^2\ \ \frac{b}{a}\left(c\ a - b\right)\left(c - a\ b\right)$. Da cui si ricava il V e il VI teorema.

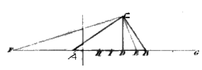
Teorema. *V - Un medio proporzionale tra $2a$ e $2b$ sta a un medio proporzionale tra $c\ a - b$ e $c - a\ b$ raggio* $\sin\frac{A}{2}$.

Oppure 1 medio proporzionale tra $\frac{ca-b}{2a}$ e $\frac{c-ab}{2b}$ $CE\ \ DE$ *raggio* $\sin\frac{A}{2}$.

Teorema. *VI - Un medio proporzionale tra $2a$ e $2b$ a un medio proporzionale tra $a\ b\ c$ e $a\ b - c$ $CE\ \ CD$ raggio* $\cos\frac{A}{2}$.

Se oltre agli angoli, si vuole trovare la superficie del triangolo basta moltiplicare CD^2 per $\frac{AB^2}{4}$ e la radice quadrata del prodotto, o $\frac{1}{4}\sqrt{\left(a\ b\ c\right)\left(a\ b - c\right)\left(a - b\ c\right)\left(-a\ b\ c\right)}$ sarà la superficie cercata.

Problema. **12 -** Dati i lati e la base di un triangolo rettilineo qualunque, trovare i segmenti della base, la perpendicolare, la superficie e gli angoli.



[16]Nota: *ricavando nei due triangoli rettangoli il lato CD col teorema di Pitagora e confrontando e trattando le differenze dei quadrati dei lati come prodotto notevole*

Siano AC e BC i lati del triangolo ABC e AB la base, tagliate AB in due parti uguali in I e su ognuna di queste parti prolungate prendete AF e AE uguali ciascuno ad AC, e BG e BH uguale ciascuno a BC; tracciate le linee CE e CF e dal punto C abbassate una perpendicolare CD sulla base. Avrete[17] $AC^2 - BC^2 \quad AD^2 \; CD^2 - CD^2 - BD^2 \quad AD^2 - BD^2 \quad \big(AD \; BD\big)\big(AD - BD\big) \quad AB \times 2DI$[18]. Pertanto $DI \quad \frac{AC^2 - BC^2}{2AB}$. E $AB \; AC \; \big(AC - BC\big) \; DI$. Questo è il teorema con il quale si determinano i segmenti della base. Da IE , cioè da $AC - \frac{AB}{2}$ sottraete DI e il restante sarà

$$DE \quad \frac{BC^2 - AC^2 \; 2AC \times AB - AB^2}{2AB}$$

che è la stessa cosa di

$$\frac{\big(BC \; AC - AB\big)\big(BC - AC \; AB\big)}{2AB}$$

oppure $\frac{EH \times EG}{2AB}$. Sottraete DE da FE, o da $2AC$ e resterà

$$FD \quad \frac{AC^2 \; 2AC \times AB \; AB^2 - BC^2}{2AB}$$

quantità che si può scomporre così

$$\frac{\big(AC \; AB \; BC\big)\big(AC \; AB - BC\big)}{2AB}$$

oppure $\frac{FG \times FH}{2AB}$. E siccome CD è medio proporzionale tra DE e DF e CE è medio proporzionale tra DE e EF e CF medio proporzionale tra FD e FE, si avrà

$$CD \quad \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB} \qquad CE \quad \sqrt{\frac{AC \times HE \times EG}{AB}} \qquad CF \quad \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}$$

Moltiplicate $\frac{AB}{2}$ per CD e avrete la superficie $\frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Quanto alla determinazione dell'angolo A, si ha per questo uno solo dei teoremi.

Teorema. *I.* $2AB \times AC \quad HE \times EG \quad AC \quad DE$ *raggio* $1 - \cos A \quad 2\sin^2 \frac{A}{2}$.

Teorema. *II.* $2AB \times AC \quad FG \times FH \quad AC \quad FD$ *raggio* $2\sin^2 \left(\frac{\pi - A}{2}\right)$

Teorema. *III.* $2AB \times AC \quad \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG} \quad AC \quad CD$ *raggio* $\sin A$

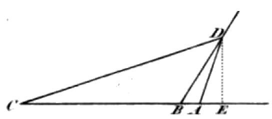
Teorema. *IV.* $\sqrt{FG \times GH} \quad \sqrt{FG \times FH} \quad CF \quad CECE \quad CF$ *raggio* $\tan \frac{A}{2}$

Teorema. *V.* $\sqrt{HE \times EG} \quad \sqrt{FG \times FH}$ *raggio* $\cot \frac{A}{2}$

Teorema. *VI.* $2\sqrt{AB \times AC} \quad \sqrt{HE \times EG} \quad FE \quad CE$ *raggio* $\sin \frac{A}{2}$

Teorema. *VII.* $2\sqrt{AB \times AC} \quad \sqrt{FG \times FH} \quad FE \quad FC$ *raggio* $\cos \frac{A}{2}$

Problema. **13 -** Dato l'angolo CBD così come la retta CD, si tratta di porre questa retta nell'angolo CBD in modo che, se dal suo estremo D si traccia in un punto dato A sul prolungamento della retta CB il segmento DA, l'angolo ADC sia uguale all'angolo ABD.



[17]Nota: *applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ADC e BDC e confrontando i valori di* CD^2

[18]Basandosi sulla figura, cioè considerando $AC > BC$, si può scrivere, $AD \;\; AI \;\; DI$ e $BD \;\; BI - DI$; pertanto, $AD \;\; BD \;\; AB$ e $AD - BD \;\; AI \;\; DI - BI \;\; DI$, ma essendo I il punto medio di AB, si ha che $AI \;\; BI$ e, quindi, $\big(AD \; BD\big)\big(AD - BD\big) \;\; AB \times 2DI$.

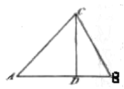
Posto $CD\ \ a$, $AB\ \ b$, $BD\ \ x$ e avrete $BD\ \ CD\ \ BA\ \ AD\ \ \frac{ab}{x}$. Abbassate la perpendicolare DE e avrete $BE\ \ \frac{BD^2-AD^2BA^2}{2BA}\ \ \frac{x^2-\frac{a^2b^2}{x^2}b^2}{2b}$. E siccome l'angolo DBA è dato, fate la proporzione $BD\ \ DE\ \ b\ \ e$ e ciò dà un secondo valore di $BE\ \ \frac{ex}{b}$. Pertanto

$$\frac{x^2-\frac{a^2b^2}{x^2}\ b^2}{2b}\ \ \frac{ex}{b}$$

da cui

$$x^4-2ex^3\ b^2x^2-a^2b^2\ \ 0$$

Problema. **14** - Trovare il triangolo ABC i cui tre lati $AB.AC,BC$ e la perpendicolare CD sono in progressione aritmetica.



Soluzione. Per l'enunciato del problema si ha la seguente proporzione $\div AB.AC.BC.DC$. Posto $AC\ \ a$, $BC\ \ x$,[19]; avrete $DC\ \ 2x-a$ e $AB\ \ 2a-x$; avrete anche $AD\ \ \sqrt{AC^2-DC^2}\ \ \sqrt{4ax-4x^2}$ e $BD\ \ \sqrt{BC^2-DC^2}\ \ \sqrt{4ax-3x^2-a^2}$. Avremo quindi un secondo valore di $AB\ \sqrt{4ax-4x^2}\ \sqrt{4ax-3x^2-a^2}$. Così $2a-x\ \ \sqrt{4ax-4x^2}\ \sqrt{4ax-3x^2-a^2}$ o $2a-x-\sqrt{4ax-4x^2}\ \ \sqrt{4ax-3x^2-a^2}$. Quadrando ogni membro,

$$4a^2-3x^2-\left(4a-2x\right)\sqrt{4ax-4x^2}\ \ 4ax-3x^2-a^2$$

o

$$5a^2-4ax\ \ \left(4a-2x\right)\sqrt{4ax-4x^2}$$

Elevando di nuovo al quadrato ogni membro e ordinando, si ha

$$16x^4-80ax^3\ 144a^2x^2-104a^3x\ 25a^4\ \ 0$$

E risolvendo, si troverà x per un valore arbitrario di a, una volta determinati a e x, costruite il triangolo i cui lati saranno $2a-x$, a e x; e la perpendicolare abbassata sul lato $2a-x$ sarà uguale a $2x-a$.

Se avessi posto la differenza dei lati d[20] e la perpendicolare x, l'operazione sarebbe stata più breve e l'equazione un poco più semplice, avrei avuto, $x^3\ \ 24d^2x\ 48d^3$[21].

Problema. **15** - Trovare il triangolo ABC i cui tre lati AB,AC,BC e la perpendicolare CD sono in progressione geometrica.

Soluzione. Per l'enunciato del problema si ha la progressione $AB\ \ AC\ \ AC\ \ BC\ \ BC\ \ CD$. E ponendo $AC\ \ x$ e $BC\ \ a$, si avrà $AB\ \ \frac{x^2}{a}$ e $CD\ \ \frac{a^2}{x}$. Si ha così $AD\ \ \sqrt{AC^2-CD^2}\ \ \sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}$ e $BD\ \ \sqrt{BC^2-CD^2}\ \ \sqrt{a^2-\frac{a^4}{x^2}}$. Pertanto $\frac{x^2}{a}\ \ \left(AB\right)\ \ \sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}\ \sqrt{a^2-\frac{a^4}{x^2}}$. Ossia

$$\frac{x^2}{a}-\sqrt{a^2-\frac{a^4}{x^2}}\ \ \sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}$$

e quadrando entrambi i membri, si ha,

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{2x^2}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^4}{x^2}}\ a^2-\frac{a^4}{x^2}\ \ x^2-\frac{a^4}{x^2}$$

---

[19]Nota: La ragione della progressione aritmetica sarà pertanto $x-a$

[20]Nota: cioè la ragione della progressione

[21]Nota: se si pone $AC-BC\ \ d$, $CD\ \ x$, essendo ancora $CD<BC<AC<AB$ si avrà

$$DC\ \ x\quad BC\ \ x\ d\quad AC\ \ x\ 2d\quad AB\ \ x\ 3d$$

Applicando la stessa procedura del problema, applicando il th: di Pitagora si avrà

$$x\ 3d\ \ \sqrt{\left(x\ 2d\right)^2-x^2}\ \sqrt{\left(x\ d\right)^2-x^2}\ \ \sqrt{4d^2\ 4dx}\ \sqrt{d^2\ 2dx}$$

elevando due volte al quadrato, isolando il radicale e svolgendo i calcoli si ottiene

$$x^4-24d^2x^2-48d^3x\ \ 0$$

e non considerando la soluzione $x\ \ 0$

$$x^3-24d^2x-48d^3\ \ 0$$

equazione non certo semplice da risolvere. Se si pone $d\ \ 1$, si ha $x\sim 5,69$.

che si riduce a

$$x^4 - a^2x^2 \; a^4 \; 2a^2x\sqrt{x^2 - a^2}$$

E quadrando di nuovo ogni membro si ha

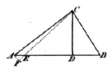
$$x^8 - 2a^2x^6 \; 3a^4x^4 - 2a^6x^2 \; a^8 \; 4a^4x^4 - 4a^6x^2$$

ossia

$$x^8 - 2a^2x^6 - a^4x^4 \; 2a^6x^2 \; a^8 \; 0$$

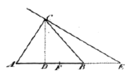
Dividete questa equazione per $x^4 - a^2x^2 - a^4$ e si avrà $x^4 - a^2x^2 - a^4$. Di conseguenza $x^4 \; a^2x^2 \; a^4$. E risolvendo questa equazione si ha $x^2 \; \frac{1}{2}a^2 \; \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, ossia $x \; a\sqrt{\frac{1}{2} \; \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Prendete quindi a, o BC a piacere, e fate questa proporzione $BC \; AC \; AC \; AB \; 1 \; \sqrt{\frac{1}{2} \; \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Essendo il triangolo ABC costruito per mezzo dei suoi lati così trovati, la perpendicolare CD, abbassata su BC, sarà nella stessa ragione dei lati.

Lo stesso in un altro modo



Poiché si ha $AB \; AC \; BC \; CD$, dico che l'angolo ACB è retto. Se si dubitasse di ciò, basta tracciare CE in modo che l'angolo ECB sia retto; allora per la prop. 8-6 degli Elementi[22] BCE e DBC sono due triangoli simili, di conseguenza $BE \; EC \; BC \; CD$. Quindi $BE \; EC \; AB \; AC$. Tracciate AF perpendicolare su CF e a per le parallele AF e CB si avrà $BE \; EC \; AE \; EF \; AB \; FC$. Pertanto, per la prop. 9-5 degli Elementi[23] $AC \; FC$, cioè l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale a un lato di questo stesso triangolo, la qual cosa è impossibile, per la prop. 1-19 degli Elementi[24]. L'angolo ECB non può quindi essere retto, bisogna di conseguenza che lo sia ACB. Pertanto $AC^2 \; BC^2 \; AB^2$. Ora $AC^2 \; AB \times BC$. Pertanto $AB \times BC \; BC^2 \; AB^2$ e risolvendo questa equazione ricavando il valore di AB si avrà $AB \; \frac{BC}{2} \; \sqrt{\frac{1}{4}BC^2}$. di conseguenza, ponete $BC \; AB \; 1 \; \frac{1\sqrt{5}}{2}$ e prendete AC medio proporzionale tra BC e AB ed essendo il triangolo costruito con i lati trovati in questo modo, i segmenti AB, AC, BC, CD saranno in proporzione continua.

Problema. **16** - Su una base data AB, costruire il triangolo ABC, il cui vertice C sta su una retta CE data di posizione e la cui base è media proporzionale aritmetica tra i lati.



Bisogna dividere la base in due parti uguali in F e prolungare questa base fino ad incontrare in un punto E la retta EC data di posizione, poi abbassare sulla base una perpendicolare CD. Si porrà $AB \; a$, $FE \; b$ e $BC - AB \; x$; ciò darà $BC \; a \; x$ e $AC \; a - x$. Ma per la prop. 3-13 degli Elementi[25] $BD \; \frac{BC^2 - AC^2 AB^2}{1AB} \; 2x \; \frac{a}{2}$. Di conseguenza, $FD \; 2x$, $DE \; b \; 2x$ e $CD \; \sqrt{CB^2 - DB^2} \; \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$. Ma siccome le posizioni delle rette CE e AB sono date, lo è pure l'angolo CED. Così si conosce il rapporto tra DE e CD. Supponiamo che sia come $\frac{d}{e}$, si avrà la proporzione $d \; e \; (b \; 2x) \; \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$. E facendo il prodotto degli estremi e quello dei medi, si ha l'equazione $eb \; 2ex \; d\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$ e quadrando entrambi i membri e disponendo opportunamente i termini si ha

$$x^2 \; \frac{\frac{3}{4}d^2a^2 - eb^2 - 4e^2bx}{4e^2 \; 3d^2}$$

e risolvendo l'equazione si ha

$$x \; \frac{-2e^2b \; d\sqrt{3e^2a^2 - 3e^2b^2 \; \frac{9}{4}d^2a^2}}{4e^2 \; 3d^2}$$

Una volta noto x, lo sono anche $BC \; a \; x$ e $AC \; a - x$.

---

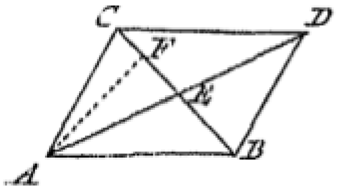
[22]Prop 8-6: Se vi sono quanti si voglia numeri in proporzione continua, e il primo non misura il secondo, allora nessun altro numero misurerà nessuno

[23]Prop. 9-5: Se un numero cubico moltiplicato per un certo numero produce un numero cubico, allora anche il numero moltiplicato è un cubo

[24]Prop. 1-19: In ogni triangolo il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore

[25]Prop. 2-13: Nei triangoli acutangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo acuto è minore dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo acuto per due volte il rettangolo compreso da uno solo dei lati intorno all'angolo acuto, quello su cui cade la perpendicolare, e dalla retta staccata all'interno dalla perpendicolare all'angolo acuto.

Problema 17. e Dati i lati AB, BD, DC, AC di un parallelogramma e una delle diagonali BC, trovare l'altra diagonale AD.

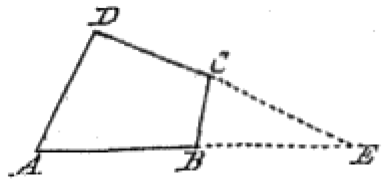


Soluzione: Sia E il punto di intersezione delle diagonali, e si tracci la perpendicolare AF alla diagonale BC, e per la prop2-13 degli Elementi $CF \quad \frac{AC^2-AB^2BC^2}{2BC}$. E anche $CF \quad \frac{AC^2-AE^2EC^2}{2EC}$. Pertanto, poiché $EC \quad \frac{1}{2}BC$ e $AE \quad \frac{1}{2}AD$, $\frac{AC^2-AB^2BC^2}{2BC} \quad \frac{AC^2-\frac{1}{4}AD^2\frac{1}{4}BC^2}{BC}$ e riducendo si avrà

$$AD \quad \sqrt{2AC^2 \quad 2AB^2 - BC^2}$$

In ogni parallelogramma, quindi, la somma dei quadrati dei lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

Problema 18. Dati gli angoli, il perimetro e l'area del trapezio $ABCD$, trovare i suoi lati.



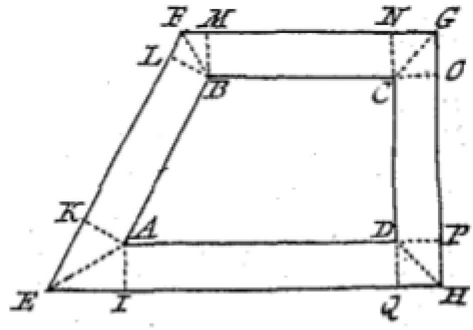
Soluzione: Si prolunghino i due lati AB, DC fino ad incontrarsi in E, e sia $AB \quad x$ e $BC \quad y$, e poiché sono assegnati tutti gli angoli, allora sono dati i rapporti di BC con CE e BE, che prendiamo come $\frac{d}{e}$ e $\frac{e}{f}$; e CE sarà $\frac{ey}{d}$, e $BE \quad \frac{fy}{d}$ e di conseguenza $AE \quad x \quad \frac{fy}{d}$. Sono pure dati i rapporti tra AE e AD e tra AE e DE; che prendiamo come $\frac{g}{d}$ e come $\frac{h}{d}$; e AD sarà $\frac{dxfy}{g}$ e $ED \quad \frac{dxfy}{h}$, e di conseguenza $CD \quad DE - CE \quad \frac{dxfy}{h} - \frac{ey}{d}$. Pertanto la somma di tutti i lati sarà $x \quad y \quad \frac{dxfy}{g} \quad \frac{dxfy}{h} - \frac{ey}{d}$ e poiché questa somma è data, la indicheremo con a. E per abbreviare, invece delle quantità date, introduciamo $\frac{p}{r}$ al posto di $1 \quad \frac{d}{g} \quad \frac{d}{h}$ e $\frac{q}{r}$ e invece di $1 \quad \frac{f}{g} \quad \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$ sostituiamo $\frac{q}{r}$ e avremo l'equazione $\frac{pxqy}{r} \quad a$.
Inoltre, conoscendo tutti gli angoli, è dato il rapporto di BC^2 con l'area del triangolo BCE, che prendiamo come $\frac{m}{n}$. Si avrà il triangolo $BCE \quad \frac{ny^2}{m}$. È pure dato il rapporto tra AE^2 e il triangolo ADE, che prendiamo come $\frac{m}{d}$; e il triangolo ADE sarà $\frac{d^2x^22dfxyf^2y^2}{dm}$. Di conseguenza, poiché l'area AC, che è la differenza tra questi triangoli, è data, e sia b^2, e avremo $\frac{d^2x^22dfxyf^2y^2-dny^2}{dm} \quad b^2$. Abbiamo quindi due equazioni, la cui riduzione è determinabile. Se dalla prima, $\frac{pxqy}{r} \quad a$, sottraiamo x, avremo $\frac{ra-qy}{p} \quad x$, e scrivendo $\frac{ra-qy}{p}$ al posto di x nella seconda, si ricava $\frac{dr^2a^2-2dqraydq^2y^2}{p^2m} \quad \frac{2afry-2fqy^2}{pm} \quad \frac{f^2y^2-dny^2}{dm} \quad b^2$. E ponendo $s \quad \frac{dq^2}{p^2} - \frac{2fq}{p} \quad \frac{f^2}{d} - n$, e $st \quad \frac{adqr}{p^2} - \frac{afr}{p}$, e $stv \quad b^2m - \frac{dr^2a^2}{p^2}$, si ottiene $y^2 \quad 2ty \quad tv$, o

$$y \quad t \quad \sqrt{t^2 \quad tv}$$

26

Problema 19. Per circondare uno stagno per pesci $ABCD$ con un muro $ABCDEFGH$ di una data area, e della stessa larghezza da tutte le parti.

[26]Nota: È possibile anche risolvere diversamente, ma ogni scelta comporta una continua riduzione dei coefficienti per mantenere un'equazione risolvente gestibile.
È possibile porre $AD \quad x$ e $BC \quad y$ e tracciare le altezze dei triangoli ADE e BCE. In questo si possono ottenere facilmente le altezze di tali triangoli, utili per calcolare la loro area. La risoluzione passa attraverso l'applicazione successiva del teorema dei seni per calcolare le basi dei triangoli, dalle quali ottenere AB e BC. In tal modo si ottengono due relazioni, una per il perimetro e una per l'area del trapezio. Il sistema è facilmente risolvibile, purché, come detto, si operi con continue sostituzioni dei coefficienti.



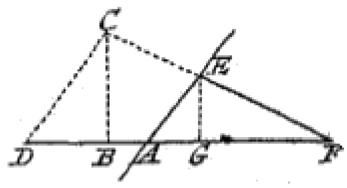
Soluzione: Sia x la larghezza del muro, e a^2 la sua area. E, tracciando le perpendicolari $AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI$, dai vertici A, B, C, D, ai lati EF, FG, GH, HE, il muro risulta diviso in quattro trapezi IK, LM, NO, PQ, e in quattro parallelogrammi AL, BN, CP, DI, di larghezza x e della stessa lunghezza dei lati dei trapezi dati. Sia, pertanto, la somma dei lati $\left(AB\ \ BC\ \ CD\ \ DA\right)\ \ b$, e la somma dei parallelogrammi sarà $\ bx$.

Inoltre, tracciati AE, BF, CG, DH; poiché $AI\ \ AK$, l'angolo $A\widehat{E}I\ \ A\widehat{E}K\ \ \frac{1}{2}I\widehat{E}K$ o $\frac{1}{2}DAB$. In tal modo è dato l'angolo $A\widehat{E}I$, poiché è la metà dell'angolo noto DAB; di conseguenza si conosce il rapporto tra AI e IE, rappresentato da $\frac{d}{e}$, e si avrà $IE\ \ \frac{ex}{d}$. Si Moltiplichi IE per $\frac{1}{2}AI\ \ \frac{1}{2}x$ e l'area del triangolo $AEI\ \ \frac{ex^2}{2d}$. Ma, avendo lati e angoli uguali i due triangoli AEI e AEK sono uguali, e di conseguenza il trapezio $IK\left(\ 2\,Triangolo\,AEI\right)\ \frac{ex^2}{d}$. In modo analogo, ponendo $BL\ \ BF\ \ d\ \ f$, e $CN\ \ NG\ \ d\ \ g$, e $DP\ \ DH\ \ d\ \ h$ (per queste ragioni sono dati pure dagli angoli assegnati B, C, D) si avrà il trapezio $LM\ \ \frac{fx^2}{d}$, $NO\ \ \frac{gx^2}{d}$ e $PQ\ \ \frac{hx^2}{d}$. Pertanto $\frac{cx^2}{d}\ \frac{fx^2}{d}\ \frac{gx^2}{d}\ \frac{hx^2}{d}$, è uguale alla somma dei quattro trapezi, $IK\ \ LM\ \ NO\ \ PO$. Si può sintetizzare ancora questa espressione ponendo $p\ \ e\ \ f\ \ g\ \ h$ e si avrà $\frac{px^2}{d}$ per la somma dei quattro trapezi. E aggiungendo bx, somma delle aree dei quattro parallelogrammi, si avrà $\frac{px^2}{d}\ \ bx\ \ a^2$, superficie totale del muro. Dividendo tutti i termini di tale equazione per $\frac{p}{d}$ ed estraendo la radice,

$$x\ \ \frac{-db\ \ \sqrt{bbdd\ \ 4aapd}}{2p}$$

La larghezza del muro sarà, pertanto, trovata, ed è facile da descrivere.

Problema 20. Da un dato punto C, tracciare la retta CF, che insieme con le altre due rette AE e AF date per posizione, contiene il triangolo AEF di data grandezza.



Soluzione: Si tracci CD parallela a AE, e CB e EG perpendicolari a AF. Sia $AD\ \ a$, $BC\ \ b$, $AF\ \ x$, e l'area del triangolo $AEF\ \ c^2$ e per la proporzionalità si ha $DF\ \ AF\ \ \left(DC\ \ AE\right)\ \ CB\ \ EG$, cioè, $\left(a\ \ x\right)\ \ x\ \ b\ \ \frac{bx}{ax}$ e si avrà $EG\ \ \frac{bx}{ax}$. Moltiplichiamo questo per $\frac{1}{2}AF$, e otterremo $\frac{bx^2}{2a2x}\ \ c^2$, cioè $x^2\ \ \frac{2c^2x2c^2a}{b}$, equazione che, una volta risolta, dà $x\ \ \frac{c^2\sqrt{c^4 2c^2ab}}{b}$.

Allo stesso modo si può tracciare una retta da un dato punto, che dividerà il triangolo e il trapezio in un dato rapporto[27].

27

Osservazione. La costruzione indica che il punto C deve essere esterno all'angolo FAE e che viene identificato rispetto al punto B, piede della perpendicolare BC e dal punto D, intersezione tra il prolungamento di AF e la parallela da C all'altra retta data AE. (Se C fosse interno all'angolo, il problema si potrebbe risolvere in modo analogo). Con le stesse modalità di Newton, si ha, nella scrittura attuale, dai triangoli simili FBC e FGE, ponendo $AF\ \ x$

$$BC\ \ EG\ \ \left(DC\ \ AE\right)\ \ DF\ \ AF$$

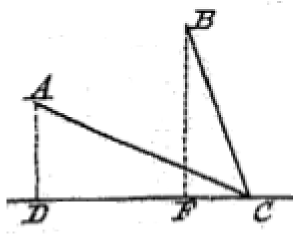
ma, $BC\ \ b$, $AD\ \ a$, $DF\ \ AD\ \ AF\ \ a\ \ x$, e sostituendo

$$b\ \ EG\ \ \left(a\ \ x\right)\ \ x$$

da cui, applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni,

$$EG\ \ \frac{bx}{a\ \ x}$$

Problema 21. Determinare il punto C sulla retta DF, tale che se si tracciano due rette AC, BC verso i due punti A, B dati per posizione, la differenza di queste due rette sia uguale a una linea data.



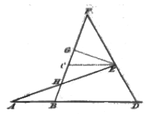
Soluzione: Dai punti dati si traccino le perpendicolari AD, BF alla retta data, e si ponga $AD \ \ a$, $BF \ \ b$, $DF \ \ c$, $DC \ \ x$, e si avrà $AC \ \ \sqrt{a^2 \ x^2}$, $FC \ \ x - c$, e $BC \ \ \sqrt{b^2 \ x^2 - 2cx \ c^2}$. Supponiamo che AC sia la maggiore delle due rette e BC la minore, e che la loro differenza sia uguale a d; si avrà pertanto $\sqrt{a^2 \ x^2} - d \ \ \sqrt{b^2 \ x^2 - 2cx \ c^2}$. Ed elevando al quadrato entrambi i membri

$$a^2 \ x^2 \ d^2 - 2d\sqrt{a^2 \ x^2} \ \ b^2 \ x^2 - 2cx \ c^2$$

Riducendo ciò che si annulla, e ponendo $2e^2 \ \ a^2 \ d^2 - b^2 - c^2$, si otterrà $e^2 \ cx \ \ d\sqrt{a^2 \ x^2}$. E quadrando nuovamente entrambi i membri si otterrà $e^4 \ 2ce^2x \ c^2x^2 \ \ d^2a^2 \ d^2x^2$. E l'equazione si riduce a $x^2 \ \ \frac{2e^2cxe^4 - a^2d^2}{d^2 - c^2}$ o $x \ \ \frac{e^2c\sqrt{e^4d^2 - a^2d^4a^2d^2c^2}}{d^2 - c^2}$.

Il problema si può risolvere in modo analogo se, invece della differenza dei segmenti AC e BC, si desse la loro somma, o la somma oppure la differenza dei loro quadrati, o il loro rapporto, o il loro prodotto o l'angolo da essi compreso; sarebbe ancora lo stesso se, invece della retta DC, si utilizzasse o una circonferenza di cerchio, o un'altra curva qualsiasi, purché in quest'ultimo caso così il calcolo si riferisca a una retta che unisce i punti A, B.

Problema. **22 -** D ate di posizione tre rette, AD, AE, BF, bisogna tracciarne una quarta, DF, in modo che le sue parti DE, EF, intercettate dalle prime rette, siano di lunghezza data.



Soluzione. Tracciate su BF la perpendicolare EG e CE parallela a AD. Le tre rette date di posizione si intersecano in A, B, H. Posti $AB \ \ a$, $BH \ \ b$, $AH \ \ c$, $ED \ \ d$, $EF \ \ e$, $HE \ \ x$. Ora, poiché i triangoli ABH, ECH sono simili, si ha $AH \ \ AB \ \ HE \ \ CE$, da cui $CE \ \ \frac{ax}{c}$ e $AH \ \ HB \ \ HE \ \ CH$, da cui $CH \ \ \frac{bx}{c}$. Sommate HB e HC e si avrà $BC \ \ b \ \frac{bx}{c} \ \ \frac{bcbx}{c}$. Analogamente, i triangoli simili FEC, FDB danno $ED \ \ CB \ \ FE \ \ FC$, da cui $FC \ \ \frac{ebxebc}{dc}$. Infine, per le proposizioni 12 e 13 del secondo libro degli Elementi[28], si ha $\frac{EC^2 - EF^2}{2FC} \ \ \frac{1}{2}FC \ \ CG$; e

ma EG è l'altezza del triangolo dato, per cui $A_{AEF} \ \ \frac{1}{2}AF \cdot EG$

$$\frac{1}{2}x\left(\frac{bx}{a \ x}\right) \ \ c^2$$

Abbiamo un'equazione fratta che ha significato per $x \not- a$ (condizioni geometricamente non ottenibile) e sviluppando si ottiene l'equazione

$$bx^2 - 2c^2x - 2ac^2 \ \ 0$$

(la scrittura di Newton è determinata dalle modalità operative di risoluzione delle equazioni di secondo grado), risolvendo applicando la formula ridotta, si ha

$$x \ \ \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 \ 2abc^2}}{b}$$

il discriminante è sempre positivo, trattandosi di lunghezze di segmenti o di aree; la radice che si ottiene dalla somma è sicuramente sempre positiva e quindi accettabile, mentre dalla sottrazione si ottiene una soluzione negativa e quindi non accettabile. Infatti $c^2 - \sqrt{c^4 \ 2abc^2} > 0$ non ha soluzioni reali.

[28]Prop. 2-12: Nei triangoli ottusangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo ottuso è maggiore dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo ottuso per due volte il rettangolo compreso da uno solo dei lati intorno all'angolo ottuso, quello su cui cade la perpendicolare, e dalla retta staccata all'esterno dalla perpendicolare all'angolo ottuso.

Prop. 2-13: Nei triangoli acutangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo acuto è minore dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo acuto per due volte il rettangolo compreso da uno solo dei lati intorno all'angolo acuto, quello su cui cade la perpendicolare, e dalla retta staccata all'interno dalla perpendicolare all'angolo acuto.

$CG\ \ \frac{HE^2-EC^2}{2CH}-\frac{1}{2}CH$. Pertanto $\frac{EC^2-EF^2}{2FC}\ \ \frac{1}{2}FC\ \ \frac{HE^2-EC^2}{2CH}-\frac{1}{2}CH$. Sostituendo i valori analitici

$$\frac{\frac{a^2x^2}{c^2}-e^2}{\frac{2ebx2ebc}{dc}}\ \ \frac{cbx\ ebc}{2d}\ \ \frac{x^2-\frac{a^2x^2}{c^2}}{\frac{2bx}{c}}-\frac{bx}{2c}$$

ossia

$$\frac{a^2dx^2-e^2dc^2}{ebx\ ebc}\ \ \frac{ebx}{d}\ \ \frac{ebc}{d}\ \ \frac{c^2x-a^2x-b^2x}{b}$$

Posto $\frac{c^2-a^2-b^2}{b}-\frac{eb}{d}\ \ m$ si ha

$$\frac{a^2dx^2-e^2dc^2}{ebx\ ebc}\ \ \frac{ebc}{d}\ \ mx$$

Moltiplicando tutto per $c\ x$, si otterrà

$$\frac{a^2dx^2-e^2dc^2}{eb}\ \ \frac{ebcx\ ebc^2}{d}\ \ mx^2\ \ mcx$$

Operiamo ancora la sostituzione $p\ \ \frac{a^2d}{eb}-m$ e $2pq\ \ mc-\frac{ebc}{d}$ e infine $pr^2\ \ -\frac{ebc^2}{d}\ \ \frac{e^2dc^2}{eb}$ e l'equazione si riduce a

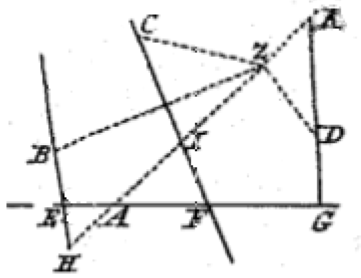
$$x^2\ \ 2qx\ \ r^2$$

e ciò dà

$$x\ \ q\pm\sqrt{q^2-r^2}$$

Trovato $x\ \ HE$, tracciate dalla sua estremità E la retta EC parallela ad AB. Fate po la proporzione $d\ \ e\ \ BC\ \ FC$. Determinato FC, dal punto F e dal punto E tracciate la retta FED, essa soddisferà alle condizioni del problema.

Problema. **23** - Determinare il punto Z, dal quale se si tracciano quattro rette ZA, ZB, ZC, ZD ad angoli dati a quattro rette FA, EB, FC, GD, date per posizione il prodotto di due delle rette ZA, ZB, e la somma delle altre due ZC, ZD sono ottenute.



Soluzione. Si scelga una tra le rette, come FA, data per posizione, e un'altra, ZA, non data per posizione, che cade su FA. Essendo determinata la lunghezza di queste rette, si può determinare la posizione di Z. si prolunghino, se è necessario, le altre rette date per posizione fino ad incontrare questa, o prolungate se è il caso, come qui mostrato. Posto $EA\ \ x$, $AZ\ \ y$, poiché gli angoli del triangolo AEH sono dati, allora sarà dato il rapporto tra AE e AH, che è posto come $\frac{p}{q}$, e AH sarà $\frac{qx}{p}$. Si aggiunga AZ a AH sarà $ZH\ \ y\ \ \frac{qx}{p}$. E allora, poiché sono noti gli angoli del triangolo HZB, sarà dato il rapporto di HZ con BZ, e sarà come $\frac{n}{p}$, e si avrà $ZB\ \ \frac{pyqx}{n}$. Inoltre, se indichiamo $EF\ \ a$, AF sarà $a-x$, e quindi, essendo dati gli angoli del triangolo AFI, AF starà con AI nello stesso rapporto di p con r, e $AI\ \ \frac{ra-rx}{p}$. Sottraiamo AI da AZ e rimarrà $IZ\ \ y-\frac{ra-rx}{p}$. Ed essendo dati gli angoli del triangolo ICZ, se IZ sta a ZC come m sta a p, e sarà $ZC\ \ \frac{py-rarx}{m}$. Allo stesso modo, se prendiamo $EG\ \ b$. $AG\ \ AK\ \ l\ \ s$ e $ZK\ \ ZD\ \ p\ \ l$, si otterrà $ZD\ \ \frac{sb-sx-ly}{p}$.

Dalle condizioni del problema, la somma di ZC e ZD deve essere uguale a una quantità data; sia f. Si avrà pertanto $\frac{py-rarx}{m}\ \ \frac{sb-sx-ly}{p}\ \ f$. E il prodotto delle altre due rette AZ e ZB deve essere uguale a una quantità data. Sia g^2.Avremo quindi una seconda equazione $\frac{pyyqxy}{n}\ \ g^2$. Per mezzo di queste due equazioni si determineranno i valori di x e y. Dall'ultima segue che $x\ \ \frac{ng^2-py^2}{qy}$, e sostituendo questo valore di x nella prima equazione, si otterrà

$$\frac{py-ra}{m}\ \ \frac{rng^2-rpy^2}{mqy}\ \ \frac{bs-ly}{p}-\frac{sng^2-spy^2}{pqy}\ \ f$$

e riducendo

$$y^2\ \ \frac{apqry-bmqsy\ fmpqy\ g^2mns-g^2npr}{p^2q-p^2r-mlq\ mps}$$

e abbreviando ponendo $2h\ \frac{apqr-bmqsfmpg}{p^2q-p^2r-mpqmps}$ e $k^2\ \frac{g^2mns-g^2pnr}{p^2q-p^2r-mlqmps}$ si avrà

$$y^2\ \ 2hy\ \ k^2$$

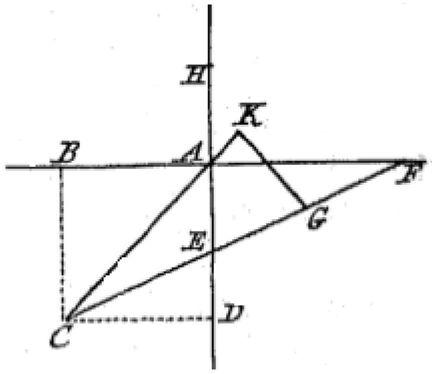
o

$$y\ \ h\pm\sqrt{h^2\ \ k^2}$$

E poiché y è noto per mezzo di questa equazione, l'equazione $x\ \ \frac{ng^2-py^2}{qy}$ fornirà x, e questo è sufficiente per determinare il punto Z.

Si seguirebbe circa lo stesso metodo se si trattasse di determinare la posizione di un punto, dal quale si volesse tracciare a un maggiore minore o maggiore di rette date di posizione, altrettante rette con queste condizioni: che la somma o la differenza o il prodotto di alcune di esse, eguagli o la somma o la differenza o il prodotto delle altre; o infine che queste rette facciano condizioni date qualunque da assegnare.

Problema. **24** - Sottendere nell'angolo retto EAF una retta data in grandezza EF, di modo che prolungata passi per un punto dato C, che deve essere equidistante dalle due rette che comprendono l'angolo retto (quando sono prolungate).



Soluzione: Si completi il quadrato $ABCD$ e si bisechi il segmento EF in G. Poniamo $CB\ \ CD\ \ a$; $EG\ \ FG\ \ b$; $CG\ \ x$; e sarà $CE\ \ x-b$ e $CF\ \ x\ b$. Allora, poiché $CF^2-BC^2\ \ BF^2$, sarà $BF\ \ \sqrt{x^2\ 2bx\ b^2-a^2}$. Considerando poi i triangoli simili CDE, FBC, si avrà $CE\ \ CD\ \ CF\ \ BF$, o $x-b\ \ a\ \ x\ b\ \ \sqrt{x^2\ 2bx\ b^2-a^2}$. Pertanto $ax\ ab\ \ \left(x-b\right)\sqrt{x^2\ 2bx\ b^2-a^2}$. Quadrando entrambi i membri di questa equazione e ordinando, si ha

$$x^4\ \ \left(2a^2\ 2b^2\right)x^2\ \ 2a^2b^2-b^4$$

Equazione che, una volta ridotta con il metodo di quelle di secondo grado dà

$$x^2\ \ a^2\ b^2\ \sqrt{a^4\ 4a^2b^2}$$

e infine

$$x\ \ \sqrt{a^2\ b^2\ \sqrt{a^4\ 4a^2b^2}}$$

Il valore di x o CG serve a determinare CE o CF e tramite una delle due rette, si determina il punto E o il punto F e il problema è risolto.

Lo stesso in un altro modo

Posto $CE\ \ x$, $CD\ \ a$ e $EF\ \ b$, avrete $CF\ \ x\ b$ e $BF\ \ \sqrt{x^2\ 2bx\ b^2-a^2}$ e la proporzione $CE\ \ CD\ \ CF\ \ BF$ ossia $x\ \ a\ \ x\ b\ \ \sqrt{x^2\ 2bx\ b^2-a^2}$ e ciò dà $ax\ ab\ \ x\sqrt{x^2\ 2bx\ b^2-a^2}$ e quadrando ogni membro e ordinando i termini si ha

$$x^4\ 2bx^3\ \left(b^2-2a\right)x^2-2a^2bx-a^2b^2\ \ 0$$

Equazione di quarto grado le cui radici sono più difficili da trovare di quelle del caso precedente. Ecco tuttavia come le si può trovare. Aggiungete da entrambe le parti $a^2b^2\ a^4$ per ottenere il primo membro come un quadrato esatto e avrete

$$x^4\ 2bx^3\ \left(b^2-2a\right)x^2-2a^2bx\ a^4\ \ a^2b^2\ a^4$$

e ricavando la radice di ogni membro si avrà $x^2\ bx-a^2\ \ \pm a\sqrt{a^2\ b^2}$

È qui l'occasione di dare una regola sulla scelta dei termini più adatti per cominciare il calcolo.

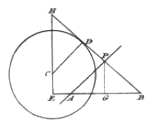
Quando due termini hanno una tale somiglianza di rapporto con gli altri termini del problema, tale che prendendo l'uno o l'altro si arriva a equazioni del tutto simili o che prendendo entrambi nello stesso tempo, essi abbiano nell'equazione finale lo stesso numero di dimensioni e la stessa forma, e differiscono solo per i segni e $-$, bisogna rigettarle entrambe e prendere al loro posto un terzo termine che abbia uno stesso rapporto con l'uno o l'altro, per esempio la loro semisomma o la loro semi differenza, o un medio proporzionale o, infine, un'altra quantità a piacere che abbia con essi una stessa relazione, purché questa quantità sia la sola che goda di questa proprietà.

È così che nel problema precedente, vedendo che il segmento EF aveva una stessa relazione con AB e AD, come si può vedere tracciando EF nell'angolo BAH e che, di conseguenza, nessun motivo di preferenza poteva determinarmi ad assumerlo per l'incognita che si voleva determinare, ED piuttosto che BF, o AE piuttosto che AF, o CE piuttosto che CF; invece quindi dei punti E e F che causavano tutta la mia incertezza, ho preso, nella prima soluzione, il punto G che interseca EF in due parti uguali; e siccome CG ha la stessa relazione con AB e AD e che non vi è una seconda quantità che abbia con questi due segmenti la stessa relazione di CG; ho preso CG per l'incognita e ho ottenuto una equazione di quarto grado, dove non si è trovato alcun termine contenente l'incognita con grado dispari. Si vede bene che sarei ricaduto nella prima incertezza se, avendo preso il punto CG, avessi voluto cercare un'incognita per mezzo di una perpendicolare abbassata da questo punto su AF, poiché avrei potuto ugualmente abbassarne una su AD; per lo stesso motivo non l'ho abbassata né su CB né su CD.

Avrei potuto ancora, osservando che il punto G sta sulla circonferenza di un cerchio di centro A e di raggio GE, avrei potuto tracciare la perpendicolare GK sulla diagonale AC e cercare AK o CK, che hanno lo stesso rapporto con AB o AD e giungere all'equazione di secondo grado $y^2 \quad -\frac{1}{2}ey \ \frac{1}{2}b^2$, ponendo $AK \ \ y$, $AC \ \ e$ e $EG \ \ b$. Trovato AK, si dovrebbe trovare la perpendicolare KG e la sua intersezione G con la circonferenza di centro A, sarebbe servita con il punto C a dirigere la retta CF e il problema sarebbe stato risolto.

È seguendo lo spirito di questa regola che nei problemi IX e X, dove si dovevano determinare i due lati AC e BC di un triangolo, invece di cercare uno o l'altro dei due lati, ho cercato la loro semi differenza. Ma si vedrà ancora meglio nel problema $XXVIII$, l'importante uso di questa regola.

Problema. **25** - In un cerchio di centro C e raggio CD tracciare una tangente BD in modo che la parte DB di questa tangente intercettata dalle rette AP e AB date di posizione, sia uguale a un segmento di lunghezza data.



Soluzione. Dal centro C tracciate a una delle due rette date di posizione, per esempio AB, la perpendicolare CE prolungandola fino ad incontrare la tangente in un punto H. Abbassate ancora su AB la perpendicolare PG e ponete $EA \ \ a$, $EC \ \ b$, $CD \ \ c$, $BP \ \ d$ e $PG \ \ x$. Per i triangoli simili PGB, CDH, si avrà $GB \ \ PB \ \ CD \ \ CH$. Da cui $CH \ \ \frac{cd}{\sqrt{d^2-x^2}}$. Sommate CE e CH e avrete $EH \ \ b \ \ \frac{cd}{\sqrt{d^2-x^2}}$. Si ha pure la proporzione $PG \ \ GB \ \ EH \ \ BE$, da cui $BE \ \ \frac{b}{x}\sqrt{d^2-x^2} \ \ \frac{cd}{x}$. Inoltre, essendo dato l'angolo PAG, anche il rapporto tra PG e AG è dato. Supponiamo che sia $\frac{e}{f}$, si avrà $AG \ \ \frac{fx}{e}$. Ora $EA \ \ AG \ \ BG \ \ EB$. Sostituendo i valori analitici, avremo un secondo valore di EB che, eguagliato al primo, ci darà

$$a \ \ \frac{fx}{e} \ \ \sqrt{d^2-x^2} \ \ \frac{b}{x}\sqrt{d^2-x^2} \ \ \frac{cd}{x}$$

E trasportando

$$a \ \ \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} \ \ \frac{b-x}{x}\sqrt{d^2-x^2}$$

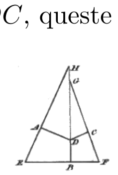
Quadrando entrambi i membri

$$a^2 \ \ \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} \ \ \frac{f^2x^2}{e^2} - \frac{2cdf}{e} \ \ \frac{c^2d^2}{x^2} \ \ \frac{b^2d^2}{x^2} - b^2 - \frac{2bd^2}{x} \ \ 2bx \ \ d^2 - x^2$$

e riducendo e ordinando

$$\begin{gathered}\left(e^2 \ \ f^2\right)x^4 \ \ \left(2aef - 2be^2\right)x^3 \ \ \left(a^2e^2 \ \ b^2e^2 - d^2c^2 - 2cdef\right)x^2 \\ \left(2bd^2e^2 - 2acde^2\right)x \ \ c^2d^2e^2 - b^2d^2c^2 \ \ 0\end{gathered}$$

Problema. **26** - Date tre rette AE, BF, CF, trovare un punto D tale che, se da questo punto si abbassano su ciascuna delle rette, perpendicolari DA, DB, DC, queste perpendicolari stiano tra loro in un rapporto dato.



Prolungate una delle rette date di posizione, così che la perpendicolare che cade su di essa, BF per esempio, e la sua perpendicolare BD, affinché esse incontrino le altre due rette AE e FC, la retta BF le incontrerà nei punti E e F e la perpendicolare nei punti G e H. Ponete ora $EB\ \ x$, $EF\ \ a$, avrete $BF\ \ a-x$. E siccome le rette EF, FA, FC sono date di posizione, gli angoli E e F e i rapporti dei lati dei triangoli EBH e FBG sono pure assegnati. Sia quindi il rapporto tra EB e BH come $\frac{d}{e}$ e si avrà, $BH\ \ \frac{ex}{d}$; e

$$EH\ \ \sqrt{EB^2\ \ BH^2}\ \ \sqrt{x^2\ \ \frac{e^2x^2}{d^2}}\ \ \frac{x}{d}\sqrt{d^2\ \ e^2}$$

Supponiamo ancora che BF stia a BG come d a f e avremo, $EG\ \ \frac{fa-fx}{d}$ e

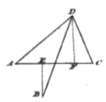
$$FG\ \ \sqrt{BF^2\ \ BG^2}\ \ \sqrt{a^2-2ax\ \ x^2\ \ \frac{f^2a^2-2f^2ax\ \ f^2x^2}{d^2}}$$

che si riduce a

$$FG\ \ \frac{a-x}{d}\sqrt{d^2\ \ f^2}$$

Chiamiamo poi $BD\ \ y$; e ci verrà $HD\ \ \frac{ex}{d}-y$ e $GD\ \ \frac{fa-fx}{d}-y$. E siccome si hanno le proporzioni $AD\ \ HD\ \ BE\ \ HE\ \ d\ \ \sqrt{d^2\ \ e^2}$ e $DC\ \ GD\ \ BF\ \ FG\ \ d\ \ \sqrt{d^2\ \ e^2}$. Dalla prima si ricava $AD\ \ \frac{ex-dy}{\sqrt{d^2e^2}}$ e dalla seconda $DC\ \ \frac{fa-fx-dy}{\sqrt{d^2e^2}}$. Inoltre, siccome i rapporti dei segmenti BD, AD, DC sono dati, supponiamo che $BD\ \ AD\ \ \sqrt{d^2\ \ e^2}\ \ h-d$ e si avrà $\frac{hy-dy}{\sqrt{d^2e^2}}\ \ AD\ \ \frac{ex-dy}{\sqrt{d^2e^2}}$; ciò che dà $hy\ \ ex$. Sia ancora $BD\ \ DC\ \ \sqrt{d^2\ \ f^2}\ \ k-d$ e si avrà $\frac{ky-dy}{\sqrt{d^2f^2}}\ \ DC\ \ \frac{fa-fx-dy}{\sqrt{d^2f^2}}$, ciò che dà $ky\ \ fa-fx$, da cui si ricava $y\ \ \frac{fa-fx}{k}$. Ma l'equazione $hy\ \ ex$ dà pure $y\ \ \frac{ex}{h}$, pertanto $\frac{ex}{h}\ \ \frac{fa-fx}{k}$, ossia, $x\ \ \frac{afh}{ekfh}$. Fatte quindi queste proporzioni, $\frac{ek}{f}\ \ h\ \ b\ \ EF\ \ EB$ e EB, o x, essendo determinato, sostituite il suo valore nell'equazione $hy\ \ ex$ e avrete il valore di y dalla proporzione $h\ \ e\ \ BE\ \ BD$, così il punto D sarà determinato.

Problema. **27 -** Trovare un punto D tale che se da esso si tracciano tre rette DA, DB, DC a tre punti dati A, B, C, queste rette stiano tra loro in un rapporto dato.



Soluzione. Dei tre punti dati, congiungetene due, per esempio A e C, con una retta AC, e dal terzo punto B, così come dal punto cercato D, abbassate perpendicolari BE e DF sulla retta AC. Ponete $AE\ \ a$, $AC\ \ b$, $EB\ \ c$, $AF\ \ x$ e $FD\ \ y$. E avrete, $AD^2\ \ x^2\ \ y^2$; $FC\ \ b-x$; $CD^2\ \ FC^{”}\ \ FD^2\ \ b^2-2bx\ \ x^2\ \ y^2$. $EF\ \ x-a$ e $BD^2\ \ EF^2\ \ \left(EB\ \ FD\right)^2$[29]. Per cui

$$BD^2\ \ x^2-2ax\ \ a^2\ \ c^2\ \ 2cy\ \ y^2$$

Siccome AD e CD sono in un rapporto dato, sia $\frac{d}{e}$ e si avrà $CD\ \ \frac{e}{d}\sqrt{x^2\ \ y^2}$. E poiché AD sta anche con BD in un rapporto dato, sia come $\frac{d}{f}$ e si avrà $BD\ \ \frac{f}{d}\sqrt{x^2\ \ y^2}$. Di conseguenza $\frac{e^2x^2e^2y^2}{d^2}\ \ CD^2\ \ b^2-2bx\ \ x^2\ \ y^2$ e $\frac{f^2x^2f^2y^2}{d^2}\ \ BD^2\ \ x^2-2ax\ \ a^2\ \ c^2\ \ 2cy\ \ y^2$. Se, per abbreviare, si pone in queste equazioni $p\ \ \frac{d^2-e^2}{d}$ e $q\ \ \frac{d^2-f^2}{d}$, si avrà

$$b^2-2bx\ \ \frac{px^2}{d}\ \ \frac{p}{d}y^2\ \ 0$$

e

$$a^2\ \ c^2-2ax\ \ 2cy\ \ \frac{q}{d}x^2\ \ \frac{q}{d}y^2\ \ 0$$

Dalla prima si ricava

$$\frac{2bqx-b^2q}{p}\ \ \frac{q}{d}x^2\ \ \frac{q}{d}y^2$$

Così, sostituendo nella seconda, invece di $\frac{q}{d}x^2\ \ \frac{q}{d}y^2$ il suo valore $\frac{2bqx-b^2q}{p}$, essa diverrà

$$\frac{2bqx-b^2q}{p}\ \ a^2\ \ c^2-2ax\ \ 2cy\ \ 0$$

Se si pone ancora $m\ \ a-\frac{bq}{p}$ e $2cn\ \ \frac{b^2q}{p}-a^2-c^2$, si avrà

$$2mx\ \ 2cn\ \ 2cy$$

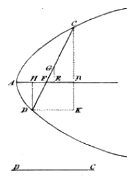
[29]Nota: *applicando il teorema di Pitagora al triangolo BHD, dove H è il punto di intersezione tra il prolungamento di DF e la parallela per B al segmento AC*

Dividendo tutto per $2c$, l'equazione si riduce a $\frac{mx}{c}\ \ n\ \ y$. Sostituite quindi nell'equazione $b^2 - 2bx\ \ \frac{px^2}{d}\ \ \frac{p}{d}y^2\ \ 0$, al posto di y^2 il quadrato di $\frac{mx}{c}\ \ n$ e avrete

$$b^2 - 2bx\ \ \frac{p}{d}x^2\ \ \frac{pm^2}{de^2}x^2\ \ \frac{2pmn}{dc}x\ \ \frac{pn^2}{d}\ \ 0$$

Se ancora si sostituisce $\frac{b}{r}\ \ \frac{p}{d}\ \ \frac{pm^2}{de^2}$; $s\frac{b}{r}\ \ b - \frac{pmn}{de}$ e $\frac{lb^2}{r}\ \ b^2\ \ \frac{pn^2}{d}$, si avrà $x^2\ \ 2sx - tb$. Una volta risolta questa equazione, dà $x\ \ s \pm \sqrt{s^2 - tb}$. Trovato x, o essendo determinati AF e FD, lo sarà pure il punto cercato D.

Problema. **28 -** Si voglia inscrivere una retta DC, di lunghezza data, in una sezione conica data DAC, in modo che questa retta passi per il punto G di posizione data.



Soluzione. Sia AF l'asse della curva. Dai punti D, G, C abbassate su questo asse le perpendicolari DH, GE, CB. Ora, per determinare la posizione della retta DC, si potrebbe indifferentemente cercare i punti C o D; ma questi due punti hanno rapporti così simili che l'operazione sarà sempre la stessa, sia che si voglia determinarli per mezzo delle linee CG, CB o AB; sia per mezzo delle linee DG, DH o AH. Di conseguenza, non cercherò né l'uno né l'altro, ma un terzo punto che abbia la stessa relazione con i primi due e che li determini entrambi in una volta. Vedo che il punto F verifica queste condizioni. Sia dunque $AE\ \ a$, $EG\ \ b$, $DC\ \ c$, $FE\ \ z$. E siccome si ha il rapporto tra AB e BC per l'equazione della curva data, chiamiamo $AB\ \ x$ e $BC\ \ y$; allora FB sarà $x - a\ \ z$. Si ha pure la proporzione $GE\ \ EF\ \ CB\ \ BF$ dalla quale si ricava $BF\ \ \frac{yz}{b}$.Questo secondo valore di BF, uguagliato al primo, fornisce l'equazione $x - a\ \ z\ \ \frac{yz}{b}$.

Posta questa equazione, eliminate x per mezzo dell'equazione della curva. Per esempio, se la sezione conica è una parabola, la cui equazione è $rx\ \ y^2$, avrete $x\ \ \frac{y^2}{r}$. Questo valore di x sostituito nell'equazione precedentemente trovata, ci darà, $\frac{y^2}{r} - a\ \ z\ \ \frac{yz}{b}$; e risolvendo

$$y\ \ \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{r^2z^2}{4b^2}\ \ ar - rz}$$

dalla quale si vede che $\sqrt{\frac{r^2z^2}{b^2}\ \ 4ar - 4rz}$ è la differenza tra i due valori di y, cioè dei segmenti BC e $-DH$. Pertanto, se dal punto D si traccia su CB la perpendicolare DK, il segmento CK rappresenterà questa differenza. Si ha ora la proporzione $FG\ \ GE\ \ DC\ \ CK$ e sostituendo i valori analitici, $\sqrt{b^2\ \ z^2}\ \ b\ \ c\ \ \sqrt{\frac{r^2z^2}{4b^2}\ \ ar - rz}$. Elevando tutti i termini di questa proporzione al quadrato e uguagliando poi il prodotto degli estremi a quello dei medi e ordinando, si avrà

$$z^4\ \ \frac{4b^2rz^3 - \left(4ab^2r\ \ b^2r^2\right)z^2\ \ 4b^4rz\ \ b^4c^2 - 4ab^4r}{r^2}$$

Questa equazione è solo di quarto grado; sarebbe stata di ottavo se si fosse cercato CG, o CB o AB.

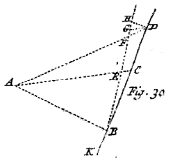
Anche traducendo questo problema nel linguaggio della geometria analitica si ottiene una equazione risolutiva di quarto grado con incognita in coefficiente angolare della retta che contiene il segmento CD di lunghezza data. L'equazione della parabola con asse orizzontale e vertice nell'origine è $x\ \ ay^2$; poniamo le coordinate di $G\left(h, k\right)$ e la lunghezza della corda $DC\ \ b$. Si determinano le intersezioni tra il fascio di rette per G e la parabola per trovare i punti C, D in funzione del coefficiente angolare; si pone la lunghezza del segmento CD uguale a b e si ottiene l'equazione seguente

$$4am^4\left(h - ab^2\right) - 4akm^3\ \left(4ah\ \ 1\right)m^2 - 4amk\ \ 1\ \ 0$$

Problema. **29 -** Bisogna moltiplicare o dividere un angolo dato per un numero dato.

In un angolo qualunque FAG, inscrivete i segmenti AB, BC, CD, DE, ecc. tutti di una stessa lunghezza qualsiasi e i triangoli ABC, BCD, CDE, DEF, ecc. saranno tutti isosceli. Per la prop. 32 del primo libro degli Elementi[30], si avrà l'angolo $C\hat{B}D\ \ \hat{A}\ A\hat{C}B\ \ 2\hat{A}$ e $D\hat{C}E\ \ \hat{A}\ A\hat{D}C\ \ 3\hat{A}$. E $E\hat{D}F\ \ \hat{A}\ A\hat{E}D\ \ 4\hat{A}$; $F\hat{E}G\ \ \hat{A}\ A\hat{F}E\ \ 5\hat{A}$ e così via. Considerando le rette AB, BC, CD, ecc. come i raggi di cerchi uguali, le perpendicolari BK, CL, CD, ecc. abbassate su AC, BD, CE saranno i seni di questi angoli e AK, BL, CM, DN ne saranno i coseni; oppure considerando AB come il diametro, le rette AK, BL, CM, ecc, saranno le corde. Siano quindi $AB\ \ 2r$ e $AK\ \ x$, il resto si svolge nel modo seguente: $AB\ \ AK\ \ AC\ \ AL$, $2r\ \ x\ \ 2x\ \ \frac{x^2}{r}$. Pertanto, $AL - AB$, o $\frac{x^2}{r} - 2r\ \ BL$ coseno del doppio dell'angolo $\hat{A}$. $AB\ \ AK\ \ AD\left(2AL - AB\right)\ \ AM$, $2r\ \ x\ \ \frac{2x^2}{r} - 2r\ \ \frac{x^2}{r^2} - x$. Pertanto $AM - AC$ o $\frac{x^2}{r^2} - 3x\ \ CM$, coseno del triplo dell'angolo $\hat{A}$. $AB\ \ AK\ \ AE\left(2AM - AC\right)\ \ AN$, $2r\ \ x\ \ \frac{2x^2}{r^2} - 4x\ \ \frac{x^4}{r^3} - \frac{2x^2}{r}$. Pertanto $AN - AD\ \ \frac{x^4}{r^2} - \frac{4x^2}{r}\ \ 2r\ \ DN$, coseno del quadruplo dell'angolo $\hat{A}$. $AB\ \ AK\ \ AF\left(2AN - AD\right)\ \ AO$, $2r\ \ x\ \ \frac{2x^4}{r^2} - \frac{6x^2}{r}\ \ 2r\ \ \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{r^2}\ \ x$. Pertanto $AO - AE\ \ \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{r^2}\ \ 5x\ \ EO$, coseno del quintuplo dell'angolo $\hat{A}$. E così di seguito. Se, al contrario, volete dividere un angolo dato in un numero qualsiasi di parti, mettete q al posto BL, CM, DN, ecc e avrete $x^5 - 4r^2x^3\ \ 5r^4x\ \ qr^4$per la quintisezione.

Problema. **30 -** Determinare la posizione di una Cometa che si muove uniformemente su una linea retta, BD, mediante tre osservazioni.



Soluzione. Supponiamo che A sia l'occhio dell'Osservatore, B la posizione della Cometa nella prima osservazione, C nella seconda e D nella terza; si deve trovare l'inclinazione della retta BD rispetto alla retta AB[31]. Dalle osservazioni pertanto sono dati gli angoli BAC e BAD; e di conseguenza se si traccia BH perpendicolare ad AB che interseca AC e AD in E e F, assumendo la retta qualunque AB come raggio, le rette BE e BF saranno note. in quanto sono rispetto al raggio AB le tangenti degli angoli noti BAC e BAD.[32] Sia quindi $AB\ \ a$, $BE\ \ b$ e $BF\ \ c$. D'altra parte, dagli intervalli dati delle osservazioni, si conosce il rapporto tra BC e BD; supponiamo che sia lo stesso che vi è tra b e e. Tracciamo DG parallela ad AC, poiché BE sta a BG nello stesso rapporto[33] e che, se si pone $BE\ \ b$, si avrà $BG\ \ e$, così $GF\ \ e - c$. Inoltre, se si traccia DH perpendicolare a EG, i triangoli simili ABF e DHF[34] similmente tagliati dalle rette AE e DG ci danno la proporzione $FE\ \ AB\ \ FG\ \ HD$, oppure $\left(c - b\right)\ \ a\ \ \left(e - c\right)\ \ \frac{ae-ac}{c-b}\ \ HD$. Si ha pure la proporzione $FE\ \ FB\ \ FG\ \ FH$, ossia $\left(c - b\right)\ \ c\ \ \left(e - c\right)\ \ \frac{ce-cb}{c-b}\ \ FH$. Sommate BF o c a FH e avrete $BH\ \ \frac{ce-cb}{c-b}$. Così considerando HD come il raggio, BH sarà la tangente dell'angolo HDB e si avrà $HD\ \ HB\ \ 1\ \ \tan HDB$, ossia

$$\frac{ae - ac}{c - b}\ \ \frac{ce - cb}{c - b}\ \ 1\ \ \tan HDB$$

ossia

$$\left(ac - ec\right):\left(ce - cb\right)=1:\text{tanHDB}$$

da cui

$$a\ \ \frac{c\left(e - b\right)}{e - c}\ \ 1\ \ \tan HDB$$

o ABK. Siccome abbiamo supposto che a era il raggio, si avrà

$$\left(e - c\right)\ \ \left(e - b\right)\ \ c\ \ \tan ABK$$

ossia $GF\ \ GE\ \ BF\left(\tan BAF\right)\ \ \tan ABK$.

Riassunto. La proporzione $BC\ \ BD\ \ BE\ \ BG$ ci fornisce questo enunciato: il tempo trascorso tra la prima e la seconda osservazione sta al tempo trascorso tra la prima e la terza, come la tangente dell'angolo BAE sta a un quarto proporzionale BG. E la proporzione, $GF\ \ GE\ \ BF\left(\tan BAF\right)\ \ \tan ABK$, ci fornisce il secondo enunciato: GF, eccesso del quarto proporzionale BG su $\tan BAF$ sta a GE, eccesso di questo stesso quarto proporzionale BG su $BE\ \tan BAE$, come la $\tan BAF$ sta alla $\tan ABK$.

[30]Prop.1-32: Prolungato avanti uno solo dei lati di ogni triangolo, l'angolo all'esterno è uguale ai due all'interno e opposti, e i tre angoli all'interno del triangolo sono uguali a due retti

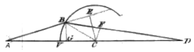
[31]Nota: Vuol dire trovare l'angolo DBH o ABK

[32]Nota: Per i teoremi sui th. rettangoli, $BE\ \ AB\tan BAC$ e $BF\ \ AB\tan BAD$

[33]Nota: Infatti, i triangoli BDG e BEC sono simili, essendo $GD /\!\!/ //AC$

[34]Nota: Ricordiamo che per costruzione i due triangoli sono rettangoli

Problema. **31** - Dato un punto luminoso da cui partono raggi divergenti che colpiscono una superficie sferica rifrangente, trovare il punto in cui concorrono tutti i raggi rifratti con l'asse della sfera che passa per il punto luminoso.



Soluzione. Sia A il punto luminoso e BV la sfera il cui asse passante per il punto luminoso è AD, il suo centro C e il suo vertice V. Sia AB il raggio incidente e BD quello rifratto; siano abbassate le perpendicolari CE, CF su questi raggi e la perpendicolare BG su AD; si tracci ancora il raggio BC e posto $AC\ \ a$, $VC\ \ BC\ \ r$, $CG\ \ x$[35] e $CD\ \ z$ si avrà $AG\ \ a - x$, $BG\ \ \sqrt{r^2 - x^2}$, $AB\ \ \sqrt{a^2 - 2ax\ r^2}$. Poiché i triangoli ABG, ACE sono simili, si ha $CE\ \ \frac{a\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{a^2-2axr^2}}$. Inoltre $GD\ \ z\ x$; $BD\ \ \sqrt{z^2\ 2zx\ r^2}$. Essendo anche i triangoli DBG, DCF simili si ha $CF\ \ \frac{z\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{z^2-2zxr^2}}$. E siccome si conosce il rapporto dei seni di incidenza e di rifrazione e, di conseguenza, quello tra CE e CF, che supponiamo come $\frac{a}{f}$, si avrà

$$\frac{fa\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - 2ax\ r^2}}\ \ \frac{az\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{z^2 - 2zx\ r^2}}$$

e moltiplicando in croce e dividendo per $a\sqrt{r^2 - x^2}$si avrà

$$f\sqrt{z^2 - 2zx\ r^2}\ \ z\sqrt{a^2 - 2ax\ r^2}$$

e quadrando e ordinando

$$z^2\ \ \frac{2f^2xz\ f^2r^2}{a^2 - 2ax\ r^2 - f^2}$$

infine, se poniamo $\frac{f^2}{a}\ \ p$ e $a\ \ \frac{r^2}{a} - p\ \ q$ si avrà

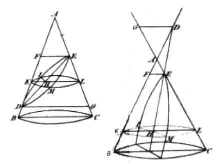
$$z^2\ \ \frac{2pxz\ pr^2}{q - 2x}$$

e risolvendo

$$z\ \ \frac{px\ \ \sqrt{p^2x^2 - 2pr^2x\ pqr^2}}{q - 2x}$$

Noto z, cioè CD e di conseguenza il punto D in cui concorre il raggio rifratto BD con l'asse ACD. Ho supposto qui che i raggi incidenti fossero divergenti e passassero in un mezzo più denso; se al contrario fossero convergenti e passassero da un mezzo più denso a uno più rarefatto, il percorso sarebbe ancora lo stesso, considerando tuttavia la differenza delle condizioni.

Problema. **32** - Essendo un cono tagliato da un piano qualunque, trovare la figura della sezione.



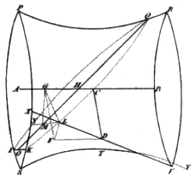
Soluzione. Siano, il cono ABC appoggiato su una base circolare BC; IEM la sezione cercata; $KILM$ un'altra sezione qualsiasi parallela alla base e che interseca la prima in IH; e ABC una terza sezione perpendicolare alle prime due e che le interseca, l'una in EH, l'altra in KL e taglia il cono lungo il triangolo ABC. Prolungate EH fino ad incontrare AK in un punto D e si traccino EF e DG parallele a KL, fino ad incontrare AB e AC in F e in G, posti $EF\ \ a$, $DG\ \ b$, $ED\ \ c$, $EH\ \ x$ e $HI\ \ y$. I triangoli EHL, EDG sono simili e si ha la proporzione $ED\ \ DG\ \ EH\ \ HL$, da cui $HL\ \ \frac{bx}{c}$. Anche i triangoli DEF, DHK sono simili e si ha $DE\ \ EF\ \ DH\ (c - x)$ per la prima figura e $(c\ x)$ per la seconda HK, da cui $HK\ \ \frac{ac\mp ax}{c}$. Ora, poiché la sezione KIL è stata tracciata parallela alla base, essa è necessariamente un cerchio e si ha $HK \times HL\ \ HI^2$[36], cioè $\frac{ab}{c} \cdot x \mp \frac{ab}{c^2} \cdot x^2\ \ y^2$. Questa equazione esprime la relazione tra $EH\ (x)$ e $HI\ (y)$, cioè tra l'asse e l'ordinata della sezione $EIDM$; e poiché l'equazione è quella dell'ellisse per la prima figura e dell'iperbole per la seconda, ne segue che la sezione è un ellisse o un'iperbole. Se ED non può mai incontrare AK, che avviene nel caso in cui gli è parallelo, allora $HK\ \ EF\ (a)$ e, di conseguenza $HK \times HL\ \ \frac{ab}{c} \cdot x\ \ y^2$ è l'equazione della parabola.

---

[35]Nota: x non è realmente un incognita, ma una quantità che si determina una volta fissata la posizione di B. L'incognita del problema è quindi rappresentata da z.

[36]*Nota: si ricordi la costruzione geometrica della radice quadrata di un numero espressa attraverso la lunghezza di un segmento*

Problema. **33** - Se una retta XY, lontana dall'asse AB della quantità CD e avente una inclinazione nota sul piano DCB, compie una rotazione attorno all'asse AB e il solido $PQRVTS$ che essa genererà con questa rotazione, sia tagliato da un piano qualunque $INQLK$, si domanda quale sarà la figura della sezione.



Soluzione. Sia BHQ o GHO l'inclinazione dell'asse AB sul piano della sezione e L un punto qualsiasi di intersezione della retta XY con questo piano. Tracciate DF parallelo a AB e dal punto L abbassate su AB la perpendicolare LG, e su DF la perpendicolare LF, e su HO la perpendicolare LM. Poi tracciate MG e FG. Ponete $CD\;\; a$, $CH\;\; b$, $MH\;\; x$ e $ML\;\; y$. Siccome l'angolo GHO è dato, supponiamo che $MH\;\; HG\;\; d\;\; e$, si avrà $HG\;\; \frac{ex}{d}$ e $GC\;\; b\;\; \frac{ex}{d}\;\; FD$. Inoltre, poiché anche l'angolo LDF è noto (l'angolo LDF è noto perché l'inclinazione della retta XY sul piano $GCDF$ è data). Supponiamo che $FD\;\; FL\;\; g\;\; h$, si avrà $FL\;\; \frac{hb}{g}\;\; \frac{heg}{dg}$. Al quadrato di FL aggiungete il quadrato di FG, o quello di DC, o a^2 e si avrà

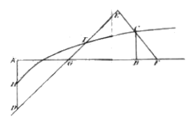
$$GL^2\;\; a^2\;\; \frac{b^2h^2}{g^2}\;\; \frac{2beh^2x}{dg^2}\;\; \frac{e^2h^2x^2}{d^2g^2}$$

Da GL^2 sottraete $MG^2\left(MH^2 - GH^2\right)$, ossia $x^2 - \frac{e^2x^2}{d^2}$ e resterà

$$\frac{a^2g^2\;\; b^2h^2}{g^2}\;\; \frac{2beh^2}{dg^2}\cdot x\;\; \left(\frac{h^2e^2 - d^2g^2\;\; c^2g^2}{d^2g^2}\right)x^2\;\; y^2\;\; ML^2$$

Equazione che esprime il rapporto tra x e y, cioè il rapporto dell'asse MH della sezione con l'ordinata ML. E siccome x e y non superano in questa equazione il secondo grado, ne segue che $INQLK$ è una sezione conica. Sarà un ellisse, se l'angolo MHG è più grande dell'angolo LDF; se al contrario è più piccolo sarà un'iperbole; e se è uguale sarà una parabola. Se i due punti C e H si sovrappongono, la sezione sarà un parallelogramma.

Problema. **34** - Si innalzi su una retta AF una perpendicolare AD di lunghezza data e che una parte ED della squadra DEF passa continuamente per il punto D, mentre l'altra parte EF uguale a AD, scorre su AF,si tratta di trovare la curva HIC che descriverà durante questo movimento il punto C, punto medio della retta EF.



Soluzione. Siano $EC\;\; CF\;\; a$, la perpendicolare $CB\;\; y$ e $AB\;\; x$. I triangoli FBC, FEG sono simili[37] e si avrà $BF\left(\sqrt{a^2 - y^2}\right)\;\; BC\;\; CF\,(y\;\; a)\;\; EF\,(2a)\;\; EG\;\; GF\,\left(AG\;\; GF\right)\;\; AF$. Così $\frac{2ay2a^2}{\sqrt{a^2-y^2}}\;\; AF\;\; AB\;\; BF\;\; x\;\; \sqrt{a^2 - y^2}$. E moltiplicando ogni membro per $\sqrt{a^2 - y^2}$ si ha,

$$2ay\;\; 2a^2\;\; a^2 - y^2\;\; x\sqrt{a^2 - y^2}$$

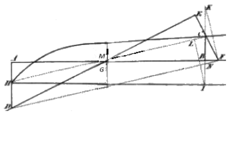
ossia

$$2ay\;\; a^2\;\; y^2\;\; x\sqrt{a^2 - y^2}$$

E dividendo ogni membro per $\sqrt{a\;\; y}$, poi quadrando e ordinando si ha

$$y^3\;\; 3ay^2\;\; \left(3a^2\;\; x^2\right)y\;\; a^3 - ax^2\;\; 0$$

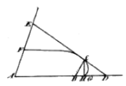
Lo stesso in un altro modo



[37]Nota: i due righelli ED e EF fanno parte della squadra DEF e devono essere sempre perpendicolari.

Prolungate BC da una parte e dall'altra facendo BI e CK uguali a CF e tracciate $KF, HI, HC.DF$. Le rette HC e DF incontrano AF e KI in M e in N. Poi dal punto I abbassate su HC la perpendicolare IL e avrete l'angolo $K \quad \frac{1}{2}BCF \quad \frac{1}{2}FGE \quad GFD \quad AMH \quad MHI \quad CIL$. Così i triangoli KBF, FBN, HLI, ILC sono simili. Ponete $FC \quad a$, $HI \quad x$, $IC \quad y$ e avrete $BN\left(2a-y\right) \quad BK\left(y\right) \quad LC \quad LH \quad CI^2\left(y^2\right) \quad HI^2\left(x^2\right)$. Di conseguenza $2ax^2 - yx^2 \quad y^3$. Si vede facilmente da questa equazione che la curva in questione è la cissoide degli antichi; che il cerchio da cui dipende ha per centro il punto A e per raggio AH.

Problema. **35 -** Se una retta ED di lunghezza nota e sottendente un angolo dato EAD, si muove in questo angolo in modo che le sue estremità D e E toccano continuamente i lati AD e AE dell'angolo, si chiede di determinare il tipo di curva FCG che descrive il punto C della retta DE durante il moto.



Dal punto dato C tracciate a EA la parallela a CB e ponete $AB \quad x$, $BC \quad y$, $CE \quad a$, $CD \quad b$ ed essendo i triangoli DCB, DEA simili, si ha $EC \quad AB \quad CD \quad DB$, cioè, $a \quad x \quad b \quad BD \quad \frac{bx}{a}$. Si abbassi poi la perpendicolare CH ed essendo dato l'angolo DAE o DBC, si conoscerà il rapporto dei lati del triangolo rettangolo BCH. Sia pertanto $BC \quad BH \quad a \quad e$, da cui $BH \quad \frac{ey}{a}$. E sottraendo BH da BD, resta $DH \quad \frac{bx-ey}{a}$. Ora, nel triangolo rettangolo BCH si ha $BC^2 - BH^2 \quad CH^2$, ossia $y^2 - \frac{e^2y^2}{a^2} \quad CH^2$. Analogamente nel triangolo rettangolo CHD si ha $CD^2 - CH^2 \quad HD^2$ ossia

$$b^2 - y^2 \quad \frac{e^2y^2}{a^2} \quad DH^2 \quad \left(\frac{bx-ey}{a}\right)^2 \quad \frac{b^2x^2 - 2bexy \quad c^2y^2}{a^2}$$

e riducendo

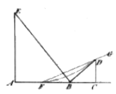
$$y^2 \quad \frac{2be}{a^2}xy \quad \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$$

e siccome in questa equazione le incognite sono solamente di secondo grado, è evidente che la curva non può che essere una conica. Se si ricava il valore di y si ha

$$y \quad \frac{bex \pm b\sqrt{ex^2 - a^2x^2 \quad a^4}}{a^2}$$

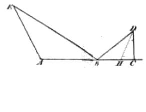
Si vede che il coefficiente di x^2sotto radice è $c^2 - a^2$ e poiché si ha $a \quad e \quad BC \quad BH$ e BC è necessariamente maggiore di BH, poiché è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui BH è un cateto, ne segue che a è maggiore di e e che di conseguenza $e^2 - a^2$ è una quantità negativa; pertanto la curva è un ellisse.

Problema. **36 -** Se una squadra EBD si muove in modo che una delle sue parti EB non cessi mai di sottendere l'angolo retto EAB, mentre l'altra estremità D dell'altra parte BD descrive una curva FDG, si chiede di determinare questa curva.



Soluzione. Dal punto D abbassate la perpendicolare DC sul lato AC e posto $AC \quad x$, $DC \quad y$, $EB \quad a$ e $BD \quad b$, avrete, considerando il triangolo rettangolo BDC, $BC^2 \quad BD^2 - DC^2 \quad b^2 - y^2$. Pertanto $BC \quad \sqrt{b^2 - y^2}$ e $AB \quad x - \sqrt{b^2 - y^2}$. Inoltre, essendo i triangoli BEA, DBC simili si ha $BD \quad DC \quad BE \quad AB$ ossia $y \quad b \quad a$ $z - \sqrt{b^2 - y^2}$. Pertanto $bx - b\sqrt{b^2 - y^2} \quad ay$ ossia $bx - ay \quad b\sqrt{b^2 - y^2}$; elevando entrambi i membri al quadrato e riducendo, si ha $y^2 \quad \frac{2abxyb^4 - b^2x^2}{a^2b^2}$ e risolvendo quest'ultima equazione si ha infine $y \quad \frac{abx \pm b^2\sqrt{a^2b^2 - x^2}}{a^2b^2}$. Da ciò si vede che la curva è ancora un ellisse.

Si è visto come si determina la natura della curva quando EBD e EAB sono ad angolo retto diritti. Ma se questi angoli sono di una ampiezza qualunque, purché siano uguali, ecco come bisogna procedere.



Abbassate, come prima, su AC la perpendicolare DC e tracciate DH in modo che formi un angolo DHA uguale all'angolo HAE, cioè ottuso. E continuando a chiamare $EB\ \ a$, $BD\ \ b$; $AH\ \ x$ ponete $HD\ \ y$. Ed essendo i triangoli EAB, BHD simili si avrà $BD\ \ DH\ \ BE\ \ AB$, ossia $b\ \ y\ \ a\ \ AB\ \ \frac{ay}{b}$; sottraete AB da AH e il restante sarà $BH\ \ x - \frac{ay}{b}$. Ora, siccome tutti gli angoli sono noti nel triangolo DHC, il rapporto tra i lati lo è pure. Supponete che HD sta a HC in una ragione nota qualsiasi, per esempio, come b sta a e, ed essendo $DH\ \ y$, si avrà $HC\ \ \frac{ey}{b}$ e $HB \times HC\ \ \frac{exy}{b} - \frac{aey^2}{b^2}$. Poi, per la proposizione 12 del secondo libro degli Elementi[38], il triangolo BHD dà $BD^2\ \ BH^2\ \ DH^2\ \ 2HB \times HC$ ossia

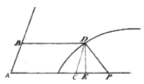
$$b^2\ \ x^2 - \frac{2axy}{b}\ \frac{a^2y^2}{b^2}\ y^2\ \frac{2exy}{b} - \frac{2aey^2}{b^2}$$

e ricavando da questa equazione il valore di x, si ha

$$x\ \ \frac{ay - ey \pm \sqrt{c^2y^2 - b^2y^2\ b^4}}{b}$$

e, siccome $b > e$, $e^2 - b^2$ è una quantità negativa; è quindi evidente chela curva è ancora un ellisse.

Problema. **37** - Tracciate le rette PD e BD la cui ragione è data, nell'angolo noto PAB, con la condizione che BD sia sempre parallelo a AP e che PD termini sempre nel punto P dato di posizione sulla retta AP, si chiede di trovare il luogo del punto D, intersezione delle due rette.



Soluzione. Tracciate CD parallelamente a AB e DE perpendicolarmente a AP; poi ponete $AP\ \ a$, $CP\ \ x$ e $CD\ \ y$; sia inoltre il rapporto tra BD e DF come $\frac{d}{e}$ e avrete $AC\ \ BD\ \ a - x$ e $PD\ \ \frac{ea-ex}{d}$. Sia inoltre, per l'angolo DCE dato, il rapporto tra CD e DE come $\frac{d}{f}$ e ciò darà $CE\ \ \frac{fy}{d}$, da cui $EP\ \ x - \frac{fy}{d}$. E siccome gli angoli in E sono retti $CD^2 - CE^2\ \ DE^2\ \ DP^2 - EP^2$. Mettendo i valori analitici

$$y^2 - \frac{f^2y^2}{d^2}\ \ \frac{e^2a^2 - 2ae^2x\ e^2x^2}{d^2} - x^2\ \frac{2fxy}{d} - \frac{f^2y^2}{d^2}$$

Ed eliminando da entrambi i membri $-\frac{f^2y^2}{d^2}$ e ordinando si ha

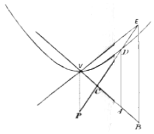
$$y^2\ \ \frac{2fxy}{d}\ \frac{e^2a^2 - 2ae^2x\ e^2x^2 - d^2x^2}{d^2}$$

e risolvendo l'equazione per avere il valore di y, si ha

$$y\ \ \frac{fx \pm \sqrt{e^2a^2 - 2e^2ax\ \left(e^2 - d^2\ f^2\right)x^2}}{d}$$

Siccome nella penultima equazione le incognite x e y non superano il secondo grado, ne segue che il luogo del punto D è una sezione conica e che questa sezione è un'iperbole, o un ellisse o una parabola, secondo che $e^2 - d^2\ f^2$, coefficiente di x^2nell'ultima equazione è più positivo, negativo o nullo.

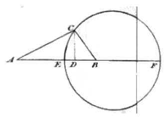
Problema. **38** - Se le due rette VE, VC date per posizione, sono divise in un modo qualunque in C e in E da una retta PE ruotante sul punto P dato di posizione e se la porzione intercettata CE di questa retta è divisa in due parti CD, DE in ragione data, si chiede dci trovare il luogo del punto D.



[38] Prop. 2-12: Nei triangoli ottusangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo ottuso è maggiore dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo ottuso per due volte il rettangolo compreso da uno solo dei lati intorno all'angolo ottuso, quello su cui cade la perpendicolare, e dalla retta staccata all'esterno dalla perpendicolare all'angolo ottuso

Soluzione. Tracciate VP e parallelamente a questa retta tracciate DA e EB che intersecano VC in A e in B. Ponete $VP\ \ a$, $VA\ \ x$ e $AD\ \ y$ e poiché il rapporto tra CD e DE è dato, ne che segue che lo sarà anche il rapporto tra CD e DE, e, di conseguenza, quello tra DA e EB. Sia quindi questo rapporto come $\frac{d}{e}$ e si avrà $EB\ \ \frac{ey}{d}$. Inoltre, siccome l'angolo EVB è dato, lo è anche la ragione tra EB e VB. Sia questa ragione come $\frac{e}{f}$ e si avrà $VB\ \ \frac{fy}{d}$. Infine, poiché i triangoli CEB, CDA, CPV sono simili, si ha questa successione di rapporti uguali, $EB\ \ CB\ \ DA\ \ CA\ \ VP\ \ VC$; e sommando $EB\ VP\ \ CB\ VC\ \ DA\ VP\ \ CA\ VC$, cioè $\frac{ey}{d}\ \ a\ \ \frac{fy}{d}\ \ y\ a\ \ x$; e applicando la proprietà delle proporzioni si avrà $exy\ \ adx\ \ fy^2\ \ fay$. Equazione dove le quantità incognite x e y non superano il secondo grado. Ne segue che la curva VD, sulla quale si trova il punto D, è una sezione conica; ed è un'iperbole, poiché una delle due indefinite, x, è solo di primo grado e nel termine exy si trova moltiplicata per l'altra indefinita y.

Problema. **39** - Se da due punti dati di posizione A e B si tracciano a un terzo punto qualsiasi C due rette AC e BC che stiano tra loro in un rapporto dato qualunque, si chiede di trovare il luogo del punto di incontro C.



Soluzione. Congiungete i punti A e B e sulla retta AB abbassate la perpendicolare CD; ponete $AB\ \ a$, $DC\ \ y$ e $AD\ \ x$ e avrete $AC\ \ \sqrt{x^2\ y^2}$; $BD\ \ a-x$ e $BC\ \ \sqrt{BD^2\ DC^2}\ \ \sqrt{x^2-2ax\ a^2\ y^2}$. Ora, il rapporto dato tra AC e BC supponiamo sia $\frac{d}{e}$; applicando la proporzione e poi il prodotto dei suoi medi per i suoi estremi, avremo

$$e\sqrt{x^2\ y^2}\ \ d\sqrt{x^2-2ax\ a^2\ y^2}$$

e risolvendo si ha

$$y\ \ \sqrt{\frac{d^2a^2-2d^2ax}{c^2-d^2}-x^2}$$

equazione dove si vede che x^2 è negativo e ha come coefficiente l'unità e siccome l'angolo ADC è retto, ne segue che la curva che rappresenta il luogo generato dal punto C è un cerchio; e se si prendono sulla retta AB i punti Ee F, in modo che si abbia la proporzione $d\ \ e\ \ AE\ \ BE\ \ AF\ \ BF$, la retta EF sarà il diametro del cerchio.

È facile vedere per l'inverso di questo teorema, che se si prolunga all'infinito il diametro EF di un cerchio qualsiasi e su questo diametro prolungato si prendono due punti A e B tale che si abbia sempre $AE\ \ AF\ \ BE\ \ BF$ e che da questi due punti si tracciano a uno stesso punto C della circonferenza le rette AC, BC, esse staranno nello stesso rapporto di AE e BE.

Affrontiamo questo stesso problema con i metodi della geometria analitica. Per semplicità consideriamo la retta AB come asse delle ascisse e il punto A come origine del piano cartesiano (d'altra parte anche Newton sceglie come incognite due segmenti che possono benissimo rappresentare delle coordinate di C). Allora, essendo i punti A, B dati di posizione, assegniamo loro le coordinate $A\left(0,0\right)$ e $B\left(a;0\right)$; sappiamo inoltre che AC e BC sono in un rapporto dato; poniamo quindi $\frac{AC}{BC}\ \ h$. Calcoliamo le distanze di C dai punti A e B, dove il punto C avrà coordinate $C\left(x,y\right)$:

$$AC\ \ \sqrt{x^2\ y^2} \qquad BC\ \ \sqrt{\left(a-x\right)^2\ y^2}$$

Dal loro rapporto noto segue

$$\frac{\sqrt{x^2\ y^2}}{\sqrt{\left(a-x\right)^2\ y^2}}\ \ h$$

Quadrando e ordinando si ha

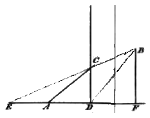
$$x^2\ y^2\ \ h^2a^2-2ah^2x\ h^2x^2\ h^2y^2$$

ossia

$$\left(1-h^2\right)x^2\ \left(1-h^2\right)y^2\ 2ah^2x-h^2a^2\ \ 0$$

L'equazione in due incognite contiene le due incognite con grado due e con i coefficienti della x^2 e della y^2 uguali tra loro. La curva rappresenterà pertanto una circonferenza di centro $\left(-ah^2;0\right)$ (posto quindi sulla retta AB) e di raggio $r\ \ a^2h^2\left(h^2\ 1\right)$. (Il valore del raggio risulta sempre positivo)

Problema. **40** - Se un punto luminoso A invia dei raggi verso una superficie piana rifrangente CD, si chiede di trovare il raggio AC, il cui rifratto CB andrebbe a colpire il punto B.



Soluzione. Dal punto luminoso A tracciare una perpendicolare AD sulla superficie rifrangente: prolungando questa perpendicolare da entrambe le parti, incontrerà in E il raggio rifratto BC e in F la perpendicolare abbassata dal punto B. Tracciate BC e si ponga $AD\ \ a$, $DB\ \ b$, $DC\ \ x$ e $BF\ \ c$; supponete inoltre il rapporto del seno incidente col seno rifratto, cioè del seno dell'angolo CAD col seno dell'angolo CED, come $d\ \ e$; ma EC e AC stanno pure nello stesso rapporto; e inoltre, essendo $AC\ \ \sqrt{a^2\ \ x^2}$, ne risulta che $EC\ \ \frac{d}{e}\sqrt{a^2\ \ x^2}$. Oltre a ciò, $ED\ \ \sqrt{EC^2 - CD^2}\ \ \sqrt{\frac{d^2a^2d^2x^2}{e^2} - x^2}$,e $DF\ \ \sqrt{b^2 - c^2}$; di conseguenza, $EF\ \ \sqrt{b^2 - c^2}\ \ \sqrt{\frac{d^2a^2d^2x^2}{e^2} - x^2}$. Infine per i triangoli simili ECD, EBF, si ha $ED\ \ DC\ \ EF\ \ FB$ e sostituendo al posto di queste quantità i loro valori analitici e facendo il prodotto degli estremi e quello dei medi, si ha,

$$c\sqrt{\frac{d^2a^2\ \ d^2x^2}{e^2} - x^2}\ \ x\sqrt{b^2 - c^2}\ \ x\sqrt{\frac{d^2a^2\ \ d^2x^2}{e^2} - x^2}$$

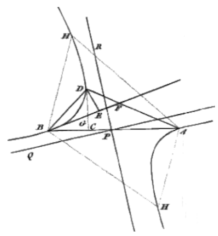
ossia

$$(c - x)\sqrt{\frac{d^2a^2\ \ d^2x^2}{e^2} - x^2}\ \ x\sqrt{b^2 - c^2}$$

e quadrando ogni membro e ordinando

$$\frac{x^4 - 2cx^3\ \ \left(d^2c^2\ \ d^2a^2 - e^2b^2\right)x^2 - 2d^2a^2cx\ \ d^2a^2c^2}{d^2 - c^2}\ \ 0$$

Problema. **41** - Trovare il luogo del vertice D di un triangolo la cui base AB è data e i due angoli DAB, DBA su questa base hanno una differenza data.



Soluzione. Quando l'angolo al vertice è dato, o che è la stessa cosa, quando la somma di due angoli alla base è data, Euclide ha dimostrato (libro III, prop. 29)[39] che l'angolo al vertice sta in una circonferenza di cerchio. Noi chiediamo qui di trovare il luogo del vertice quando la differenza degli angoli alla base è data. Sia l'angolo DBA maggiore dell'angolo DAB e sia l'angolo ABF la loro differenza; la retta BF incontra AD in F. Inoltre, dal punto D siano abbassate su BF e AB le perpendicolari DE e DC; quest'ultima incontrerà BF in un punto G. Pongo $AB\ \ a$, $AC\ \ x$, $CD\ \ y$, così avrò $BC\ \ a - x$. Ora nel triangolo BCG, essendo noti tutti gli angoli, si ha il rapporto dei lati $\frac{BC}{CG}\ \ \frac{d}{a}$ e verrà $CG\ \ \frac{a^2 - ax}{d}$. Da DC o y togliamo CG, il resto sarà $DC - CG\ \ DG\ \ \frac{dy - a^2 ax}{d}$. Inoltre, dai triangoli simili BCG, DGE, si ha $BG\ \ BC\ \ DG\ \ DE$. Nel triangolo BGC si ha, $a\ \ d\ \ GC\ \ BC$. Pertanto $a^2\ \ d^2\ \ BG^2\ \ BC^2$ e ricavando le radici $\sqrt{a^2\ \ d^2}\ \ d\ \ BG\ \ BC\ \ DG\ \ DE$. Pertanto $DE\ \ \frac{d \cdot DG}{\sqrt{a^2 d^2}}$ o, mettendo per DG il suo valore trovato prima, si ha $DE\ \ \frac{dy - a^2 ax}{\sqrt{a^2 d^2}}$. D'altro canto, siccome l'angolo ABF è la differenza degli angoli BAD, ABD e che, di conseguenza, $BAD\ \ FBD$, ne risulta che i triangoli rettangoli DCA, DBE sono simili e i loro lati proporzionali. Pertanto $DA\ \ DC\ \ DB\ \ DE$; ma $DC\ \ y$, $DA\ \ \sqrt{AC^2\ \ DC^2}\ \ \sqrt{x^2\ \ y^2}$, $DB\ \ \sqrt{DC^2\ \ BC^2}\ \ \sqrt{y^2\ \ a^2 - 2ax\ \ x^2}$ e abbiamo trovato prima che $DE\ \ \frac{dy - a^2 ax}{\sqrt{a^2 d^2}}$; così la nostra proporzione diviene

$$\sqrt{x^2\ \ y^2}\ \ y\ \ \sqrt{y^2\ \ a^2 - 2ax\ \ x^2}\ \ \frac{dy - a^2\ \ ax}{\sqrt{a^2\ \ d^2}}$$

e facendo il prodotti degli estremi e quello dei medi e quadrando ogni membro dell'equazione, si avrà

$$a^2y^2 - 2axy^2\ \ x^2y^2\ \ y^4$$
$$\frac{d^2x^2y^2d^2y^4 - 2a^2dx^2y - 2a^2dy^3 2adyx^3 2adxy^3 a^4x^2a^4y^2 - 2a^3x^3 - 2a^3xy^2a^2x^4a^2x^2y^2}{a^2d^2}$$

Moltiplicate ogni membro per $a^2\ \ d^2$,ordinate i prodotti secondo le potenze di x e verrà

$$x^4\ \ \left(\frac{2dy}{a} - 2a\right)x^3\ \ \left(a^2 - 2dy\right)x^2\ \ \left(\frac{2dy^2}{a}\ \ \frac{2d^2y^2}{a}\right)x - d^2y^2 - 2dy^2 - y^4\ \ 0$$

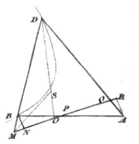
---

[39]Prop.3-29: Nei cerchi uguali rette uguali sottendono gli archi uguali

Questa equazione è divisibile per $x^2 - ax \; dy \; y^2 \;\; 0$ e da per quoziente $x^2 \left(\frac{2dy}{a} - a\right) x - y^2 - dy \;\; 0$. Così abbiamo trovato per la soluzione di questo problema due equazioni: la prima $x^2 - ax \; dy \; y^2 \;\; 0$ ci fa vedere che il luogo del punto D è una circonferenza di un cerchio, quando l'angolo DBF è posto in un altro modo rispetto alla nostra figura. Per esempio, quando l'angolo ABF, invece di essere come nel problema, uguale alla differenza degli angoli alla base, è uguale alla loro somma. È chiaro che in questo caso l'angolo D è dato. La seconda equazione $x^2 \left(\frac{2dy}{a} - a\right) x - y^2 - dy \;\; 0$ appartiene all'iperbole. È l'equazione che si ha nel caso della nostra figura; cioè, nel caso in cui l'angolo FBD è posto come da noi supposto e l'angolo ABF è la differenza degli angoli alla base, il luogo del punto D è un'iperbole. Ed ecco in quale maniera di determinerà questa curva: dividete AB in due parti uguali in P, tracciate PQ in modo che formi un angolo BPQ uguale alla metà dell'angolo ABF; dal punto P tracciate PR perpendicolarmente a PQ e le due rette PQ e PR saranno gli asintoti, e il punto B uno dei punti dell'iperbole. Da ciò si ricava questo teorema:

Se in un'iperbole rettangolare si traccia un diametro qualsiasi AB e dalle estremità di questo diametro si tracciano a due punti qualsiasi D e H della curva, delle rette AD, BD, BH, queste rette formeranno, alle estremità del diametro, angoli DAH, DBH uguali.

Lo stesso in modo più breve



Ho dato, nel problema XXIV, una regola sul modo di scegliere o termini più opportuni per iniziare il calcolo, tutte le volte che vi è ambiguità. Per esempio, nel problema attuale la differenza degli angoli alla base non è una condizione molto distinta. Infatti, l'ho sottratta dal maggiore, ma potevo pure aggiungerla al minore, tracciando dal punto A una retta parallela a BF. Questa differenza si comporta quindi nello stesso modo rispetto ai due angoli. Non la impiegherò, quindi, né per l'addizione né per la sottrazione; ma prendendo la sua metà, l'aggiungerò a uno e la sottrarrò all'altro. Poi, siccome si ha ancora ambiguità prendendo per ascissa sia BC, sia AC, non ne impiegherò nessuna delle due; ma dividendo AB in due parti uguali in P, prenderò per ascissa PC; o piuttosto tracciando MPQ che formerà da una parte e dall'altra gli angoli APQ, BPM uguali ciascuno alla metà della differenza degli angoli alla base, questa retta MPQ formerà inoltre, con le rette DA, DM gli angoli DPQ, DMP uguali. Traccio su MQ le perpendicolari AR, BN, DO. Prendo DO per ordinata e PO per ascissa. Pongo $PO \;\; x$, $DO \;\; y$, $AR \;\; BN \;\; b$ e $PR \;\; PN \;\; c$ ed essendo i triangoli BNM, DOM simili, si avrà $BN \;\; DO \;\; MN \;\; MO$. E sottraendo.

$$DO - BN\left(y-b\right) \;\; DO\left(y\right) \;\; MO - MN \;\; ON\left(c-x\right) \;\; MO \;\; \frac{cy-xy}{y-b}$$

Analogamente, essendo i triangoli ARQ, DOQ simili, si ha, $AR \;\; DO \;\; RQ \;\; RO$ e sommando

$$DO \;\; AR\left(y \;\; b\right) \;\; DO\left(y\right) \;\; QO \;\; QR\left(OR \;\; x \;\; c\right) \;\; QO \;\; \frac{cy \;\; xy}{y \;\; b}$$

Infine, essendo gli angoli DMQ, DQM uguali si ha $MO \;\; QO$ e, di conseguenza,

$$\frac{cy-xy}{y-b} \;\; \frac{cy \;\; xy}{y \;\; b}$$

dividendo tutto per y e moltiplicando per i denominatori, si avrà

$$cy \;\; cb - xy - bx \;\; cy - cb \;\; xy - bx$$

ossia $cb \;\; xy$, equazione molto nota dell'iperbole riferita ai propri asintoti. Sarebbe stata altrettanto facile determinare il luogo di D senza alcun calcolo algebrico. Infatti abbiamo trovato prima

$$DO - BN \;\; ON \;\; DO \;\; MO\left(OQ\right) \;\; DO \;\; AR \;\; OR$$

Cioè

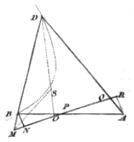
$$DO - BN \;\; DO \;\; BN \;\; ON \;\; OR$$

E sommando e sottraendo i termini di ogni rapporto

$$DO \;\; BN \;\; \frac{ON \;\; OR}{2}\left(NP\right) \;\; \frac{OR - ON}{2}\left(OP\right)$$

da cui si ricava $DO \times OP \;\; BN \times NP$.

Problema. **42 -** Trovare il luogo del vertice di un triangolo la cui base è data e i cui due angoli alla base sono tali che uno è più grande del doppio dell'altro di un angolo dato.



Soluzione. Siano ABD questo triangolo, AB la sua base divisa in due parti uguali nel punto P, APQ o BPM il terzo dell'angolo dato, cioè il terzo dell'angolo che è uguale all'eccesso di DBA sul doppio di DBA; e l'angolo DMQ sarà doppio dell'angolo DQM. Tracciate a MQ le perpendicolari AR, BN, DO; dividete in due parti uguali l'angoli DMQ, con la retta MS che incontrerà DO in S e i triangoli rettangoli DOQ, SOM saranno simili; così avrete, $OQ \;\; OM \;\; DO \;\; OS$. E sottraendo,

$$OQ - OM \;\; OM \;\; DO - OS \;\; OS \;\; DS \;\; OS \;\; DM \;\; OM$$

Pertanto $OQ - OM \;\; OM \;\; DM \;\; OM$, quindi $OQ - OM \;\; DM$. Ponete $PO \;\; x$, $OD \;\; y$, $AR \;\; BN \;\; b$ e $PR \;\; PN \;\; c$ e avrete, come nel problema precedente, $OM \;\; \frac{cy-xy}{y-b}$ e $OQ \;\; \frac{cyxy}{yb}$. di conseguenza, $OQ - OM \;\; \frac{-2bcy2xy^2}{y^2-b^2}$. D'altra parte, $DO^2 \;\; OM^2 \;\; DM^2$, ossia, [40]

$$y^2 \;\; \frac{c^2y^2 - 2cxy^2 \;\; x^2y^2}{y^2 - 2by \;\; b^2} \;\; \frac{4b^2c^2y^2 - 8bcxy^3 \;\; 4x^2y^4}{y^4 - 2b^2y^2 \;\; b^4}$$

Riducendo e ordinando rispetto a y si avrà

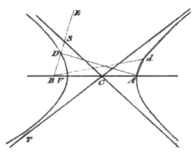
$$y^4 \;\; \left(c^2 - 2b^2 - 2cx - 3x^2\right) y^2 \;\; \left(2bx^2 \;\; 4bcx \;\; 2bc^2\right) y \;\; b^4 - 3b^2c^2 - 2b^2cx \;\; b^2x^2 \;\; 0$$

Dividendo tutta l'equazione per $y - b$ diverrà

$$y^3 \;\; by^2 \;\; \left(c^2 - b^2 - 2cx - 3x^2\right) y \;\; 3bc^2 - b^2 \;\; 2bcx - bx^2 \;\; 0$$

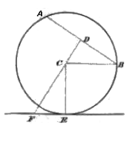
Così il punto D è una curva tridimensionale, che diviene tuttavia un'iperbole quando l'angolo BPM è nullo, cioè quando uno dei due angoli alla base DBA, per esempio, è semplicemente doppio dell'altro DAB. In questo caso BN o b svanisce e l'equazione si riduce a $y^2 \;\; 3x^2 \;\; 2cx - c^2$.

Dalla costruzione di questa equazione si deduce il teorema seguente.



Se si prende C per centro e per asintoti le rette CS, CT, che formano un angolo SCT di 120° e si descrive una iperbole DV i cui semiassi siano CV, CA, si prolunghi CV fino a B in modo che $VB \;\; VC$ e dai punti A, B si traccino le rette BD, AD che si intersecano in un punto D qualsiasi dell'iperbole, si avrà l'angolo $BAD \;\; \frac{1}{2}ABD$ e $BAD \;\; \frac{1}{3}ADE$. Cioè BAD uguale al terzo dell'angolo formato da AD e dal prolungamento di BD. Questo risultato si ha solo per i punti D dell'iperbole che passa per il punto V; poiché se dai punti A, B si traccia l'iperbole coniugata che passa per A, le rette Bd, Ad, allora dei due angoli esterni al triangolo alla base, quello che è in B è doppio di quello che è in A.

Problema. **43 -** Descrivere un cerchio che passa per due punti dati ed è tangente ad una retta data di posizione.



Soluzione. Siano A, B i punti dati e EF la retta data di posizione. Si chiede di far passare un cerchio ABE per questi punti e che sia contemporaneamente tangente alla retta EF. congiungete A e B con una retta AB che dividerete in due parti uguali nel punto D; da questo punto innalzate su AB la perpendicolare DF che incontrerà la retta EF in un punto F e il centro del cerchio si troverà si qualche punto di DF, supponiamo che sia in C. Congiungete C e B con una retta; dal punto C abbassate su FE la perpendicolare CE ed E sarà il punto di tangenza della retta EF e del cerchio e le rette CB, CE saranno uguali tra loro, essendo ognuna un raggio del cerchio cercato. Ora i punti A, B, D, F essendo dati, ponete $DB \;\; a$, $DF \;\; b$ e per determinare il

[40] Nota: Il primo membro di questa equazione proviene dalla sostituzione dei valori nella equazione $DO^2 \;\; OM^2 \;\; DM^2$. Quanto al secondo membro, abbiamo visto in precedenza che $OQ - OM \;\; DM$, pertanto $\left(OQ - OM\right)^2 \;\; \left(\frac{-2bcy2xy^2}{y^2-b^2}\right)^2 \;\; DM^2$. [N.d.T.]

centro del cerchio, cercate DC che indicherete con x. Nel triangolo CDB, a causa dell'angolo retto in D, avrete, $\sqrt{DB^2\ CD^2}$ o $\sqrt{a^2\ x^2}\ \ CB$. Inoltre, $DF - DC$, o $b - x\ \ CF$. E nel triangolo rettangolo CFE, tutti gli angoli sono dati e il rapporto dei lati CF e CE è pure noto. Sia questo rapporto come $\frac{d}{e}$, si avrà, $CE\ \ \frac{e}{d} \times CF$, o $CE\ \ \frac{be-ex}{d}$. Uguagliando tra loro le rette CB e CE, essendo ognuna il raggio del cerchio cercato, verrà l'equazione $\sqrt{x^2\ a^2}\ \ \frac{be-ex}{d}$. Quadrando ogni membro e moltiplicando per d^2, si avrà,

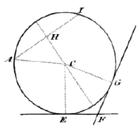
$$a^2d^2\ d^2x^2\ \ b^2e^2 - 2be^2x\ e^2x^2$$

o risolvendo questa equazione

$$x\ \ \frac{-be^2\ d\sqrt{b^2e^2\ a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$$

Si conosce quindi la lunghezza di DC e, di conseguenza, il centro C; così che dal punto C e con una apertura di compasso uguale a CB, si descrive un cerchio che passerà per i punti A, B e sarà tangente alla retta FE.

Problema. **44 -** Descrivere un cerchio che passa per un punto dato ed è tangente a due rette date di posizione.



Soluzione. Siano A il punto dato, EF, FG le due rette date di posizione e AEG il cerchio cercato che è tangente alle due rette e passa per il punto A dato. Dividete a metà l'angolo EFG con la retta FC; il centro del cerchio si troverà su questa retta[41]. Sia C questo centro dal quale abbasserete su EF, FG le perpendicolari CE, CG e i punti E, G saranno i punti di tangenza. Siccome i triangoli CEF, CGF hanno i loro angoli in E e in G retti e i loro angoli in F sono ciascuno la metà dell'angolo totale EFG, ne segue che tutti gli angoli di questi due triangoli sono noti e, di conseguenza, anche il rapporto dei lati CF, CE o CG. Sia questo rapporto $\frac{d}{e}$. Allora, se per determinare il centro del cerchio si pone $CF\ \ x$ si avrà $CE\ \ CG\ \ \frac{ex}{d}$. Inoltre, dal punto A tracciate sulla retta FC la perpendicolare AH e poiché il punto A è dato, le rette AH, FH saranno pure date. Chiamate rispettivamente queste due rette a e b e da FH, o b, se voi sottraete FC, o x, resterà $CH\ \ b - x$; e se al quadrato di questo resto $b^2 - 2bx\ x^2$ aggiungete il quadrato di AH, o a^2,avrete, per la quarantasettesima proposizione del primo libro di Euclide[42], $AH^2\ CH^2$,o $a^2\ b^2 - 2bx\ x^2\ \ AC^2$, poiché per ipotesi l'angolo AHC è retto. Eguagliate ora tra loro i valori dei due raggi AC e CG, o i quadrati di questi due stessi valori e avrete l'equazione

$$a^2\ b^2 - 2bx\ x^2\ \ \frac{e^2x^2}{d^2}$$

Sottraete da entrambe le parti x^2 e cambiate tutti i segni, verrà

$$-a^2 - b^2\ 2bx\ \ x^2 - \frac{e^2x^2}{d^2}$$

Moltiplicate tutto per d^2, poi dividete tutto per $d^2 - e^2$ e otterrete

$$x^2 - \frac{2bd^2x}{d^2 - e^2}\ \ -\frac{d^2\left(a^2\ b^2\right)}{d^2 - e^2}$$

e risolvendo

$$x\ \ \frac{bd^2 - d\sqrt{b^2e^2\ a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - c^2}$$

Si conosce quindi ora la lunghezza di FC e, di conseguenza, la posizione del punto C che il centro del cerchio cercato. Se si sottrae il valore da x, o FC da b, o HF, resterà

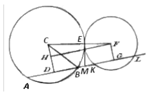
$$HC\ \ \frac{-e^2b\ d\sqrt{b^2e^2\ a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$$

Equazione assolutamente uguale a quella che abbiamo trovato nel problema precedente per determinare la lunghezza di DC.

Problema. **45 -** Descrivere un cerchio che passa per due punti dati ed è tangente ad un altro cerchio dato di posizione.

[41]Nota: Per il teorema delle due rette tangenti ad una circonferenza passanti per un punto comune esterno.

[42]Nota: Il teorema di Pitagora.



SOLUZIONE. Siano A, B i due punti dati; EK il cerchio dato di grandezza e di posizione; F il suo centro; AEB il cerchio cercato, passante per i punti A, B e tangente all'altro cerchio; e infine C il centro del cerchio cercato. Avendo tracciato dai punti A, B un retta indefinita, dai centri C, F abbassate su questa retta le perpendicolari CD, FG; poi unite i centri con una retta CF che passerà per il punto di tangenza E dei due cerchi. Tracciate ancora FH parallelamente a DG che incontrerà CD in H. Eseguite tutte queste costruzioni, indicate $AD\ \ DB\ \ a$; $DG\ \ HF\ \ b$; $FG\ \ c$ e $EF\ \ d$ (raggio del cerchio dato); ponete pure $DC\ \ x$ e avrete $CH\ \ CD - FG\ \ x - c$ e $CF^2\ \ CH^2\ FH^2\ \ x^2 - 2cx\ c^2\ b^2$ e $CB^2\ \ CD^2\ DB^2\ \ x^2\ a^2$. Così $CD\ \ CE\ \ \sqrt{x^2\ a^2}$. A CE aggiungete EF e avrete $CF\ \ d\ \sqrt{x^2\ a^2}$ il cui quadrato è

$$d^2\ 2d\sqrt{x^2\ a^2}a^2\ x^2$$

Eguagliate questo valore di CF^2a quello già trovato, cioè a $x^2 - 2cx\ c^2\ b^2$ e eliminando x^2che si trova in entrambi i membri, il resto sarà

$$d^2\ a^2\ 2d\sqrt{x^2\ a^2}\ \ c^2\ b^2 - 2cx$$

Trasportate nel secondo membri, con un segno contrario, $a^2\ d^2$ e l'equazione diverrà

$$2d\sqrt{x^2\ a^2}\ \ c^2\ b^2 - a^2 - d^2 - 2cx$$

. Ponete $c^2\ b^2 - d^2 - a^2\ \ 2g^2$ e l'equazione sarà ridotta a

$$2d\sqrt{x^2\ a^2}\ \ 2g^2 - 2cx$$

o, dividendo tutto per 2, a

$$d\sqrt{x^2\ a^2}\ \ g^2 - cx$$

e quadrando ogni membro

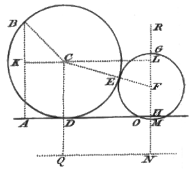
$$d^2a^2\ d^2x^2\ \ g^4 - 2g^2cx\ c^2x^2$$

Questa equazione, una volta risolta, dà

$$x\ \ \frac{-g^2c\ \sqrt{g^4d^2 - d^4a^2\ d^2a^2c^2}}{d^2 - c^2}$$

Conoscendo x, o DC in questo modo, dividete la retta AB in due parti uguali nel punto D e da questo punto innalzate su AB una perpendicolare $DC\ \ \frac{-g^2c\sqrt{g^4d^2-d^4a^2d^2a^2c^2}}{d^2-c^2}$; poi dal centro C, con la distanza CA o CB, descrivete il cerchio ABE che sarà tangente al cerchio EK e passerà per i punti A, B.

PROBLEMA. **46** - Descrivere un cerchio che passa per un punto dato, tangente a un cerchio dato e a una retta data di posizione.



SOLUZIONE. Sia BD il cerchio cercato, C il suo centro, B il punto per il quale deve passare, AD la retta tangente e D il punto di tangenza, GEM il cerchio a cui deve essere tangente, F il centro di quest'ultimo, E il punto di tangenza tra i due cerchi. Congiungete con rette i punti C, B; C, D; C, F; la retta CD sarà perpendicolare ad AD e CF taglierà i due cerchi nel punto di contatto E. Prolungate CD fino a Q in modo da avere $DQ\ \ EF$; per il punto Q tracciate la parallela QN ad AD. Infine, dai punti B, F abbassate su AD e QN le perpendicolari BA, FN e dal punto C abbassate su AB e FN le perpendicolari CK, CL. Essendo I segmenti BC, CD, AK uguali, si ha pure $BK\ \ BA - AK\ \ BA - BC$. Così $BK^2\ \ BA^2 - 2BA \times BC\ BC^2$. Se si sottrae BK^2, o il suo valore di BC^2, p chiaro che il resto sarà il valore di CK^2, di conseguenza, $BC^2 - BK^2$, o $BC^2 - BA^2\ 2BA \times BC - BC^2\ \ CK^2$, ossia $2BA \times BC - BA^2\ \ CK^2$. Si troverà allo stesso modo che $FN \times \big(2FC - FN\big)\ \ CL^2$. Dalla prima di queste due equazioni si ricava, $2BC\ \ \frac{CK^2}{AB}\ AB$ e dalla seconda $2FC\ \ \frac{CL^2}{FN}\ FN$. Così, ponendo $AB\ \ a$, $CK\ \ y$, $FN\ \ b$, $KL\ \ c$ e $CL\ \ c - y$, le nostre due equazioni diverranno rispettivamente, $2BC\ \ \frac{y^2}{a}\ a$, o $BC\ \ \frac{y^2}{2a}\ \frac{1}{2}a$ e $FC\ \ \frac{c^2-2cyy^2}{2b}\ \frac{1}{2}b$. Da FC si toglie BC, il resto sarà $FE\ \ \frac{c^2-2cyy^2}{2b}\ \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{2}a$. Ora detti G, H, M i punti dove FN interseca la retta AD prolungata e il cerchio GEM; si prolunghi HG in modo che $HR\ \ AB$, allora (poiché $HN\ \ DQ\ \ EF\ \ GF$) si ha, $HN\ \ GH$. Così $AB. - FN\ \ HR - GR$ e $AB - FN\ 2EF\ \ a - b\ 2EF\ \ RM$ e $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\ EF\ \ \frac{1}{2}RM$. Abbiamo ora trovato prima, $EF\ \ \frac{c^2-2cyy^2}{2b}\ \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{2}a$; sostituiamo per EF il suo valore nell'equazione precedente, essa diverrà $\frac{1}{2}RM \quad \frac{c^2-2cyy^2}{2b} - \frac{y^2}{2a}$. Detto $RM \quad d$ avrete $d \quad \frac{c^2-2cyy^2}{b} - \frac{y^2}{a}$. Moltiplicate tutto per ab e verrà

$$abd \quad ac^2 - 2acy \;\; ay^2 - by^2$$

che si può scrivere così

$$\left(a-b\right) y^2 - 2acy \quad abd - ac^2$$

che diviene, dividendo tutto per $a-b$, $y^2 - \frac{2acy}{a-b} \quad \frac{abd-ac^2}{a-b}$. Questa equazione, una volta risolta, da

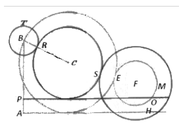
$$y \quad \frac{ac}{a-b} \pm \frac{\sqrt{a^2bd - ab^2d \;\; abc^2}}{a-b}$$

Se si pone $c \;\; b \;\; d \;\; e$ e $a-b \;\; a \;\; c \;\; f$, si avrà, $y^2 \;\; fe - fc \; 2fy$ o

$$y \;\; f \pm \sqrt{f^2 \;\; fe - fc}$$

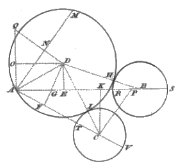
o KC, o essendo noto AD, portate da A verso D una quantità $AD \;\; f \pm \sqrt{f^2 \;\; fe - fc}$; dal punto D innalzate la perpendicolare $DC \;\; BC \;\; \frac{CK^2}{2AB} \;\; \frac{1}{2}AB$ e dal punto C, come centro, con CB o CD, come raggio descrivete il cerchio BDE,passerà per il punto dato B, sarà tangente alla retta AD in D e con il cerchio GEM in E.

Con l'aiuto di questo problema sarà facile risolverne un altro dove si tratterà di descrivere un cerchio tangente a due altri cerchi dati e a una retta data di posizione.



Infatti, siano i due cerchi dati RT, SV; i loro centri B, F; e la retta data di posizione PQ. Dal centro F e da un raggio uguale a $FS - BR$, descrivete il cerchio EM. Dal punto B tracciate alla retta PQ la perpendicolare PB che prolungherete verso A in modo da avere $PA \;\; BR$. Dal punto A tracciate AH parallelamente a PQ. Descrivete ora, dal problema precedente, un cerchio che, passante per B è tangente alla retta AH e il cerchio EM. Sia C il centro del cerchio descritto; tracciate la retta BC che incontrerà TR in R e dallo stesso centro C con un raggio uguale a CR, descrivete il cerchio RS, esso sarà tangente ai cerchi RT, SV e alla retta PQ, come è evidente dalla costruzione.

Problema. **47 -** Descrivere un cerchio che passa per un punto dato ed è tangente ad altri due cerchi dati di grandezza e posizione.



Soluzione. Siano A il punto dato; TIV, RHS i due cerchi dati di grandezza e posizione; C, B i loro centri; AIH il cerchio cercato, D il suo centro e infine $I.H$ i punti di contatto dei tre cerchi. Unite con delle rette i punti A, B; A, C; A, D; e D, B. Il prolungamento della retta AB intersecherà il cerchio RHS in R e S e il prolungamento della retta Ac intersecherà il cerchio TIV in T e V. Dal punto D abbassate su AB la perpendicolare DE e dallo stesso punto su AC la perpendicolare DF che incontrerà in G la retta AB. Tracciate anche dal punto C su AB la perpendicolare CK. Il triangolo ADB dà $AD^2 - DB^2 \;\; AB^2 \;\; 2AE \times AB$ (Prop. 13 del secondo libro degli Elementi)[43]. Ma $DB \;\; AD \;\; BR$, di conseguenza, $DB^2 \;\; AD^2 \;\; 2AD \times BR \;\; BR^2$. Sostituite questo valore di DB^2nell'equazione precedente e avrete

$$AB^2 - 2AD \times BR - BR^2 \;\; 2AE \times AB$$

Ma $AB^2 - BR^2 \;\; \left(AB \;\; BR\right) \times \left(AB - BR\right) \;\; AR \times AS$. Pertanto

$$AR \times AS - 2AD \times BR \;\; 2AE \times AB$$

E

$$\frac{AR \times AS - 2AE \times AB}{BR} \;\; 2AD$$

[43]Prop.2-13: Nei triangoli acutangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo acuto è minore dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo acuto per due volte il rettangolo compreso da uno solo dei lati intorno all'angolo acuto, quello su cui cade la perpendicolare, e dalla retta staccata all'interno dalla perpendicolare all'angolo acuto.

Con un ragionamento simile si ricaverà dal triangolo ADC un secondo valore di $2AD$ e si avrà

$$2AD \quad \frac{AT \times AV - 2AC \times AF}{TC}$$

Di conseguenza,

$$\frac{AR \times AS - 2AE \times AB}{BR} \quad \frac{AT \times AV - 2AC \times AF}{TC}$$

e ancora

$$\frac{2AC \times AF}{TC} \quad \frac{AT \times AV}{TC} - \frac{AR \times AS}{BR} \quad \frac{2AB \times AE}{BR}$$

e infine

$$AF \quad \frac{CT}{2AC}\left(\frac{AT \times AV}{TC} - \frac{AR \times AS}{BR} \quad \frac{2AB \times AE}{BR}\right)$$

Siccome si ha la proporzione $AK \quad AC \quad AF \quad AG$ si avrà pure

$$AG \quad \frac{CT}{2AC}\left(\frac{AT \times AV}{TC} - \frac{AR \times AS}{BR} \quad \frac{2AB \times AE}{BR}\right)$$

Se si sottrae ora AG, o il suo valore di AE, o analogamente di $\frac{AE \times 2AK}{CT} \times \frac{CT}{2Ak}$, il resto sarà

$$GE \quad \frac{CT}{2AC}\left(\frac{AE \times 2AK}{CT} \quad \frac{AR \times AS}{BR} - \frac{AT \times AV}{TC} \quad \frac{2AB \times AE}{BR}\right)$$

Sulla retta AB prendete una parte AP che determinerete con questa proporzione $BR \quad CT \quad AB \quad AP$ da cui ricaverete

$$\frac{2AP \times 2AE}{CT} \quad \frac{2AB \times AE}{BR}$$

Ora

$$\frac{2AP \times 2AE}{CT} \quad \frac{(2AK \times KP) \times AE}{CT}$$

pertanto

$$\frac{2PK \times AE}{CT} \quad \frac{2AB \times AE}{BR} - \frac{2AK \times AE}{CT}$$

oppure

$$-\frac{2PK \times AE}{CT} \quad \frac{2AK \times AE}{CT} - \frac{2AB \times AE}{BR}$$

Il primo membri di questa equazione sostituito al posto del secondo nell'espressione del valore di DE dà

$$DE \quad \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR \times AS}{BR} - \frac{AT \times AV}{TC} \quad \frac{2PK \times AE}{CT}\right)$$

Su AB e dal punto A, innalzate una perpendicolare, il cui valore sia

$$AQ \quad \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR \times AS}{BR} - \frac{AT \times AV}{TC}\right)$$

Su questa perpendicolare prendete $QO \quad \frac{PK \times AE}{CK}$ e avrete $AO \quad DE$. Unite con rette, i punti O, D; D, Q; e C, P e i triangoli DOQ, CKP saranno simili, avendo ciascuno un angolo retto e i lati attorno a quest'angolo proporzionali perché si fa $QO \quad \frac{PK \times AE}{CK}$ ciò che dà la proporzione $CK \quad PK \quad AE\,(DO) \quad QO$. Pertanto, gli angoli OQD, KPC sono uguali, di conseguenza, QD ha una direzione perpendicolare a PC. Se si traccia quindi a CP la parallela AN, l'intersezione di questa retta con QD nel punto N, formerà un angolo retto ANQ e i triangoli AQN, PCK saranno simili. Si avrà quindi $PC \quad CK \quad AQ \quad AN$. E poiché

$$AQ \quad \frac{CT}{2PC}\left(\frac{AR \times AS}{BR} - \frac{AT \times AV}{TC}\right)$$

si avrà

$$AN \quad \frac{CT}{2PC}\left(\frac{AR \times AS}{BR} - \frac{AT \times AV}{CT}\right)$$

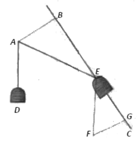
Prolungate AN fino a M, di modo che $AD \quad DM$, allora il cerchio cercato passerà per il punto M. Trovato un punto M del cerchio ecco come si perverrà, senza alcuna analisi ulteriore, alla risoluzione del problema. Prendete su AB un segmento AP di cui determinerete la lunghezza con questa proporzione, $BR \quad CT \quad AB \quad AP$, tracciate la retta CP, la parallela AM a CP e fate

$$AM \quad \frac{AR \times AS}{BR} - \frac{AT \times AV}{TC} \quad CT \quad PC$$

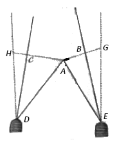
e per mezzo del problema 45, fate passare per i punti A, M il cerchio $AIHM$, di modo che sia tangente a uno dei cerchi RS, TIV e sarà tangente ad entrambi.

Con questo problema si potrebbe descrivere un cerchio che sia tangente ad altri tre dati di grandezza e posizione. Siano A, B, C i raggi dei tre cerchi dati, D, E, F i loro centri; dai centri E, F, con raggi rispettivamente uguali a $B \pm A, C \pm A$ descrivete due cerchi e un terzo che passa per il punto D. Sia G il raggio di questo terzo cerchio e H il suo centro. Dal punto H con un raggio uguale a $G \pm A$, descrivete un quarto cerchio e sarà tangente agli altri tre, come richiesto.

Problema. **48** - Se alle due estremità di un filo DAE, che può scorrere attorno a un punto fisso A, si attaccano due pesi D, E e uno dei due, per esempio E, può scorrere solo lungo la linea obliqua BG, si chiede la posizione del peso E, quando questi due pesi sono in equilibrio.



Supponiamo che l'equilibrio sia stabilito. Dal punto E, tracciate a AD la parallela EF e fate in modo che EF stia a AE come il peso E data al peso D e dai punti A, F tracciate alla retta BG le perpendicolari AB, FG; e siccome avete per ipotesi $D \;\; E \;\; AE \;\; AF$, potrete prendere al posto dei pesi le linee che esprimono il loro rapporto, cioè AEal posto del peso D e EF al posto del peso E. È evidente che se il corpo E fosse libero, il suo peso lo farebbe cadere verso F, ma essendo vincolato da un ostacolo qualsiasi a scorrere lungo l'obliqua EG, avanzerà vero il punto G. Si vede ancora che lo stesso corpo, per l'azione diretta dell'altro corpo D esercita su di esso lungo AE, dovrebbe avanzare verso il punto A; ma abbiamo detto che i corpo E non poteva seguire altro percorso che la retta GEB, pertanto sarà trascinato da una forza obliqua verso il punto B. Ora, siccome abbiamo supposto che i due peso si fanno equilibrio, la forza che tira il peso E verso B deve essere uguale e direttamente opposta a quella che lo porta verso G. Così BE deve essere uguale a EG. In realtà abbiamo per ipotesi il rapporto di AE con EF e, a causa dell'angolo noto FEG, abbiamo anche il rapporto di FE a EG o a BE (poiché $BE \;\; FG$). Si ha quindi il rapporto di AE a BE e la lunghezza di AB e pure data; così nel triangolo rettangolo ABE tutto è noto e, di conseguenza, il punto E sarà facilmente determinato. Infatti, sia $AB \;\; a$, $BE \;\; x$, avrete $AE \;\; \sqrt{a^2 \;\; x^2}$. Supponete inoltre che $AE \;\; BE \;\; d \;\; e$, otterrete, $e\sqrt{a^2 \;\; x^2} \;\; dx$ e, quadrando ogni membro e trasportando da uno stesso lato tutte le quantità con x, verrà, $a^2e^2 \;\; d^2x^2 - e^2x^2$, da cui si ricava facilmente $x \;\; \frac{ae}{\sqrt{d^2-e^2}}$. Si conosce quindi ora la lunghezza di BE che determina la posizione del peso E.



Se ogni peso è obbligato a discendere lungo una linea obliqua, ecco in quale maniera si potrà fare il calcolo. Siano CD e BE le oblique sulle quali i due corpi sono obbligati a discendere. Dal punto fisso A, tracciate a queste oblique le perpendicolari AC, AB, che prolungherete fino ad incontrare in G e in H le rette Eg, DH, innalzate da ciascuno dei due corpi D, E perpendicolarmente all'orizzonte. Ora la forza che tende a far discendere il corpo E lungo la verticale GE o, che è la stessa cosa, la gravità del corpo E sta alla forza che fa discendere lungo la linea obliqua BE, sta alla forza con la quale essa tende il filo AE come BE ad AE. Così la gravità del corpo E sta alla tensione del filo AE come GE sta ad AE. Per la stessa ragione la gravità del corpo D sta alla tensione del filo DA come HD sta ad AD. Sia quindi la lunghezza totale del filo $DA \;\; AE \;\; c$, sia la parte $AE \;\; x$, l'altra parte sarà $c - x$ e si avrà, $AE^2 - AB^2 \;\; BE^2$, e $AD^2 - AC^2 \;\; DC^2$. Sia inoltre $AB \;\; a$ e $AC \;\; b$, da cui $BE \;\; \sqrt{x^2 - a^2}$ e $CD \;\; \sqrt{x^2 - 2cx \;\; c^2 - b^2}$. Inoltre, siccome i triangoli BEG, CDH sono dati di specie, supponiamo che $BE \;\; EG \;\; f \;\; E$, e che $CD.DH \;\; f \;\; g$, si avrà, $EG \;\; \frac{E}{f}\sqrt{x^2 - a^2}$ e $DH \;\; \frac{g}{f}\sqrt{x^2 - 2cx \;\; c^2 - b^2}$. Di conseguenza, siccome si ha, $GE \;\; AE \;\; il\,peso\,E \;\; la\,tensione\,AE$ e $HD \;\; AD \;\; il\,peso\,D \;\; la\,tensione\,AD$ e che queste tensioni sono uguali, poiché vi è equilibrio, se ne concluderà che

$$\frac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{x^2 - a^2}} \;\; tensione\,AE \;\; tensione\,AD \;\; \frac{Dc - Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{x^2 - 2cx \;\; c^2 - b^2}}$$

Riducendo questa equazione, diviene

$$gx\sqrt{x^2 - 2cx \;\; c^2 - b^2} \;\; (Dc - Dx)\sqrt{x^2 - a^2}$$

ossia

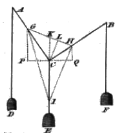
$$\left(g^2 - D^2\right)x^4 \;\; \left(2D^2c - 2g^2c\right)x^3 \;\; \left(g^2c^2 - g^2b^2 - D^2c^2 \;\; D^2a^2\right)x^2 - 2D^2ca^2x \;\; D^2c^2a^2 \;\; 0$$

Se si desidera sapere in quale caso il problema potrebbe essere costruito con il solo aiuto del righello e del compasso, basta solo supporre che il peso D al peso E $\frac{BE}{EG}$ $\frac{CD}{DH}$, allora si avrà, g D. Così l'equazione precedente si ridurrà a questa

$$\left(a^2-b^2\right)x^2-2a^2cx\ \ a^2c^2\ \ 0$$

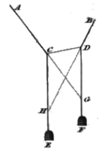
ossia x $\frac{ac}{ab}$.

Problema. **49 -** Se al filo $DACBF$, che può scorrere su due punti fissi A,B, si sospendono tre pesi D,E,F, D,E alle estremità del filo ed E nel suo punto di mezzo, che è in C tra i due punti fissi; si tratta, conoscendo i pesi e la posizione dei due punti fissi, di determinare la posizione del punto C, a metà del filo, quando tutto il sistema è in equilibrio.



Soluzione. Si vede subito che la tensione del filo AC è uguale alla tensione del filo AD e che la tensione del filo BC è uguale alla tensione del filo BF; di conseguenza, le tensioni dei fili AC,CB,CE sono proporzionali ai pesi D,E,F. Prendete nel rapporto degli stessi pesi le parti dei fili CG,CH,CI e unendo con rette i tre punti G,H,I, avrete il triangolo GHI. Prolungate IC fino ad incontrare GH in K, e avrete GK KH e CK $\frac{1}{2}CI$. di conseguenza, C sarà il centro di gravità del triangolo GHI. Dal punto C tracciate la perpendicolare PQ a CE e dai punti G,H abbassate su PQ le perpendicolari GP,HQ; allora se la forza con la quale il filo AC, in virtù del peso D, tira il punto C verso A, è espressa da GC, la forza con la quale lo stesso filo tirerà lo stesso punto C verso P sarà espressa da PC; e la forza con la quale tira verso K sarà espressa da GP. Allo stesso modo, le forze con le quali il filo BC, in virtù del peso F, tira il punto C verso i punti B,Q,K, saranno rispettivamente rappresentate dalle linee CH,CQ,QH; e la forza con la quale il filo CE, in virtù del peso E, tira il punto C verso E sarà espressa dalla linea CI. Ora, siccome il punto C è sollecitato contemporaneamente da più forze che si fanno equilibrio, serve che la somma di quelle con le quali i fili AC,BC tendono a portare il punto C verso K, sia uguale e direttamente opposta alla forza con la quale il filo CE lo tira verso E, cioè bisogna che GP HQ CI e che la forza con la quale il filo AC tira il punto C verso P, sia uguale e direttamente opposta a quella con la quale BC lo tira verso Q e, di conseguenza, PC CQ. Così le rette GP,HQ,CK, essendo parallele, daranno KG KH e CK $\frac{GPHQ}{2}$ $\frac{1}{2}CI$, quanto bastava inizialmente dimostrare. Ci resta solo da determinare il triangolo GCH, i cui lati GC,CH sono dati, così che la retta CK che è tracciata dal vertice C verso la metà della base. Per questo, dal punto C abbasso sulla base GH la perpendicolare CL e ciò dà $\frac{CG^2-CH^2}{2GH}$ KL $\frac{GC^2-CK^2-GK^2}{2GK}$. Invece di $2GK$, scrivete GH ed eliminate il divisore comune CH e, ordinando, avrete $2GK^2$ GC^2-2CK^2 CH^2, ossia GK $\sqrt{\frac{1}{2}GC^2-CK^2\ \frac{1}{2}CH^2}$. Essendo GK e KH noti, lo saranno anche gli angoli GCK,KCH o i loro alterni DAC,FBC. Pertanto, dai punti A,B se si tracciano le rette AC,BC in modo che AC forma con AD un angolo uguale a GCK e che BC formi con BF un angolo uguale a KCH, queste due rette AC,BC si incontreranno in un punto C e questo punto sarà quello cercato.

Del resto, nei problemi di questo tipo, non si ha sempre bisogno di una operazione algebrica particolare per arrivare alla soluzione; più spesso anche la risoluzione di un problema basta a far trovare quella di un altro, come si vedrà nell'esempio seguente.



Dato un filo $ACDB$ diviso in parti date AC,CD,DB; essendo sulle due estremità attaccati a due punti fissi A,B dati di posizione ed essendo sospesi due pesi E,F nei punti di divisione C,D, si domanda, dato il peso F, così come la posizione dei punti C,D, di determinare la grandezza del peso E.

Dalla soluzione del problema precedente, si può facilmente dedurre questo. Prolungate AC,BD fino ad incontrare in G e in H le linee DF,CE e il peso E starà al peso F come DG sta a CH.

Si vede pertanto che è facile comporre con soltanto dei fili, una bilancia tale che per mezzo di un peso dato F, si determinerà il peso di un altro corpi qualsiasi E.

Problema. **50 -** Determinare la profondità di un pozzo dal suono di una pietra che urta il fondo.

Soluzione. Indichiamo con x la profondità del pozzo. Se la pietra, per il suo moto accelerato, percorre uno spazio dato a in un tempo b, e il suono, con un moto uniforme, percorre lo stesso spazio a in un tempo dato d, la pietra percorrerà lo spazio x in un tempo espresso da $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ e il suono prodotto dalla pietra che urta il fondo del pozzo, percorrerà lo stesso spazio x in un tempo espresso da $\frac{dx}{a}$. Poiché, nella caduta dei gravi, gli spazi percorsi stanno come i quadrati dei tempi impiegati a percorrerli, o che è lo stesso, i tempi stanno come le radici quadrate degli spazi percorsi, cioè come $\sqrt{x}$ e $\sqrt{a}$. E nella trasmissione del suono, gli spazi percorsi stanno come i tempi impiegati a percorrerli. Ora il tempo della caduta del corpo fino al fondo del pozzo, espresso da $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ e quello del ritorno del suono, con $\frac{dx}{a}$, si vede che la somma di questi due tempi ci dà esattamente il tempo trascorso dalla partenza della pietra fino all'arrivo del suono. Questo tempo può essere conosciuto mediante l'osservazione. Sia questo tempo t, si avrà $b\sqrt{\frac{x}{a}} \;\; \frac{dx}{a} \;\; t$ e

$$b\sqrt{\frac{x}{a}} \;\; t - \frac{dx}{a}$$

Quadrando entrambi i membri

$$\frac{b^2x}{a} \;\; t^2 - \frac{2dtx}{a} \;\; \frac{d^2x^2}{a^2}$$

Risolta questa equazione, si ha

$$x \;\; \frac{adt \;\; \frac{1}{2}ab^2}{d^2} - \frac{ab}{2d^2}\sqrt{b^2 \;\; 4dt}$$

Osservazione. Un problema di questo tipo può essere risolto in modo semplice ricordando le leggi orarie dei due moti e, invece della misura del tempo, i valori della velocità del suono nell'aria, v, e della accelerazione di gravità terrestre, g. Il moto di caduta con partenza da fermo può essere espresso da

$$x \;\; \frac{1}{2}gt^2$$

il moto di risalita del suono, rettilineo uniforme, può essere espresso da, essendo la stessa la distanza da percorrere,

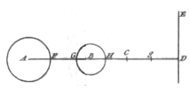
$$x \;\; vt$$

Ricavando t dalla seconda relazione e sostituendolo nella prima, si ha

$$x \;\; \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2}$$

Svolgendo i calcoli, considerando solo la radice non nulla, si ha $x \;\; \frac{2v^2}{g}$.

Problema. **51** - È dato un globo A così come la sua posizione rispetto a un muro DE; si dà pure la distanza BD dal centro del globo B allo stesso muro. Il centro del globo A sta sulla retta BD perpendicolare al muro. Si suppone che i due corpi sono senza peso e che si muovono in un mezzo perfettamente libero; infine si suppone che il corpo A, spinto da un moto uniforme verso il punto D, incontri nel suo cammino il corpo B che è a riposo; che il corpo B urti il muro e, per un moto di riflessione, urti nuovamente il corpo A nel punto C. Si chiede, in base a tutti i dati, di determinare la massa del globo B.



Soluzione. Sia a la velocità del globo A prima dell'urto, dal problema 12, la sua velocità dopo l'urto $\frac{aA-aB}{AB}$ e la velocità di B dopo l'urto sarà $\frac{2aA}{AB}$. Così la velocità del globo A starà alla velocità del globo B come $A - B$ sta a $2a$. Su GD prendete $gD \;\; GH$ uguale al diametro del globo B. E le velocità dei due globi staranno tra loro come GC sta a $Gg \;\; gC$; quando il globo A avrà urtato il globo B, il punto G che è sulla superficie del globo B si muoverà lungo la linea AD e continuerà il suo cammino da G a g, dove arriverà nel momento in cui la sua faccia anteriore H raggiungerà il muro, con un moto di riflessione, questo stesso punto G percorrerà lo spazio gC, di modo che i due globi si incontreranno di nuovo e si urteranno ancora nel punto C. Così essendo dati gli intervalli BC, CD, posto $BC \;\; m$, $BD \;\; DC \;\; n$ e $BG \;\; x$, avrete $GC \;\; m \;\; x$ e

$$Gg \;\; gC \;\; GD \;\; DC - 2gD \;\; BG \;\; BD \;\; DC - 2GH \;\; x \;\; n - 4x \;\; n - 3x$$

Abbiamo trovato che la velocità di A stava a quelle di B come $A - B$ sta a $2A$, come GC sta a $Gg \;\; gC$; così $A - B \;\; 2A \;\; m \;\; x \;\; n - 3x$. Infine il globo A sta al globo B come il cubo di AF sta al cubo di GB, cioè nel rapporto dei cubi dei loro raggi. Di conseguenza, se ponete $AF \;\; s$, i due globi staranno tra loro $s^3 \;\; x^3$. Si avrà quindi ancora questa proporzione

$$s^3 - x^3 \left(A - B\right) \;\; 2s^3 \left(2A\right) \;\; m \;\; x \;\; n - 3x$$

Moltiplicando gli estremi e i medi tra loro, si avrà l'equazione

$$ns^3 - 3s^3x - nx^3 \;\; 3x^4 \;\; 2ms^3 \;\; 2s^3x$$

E riducendo

$$3x^4 - nx^3 - 5s^3x \;\; s^3n - 2s^3m \;\; 0$$

Costruendo questa equazione si troverà il semi diametro del globo B, ed essendo noto x, lo stesso globo B sarà noto.

Osservate che del resto, se il punto C fosse stato preso dall'altra parte rispetto al globo B, si sarebbe dovuto cambiare nell'equazione, il segno della quantità $2m$ e scriverla così

$$3x^4 - nx^3 - 5s^3x \;\; s^3n \;\; 2s^3m \;\; 0$$

Se il globo B fosse dato e si cercasse il globo A, sempre con la stessa condizione che il globo B essendo stato riflesso dal muro, i due corpi si incontrerebbero ancora in C, il problema diverrebbe allora più semplice. In questo caso, x sarebbe noto nella nostra ultima equazione e la quantità incognita sarebbe s. Riunirò quindi in un solo membro tutti i termini contenenti s^3 e avrò

$$\left(5x - n \;\; 2m\right) s^3 \;\; 3x^4 - nx^3$$

e infine

$$s^3 \;\; \frac{3x^4 - nx^3}{5x - n \;\; 2m}$$

Basta ora estrarre una radice cubica per conoscere s.

Se i due corpi fossero noti e si cercasse il punto C, dove, dopo il primo urto e la riflessione del globo B da parte del muro, i due globi dovrebbero urtarsi una seconda volta, basta ricordare che in precedenza abbiamo trovato questa proporzione $A - B \;\; 2A \;\; GC \;\; Gg \;\; gC$, dalla quale si può dedurre questa

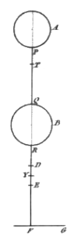
$$A - B \;\; 2A \;\; A - B \;\; GC \;\; Gg \;\; gC \;\; GC$$

Ossia

$$3A - B \;\; A - B \;\; 2Gg \;\; GC$$

e il quarto termine GC di questa proporzione è la distanza cercata.

52 - Due globi A e B sono uniti da un filo sottile PQ. Il globo B è sospeso al globo A; si abbandona questo all'azione del peso secondo la verticale PR; il globo B, giunto al piano orizzontale FG, è riflesso in alto e incontra nel punto D il globo A che continuava a cadere. Si domanda da quale altezza bisogna che il globo A sia caduto per produrre l'effetto enunciato, supponendo che si conosca la lunghezza del filo PQ e la distanza DF del punto di incontro dei due globi dal piano orizzontale GF.



Soluzione. Sia la lunghezza del filo $PQ \;\; a$. Sulla verticale $PQFR$, prendete, contando da F, il segmento FE uguale al diametro QR del globo inferiore, affinché nel momento in cui il punto inferiore R del globo B toccherà il punto F, il suo punto superiore Q si trovi in E. Sia ED lo spazio che percorrerà risalendo il globo B, dopo essere stato riflesso dal fondo, prima di incontrare nel punto D il globo superiore A che continuava a discendere. Così essendo data la distanza del punto D dal punto F, così come EF che si pone uguale al diametro del globo inferiore, ne segue che DE, differenza tra queste due linee, è pure data. Sia quindi $DE \;\; a$. È evidente che $RF \;\; QE$ altezza dalla quale il globo inferiore deve cadere prima di arrivare al piano orizzontale. Chiamiamo $RF \;\; QE \;\; x$, poiché è una quantità incognita. Una volta noto x, basterà aggiungergli EF e PQ e si avrà PF, altezza da cui il globo superiore A deve cadere per produrre quanto richiesto.

Siccome abbiamo posto $PQ \;\; a$ e $QE \;\; x$, avremo $PE?a \;\; x$. Da PE togliamo $DE \;\; b$, il resto sarà $PD \;\; a \;\; x - b$. Il tempo di caduta del globo A sta come la radice quadrata dello spazio che ha percorso cadendo, o come $\sqrt{a \;\; x \;\; b}$ e il tempo di caduta del globo B sta come la radice quadrata dello spazio che ha percorso, o come $\sqrt{x}$. E il tempo di risalita del globo B sta come la differenza di $\sqrt{x}$ e della radice dello spazio che avrebbe percorso cadendo da Q verso D, Infatti, la differenza di queste due radici sta come il tempo della caduta da D a E. Il tempo di caduta da D a E è uguale al tempo di risalita da E a D. E questa differenza delle radici è $\sqrt{x}-\sqrt{a\ x\ b}$[44]. Così il tempo di caduta del globo B aggiunta al tempo della sua risalita dà $2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. Di conseguenza siccome questo tempo è uguale al tempo di caduta del globo superiore, si ha questa equazione,

$$\sqrt{a\ x\ b}\ \ 2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$$

ciò che dà, quadrando ogni membro, $a\ x-b\ \ 5x-b-4\sqrt{x^2-bx}$. Ossia $4x-a\ \ 4\sqrt{x^2-bx}$e quadrando nuovamente ogni membro,

$$16x^2-8ax\ a^2\ \ 16x^2-16bx$$

ossia

$$a^2\ \ 8ax-16bx$$

e dividendo tutto per $8a-16b$, si ha

$$x\ \ \frac{a^2}{8a-16b}$$

Fate quindi questa proporzione, $8a-16b\ \ a\ \ a\ \ x$ si conoscerà x o QE.

Ma se QE fosse dato e si chiedesse soltanto di determinare la lunghezza del filo PQ o a; è chiaro che in questo caso, essendo dato x, e a incognito, l'equazione $a^2\ \ 8ax-16bx$ è di secondo grado; e che una volta risolta secondo le regole dell'algebra, essa dà $a\ \ 4x-\sqrt{16x^2-16bx}$. Per costruire questo valore di a, prendete QY medio proporzionale tra QD e Qe e avrete $PQ\ \ 4EY$. Questo medio proporzionale è $\sqrt{x\left(x-b\right)}$,o $\sqrt{x^2-bx}$. Se togliete il suo valore da QE o x, resta EY, il cui quadruplo è $4x-4\sqrt{x^2-bx}$, valore di a.

Se si dà QE o x e la lunghezza del filo PQ o a, e si cerca il punto D dove il globo superiore, discendendo, incontra il globo inferiore; il punto E è noto da questa ipotesi; è quindi la sua distanza DE o b dal punto incognito D che si cerca. Ora è facile ottenere il valore di b dall'equazione $a^2\ \ 8ax-16bx$, che dà $b\ \ \frac{8ax-a^2}{16x}$. Fatta quindi la proporzione $16x\ \ 8x-a\ \ a\ \ b$ e conoscerete b o DE.

Finora ho supposto che i due globi uniti da un filo senza peso fossero abbandonati nello stesso tempo. Ma se non sono uniti da alcun filo e li si lascia cadere in istanti diversi di modo che il globo superiore A, per esempio, sia abbandonato per primo e cada dello spazio PT prima che si rilasci il secondo globo e che per mezzo delle distanze date PT, QP e DE si cerchi di conoscere l'altezza PF da cui ha dovuto cadere il globo superiore per poter essere incontrato nel punto D dal globo inferiore; posti $PQ\ \ a$, $DE\ \ b$, $PT\ \ c$, $QE\ \ x$ avrete, $PD\ \ a\ x-b$, come prima. E i tempi durante i quali il globo superiore percorrerà, cadendo, gli spazi PT, TD staranno come $\sqrt{PT}$e $\sqrt{PD}-\sqrt{PT}$, o $\sqrt{c}$ e $\sqrt{a\ x-b}-\sqrt{c}$; e il tempo che il globo inferiore impiega, dapprima cadendo e poi risalendo, per percorrere la somma degli spazi $QE\ \ DE$ sarà come $2\sqrt{QE}-\sqrt{QD}$, ossia $2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. Ora, i tempi che i globi impiegano a descrivere, uno lo spazio TD, l'altro la somma degli spazi $QE\ \ ED$ sono uguali per ipotesi. Pertanto $\sqrt{a\ x-b}-\sqrt{c}\ \ 2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. E quadrando ogni membro

$$a\ c-2\sqrt{ca\ cx-bc}\ \ 4x-4\sqrt{x^2-bx}$$

Posto $a\ c\ \ e$ e $a-b\ \ f$, avrete, dopo la riduzione

$$4x-e\ \ 2\sqrt{cf\ cx}\ \ 4\sqrt{x^2-bx}$$

E quadrando ancora ogni membro

$$e^2-8ex\ 16x^2\ 4cf\ 4ex\ \left(16x-4e\right)\sqrt{cf\ cx}\ \ 16x^2-16bx$$

Eliminate da entrambe le parti $16x^2$,ponete $e^2\ \ 4cf\ \ m$ e $8e-16b-4c\ \ n$, avrete, dopo le riduzioni opportune

$$\left(16x-4e\right)\sqrt{cf\ cx}\ \ nx-m$$

E quadrando ancora ogni membro

$$256cfx^2\ 256cx^3-128cefx-128cex^2\ 16ce^2f\ 16ce^2x\ \ n^2x^2-2mnx\ m^2$$

Questa equazione, una volta ordinata, diviene

$$256cx^3\ \left(256cf-128ce-n^2\right)x^2\ \left(16ce^2-128cef\ 2mn\right)x\ 16ce^2f-m^2\ \ 0$$

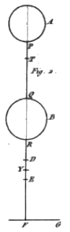
Costruendola, si avrà $QE\ \ x$ e se a Qe si aggiungono le distanze date PQ e $EF\ \ QR$, si avrà l'altezza PF che si doveva trovare.

[44]Nota: Se il globo B risale da E a Q, il tempo della sua salita sarà espresso da $\sqrt{x}$ e se risalisse da D a Q, da $\sqrt{DQ}\ \ \sqrt{x-b}$. Pertanto, siccome risale solo da E a D, il tempo della sua risalita sarà espresso da $\sqrt{EQ}-\sqrt{DQ}\ \ \sqrt{x}-\sqrt{x-b}$ e infine il tempo della sua caduta da Q in E e della sua risalita da E a Q, verrà espresso da

$$\sqrt{x}\ \sqrt{x}-\sqrt{x-b}\ \ 2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$$

[N.d.T]

Problema. **53** - Se due globi a riposo, con il globo A più in alto del globo B, si fanno cadere in istanti diversi, in modo che A abbia già percorso lo spazio PT nel momento in cui B comincia a cadere, si chiede di determinare le posizioni α e β in cui si trovano i due globi quando la loro distanza $\varpi\chi$ sarà uguale a una quantità data.



Soluzione. Siccome lo spazio PT e le distanze PQ e $\varpi\chi$ sono date, ponete $PT \;\; a$, $PQ \;\; b$ e $\varpi\chi \;\; c$ e lo spazio $P\varpi$ che il globo superiore avrà percorso prima di arrivare nel luogo cercato α, chiamatelo x. I tempi che il globo superiore impiega a percorrere gli spazi $PT, P\varpi, T\varpi$ così come i tempi che il globo inferiore impiega a percorrere $Q\chi$,stanno tra loro rispettivamente come $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$ e $\sqrt{Q\chi}$. Ora, siccome i due globi impiegano lo stesso tempo a percorrere gli spezi $T\varpi$ e $Q\chi$, ne segue che $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT} \;\; \sqrt{Q\chi}$. Abbiamo posto $P\varpi \;\; x$ e $PT \;\; a$. Se a $P\varpi$ aggiungiamo $\varpi\chi$ o c, e dalla somma togliamo PQ o b, il resto sarà $Q\chi \;\; x \; c - b$. Pertanto, sostituendo questi valori analitici nell'equazione trovata, essa diverrà $\sqrt{x} - \sqrt{a} \;\; \sqrt{x \; c - b}$. E quadrando ogni membro, $x \;\; a - 2\sqrt{ax} \;\; x \; c - b$. Eliminando x da entrambe le parti e trasportando solo nell'altro membro la quantità con il radicale, verrà $a \;\; b - c \;\; 2\sqrt{ax}$ e quadrando nuovamente $\left(a \;\; b - c\right)^2 \;\; 4ax$. Da cui $x \;\; \left(\frac{\left(ab-c\right)^2}{4a}\right)$ e di conseguenza $4a \;\; a \;\; b - c \;\; a \;\; b - c \;\; x$. Trovati x o $P\varpi$, si ha il luogo α dove è arrivato cadendo il globo superiore A. E siccome la distanza $\varpi\chi$ che si deve trovare in questo istante tra i due globi è data, ne segue che si conosce anche il luogo β del globo inferiore.

Se si cerca il punto in cui il globo superiore cadendo raggiunge il globo inferiore, basta, per trovarlo, supporre che la distanza $\varpi\chi$ dei due globi sia nulla e, di conseguenza, eliminare c nell'equazione $\left(a \;\; b - c\right)^2 \;\; 4ax$, riducendola a $\left(a \;\; b\right)^2 \;\; 4ax$ dalla quale si ricava la proporzione $4 \;\; a \;\; b \;\; a \;\; b \;\; x$ e il punto ϖ è quello che si cercava.

Reciprocamente, se si dà il punto ϖ o χ, nel quale il globo superiore incontra l'inferiore e si chiede il luogo T dove si trova il punto più basso P del globo superiore nel momento in cui l'inferiore comincia a cadere, basta ricavare a dall'equazione $\left(a \;\; b\right)^2 \;\; 4ax$, o $a^2 \;\; 2ab \;\; b^2 \;\; 4ax$ ed essa dà

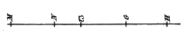
$$a - 2x - b - 2\sqrt{x^2 - bx}$$

Prendete quindi un medio proporzionale $V\varpi$ tra x e $x - b$ o tra $P\varpi$ e $Q\varpi$, che è la stessa cosa, e avrete

$$V\varpi \;\; \sqrt{x\left(x-b\right)} \;\; \sqrt{x^2 - bx}$$

E se eliminate il doppio di questa quantità da $2x - b$, o da $2P\varpi - PQ$, cioè da $2Q\varpi \;\; PQ$, resterà $PQ - 2VQ$, ossia $PV - VQ$, cioè PT.

Infine il globo superiore prima di urtare l'inferiore e dalla loro mutua azione, essendo la velocità del superiore ritardata e quella dell'inferiore accelerata, se si vuole sapere a quale punto della loro caduta i due globi si troveranno distanti tra loro, di una distanza data; bisognerà cercare dapprima la posizione dove il globo superiore urta l'inferiore; poi, conoscendo la dimensione dei globi (senza la quale il problema sarebbe insolubile) così come le loro velocità al momento dell'urto, si determineranno (per mezzo del problema XII) le loro velocità immediatamente dopo l'urto; dopo questo bisognerà cercare a quale altezza perverranno i globi in virtù di queste velocità, se agiscono dal basso verso l'alto e si conosceranno gli spazi che, in tempi dati, dopo la riflessione, i due globi saranno nella condizione di percorre cadendo. Si conoscerà quindi la differenza degli spazi percorsi. E reciprocamente, se si desse la differenza degli spazi percorsi, si potrebbe, con l'analisi, risalire agli spazi stessi percorsi cadendo.



Supponiamo, per esempio, che il globo superiore raggiunga l'inferiore nel punto ϖ e che, dopo la riflessione, la velocità del superiore discendendo sia tale da potergli far risalire lo spazio ϖN; che la velocità dell'inferiore scendendo sia tale da essere in grado di fargli percorrere risalendo lo spazio ϖM. In realtà, o tempi che il globo A impiegherebbe a percorrere nuovamente discendendo gli spazi $N\varpi, NG$, questi tempi staranno tra loro come $\sqrt{N\varpi}$ sta a $\sqrt{NG}$; e i tempi che il globo B impiegherebbe a percorrere una seconda volta, ma in discesa, gli spazi $M\varpi, MH$, staranno tra loro come $\sqrt{M\varpi}$ sta a $\sqrt{MH}$; così i tempi che il globo superiore impiegherebbe a percorrere lo spazio ϖG staranno ai tempi che l'inferiore impiegherebbe a percorrere lo spazio ϖH, come $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi}$ sta a $\sqrt{MH} - \sqrt{N\varpi} \;\; \sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. E siccome la distanza GH è data, ponete $\varpi G \; GH \;\; \varpi H$.

E per mezzo di queste due equazioni giungerete alla risoluzione del problema. Infatti, sia $M\varpi \;\; a$, $N\varpi \;\; b$, $GH \;\; c$ e $\varpi G \;\; x$, si avrà per l'ultima equazione $\varpi H \;\; x \;\; c$ e sommando da entrambe le parti $M\varpi$, verrà $\varpi H \;\; M\varpi$, o $MH \;\; a \;\; c \;\; x$. E aggiungendo $N\varpi$ a ϖG, si avrà, $NG \;\; b \;\; x$ e sostituendo tutti questi valori analitici al posto dei segmenti che essi rappresentano, l'equazione $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi} \;\; \sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$, diviene $\sqrt{b \;\; x} - \sqrt{b} \;\; \sqrt{a \;\; b \;\; x} - \sqrt{a}$. Mettete e per $a \;\; c$ e $\sqrt{f}$ per $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ e l'equazione sarà ridotta a $\sqrt{b \;\; x} \;\; \sqrt{c \;\; x} - \sqrt{f}$ e quadrando il tutto,

$$b \;\; x \;\; c \;\; x \;\; f - 2\sqrt{ef \;\; fx}$$

ossia

$$e \;\; f - b \;\; 2\sqrt{ef \;\; fx}$$

Ponete $g \;\; c \;\; f - b$ e sostituendo verrà

$$g \;\; 2\sqrt{ef \;\; fx}$$

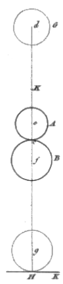
o, quadrando

$$g^2 \;\; 4ef \;\; 4fx$$

da cui si ricava

$$x \;\; \frac{g^2}{4f} - e$$

Problema. **54 -** Se uno di due globi A e B, di cui A sopra B, cadendo dal punto G, incontra l'inferiore B nel momento che risale, dopo aver rimbalzato sul fondo H; se questi due globi, dopo essersi urtati, si separano nuovamente di modo che il globo superiore ritorna alla sua primitiva altezza G, nello stesso tempo in cui l'inferiore è rinviato contro il fondo H; poi che il globo A ricadendo nuovamente, mentre il globo B risale dopo essere stato riflesso dal fondo, questi due globi si urtano una seconda volta nello stesso posto di prima e continuano così a urtarsi senza sosta e a ritornare sempre nello stesso punto da cui erano partiti; si tratta, conoscendo le dimensioni dei due globi, la posizione del fondo e quella del punto G, da cui il globo superiore è caduto, di determinare il luogo in cui i due globi si urteranno.

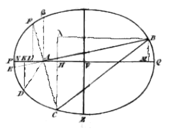


Soluzione. Siano, e il centro del globo A e f quello del globo B; d il centro del luogo G, dove il globo A è alla sua massima altezza; g il centro del globo B quando tocca il fondo; a il semi diametro del globo A; b il semi diametro del globo B; c il punto di contato dei due globi quando si urtano e H il punto di contatto del globo inferiore col fondo. La velocità del globo A, quando arriverà sul globo B sarà quella che avrà acquisito cadendo dall'altezza de, così questa velocità sarà come $\sqrt{de}$. Basta che il globo A conservi questa stessa velocità dopo l'urto per risalire al luogo G da cui era partito. E il globo B deve essere respinto verso il basso con una velocità uguale a quella che lo faceva salire, affinché possa ritornare contro il fondo in un tempo uguale a quello che aveva impiegato ad allontanarsene. E affinché queste due cose avvengano, bisogna che le quantità di moto siano uguali. Ora, la quantità di moto dei globi si valuta moltiplicando la loro massa per la loro velocità. Così in questo caso, serve che il prodotto della massa del globo A per la sua velocità sia uguale al prodotto della massa del globo B per la sua velocità. Da ciò si vede che, se si divide il prodotto della massa per la velocità del primo globo per la massa del secondo, il quoziente sarà la velocità del secondo, tanto prima che dopo la riflessione; o se volete, per il momento in cui smette di salire e per quello in cui inizia a discendere. Questa velocità sarà quindi come $\frac{A\sqrt{de}}{B}$. Stando i globi come i cubi dei loro raggi, questa velocità sarà rappresentata da $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. E il quadrato di questa velocità di B sta al quadrato della velocità di A immediatamente prima dell'urto, come l'altezza alla quale si innalzerebbe B se non incontrasse e fosse fermato da A, sta all'altezza de, dalla quale il globo A è disceso. Cioè si ha questa proporzione[45]

$$\frac{A^2de}{B^2}\ \ de\ \ h\ \ de$$

(*chiamando h l'altezza alla quale si innalzerebbe B se non incontrasse A*) ossia, servendo ci dell'ultima espressione della velocità di B, $\frac{a^6de}{bi6}\ \ de\ \ h\ \ de$ o x (chiamando x l'ultimo termine de, ossia, $a^6\ \ b^6\ \ h\ \ x$, ciò che dà $h\ \ \frac{a^6x}{b^6}$.Questa è l'espressione dell'altezza alla quale si innalzerebbe B se non fosse fermato nella sua risalita. Supponiamo che questa altezza sia fK. Sommate a fK la quantità fg, o $DH - de - ef - gH$, o $p - x$, chiamando p la quantità data $dH - ef - gH$ e x la quantità incognita de, e avrete $Kg\ \ \frac{a^6}{b^6}x\ \ p - x$. Se il globo B cadesse realmente dal punto K fino in fondo, o se il suo centro descrivesse lo spazio Kg (ciò che farebbe senza l'incontro con il globo A) la velocità di questo globo B sarebbe espressa da $\sqrt{\frac{a^6x}{b^6}\ \ p - x}$. Ma questo globo cade solo dalla posizione Bef fino sul fondo, nello stesso tempo in cui il globo A si innalza dal luogo Ace fino al punto d, o che discende dal punto d al luogo Ace. Nella caduta dei corpi gravi, gli incrementi delle velocità sono uguali quando il tempo di caduta è uguale. Di conseguenza, il grado di velocità che acquisisce il globo B cadendo verso il fondo, è uguale al grado di velocità che acquista il globo A che cadde nello stesso tempo da d in e; o ancora, uguale al grado di velocità che perde il globo A risalendo da e in d, sempre nello stesso tempo. Così, alla velocità che aveva già il globo B nel luogo Bcf, aggiungete la velocità del globo A giunto nel luogo Ace e la loro somma, che è come $\sqrt{de}\ \ \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ossia come $\sqrt{x}\ \ \frac{a^3\sqrt{x}}{b^3}$ deve essere uguale a $\sqrt{\frac{a^6x}{b^6}\ \ p - x}$[46]. Al posto di $\frac{a^3b^3}{a^3}$, scrivete $\frac{r}{s}$ e al posto di $\frac{a^6-b^6}{b^6}$ scrivete $\frac{rt}{s^2}$ e l'equazione diverrà $\frac{r}{s}\sqrt{x}\ \ \sqrt{\frac{rtx}{s^2}\ \ p}$. E quadrando ogni membro, $\frac{r^2x}{s^2}\ \ \frac{rtx}{s^2}\ \ p$, equazione che si può ordinare così, $\left(\frac{r^2}{s^2} - \frac{rt}{s^2}\right)x\ \ p$; da cui si ricava $x\ \ \frac{ps^2}{r^2-rt}$. Questa equazione sarebbe stata più semplice se invece di prendere $\frac{r}{s}$ per $\frac{a^3b^3}{a^3}$ si fosse preso $\frac{p}{s}$, poiché si avrebbe avuto $x\ \ \frac{s^2}{p-t}$. Da cui si vede che x o ed si determina facendo questa proporzione $p - t\ \ s\ \ s\ \ x$ o de. Ora se a de si aggiunge ec, si avrà dc, e, di conseguenza, il punto c dove i due globi si urteranno reciprocamente.

Problema. **55 -** Si è piantato in un certo luogo della terra nei punti A, B, C tre picchetti perpendicolari al piano orizzontale: il paletto che è in A ha sei piedi; quello in B ne ha diciotto e quello in C, otto; la retta AB è di trenta piedi. In un certo giorno dell'anno l'estremità dell'ombra del paletto A passa per i punti B e C; l'estremità del paletto B passa per A e per C e l'estremità dell'ombra del paletto C passa per A. si chiede le declinazione del sole e l'elevazione del polo, oppure, il giorno e il luogo in cui ciò è avvenuto.



Soluzione. Poiché l'ombra di ogni paletto ha descritto una sezione conica, che è la sezione del cono luminoso, il cui vertice è posto alla sommità del picchetto; supporrò che $BCDEF$ è la curva di questo tipo (parabola, iperbole o ellisse) che l'ombra del paletto A ha descritto quel giorno; supporrò inoltre che AD, AE, AF sono state le ombre del picchetto A; BC, BA quello del paletto B e CA quella del paletto C. Supporrò ancora che PAQ è il meridiano o l'asse della curva e che le perpendicolari BM, CH, DK, EN, FL abbassate da diversi punti della curva su PAQ ne sono le ordinate. Chiamerò queste ordinate, y e le parti intercettate dell'asse come AM, AH, AK, AN, AL le chiamerò x. Supporrò infine che l'equazione $a^2 \pm bx \pm cx^2\ \ y^2$ esprima il tipo di curva,

[45]Nota: Questa proporzione è solo la traduzione analitica di questo teorema ben noto in meccanica: nella caduta dei corpi gravi, i quadrati della velocità stanno come gli spazi percorsi; così il secondo termine di questa proporzione che dovrebbe essere il quadrato dello velocità di A prima dell'urto, non è che lo spazio che il corpo A ha percorso prima dell'urto. Ma uno può essere messo al posto dell'altro, secondo il teorema riferito. Del resto, osservate che non si mette al secondo termine lo spazio percorso da A, invece del quadrato della sua velocità, perché il quarto termine rappresenta ancora uno spazio, senza che si confrontino cose eterogenee, ciò che sarebbe assurdo [N.d.T]

[46]Nota: È evidente che il globo B cadendo dal luogo Bef fino in fondo, acquista la stessa velocità che il globo A che cade nello stesso tempo da G in Ace e questa velocità è rappresentata da $\sqrt{de}$. Inoltre, senza l'incontro di A, il globo B avrebbe ancora percorso lo spazio h, o $fK\ \ \frac{a^6de}{b^6}$, ciò che suppone una velocità $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Pertanto la velocità totale di B è $\sqrt{de}\ \ \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ossia $\sqrt{x}\ \ \sqrt{\frac{a^6x}{b^6}\ \ p - x}$; ma, senza l'incontro di A, il globo B avrebbe in realtà percorso lo spazio gK, ciò che presuppone una velocità $\sqrt{\frac{a^6x}{b^6}\ \ p - x}$. Pertanto alla fine

$$\sqrt{\frac{a^6x}{b^6}\ \ p - x}\ \ \sqrt{x}\ \ \frac{a^3\sqrt{x}}{b^3}$$

[N.d.T]

cioè la relazione tra le x e le y. E considererò come note, a^2, b, c (l'analisi le farà presto conoscere). Ho considerato solo incognite alla seconda potenza poiché l'equazione riguarda le sole sezioni coniche. Non ho considerato le potenze dispari di y, poiché le y o ordinate prendono immediatamente la loro origine sull'asse. Siccome non si sa ancora de b, c devono essere considerati positivi o negativi, ho utilizzato i segni $\pm$. Ho assegnato il segno positivo a a^2, poiché il paletto A producendo la sua ombra da lati diversi, come C, F, B, E, è evidente che deve essere circondato da tutte le parti dalla concavità della curva. Di conseguenza, se si innalza dal punto A una perpendicolare $A\beta$, essa incontrerà da qualche parte in β la curva: così essa sarà l'ordinata per il punto dove $x\ \ 0$; e siccome essa incontra sempre la curva sarà sempre reale; pertanto il suo quadrato a^2 deve sempre essere positivo.

È quindi manifesto che l'equazione $a^2 \pm bx \pm cx^2\ \ y^2$ non contiene alcun termine superfluo e che contiene solo quelli necessari per esprimere tutti i casi possibili del problema, sia che si riferiscano all'ellisse, alla parabola o all'iperbole; e che, in tutti questi casi, saremo in condizione di assegnare valori reali o nulli alle quantità a^2, b^2, c. L'analisi seguente ci fa conoscere quali sono questi valori e con quali segni essi devono essere presi e, infine, quale è il tipo di curva.

Prima parte analitica

Siccome le ombre stanno nel rapporto della lunghezza dei paletti, si avrà, $BC\ \ AD\ \ AB\ \ AE\ \ 18\ \ 6\ \ 3\ \ 1$. Poi $CA\ \ AF\ \ 8\ \ 6\ \ 4\ \ 3$. Così chiamando $AM\ \ r$; $BM\ \ s$; $AH\ \ t$ e $HC\ \ \pm v$, siccome i triangoli AMB, ANE sono simili, così come AHC, ALF, si avrà $AN\ \ -\frac{r}{3}$, $NE\ \ -\frac{s}{3}$, $AL\ \ -\frac{3t}{4}$ e $LF\ \ \mp\frac{3v}{4}$. Ho dato a queste diverse quantità segni contrari a quelli di AM, MB, AH, HC poiché essendo stati tutti riferiti al punto A, è chiaro che se attribuisco il segno alle linee che vanno a destra di questo punto, devo dare il segno $-$ a quelle che vanno a sinistra. Per lo stesso motivo, quelle che sono al di sopra di PAQ, come BM, avendo il segno , quelle che vanno al di sotto avranno il segno $-$. Ora, se si scrivono rispettivamente questi valori al posto di x e di y nell'equazione $a^2 \pm bx \pm cx^2\ \ y^2$, si avrà

Mettendo r per x e s per y, $a^2 \pm br \pm cr^2\ \ s^2$.

Mettendo $-\frac{r}{3}$ per x e $-\frac{s}{3}$ per y, si avrà $a^2 \mp \frac{br}{3} \pm \frac{1}{9}cr^2\ \ \frac{1}{9}s^2$.

Mettendo t per x e $\pm v$ per y, si avrà $a^2 \pm bt \pm ct^2\ \ v^2$. Infine se mettiamo $-\frac{3}{4}t$ per x e $\mp\frac{3}{4}v$ per y, avremo, $a^2 \mp \frac{3}{4}bt \pm \frac{9}{16}ct^2\ \ \frac{9}{16}v^2$. Se, tramite le prime due equazioni si elimina s^2, per avere il valore di r, si troverà, $r\ \ \frac{2a^2}{\pm b}$; da cui segue che b è necessariamente positivo. Eliminando poi v^2 per mezzo della terza e quarta equazione per ottenere il valore di t, verrà $t\ \ \frac{a^2}{3b}$, Dopo di che, mettendo nella prima equazione, invece di r il suo valore $\frac{2a^2}{b}$ e nella terza, invece di t il suo valore $\frac{a^2}{3b}$, una diverrà, $3a^2 \pm \frac{4a^4c}{b^2}\ \ s^2$ e l'altra $\frac{4}{3}a^2 \pm \frac{a^4c}{9b^2}\ \ v^2$.

Tracciando poi dal punto $B, B\lambda$ perpendicolarmente a CH, si avrà la proporzione

$$BC\ \ AD\ \ 3\ \ 1\ \ B\lambda\ \ AK\ \ C\lambda\ \ DK$$

E siccome $B\lambda\ \ AM - AH\ \ r - t\ \ \frac{5a^2}{3b}$, si avrà, $AK\ \ \frac{5a^2}{9b}$ o piuttosto $AK\ \ -\frac{5a^2}{9b}$. Si ha anche, $C\lambda\ \ CH \pm BM$ $v \pm s\ \ \sqrt{\frac{4a^2}{3} \pm \frac{a^4c}{9b^2}} \pm \sqrt{3a^2 \pm \frac{4a^4c}{b^2}}$. Pertanto, a causa di $DK\ \ \frac{1}{3}C\lambda$, si avrà

$$DK\ \ \sqrt{\frac{4a^2}{27} \pm \frac{a^4c}{81b^2}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{3} \pm \frac{4a^4c}{9b^2}}$$

Queste quantità essendo descritte nell'equazione, $a^2\ \ bx \pm cx^2\ \ y^2$, invece di AK e DK, o di x e y, si avrà,

$$\frac{4a^2}{9} \pm \frac{25a^4c}{81b^2}\ \ \frac{13}{27}a^2 \pm \frac{37a^4c}{81b^2} \pm 2\sqrt{\frac{4a^2}{27} \pm \frac{a^4c}{81b^2}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{3} \pm \frac{4a^4c}{9b^2}}$$

E, riducendo,

$$-b^2 \mp 4a^2c\ \ \pm 2\sqrt{36b^4 \pm 51a^2b^2c\ \ 4a^4c^2}$$

Quadrando nuovamente ogni membro e riducendo, si ha $0\ \ 143b^4 \pm 196a^2b^2c$, ossia $\pm c\ \ -\frac{143b^2}{196a^2}$. Da cui si vede che c deve essere negativo e che, di conseguenza, l'equazione $a^2 \pm bx \pm cx^2\ \ y^2$ deve essere della forma $a^2\ \ bx - cx^2\ \ y^2$ e che così la curva che essa esprime è un ellissi. Ecco in quale maniera si troverà il centro e gli assi.

Supponendo $y\ \ 0$, siccome questa arriva ai vertici P, Q, la nostra equazione si riduce a $a^2\ \ cx^2 - bx$. Questa equazione, una volta risolta, $x\ \ \frac{b}{2e} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2}\ \ \frac{a^2}{c}}\ \ AQ\ \ AP$. Prendendo $AV\ \ \frac{b}{2c}$, il punto V sarà il centro dell'ellissi e VP o $VQ\ \ \sqrt{\frac{b^2}{4c^2}\ \ \frac{a^2}{c}}$, il semiasse maggiore. Ora, se si scrive AV o il suo valore $\frac{b}{2c}$, invece di x, nell'equazione $a^2\ \ bx - cx^2\ \ y^2$, diverrà, $a^2\ \ \frac{b^2}{4c}\ \ y^2$. Così, $a^2\ \ \frac{b^2}{c}\ \ VZ^2$, quadrato della semiasse minore. Infine se, nei valori di AV, VQ, VZ già trovati, si sostituisce al posto di c il suo valore $\frac{143b^2}{196a^2}$, si avrà, $AV\ \ \frac{98a^2}{143b}$, $VQ\ \ \frac{112a^2\sqrt{3}}{143b}$ e $VZ\ \ \frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$.

Seconda parte analitica

Supponiamo che il paletto in A sia AB e che RPQ sia il piano meridionale e $RPQZ$ il cono dei raggi il cui vertice sia R. Sia inoltre TXZ un piano la cui sezione comune con il piano orizzontale sia VZ e la cui sezione comune con il piano meridionale o verticale sia TVX e che si sia diretto questa sezione perpendicolarmente all'asse del mondo; allora il piano TXZ sarà esso stesso perpendicolare all'asse del mondo e taglierà il cono nella circonferenza del cerchio TZX, circonferenza di cui ogni punto T, Z, X sarà ugualmente lontano dal vertice R del cono. Di conseguenza, se si traccia a TVX una parallela PS, si avrà, $PR\ \ PS$ poiché $RX\ \ RT$. Si avrà pure, $SX\ \ SQ$ per i segmenti uguali PV, VQ; da ciò si conclude che

$$RX\ \ RZ\ \ \frac{Rs\ RQ}{2}\ \ \frac{RP\ RQ}{2}$$

Si tracci infine RV. Siccome VZ è la sezione comune dei due piani perpendicolari al piano PRQ, ne segue che VZ è pure perpendicolare a questo piano e, di conseguenza, il triangolo RVZ è rettangolo in V. Ponendo quindi $RA\ \ d$, $AV\ \ e$, $VP\ \ VQ\ \ f$ e $VZ\ \ g$, si avrà, $AP\ \ f-e$, $RP\ \ \sqrt{f^2-2ef\ e^2\ d^2}$. Poi $AQ\ \ f\ e$ e $RQ\ \ \sqrt{f^2\ 2ef\ e^2\ d^2}$. Di conseguenza

$$RZ\ \ \frac{RP\ RQ}{2}\ \ \frac{\sqrt{f^2-2ef\ e^2\ d^2}\ \sqrt{f^2\ 2ef\ e^2\ d^2}}{2}$$

il cui quadrato

$$\frac{d^2\ e^2\ f^2}{2}\ \ \frac{1}{2}\sqrt{f^4-2e^2f^2\ e^4\ 2d^2f^2\ 2d^2e^2\ d^4}$$

è uguale a

$$RV^2\ VZ^2\ \ RA^2\ AV^2\ VZ^2$$

Ora, $RA^2\ AV^2\ VZ^2\ \ d^2\ e^2\ g^2$ e riducendo si ha

$$\sqrt{f^4-2e^2f^2\ e^4\ 2d^2f^2\ 2d^2e^2\ d^4}\ \ d^2\ e^2-f^2\ 2g^2$$

E quadrando e ordinando

$$d^2f^2\ \ d^2g^2\ e^2g^2-f^2g^2\ g^4,$$

ossia

$$\frac{d^2f^2}{g^2}\ \ d^2\ e^2-f^2\ g^2$$

Infine, se si pone $AR\ \ d$, $AV\ \ e$; $VZ\ \ g$ e $VQ\ \ f$ e si mettono i valori di questi segmenti, già noti o determinati, che sono rispettivamente 6, $\frac{98a^2}{143b}$, $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$, $\frac{112a^2\sqrt{3}}{143b}$, la nostra ultima equazione diverrà

$$36-\frac{196a^4}{143b^2}\ \ \frac{192a^2}{143}\ \ \frac{36\times 14\times 14a^2}{143b^2}$$

e riducendo

$$\frac{49a^4\ 36\times 49a^2}{48a^2\ 1287}\ \ b^2$$

Nella prima figura si ha, $AM^2\ BM^2\ \ AB^2$, cioè, $r^2\ s^2\ \ 33^2$. E abbiamo trovato $r\ \ \frac{2a^2}{b}$ e $s^2\ \ 3a^2-\frac{4a^4c}{b^2}$, essa diverrà, $s^2\ \ \frac{4a^2}{49}$. Ponendo poi questi valori di r^2 e s^2 nell'equazione $r^2\ s^2\ \ 33^2$, la cambiano in quest'altra

$$\frac{4a^4}{b^2}\ \frac{4a^2}{49}\ \ 33^2$$

E riducendo, si ha ancora,

$$\frac{4\times 49a^4}{53361-4a^2}\ \ b^2$$

Eguagliando ora questo nuovo valore di b^2 a quello trovato in precedenza, e dividendo tutto per 49, verrà

$$\frac{a^4\ 36a^2}{48a^2\ 1287}\ \ \frac{4a^4}{53361-4a^2}$$

Moltiplicando i due membri di questa equazione, ordinando e dividendo per 49, verrà

$$4a^4\ \ 981a^2\ 39204$$

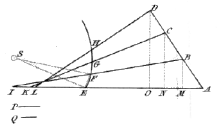
equazione, nella quale a è l'incognita che si cerca. Se la si risolve con il metodo delle equazioni di secondo grado, si troverà

$$a^2\ \ \frac{981\ \sqrt{1589625}}{8}\ \ 280,2254144$$

Abbiamo trovato in precedenza $b^2\ \ \frac{4\times 49a^4}{53361-4a^2}$ ossia $b\ \ \frac{14a^2}{\sqrt{53361-4a^2}}$. Se in $AV\ \ \frac{98a^2}{143b}$ sostituiamo questo valore di b, si avrà $AV\ \ \frac{7\sqrt{53361-4a^2}}{243}$. Analogamente se sostituiamo ancora questo valore di b in VP, o $VQ\ \ \frac{112a^2\sqrt{3}}{143b}$ avremo $VQ\ \ VP\ \ \frac{8\sqrt{160083-12a^2}}{143}$. E ancora, mettendo 280,2254144 al posto di a^2nei valori di AV e VP o VQ, che abbiamo trovato, avremo, riducendo tutto in decimali, $AV\ \ 11,188297$ e $VP\ \ VQ\ \ 22,147085$. Di conseguenza

$AP\,(VP - AV)\;\; 10,958788$ e $AQ\,(AV\;\; VQ)\;\; 33,335382.$
Infine, se si prende come raggio 1 piede o $\frac{1}{6}AR$, si avrà, $\frac{1}{6}AQ\;\; 5,555897$ per la tangente dell'angolo ARQ, che si troverà di $79°47'48$". E $\frac{1}{6}AP\;\; 1,826465$ tangente dell'angolo ARP ci fa conoscere che questo angolo è di $61°17'57$". La semi somma di questi angoli è di $70°32'52$", complementare della declinazione del sole; e la loro semi differenza $9°14'56$" è il complementare della latitudine del luogo. Così la declinazione del sole era di $19°27'8$" e la latitudine del luogo di $80°45'4$".

Problema. **56** - Una cometa attraversa il cielo con un moto rettilineo e uniforme; si tratta di determinare, da quattro osservazioni eseguite in tempi diversi, la sua distanza dalla terra e la legge del suo moto secondo il sistema di Copernico.



Soluzione. Se da ciascuno dei punti del cielo in cui si trovava il centro della cometa, al tempo di ogni osservazione, si abbassano altrettante perpendicolari sul piano dell'eclittica e A, B, C, D siano i punti dove queste quattro perpendicolari incontrano questo piano, tracciate da questi punti la retta AD; essa e il segmento che descrive la cometa per il suo moto, saranno divisi nella stessa ragione dalle quattro perpendicolari, di modo che si avrà $AB\;\; AC\;\;$ il tempo trascorso tra la prima e la seconda osservazione : al tempo tra la prima e la terza. Si ha ancora, $AB\;\; AD\;\;$ il tempo tra la prima e la seconda osservazione : il tempo tra la prima e la quarta. Così i tempi delle osservazioni ci danno i rapporti che i segmenti AB, AC, AD hanno tra loro.

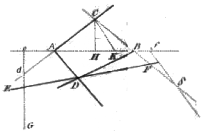
Siano inoltre i luoghi del sole nell'eclittica, S; l'arco dell'eclittica nel quale si muove la terra, EH; i quattro diversi luoghi in cui si trovava la terra al tempo di ciascuna delle quattro osservazioni, E, F, G, H. Supponiamo, per esempio, che essa si trovasse in E al tempo della prima, in F al tempo della seconda, in G al tempo della terza e in H al tempo della quarta. Congiungete AE, BF, CG, DH;prolungate le ultime tre fino ad incontrare la prima AE; il punto di sezione di BF con AE sarà I; quello di CG sarà K; quello di DH sarò L. E gli angoli AIB, ACK, ALD saranno le differenze di longitudine osservate dalla cometa; AIB, per esempio, sarà la differenza delle longitudini tra la prima e terza posizione; e ALD la differenza di longitudini tra la prima e la quarta. Così gli angoli AIB, AKC, ALD sono dati dalle osservazioni.

Unite con rette i punti S, E;S, F; E, F. E siccome i punti S, E, F sono dati, così come l'angolo ESF, anche l'angolo SEF sarà dato. Si conosce pure l'angolo SEA, poiché è la differenza della longitudine della cometa e del sole al tempo della prima osservazione; così, aggiungendo il suo complementare alle due rette, cioè, l'angolo SEI, all'angolo SEF, avrete l'angolo IEF. Nel triangolo IEF, si hanno gli angoli e il lato EF e, di conseguenza, il lato IE è pure dato. Con un ragionamento simile, si vedrà che i lati KE, LE sono pure dati. I quattro segmenti AI, BI, CK, DL sono quindi dati di posizione; così il problema proposto si riduce a questo: essendo date quattro rette di posizione, trovarne una quinta che sia divisa dalle prime quattro in un rapporto dato.

Avendo abbassato su AE le perpendicolari BM, CN, DO a causa dell'angolo dato AIB, si ha il rapporto di BM a MI. Poi BM sta a CN nel rapporto di BA a CA; e per l'angolo dato CKN, si ha il rapporto di CN a KN e, di conseguenza, quello di BM a KN, così come quello di BM a $MI - KN$, ossia si BM a $MN\;\; IK$. Ponete, $P\;\; IK\;\; AB\;\; BC\;\; MA\;\; MN$; da cui $P\;\; MA\;\; IK\;\; MN\;\; AB\;\; BC$. Cioè $P\;\; MA$ e $IK\;\; MN$ stanno tra loro in una ragione data. Pertanto si ha pure la ragione di BM a $P\;\; MA$. Con un ragionamento simile, se si prende $Q\;\; IL\;\; AB\;\; BD$, si avrà il rapporto di BM a $Q\;\; MA$ e, di conseguenza, quello di BM alla differenza delle due quantità $B\;\; MA$ e $Q\;\; MA$ sarà pure dato. Ora, la differenza di queste due quantità, cioè $P - Q$ o $Q - P$ è data, quindi BM è pure dato; ed essendo dato BM, lo sono pure $P\;\; MA$ e MI, così come MA, ME, AE e l'angolo EAB.

Essendo trovate queste quantità, innalzate dal punto A una perpendicolare al piano dell'eclittica e che stia ad AE come la tangente della latitudine della cometa, nella prima osservazione, sta al raggio; e l'estremità di questa perpendicolare così determinata in lunghezza, sarà il luogo del centro della cometa al tempo della prima osservazione. Di conseguenza, si conoscerà la distanza della cometa dalla terra, al tempo di questa prima osservazione. Se si innalza allo stesso modo dal punto B una perpendicolare che stia a BF come la tangente della latitudine della cometa, nella seconda osservazione, sta al raggio, si avrà la posizione del centro della comete in questa seconda osservazione. E congiungendo la prima posizione del centro alla seconda, si avrà il cammino che segue la cometa nel cielo.

Problema. **57 -** Se un angolo CAD può solo ruotare al punto A dato di posizione e l'angolo dato CBD ha solo il movimento possibile di rotazione attorno al punto B dato di posizione e i due angoli ruotano in effetti secondo questa legge, supponendo inoltre che i lati AD, BD si incontrino sempre in un linea retta EF data di posizione: si tratta di determinare la curva che descriverà la serie delle intersezioni C degli altri due lati AC, BC.



Soluzione. Prolungate CA fino a d in modo da avere Ad AD; prolungate pure CB fino a δ per avere BD $B\delta$; ponete l'angolo Ade ADE e l'angolo $B\delta f$ BDF e prolungate da una parte e dall'altra la retta AB fino ad incontrare de in e e δf in f; prolungate anche ed fino a G, per avere dG δf. E dal punto C tracciate CH parallelamente a ed e CK parallelamente a δf. E se si suppone che i segmenti $eG, f\delta$ restino immobili, mentre gli angoli CAD, CBD ruotano secondo la legge assegnata, attorno ai poli A e B, si avrà sempre dG δf e le proprietà del triangolo CKH saranno date. Ponete quindi Ae a, eG b, Bf c, AB m, BK x e CK y, verrà, BK CK Bf δf. Pertanto δf $\frac{cy}{x}$ dG. Togliete questa quantità da Ge, il resto sarà ed $b-\frac{cy}{x}$. Siccome il triangolo CHK è dato, ponete CK CH d e e CH HK e f, e avrete CH $\frac{ey}{d}$ e HK $\frac{fy}{d}$. Di conseguenza, AH $m-x-\frac{fy}{d}$. Si ha inoltre, AH HC Ae ed, cioè $m-x-\frac{fy}{d}$ $\frac{ey}{d}$ a $b-\frac{cy}{x}$. Moltiplicando tra loro i medi e gli estremi si avrà

$$mb-\frac{mcy}{x}-bx\ cy-\frac{bfy}{d}\ \frac{cfy^2}{dx}\ \frac{acy}{d}$$

Moltiplicate tutti i termini per dx, poi ordinate e verrà

$$fcy^2\ \left(dc-ae-bf\right)yx-dcmy-bdx^2\ bdmx\ \ 0$$

Da ciò segue che, avendo le due incognite grado massimo uguale a due, la curva che descrive il punto C è una sezione conica. Ponete $\frac{aebf-dc}{c}$ $2p$ e avrete

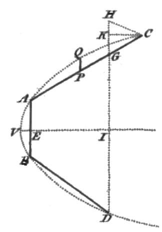
$$y^2\ \frac{2p}{f}xy\ \frac{dm}{f}y\ \frac{bd}{fc}x^2-\frac{bdm}{fc}x\ \ 0$$

E, risolvendo questo equazione per avere il valore di y, darà

$$y\ \ \frac{px}{f}\ \frac{dm}{2f}\pm\sqrt{\frac{p^2x^2}{f^2}\ \frac{bdx^2}{fc}\ \frac{pdmx}{f^2}-\frac{bdmx}{fc}\ \frac{d^2m^2}{4f^2}}$$

Da ciò si conclude che la curva è un'iperbole, se $\frac{bd}{fc}$ è positivo, o se, essendo negativo, è minore di $\frac{p^2}{f^2}$. Essa sarà una parabola se $\frac{bd}{fc}$ è negativo e uguale a $\frac{p^2}{f^2}$; un cerchio o un ellisse se $\frac{bd}{fc}$ è negativo e maggiore di $\frac{p^2}{f^2}$.

Problema. **58 -** Descrivere una parabola che passa per quattro punti



Soluzione. Siano questi quattro punti A, B, C, D; congiungete A con B e dividete AB in due parti uguali nel punto E. Tracciate una retta qualsiasi EV che supporrete un diametro della parabola e il punto V il vertice di questo diametro. Congiungete A e C e dal punto D tracciate ad AB la parallela DG che incontrerà AC in G, Ponete AB a, AC b, AG c e GD d. Su AC prendete un segmento AP di grandezza qualunque; dal punto p tracciate la parallela PQ ad AB e supponete che il punto Q appartenga alla parabola. Ponete AP x e PQ y. Prendete poi un'equazione qualsiasi della parabola che esprime la relazione esistente tra AP e PQ. Sia questa equazione y e $fx\pm\sqrt{g^2\ hx}$.

Se supponete AP o x 0, il punto P cadrà su A e PQ o y avrà due valori, uno zero e l'altro $-AB$. Poniamo, dunque, nell'equazione presa x 0, essa diverrà, y $e\pm\sqrt{g^2}$, cioè y $e\pm g$. Di questi due valori, il maggiore è y e g e il minore y $e-g$ $-AB$ $-a$. Nel caso di x 0 abbiamo visto che un valore di y era pure zero.

Pertanto si ha, $0\ \ e\ \ g$[47], e ciò dà $e\ \ -g$. Dalla seconda equazione $e - g\ \ -a$ si ricava, mettendo per e il suo valore $-g$ trovato prima, $-2g\ \ -a$, o $g\ \ \frac{a}{2}$. Così, invece dell'equazione che abbiamo considerato, avremo quest'altra $y\ \ -\frac{1}{2}a\ \ fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2\ \ hx}$.

Supponiamo ancora che AP o $x\ \ AC$ di modo che il punto P coincida con C, avremo nuovamente $PQ\ \ 0$. Invece di x nell'ultima equazione, scrivete AC o b e invece di y, 0 ed essa diverrà $0\ \ - - \frac{1}{2}a\ \ fb \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2\ \ hb}$. Ossia $\frac{1}{2}a - fx\ \ \sqrt{\frac{1}{4}a^2\ \ hx}$. E quadrando ogni membro $-afb\ \ f^2b^2\ \ bh$ ossia $f^2b - fa\ \ h$. Di conseguenza, invece dell'equazione supposta, avremo quest'altra

$$y\ \ -\frac{1}{2}a\ \ fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2\ \ f^2bx - fax}$$

Supponiamo di nuovo che AP o $x\ \ AG$ o c, avremo, PQ o $y\ \ -GD\ \ -d$. Scriviamo quindi, nell'ultima equazione c invece di x e $-d$ invece di y ed essa diverrà

$$-d\ \ -\frac{1}{2}a\ \ fc \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2\ \ f^2bc - fac}$$

Ossia

$$\frac{1}{2}a - d - fc\ \ \sqrt{\frac{1}{4}a^2\ \ f^2bc - fac}$$

e quadrando ogni membro e riducendo,

$$-ad\ \ d^2\ \ 2dcf\ \ e^2f^2\ \ f^2bc$$

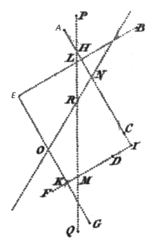
Si vede che essendo f l'incognita, l'equazione è di secondo grado. Se, per velocizzare, si pone $GC\ \ b - c\ \ k$ e si risolve l'equazione, si troverà

$$f\ \ \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{d^2c\ \ d^2k - adk}{ck^2}}$$

ed essendo f così determinato, l'equazione $y\ \ -\frac{1}{2}a\ \ fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2\ \ f^2bx - fax}$ è interamente determinata e, di conseguenza, anche la parabola di cui essa esprime le proprietà.

Ecco in quale maniera la si costruirà. Dal punto C tracciate la parallela CH a BD fino ad incontrare DG in H; prendete un medio proporzionale DK tra DG e DH; tracciate la retta CK e parallelamente a CK tracciate EI che passa per il punto medio di AB, E, e che incontra DG in I; prolungate poi IE fino a V in modo che abbiate $EV\ \ EI\ \ EB^2\ \ DI^2 - EB^2$, allora VE sarà un diametro della parabola, V sarà il vertice di questo diametro e $\frac{BE^2}{VE}$ sarà il suo parametro.

Problema. **59 -** Descrivere una sezione conica che passa per cinque punti dati.



Soluzione. Siano questi punti A, B, C, D, E. Tracciate AC, BE, che si tagliano reciprocamente in H. Tracciate la parallela DI a BE che incontrerà AC nel punto I; poi ad AC la parallela EK, che incontrerà in K il prolungamento di DI. Bisogna prolungare DI fino a F e EK fino a G per avere la proporzione

$$AK \times HC\ \ BH \times HE\ \ AI \times IC\ \ FI \times ID\ \ EK \times KG\ \ FK \times KD$$

E i punti F, G apparterranno, come si sa, alla sezione conica. Bisogna tuttavia osservare che se il punto H cade tra tutti i punti A, C, B, E o al di fuori di tutti questi punti, il punto I dovrà cadere tra tutti i punti A, C, D, F, ossia interamente al di fuori; e il punto K tra tutti i punti D, F, E, G o interamente al di fuori. Ma se il punto H cade tra i due punti A, C e fuori dai due altri punti B, E o tra i due punti B, e e fuori dagli altri due A, C, il punto I dovrà cadere tra due qualsiasi dei quattro punti A, C, F, D e fuori dagli altri due. Analogamente il punto K dovrà cadere tra due qualsiasi dei quattro punti D, E, F, G e fuori da due di questi stessi quattro punti. Ciò succederà prendendo IF, KG da una parte o dall'altra dei punti I e K, secondo come esige il problema. I punti

[47]Nota: È ben evidente che, nel caso di $x\ \ 0$, il maggior valore di y è zero, poiché l'altro suo valore è negativo e una quantità negativa è minore di zero. [N.d.T.]

F, G, essendo determinati, dividete AC e EG in due parti uguali, in N e in O così come BE e FD in L e in M. Tracciate NO, LM che si taglieranno reciprocamente in R e LM e NO saranno i diametri della sezione conica; il punto R ne sarà il centro e BL e FM saranno ordinate del diametro LM. Prolungate LM da entrambe le parti, se ciò è necessario, fino ai punti $P\, e\, Q$ in modo da avere

$$BL^2 \quad FM^2 \quad PL \times LQ \quad PM \times MQ$$

e i punti P e Q saranno i vertici della sezione conica e PQ ne sarà il diametro principale. Ponete $PL \times LQ$ $LB^2 \quad PQ \quad T$ e T sarà il parametro. Con queste due linee note, la sezione è determinata.

Rimane ora da mostrare in quale maniera bisogna prolungare da entrambe le parti la retta LM fino ai punti P e Q, perché si abbia la proporzione

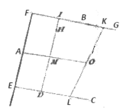
$$BL^2 \quad FM^2 \quad PL \times LQ \quad PM \times MQ$$

Dapprima $PL \times LQ \quad \left(PR - LR\right)\left(PR \ LR\right)$, poiché $PL \quad PR - RL$ e $LQ \quad RQ \ RL$ o $PR \ RL$. Infine $\left(PR - LR\right)\left(PR \ LR\right) \ PR^2 - RL^2$. Si ha anche $PM \times MQ \ \left(PR \ RM\right)\left(PR - RM\right) \ PR^2 - RM^2$. Pertanto

$$BL^2 - FM^2 \quad FM^2 \quad RM^2 - RL^2 \quad Pr^2 - RM^2$$

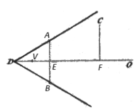
Di conseguenza $BL^2 - FM^2$ e FM^2, essendo dati, così come $RM^2 - RL^2$, ne segue che si avrà pure $PR^2 - RM^2$. E se a quest'ultima quantità aggiungete la quantità data RM^2, la somma sarà PR^2. Si conoscerà pertanto il semi diametro $PQ \quad QR$.

Problema. **60 -** Descrivere una sezione conica che passa per quattro punti dati e che, in uno di questi punti, è tangente a una retta data di posizione.



Soluzione. Siano A, B, C, D i quattro punti dati e AE la retta data di posizione che deve essere tangente alla sezione conica nel punto A. Unite due qualsiasi dei quattro punti, per esempio D e C e prolungate la retta DC, se è necessario, fino ad incontrare in E la retta tangente. Per il punto B, tracciate la parallela BF a DC, che incontrerà la tangente in F. Poi, dal punto D, tracciate una parallela DI ad AE che incontrerà BF in I. Sui prolungamenti delle rette BF, DI, se è necessario, prendete FG, HI di una lunghezza tale da avere la proporzione $AE^2 . CE \times ED \quad AF^2 \quad BF \times FG \quad DI \times IH \quad BI \times IG$ e i punti G, H saranno, come si sa, sulla sezione conica, purché prendiate FG, IH dal lato opportuno, rispetto ai punti F, I, come mostrato nel problema precedente. Dividete in due parti uguali le rette BG, DC, DH in K, L, M; tracciate KL, MA che si intersecano in O; e O sarà il centro, A, il vertice e MH l'ordinata del semi diametri AO. Una volta note tutte queste cose, la sezione conica è determinata.

Problema. **61 -** Descrivere una sezione conica che passa per tre punti dati e che, in due di questi punti, sia tangente a due rette date di posizione.



Soluzione. Siano A, B, C questi tre punti; le tangenti ai punti A e B, AD e BD; infine D l'intersezione comune delle due tangenti. Dividete AB in due parti uguali nel punto E, tracciate DE prolungandola fino ad incontrare in F la retta CF tracciata parallelamente ad AB e avrete DF per diametro della curva e AE e CF saranno le ordinate di questo diametro. Prolungate DF fino a O e su DO prendete OV medio proporzionale tra DO e EO[48]. Fate nello stesso tempo questa proporzione, $AE^2 \ CF^2 \ VE \times \left(VO \ OE\right) \ VF \times \left(VO \ OF\right)$. Il punto V sarà il vertice della curva e il punto O sarà il centro. Noti questi punti, la figura è determinata. In realtà, $VE \ VO - OE$ e, di conseguenza, $VE\left(VO \ OE\right) \ \left(VO - OE\right)\left(VO \ OE\right) \ VO^2 - OE^2$. Inoltre, siccome VO è medio proporzionale tra DO e EO, si avrà $VO^2 \ DO \times EO$; di conseguenza

$$VO^2 - OE^2 \quad DO \times OE - OE^2 \quad OE\left(DO - OE\right) \quad OE \times DE$$

[48]Il lettore deve ben vedere che essendo O il centro incognito della curva, le linee DO, VO, EO sono tutte incognite; ma nel momento che questo punto O sarà noto, anche queste tre linee lo saranno. Poiché l'equazione della sottotangente dell'ellisse e dell'iperbole (sole sezioni coniche che abbiano un centro) essendo $s \ \frac{\frac{1}{2}a^2 - x^2}{x}$, si ricava per l'ellisse $\frac{1}{4}a^2 \ x\left(s \ x\right)$ o $VO^2 \ EO \times DO$. Pertanto, tutte le operazioni che Newton compie con queste linee, sono puramente analitiche affinché il centro O sia determinato.

. Con analogo ragionamento si troverà,

$$VF\,(VO\ \ OF)\ \ VO^2 - OF^2\ \ DO \times OE - OF^2$$

di conseguenza si ha

$$AE^2\ \ CF^2\ \ DE \times EO\ \ DO \times OE - OF^2$$

Inoltre,

$$OF^2\ \ EO^2 - 2FE \times EO\ \ FE^2$$

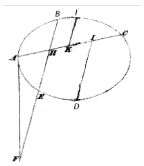
Così

$$DO \times OE - OF^2\ \ DO \times OE - OE^2\ \ 2FE \times EO - FE^2\ \ DE \times EO\ \ 2FE \times EO - FE^2$$

e allora

$$AE^2\ \ CF^2\ \ DE \times EO\ \ DE \times EO\ \ 2FE \times EO - FE^2\ \ DE\ \ DE\ \ 2FE - \frac{FE^2}{EO}$$

Così la quantità $DE\ \ 2EF - \frac{FE^2}{EO}$ è nota; sottraete dalla quantità pure nota $DE\ \ 2FE$ e resterà $\frac{FE^2}{EO}$ quantità nota; indicatela con N e avrete $\frac{FE^2}{N}\ \ EO$. Così conoscerete EO, che vi farà conoscere VO, medio proporzionale tra DO e EO.



Così per mezzo di qualche teorema di Apollonio, si risolvono in un modo assai spedito questi tipi di problemi, che possono esserlo anche con il solo aiuto dell'algebra. Per esempio, se si volesse risolvere così quello degli ultimi tre problemi, dove si tratta di far passare una sezione conica per cinque punti dati, A, B, C, D, E ; unite dapprima due qualunque dei cinque punti, A,C ; congiungetene poi altri due B, E e le rette AC, BE si incontreranno in un punto H. Tracciate parallelamente a BE la retta DI che incontrerà AC in I; tracciate ancora parallelamente a BE un'altra retta qualsiasi KL che incontra AC in K e la sezione conica in L

Supponete che la sezione conica sia data, affinché il punto K, essendo noto, lo sia anche il punto L, ponendo $AK\ \ x$ e $KL\ \ y$. Per esprimere la relazione che esiste tra le x e le y, prendete l'equazione più generale delle sezioni coniche, per esempio, $a\ \ bx\ \ cx^2\ \ dy\ \ exy\ \ y^2\ \ 0$, nella quale a, b, c, d, e indicano delle quantità determinate con i loro segni, e x e y quantità indeterminate. Ora, se possiamo trovare il valore delle quantità determinate, avremo la sezione conica. Supponiamo quindi che il punto L cada successivamente in A, C, B, E, D e vediamo cosa ne deriva. Dapprima, L coincide con A, si avrà, in questo caso, AK e KL, cioè, $x\ \ y\ \ 0$ e tutti i termini dell'equazione svaniranno. Così bisogna eliminare a da questa equazione, che diverrà $bx\ \ cx^2\ \ dy\ \ exy\ \ y^2\ \ 0$. Poi se L coincide con C, si avrà $AK\ \ x\ \ AC$ e $LK\ \ y\ \ 0$, Ponete quindi $AC\ \ f$ e sostituendo f per x e 0 per y, nell'equazione della curva, essa diverrà $bf\ \ cf^2\ \ 0$, ossia $b\ \ -cf$. E se si scrive ancora $-cf$ per b nell'equazione, essa si cambierà in

$$-cfx\ \ cx^2\ \ dy\ \ exy\ \ y^2\ \ 0$$

Poi, se il punto L coincide con punto B, si avrà, $AK\ \ x\ \ AH$ e $KL\ \ y\ \ BH$. Ponete $AH\ \ g$ e $BH\ \ h$ e scrivete g al posto di x, e h invece di y nell'equazione, essa diverrà

$$-cfg\ \ cg^2\ \ dh\ \ egh\ \ h^2\ \ 0$$

Se il punto L coincide con E, si avrà $AK\ \ AH$ o $x\ \ g$ e $KL\ \ y\ \ HE$. Invece di HE scrivete $-k$ (con un segno negativo perché HE cade dall'altro lato di AC) e sostituendo g per x e $-k$ per y, l'ultima equazione diviene

$$-cfg\ \ eg^2 - dk - egk\ \ k^2\ \ 0$$

Sottraete questa equazione dalla precedente e resterà

$$dh\ \ egh\ \ h^2\ \ dk\ \ egk - k^2\ \ 0$$

Dividete questo per $h\ \ k$ e il quoziente sarà $d\ \ eg\ \ h - k\ \ 0$, moltiplicatela per h e sottraete il prodotto $dh\ \ egh\ \ h^2 - hk$ 0 dall'equazione $-cfg\ \ cg^2\ \ dh\ \ agh\ \ h^2\ \ 0$ e il resto sarà

$$-cfg\ \ cg^2\ \ hk\ \ 0$$

da cui si ricava $c\ \ \frac{hk}{-g^2 fg}$. Infine se il punto L coincide con D, si avrà $AK\ \ x\ \ AI$ e $KL\ \ y\ \ DI$. Così scrivete invece di AI, m e invece di DI, n e sostituite m per x e n per y nell'equazione

$$-cfx\ \ cx^2\ \ dy\ \ exy\ \ y^2\ \ 0$$

ed essa diverrà

$$-cfm\ \ cm^2\ \ dn\ \ emn\ \ n^2\ \ 0$$

Dividete quest'ultima per n e avrete

$$\frac{-cfm\ cm^2}{n}\ d\ em\ n\ \ 0$$

Sottraete $d\ eg\ h - k\ \ 0$ e avrete come resto $\frac{-cfmcm^2}{n}\ cm - eg\ n - h\ k\ \ 0$ ossia

$$\frac{-cfm\ cm^2}{n}\ n - h\ k\ \ eg - em$$

Poiché i punti A, B, C, D, E sono dati, lo saranno anche le rette AC, AH, AI, BH, EH, DI. Essendo queste linee rappresentate rispettivamente da f, g, m, h, k, n ne segue che anche queste ultime quantità saranno note. Pertanto l'equazione

$$c\ \ \frac{hk}{fg - g^2}$$

ci dà il valore di c e perciò avremo il valore di $cg - cm$ dall'equazione $\frac{-cfmcm^2}{n}\ n - h\ k\ \ eg - em$

E, nota la quantità $eg - em$ o $c\left(g - m\right)$, lo sarà anche il fattore $g - m$, con l'altro fattore e pure noto. Trovato tutto ciò, l'equazione

$$d\ eg\ h - k\ \ 0$$

ossia $d\ \ k - h - eg$ ci darà il valore di d. Si conosce ora il valore di tutte le quantità determinate che entrano nell'equazione

$$cfx\ \ cx^2\ dy\ exy\ y^2$$

Con questa equazione, si determinerà, per mezzo del metodo di Descartes, il tipo di conica che risolve il problema.

Se si danno solo quattro punti A, B, C, E e la posizione di una retta AF tangente alla sezione conica che passa per uno dei quattro punti dati, A, si potrà più facilmente determinare il tipo di sezione conica in questo modo: avendo trovato prima le equazioni

$$cfx\ \ cx^2\ dy\ exy\ y^2$$
$$d\ \ k - h - eg$$
$$c\ \ \frac{hk}{fg-g}$$

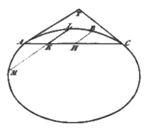
immaginate che la tangente AF vada ad incontrare la retta EH in F; poi che il punto L si muova sul perimetro della figura CDE fino a coincidere con il punto A; la ragione ultima di LK a AK starà a quella di FH ad AH come è facile vedere considerando la figura. Ponete $FH\ \ p$ e nel caso in esame, dove si cerca la ragione ultima di LK ad AK, si avrà $p\ \ g\ \ y\ \ x$, o $x\ \ \frac{gy}{p}$. Pertanto al posto di x nell'equazione $cfx\ \ cx^2\ dy\ exy\ y^2$, scrivete $\frac{gy}{p}$ e verrà

$$\frac{cfgy}{p}\ \ \frac{cg^2y^2}{p^2}\ dy\ \frac{egy^2}{p}\ \ y^2$$

Dividete tutto per y ed essa sarà ridotta a

$$\frac{cfg}{p}\ \ \frac{cg^2y}{p^2}\ d\ \frac{egy}{p}\ \ y$$

Ora, siccome si suppone che il punto L coincida col punto A, segue che $KL\ \ y$ è infinitamente piccolo o nullo; eliminate quindi i termini moltiplicati per y e l'equazione si riduce a $\frac{dfg}{p}\ \ d$. Ponete quindi $c\ \ \frac{hk}{fg-g^2}$ poi $d\ \ \frac{cfg}{p}$ e infine $e\ \ \frac{h-k-d}{g}$. E c, e, d, una volta trovati, l'equazione $cfx\ \ cx^2\ dy\ exy\ y^2$ determinerà la sezione conica.



Se infine si danno solo tre punti A, B, C e la posizione di due rette AT, CT che sono tangenti alla sezione conica in due di questi punti A e C, si otterrà, come sopra, l'equazione di una sezione conica $cfx\ \ cx^2\ dy\ exy\ y^2$. Poi se si suppone che l'ordinata KL sia parallela alla tangente AT e che inoltre questa ordinata sia prolungata fino ad incontrare la curva in un secondo punto M e che poi questa linea LM, scorrendo parallelamente a se stessa, si avvicina senza posa alla tangente AT, fino a che essa si confonda col punto A; è chiaro che a questo punto la ragione ultima di KL a KM sarà una ragione di uguaglianza; basta, per assicurarsene, guardare la figura. Così, in questo caso, KL e KM essendo uguali, cioè i due valori di y per il punto A, l'uno positivo e l'altro negativo, essendo uguali, ne risulta che nell'equazione $cfx\ \ cx^2\ dy\ exy\ y^2$, i termini dove y è di grado dispari, come $dy\ exy$ devono svanire rispetto al termine y^2, dove y è di grado pari; poiché altrimenti i due valori di y, l'uno positivo, l'altro negativo, non potrebbero essere uguali. Inoltre, AK o x è infinitamente minore di LK o y, e, di conseguenza, il termine exy infinitamente minore di y^2; lo si può quindi considerare come nullo rispetto a y^2. Ma il termine dy non svanisce, siccome è necessario, a meno che d non sia infinitamente piccolo, o piuttosto nullo, poiché altrimenti dy sarebbe infinitamente più grande di y^2. Supporremo quindi $d\ \ 0$ e toglieremo

dy; allora rimarrà soltanto $cfx\ \ cx^2\ \ exy\ \ y^2$, equazione di una sezione conica. Immaginiamo che le due tangenti si taglino reciprocamente in un punto T e che il punto L avanzi verso il punto C fino a confondersi con esso; la ragione ultima di KL a KC sarà quella di AT ad AC. Abbiamo chiamato $KL\ \ y$; $AK\ \ x$ e $AC\ \ f$; così $KC\ \ f-x$. Poniamo $AT\ \ g$ e la ragione ultima di y a $f-x$ sarà quella di g a f. L'equazione $cfx\ \ cx^2\ \ dy\ \ exy\ \ y^2$ si può scrivere in questo modo

$$cfx - cx^2\ \ exy\ \ y^2$$

ossia

$$\left(f-x\right) ex\ \ y\left(ex\ \ y\right)$$

ciò che ci dà la proporzione

$$y\ \ f-x\ \ cx\ \ ex\ \ y$$

Di conseguenza,

$$g\ \ f\ \ cx\ \ ex\ \ y$$

Ma quando il punto L cade sul punto C, $y\ \ 0$. Pertanto $g\ \ f\ \ cx\ \ ex$, ossia, dividendo l'ultimo rapporto per x, $g\ \ f\ \ c\ \ e$. Da cui si ricava, $e\ \ \frac{cf}{g}$. Pertanto se nell'equazione $cfx\ \ cx^2\ \ dy\ \ exy\ \ y^2$ si scrive $\frac{cf}{g}$ al posto di e, essa diverrà,

$$cfx\ \ cx^2\ \frac{cf}{g}\cdot xy\ \ y^2$$

equazione di una sezione conica. Infine, per il punto dato B, per il quale deve passare la sezione conica, tracciate parallelamente a LK o ad AT la retta BH, che incontrerà AC in H; e immaginate che LK si avvicini a BH fino a confondersi in essa. In questo caso, $AH\ \ x$ e $BH\ \ y$. Ponete la linea data $AH\ \ m$ e $BH\ \ n$, pure dato; e invece di x e y, sostituite rispettivamente m e n nell'equazione $cfx\ \ cx^2\ \frac{cf}{g}\cdot xy\ \ y^2$ ed essa diverrà

$$cfx\ \ cm^2\ \frac{cf}{g}\cdot mn\ \ n^2$$

che potete scrivere così

$$cfm - cm^2 - \frac{cf}{g}\cdot mn\ \ n^2$$

Ponete $f-m-\frac{fn}{g}\ \ s$ e avrete $csm\ \ n^2$. Dividete ogni membro per sm e verrà $c\ \ \frac{n^2}{sm}$.

Essendo la quantità c nota, l'equazione di una sezione conica $cfx\ \ cx^2\ \frac{cf}{g}\cdot xy\ \ y^2$ è determinata. E poi, con il metodo di Descartes, si troverà a quale sezione conica appartiene e la si potrà descrivere.

Fin qui ho risolto un gran numero di problemi di diversi tipologie, poiché nello studio delle scienze, gli esempi sono più utili dei precetti. Tra questi problemi, qualcuno è stato risolto senza il ricorso all'algebra, e ho voluto far comprendere con ciò che un problema che appare difficile al primo colpo d'occhio, non ha sempre bisogno dell'algebra per essere risolto. Ma è tempo ora di insegnare il metodo di risolvere le equazioni; poiché dopo che un problema è stato tradotto in equazione, bisogna saper ottenere i valori delle differenti radici di questa equazione, poiché è da esse che dipende la soluzione del problema.

Parte 2

TRATTATO DI ARITMETICA
Composizione e Risoluzione

Modo di Risolvere le Equazioni

(320)

Quando si è giunti a tradurre un problema in equazione, e quando questa è ridotta e ordinata, se le quantità note rappresentate dalle lettere, indicano dei numeri, bisogna sostituire a queste lettere i numeri che esse rappresentano e si avrà un'equazione numerica, la cui radice soddisferà l'equazione. Per esempio, nella divisione di un angolo in cinque parti uguali, se prendo r per il raggio del cerchio, q per la corda del doppio del complementare dell'angolo proposto e per x la corda del doppio del complementare della quinta parte di questo angolo, giungendo a questa equazione[49]

$$x^5 - 5r^2x^3 \;\; 5r^4x - r^4q \;\; 0$$

vi possono essere casi particolari dove il raggio r sarà espresso con un numero, così che q, corda del doppio del complementare dell'angolo proposto: per esempio se $r \;\; 10$ e $q \;\; 3$, sostituisco questi numeri al posto di r e q nell'equazione ed essa diviene

$$x^5 - 500x^3 \;\; 50000x - 30000 \;\; 0$$

e ricavando la radice di questa equazione, si avrà il valore di x, o la corda del doppio del complementare della quinta parte dell'angolo dato.

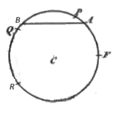
Natura delle radici delle equazioni

La radice di una equazione è un numero che, sostituito nell'equazione al posto della lettera che lo rappresenta, fa svanire tutti i termini.

Così, nell'equazione $x^4 - x^3 - 19x^2 \;\; 49x - 30 \;\; 0$, l'unità è una radice, poiché, se sostituita a x, cambia l'equazione in questa: $1 - 1 - 19 \;\; 49 - 30$ che si riduce a zero. Ma vi possono essere parecchie altre radici della stessa equazione; poiché se, al posto di x e di queste potenze, si sostituisce 2 e le sue potenze, essa diverrà $16 - 8 - 76 \;\; 98 - 30$, quantità dove tutti i termini si annullano. Poi se, al posto di x e delle sue potenze, si sostituisce 3 o -5 e le loro potenze, l'equazione sarà ancora ridotta a zero. In questi quattro casi, i termini positivi sono eliminati dai negativi. Così, siccome i numeri $1, 2, 3$ e -5 sostituiti successivamente nell'equazione, vi svolgono la stessa funzione di x, che è di ridurre a zero la totalità dei suoi termini, ognuno di questi numero è una radice dell'equazione.

Infatti, non è sorprendente che una equazione abbia parecchie radici, poiché uno stesso problema ha parecchie soluzioni.

Per esempio, se si cerca l'intersezione di due cerchi dati, è evidente che vi sono due intersezioni e, di conseguenza, l'equazione ha due soluzioni. Pertanto, l'equazione che determina l'intersezione ha due radici, una per ogni intersezione; a meno che, nelle quantità date, non vi sia qualche condizione che riduca la risposta a una sola intersezione.



Si tratti per esempio di trovare la quinta parte AP dell'arco APB. Allora l'equazione che darà la soluzione di questo problema, esprimerà la quinta parte di tutti gli archi che terminano nei punti A e B. Così essa esprimerà la quinta parte di ASB;la quinta parte di $APBSAPB$; quella di $ASBPASB$; quella di $APBSAPBSAPB$, tutte quinta parte di APB. E se dividete tutta la circonferenza in cinque parti uguali, PQ, QR, RS, SF, FP, la quinta parte di ognuno degli archi sopra, sarà rispettivamente, AF, AQ, AFS, AQR. Così, cercando la quinta parte di tutti gli archi che sottende la corda AB, bisogna, per determinare tutti i casi, dividere la circonferenza in cinque punti P, Q, R, S, F e, di conseguenza, l'equazione che deve contenere tutti questi casi, avrà cinque radici; poiché la quinta parte di ognuno di questi archi dipende dagli stessi dati; e si calcolerà l'equazione per la quintisezione di ognuno di essi, allo stesso modo; così si arriverà sempre alla stessa equazione finale, sia che si cerchi la quinta parte dell'arco APB o la quinta parte dell'arco ASB, o infine la quinta parte di un arco qualunque tra quelli che abbiamo indicato. Pertanto, se l'equazione in grado di determinare la quinta parte dell'arco APB, avesse una sola radice, siccome è anche la stessa equazione che dà la quinta parte dell'arco ASB,

[49]Per ben comprendere questo enunciato e sapere in quale maniera l'equazione è stata trovata, consultate il problema XXIX del primo libro e le note che vi si riferiscono.

seguirà che le cinque parti di due archi disuguali saranno uguali, poiché l'una e l'altra saranno espressi dall'unica radice di una stessa equazione.

È quindi necessario che l'equazione di ogni problema abbia tante radici quanti sono i casi che contiene il problema stesso dipendenti dagli stessi dati e determinati dallo stesso metodo di calcolo.

L'equazione può avere tante radici quante sono le dimensioni, ma non può averne di più.

Così l'equazione $x^4 - x^3 - 19x^2\ \ 49x - 30\ \ 0$ ha quattro radici, $1, 2, 3, -5$. Ma non ne ha di più. Infatti, ognuno di questi numeri, messi nell'equazione al posto di x, farà che tutti i termini si annullino reciprocamente, come abbiamo visto. Ma ogni altro numero, oltre questi quattro, sostituito al posto di x, non opererà questa eliminazione.

Del resto, si valuterà facilmente sia della natura sia del numero di radici di una equazione con il modo stesso in cui tale equazione si forma.

Per esempio, se vogliamo sapere in quale maniera si forma l'equazione le cui radici son o$1, 2, 3, -5$, basta supporre che x indichi questi numeri in un modo ambiguo, cioè, che $x\ \ 1$, $x\ \ 2$, $x\ \ 3$, $x\ \ -5$, oppure che $x - 1\ \ 0$, $x - 2\ \ 0$, $x - 3\ \ 0$, $x\ \ 5\ \ 0$. Se si moltiplica dapprima $x - 1$ per $x - 2$, si avrà $x^2 - 3x\ \ 2\ \ 0$, equazione di secondo grado che ha due radici 1 e 2. E se si moltiplica questa equazione per $x - 3$, si avrà $x^3 - 6x^2\ \ 11x - 6\ \ 0$, che ha tre radici; e questa moltiplicata ancora per $x\ \ 5$, dà $x^4 - x^3 - 19x^2\ \ 49x - 30\ \ 0$, come sopra. Così questa equazione essendo composta di quattro fattori, $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, $x\ \ 5$ moltiplicati tra loro, se uno di essi divenisse zero, il prodotto di tutti gli altri per questo deve essere zero. Ma quando nessuno dei fattori è zero, è impossibile che il prodotto totale sia zero.

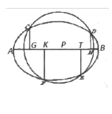
Di conseguenza l'equazione $x^4 - x^3 - 19x^2\ \ 49x - 30\ \ 0$ può essere uguale a zero solo in questi quattro casi; quando $x - 1\ \ 0$, $x - 2\ \ 0$, $x - 3\ \ 0$, $x\ \ 5\ \ 0$. Pertanto, i soli numeri $1, 2, 3, -5$ possono essere i valori di x o le radici dell'equazione. Si può dire altrettanto di ogni equazione, poiché possiamo immaginare che tutte sono scomponibili con una simile moltiplicazione, sebbene comunemente, sia molto difficile riconoscere i fattori particolari che la scompongono; poiché questa scomposizione di una equazione in fattori primitivi è propriamente la risoluzione dell'equazione, o l'estrazione delle sue radici. Note le radici, lo sono pure i fattori.

Vi sono diversi tipi di radici; le positive, come sono nell'esempio citato $1, 2, 3$ e le negative come -5. si riscontrano assai frequentemente radici impossibili, che si chiamano immaginarie.

Così nell'equazione $x^2 - 2ax\ \ b^2\ \ 0$ le due radici sono, $a\ \ \sqrt{a^2 - b^2}$ e $a - \sqrt{a^2 - b^2}$. Queste due radici sono reali, quando $a^2 > b^2$; ma sono impossibili o immaginarie, quando $a^2 < b^2$, poiché allora $a^2 - b^2$ è una quantità negativa e la radice quadrata di una tale quantità è impossibile, poiché ogni radice reale, sia positiva, sia negativa, moltiplicata per se stessa produrre sempre un quadrato positivo. Così la radice di un quadrato negativo è impossibile. Con un ragionamento simile, si vede che l'equazione $x^3 - 4x^2\ \ 7x - 6\ \ 0$ ha una radice reale, che è 2, e due altre, $1\ \ \sqrt{-2}$ e $1 - \sqrt{-2}$ che sono immaginarie. Poiché scrivendo una qualsiasi di queste tre radici, $2, 1\ \ \sqrt{-2}, 1 - \sqrt{-2}$, al posto di x, nell'equazione, tutti i termini si annullano reciprocamente. Le due radici $1\ \ \sqrt{-2}$ e $1 - \sqrt{-2}$ sono immaginarie, poiché serve, per ottenerle, ricavare la radice quadrata del numero negativo -2, cosa impossibile.

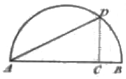
*Bisogna pure che nelle equazioni vi siano radici impossibili, altrimenti, nei problemi, alcuni casi impossibili si troverebbero possibil*i.

Se si vuole, per esempio, determinare l'intersezione di un cerchio con una retta; si esprima con una lettera la lunghezza del raggio e con un'altra lettera la distanza della retta dal centro del cerchio; e, giunti all'espressione che esprime l'intersezione, si metta, invece della lettera che indica la distanza della retta dal centro, un numero più piccolo del raggio, l'intersezione sarà possibile. Ma se, invece di questa lettera, si mette un numero più grande del raggio, l'intersezione sarà impossibile. Così l'equazione dovendo esprimere tutti i casi del problema, sia quelli che sono impossibili come quelli possibili, bisogna che le sue due radici possano divenire possibili o immaginarie.

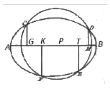


Così quando un cerchio $CDEF$ e un ellisse $ABCF$ si intersecano nei punti C, D, E, F e dai punti di intersezione si abbassano sulla retta AB data di posizione, le perpendicolari CG, DH, EI, FK e cercando la lunghezza di una qualsiasi di queste perpendicolari, si arriva alla fine a una equazione; bisognerà, poiché il cerchio taglia l'ellisse in quattro punti, che questa equazione abbia quattro radici, che saranno quattro perpendicolari. Se rimanendo fisso il centro del cerchio, il suo raggio di riducesse fino a che i due punti E, F si avvicinano sempre fino a confondersi e a formare un solo punto di contatto con l'ellisse e il cerchio, due delle radici dell'equazione, che esprimono le due perpendicolari EI, FK, confuse in questo caso in una sola retta, diverranno uguali. E se il cerchio diminuisse ancora in modo da non essere più tangente all'ellisse nei due punti E, F, ma continuasse a incontrarlo negli altri due C, D, allora le due perpendicolari EI, FK, divenute impossibili, si arriverebbe che delle quattro radici dell'equazione, le due che esprimevano queste perpendicolari diverranno immaginarie così come le perpendicolari. Così in tutte le equazioni, aumentando o diminuendo qualche quantità, due radici che erano diverse diventano uguali e finiscono per divenire impossibili. Da ciò si ha che il numero di radici impossibili è sempre pari.

Vi sono, tuttavia, casi in cui le radici delle equazioni sono possibili, quando la figura ce le mostra impossibili; ma ciò si ha solo perché una figura ha dei limiti che un'equazione non riconosce.

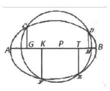


Per esempio, se nel cerchio ABD si dà il



diametro AB e segmento inscritto AD, così come la perpendicolare Dc e si cerca il segmento AC del diametro, si avrà $AC \ \frac{AD^2}{AB}$. Ora, in questa equazione, sia che AD sia più piccolo o più grande di AB, AC è sempre reale. Ma nella figura, quando AD è più grande del diametro, AC è una quantità impossibile. Infatti, nella figura si suppone che AD è inscritto nel cerchio e, di conseguenza, non può essere più grande del diametro del cerchio; invece nell'equazione, non vi è alcun limite di questo tipo, esige solo la condizione che le linee AB, AD, AC siano in proporzione continua. E poiché l'equazione non è limitata alle condizioni della figura, non è necessario non è necessario che sia costretta entro i limiti di queste condizioni. Una figura può dare limiti ai differenti casi di un problema, ma l'equazione l'abbraccia in tutta la sua generalità. Concludiamo quindi, dopo quanto detto, 1.° che nelle equazioni di grado dispari è impossibile che tutte le radici siano immaginarie. 2.° che le figure danno spesso alle quantità da cui dipendono tutte le radici, limiti tali che è impossibile superare senza annullare tutte le condizioni delle figure.

Le radici reali si dividono in positive e negative. Quando le positive sono diretta in un senso, le negative sono dirette nel senso opposto.



È così che cercando la perpendicolare CG, si cadrà in una equazione che avrà due radici positive CG e DH dirette dai punti C, D verso la base e due radici negative EI, FK partenti dai punti E, F e dirette dal basso in alto.

Supponiamo ancora che sulla retta AB verso la quale tendono tutte le perpendicolari, si dia un punto qualunque P e che si cerchi una parte PG della retta AB che si estenda dal punto P verso una delle perpendicolari, verso CG, per esempio, si arriverà a una equazione che avrà quattro radici PG, PH, PI, PK. La radice cercata PG, e tutte quelle che tendono da una stessa parte di PG, come PK, saranno positive; ma quelle che tendono dal lato opposto, come PH e PI, saranno negative.

Quando una equazione non contiene alcuna radice immaginaria, si può conoscere dai segni dei suoi termini, il numero delle radici positive, così come quello delle radici negative; poiché vi saranno tante radici positive quante sono le variazioni di segno da a $-$ e da $-$ a tra due termini successivi.: tutte le altre radici saranno negative.[50]

Nell'equazione $x^4 - x^3 - 19x^2 \ 49x - 30 \ 0$, i segni si susseguono in questo ordine: $, -, -, , -$. Dal primo al secondo conto una variazione e $-$, dal terzo al quarto, una variazione $-$ e , e dal quarto al quinto, un'altra variazione e $-$. Vi sono quindi tra variazioni e, di conseguenza, tre radici positive e pertanto una sola negativa. Ma quando di trovano radici immaginarie, questa regola non vale più, a meno che queste radici immaginarie non essendo né positive né negative, non le si consideri come radici ambigue. Così nell'equazione $x^3 \ px^2 \ 3p^2x - q \ 0$, i segni indicano una radice positiva e due negative; supponete $x \ 2p$ o $x - 2p \ 0$ e moltiplicate la prima equazione per $x - 2p \ 0$, di modo che, l'equazione risultante dovrà contenere una radice positiva ulteriore e verrà

$$x^4 - px^3 \ p^2x^2 - \left(6p^3 \ q\right) x \ 2pq \ 0$$

equazione che dovrà avere soltanto due radici positive e due negative: tuttavia, considerando le variazioni dei segni, si vede che essa ha quattro radici positive. Ciò deriva quindi da due radici immaginarie, che, per la loro ambiguità, si mostrano sotto la forma di radici negative nella prima equazione e sotto quella di positive nell'ultima.

Del resto, si può quasi sempre conoscere il numero delle radici immaginarie che si trovano in una equazione mediante questa regola.

Prendete una serie di frazioni i cui denominatori formano la progressione aritmetica $1, 2, 3, 4, 5$, *ecc. proseguendo così fino al numero che sarà l'indicatore del grado della vostra equazione; e per i numeratori delle vostre frazioni, prendete la serie di termini che formano i denominatori ma in ordine inverso. Dividete ognuna di queste frazioni per quella che la precede e ponete le frazioni risultanti da queste divisioni al di sopra dei termini medi dell'equazione. Poi elevate ogni termine medio al quadrato e moltiplicate questo quadrato per la frazione che*

[50]Nota: Questa è la classica regola di Cartesio presente su tutti i nostri testi di algebrici quando trattano le equazioni.

è al di sopra del termine corrispondente e poi esaminate se questo prodotto è maggiore o minore del rettangolo di due termini adiacenti a destra e a sinistra del termine che esaminate; se è più grande, ponete al di sotto di questo termine il segno ; se più piccolo il segno −. Scrivete sotto il primo e l'ultimo termine, il segno . E vi saranno nell'equazione tante radici immaginarie quante variazioni nei segni sottoscritti di e − e di − e .

Se si ha l'equazione $x^3\ px^2\ 3p^2x - q\ \ 0$, si formi dapprima questa serie di frazioni, $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$, poi si dividerà la seconda $\frac{2}{2}$ per la prima $\frac{3}{1}$ e la terza $\frac{1}{3}$ per la seconda $\frac{2}{2}$ e si porranno i quozienti $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ al di sopra dei termini medi, come segue:

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ x^3 & px^2 & 3p^2x & -q & 0 \\ & - & & & \end{array}$$

Poi, siccome il quadrato del secondo termine px^2 moltiplicato per la frazione $\frac{1}{3}$ che sta al di sopra di esso dà un prodotto $\frac{p^2x^4}{3}$ minore del prodotto del primo termine x^3 per il terzo termine $3p^2x$, prodotto che è $3p^2x^4$, si porrà sotto il termine px^2 il segno −. Ma siccome il quadrato $9p^4x^2$ del terzo termine $3p^2x$ moltiplicato per la frazione $\frac{1}{3}$, che è al di sopra di lui, è maggiore di zero e a maggior ragione, maggiore del prodotto negativo del secondo termine px^2 per $-q$, si porrà sotto questo terzo termine il segno . E scrivendo sotto il primo termine x^3 il segno e sotto l'ultimo $-q$ il segno , i segni sottoscritti formano la serie − , nella quale vi sono due variazioni, una da a −, e l'altra da − a e ciò indica che vi sono due radici immaginarie. Si troverà così che l'equazione $x^3 - 4x^2\ 4x - 6\ \ 0$ ha due radici immaginarie, così come l'equazione $x^4 - 6x^2 - 3x - 2\ \ 0$.

La prima di queste due equazioni si tratterà come quella dell'esempio precedente: mi occuperò pertanto solo della seconda. Formo quindi la serie di frazioni $\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$, divido la seconda per la prima, la terza per la seconda, e infine la quarta per la terza e ottengo questa serie di frazioni $\frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{3}{8}$ che pongo al di sopra dei termini medi dell'equazione.

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{3}{8} & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} & & \\ x^4 & * & -6x^2- & 3x & -2 & 0 \\ & & & - & & \end{array}$$

Moltiplicando poi il quadrato del secondo termine, che qui è zero, per la frazione $\frac{3}{8}$ che sta sopra il secondo termine, il prodotto è zero, che è tuttavia maggiore del rettangolo negativo $-6x^2$ di x^4per $-6x^2$. Così, sotto il termine che manca e che è rappresentato da un asterisco, scrivo il segno . Continuo per il resto come nell'esempio precedente e la serie dei termini sottoscritti è − , dove vi sono due variazioni che indicano due radici immaginarie. E operando allo stesso modo si troveranno nell'equazione

$$x^5 - 4x^4\ 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4\ \ 0$$

due radici immaginarie

$$\begin{array}{ccccccc} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & & \\ x^5 & -4x^4 & 4x^3 & -2x^2- & 5x & -4 & 0 \\ & & - & & & & \end{array}$$

Ma quando vi sono due o più termini mancanti, bisogna mettere sotto il primo termine mancante il segno −, sotto il secondo il segno , sotto il terzo il segno − e così di seguito, sempre variando i segni, eccetto il caso in cui il termine che precede e quello che segue immediatamente i termini assenti m avrebbero segni contrari; poiché allora bisogna sempre mettere sotto l'ultimo dei termini mancanti il segno . Così

$$\begin{array}{ccccccc} x^5 & ax^4 & * & * & * & a^5 & 0 \\ & & - & & - & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} x^5 & ax^4 & * & * & * & -a^5 & 0 \\ & & - & & & & \end{array}$$

La prima di queste equazioni ha quattro radici immaginarie e la seconda due. L'equazione seguente ha sei radici immaginarie

$$\begin{array}{ccccccccc} & \frac{3}{7} & \frac{5}{9} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{5}{9} & \frac{3}{7} & & \\ x^7 & -2x^6 & 3x^5- & 2x^4 & x^3 & * & * & -3 & 0 \\ & - & & - & & - & & & \end{array}$$

Ancora, si può conoscere se le radici immaginarie di una equazione devono essere poste tra le sue radici positive o tra le sue negative; poiché se si considerano nello stesso tempo i segni dei termini e i segni sottoscritti a ciascuno di questi termini, si avranno tante radici immaginarie positive quante variazioni di segni da un termine all'altro e tante radici immaginarie negative quanto permanenze nei segni da un termine all'altro. così nell'equazione

$$\begin{array}{ccccccc} x^5 & -4x^4 & 4x^3 & -2x^2- & 5x & -4 & 0 \\ & & - & & & & \end{array}$$

i segni sottoscritti hanno le variazioni , − e i termini al di sopra di questi segni essendo $-4x^4\ 4x^3 - 2x^2$, i loro segni sono −, , −, che, per due variazioni, indicano che vi sono due radici positive, in conseguenza le due radici immaginarie devono essere distribuite tra le positive[51]. Essendo tutti i segni dell'equazione $- - --$, si vede che vi sono tre variazioni che indicano tre radici positive e che, di conseguenza, le altre due sono negative. Tra le positive, ve ne sono due immaginarie; ne segue che l'equazione ha in realtà solo una radice positiva, due negative e altre due immaginarie. Se l'equazione fosse

$$\begin{array}{cccccccc} x^5 & -4x^4 & 4x^3 & -2x^2- & 5x & -4 & 0 \\ & & - & - & & & \end{array}$$

la prima variazione $- -$ dei segni sottoscritti annuncia una radice immaginaria, essendo i termini corrispondenti a questa prima variazione, $-4x^4 - 4x^3$, si vede che non vi è variazione tra un termine e l'altro, pertanto la radice immaginaria è negativa. E i termini corrispondenti all'ultima variazione dei segni sottoscritti $-$, essendo $-2x^2 - 5x$, non danno ancora variazione: ciò prova che una seconda radice immaginaria è ancora negativa. Così essendo tutti i segni dell'equazione $- - - --$, con una sola variazione, vi è solo una radice positiva, di conseguenza, ve ne sono quattro negative. Segue quindi da ciò che vi è una radice positiva, due negative e due immaginarie. In questo modo si determina la natura di tutte le radici, quando il numero delle immaginarie non è maggiore di quello che si può scoprire con la regola stabilita sopra; ma può succedere, sebbene assai raramente, che il numero delle radici immaginarie superi quello della regola presentata.

Trasformazione delle equazioni

Le radici positive di una equazione qualunque possono essere rese negative, e reciprocamente si può cambiare le negative in positive; basta, per operare tale trasformazione, cambiare i segni dei termini alterni, a partire dal secondo inclusivamente.

Così, nell'equazione $x^5 - 4x^4\ 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4\ 0$, si possono cambiare le sue tre radici positive in negative e le sue due radici negative in positive. Per questo basta cambiare i segni del secondo, quarto e sesto termine, ottenendo, $x^5\ 4x^4\ 4x^3\ 2x^2 - 5x - 4\ 0$. Quest'ultima equazione ha le stesse radici della precedente, con la sola differenza che quelle che erano positive nella prima, sono divenute negative nella seconda e viceversa; di modo che le due radici immaginarie che nell'una erano contate tra le positive, lo sono nell'altra tra le negative. Così essendo tolte queste due immaginarie, resterà una sola radice realmente negativa.

Vi sono anche altre trasformazioni di equazioni che hanno i loro differenti usi. *Per esempio, possiamo supporre che la radice di una equazione è uguale a una nuova incognita, più o meno una quantità nota arbitraria; e ci sarà possibile sostituire nell'equazione, al posto della vera radice, questa nuova quantità che si suppone esserle uguale.* In questo modo, possiamo aumentare o diminuire, di una quantità nota, le radici di una equazione; rendere positive alcune di quelle che erano negative, e viceversa; o anche renderle tutte positive, o tutte negative. Così nell'equazione $x^4 - x^3 - 19x^2\ 49x - 30\ 0$, se voglio aumentare le radici di una unità, fingiamo che $x\ 1\ \ y$ o che $x\ \ y - 1$ e, scrivendo nell'equazione, al posto di x e delle sue potenze, il suo nuovo valore $y - 1$ e le sue potenze, in questo modo:

$$\begin{array}{r|rrrrr} x^4 & y^4 - 4y^3 & + 6y^2 & - 4y & + 1 \\ - x^3 & - y^3 & + 3y^2 & - 3y & + 1 \\ - 19x^2 & & - 19y^2 & + 38y & - 19 \\ + 49x & & & + 49y & - 49 \\ - 30 & & & & - 30 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Risultato} \quad y^4 - 5y^3 - 10y^2 + 80y - 96 = 0$$

Le radici della nuova equazione $y^4 - 5y^3 - 10y^2\ 80y - 96\ 0$ saranno $2, 3, 4, -4$; e ognuna di esse è di una unità maggiore della sua corrispondente nell'equazione proposta, che ha per radici $1, 2, 3, -5$.

Se invece di x avessi sostituito nell'equazione proposta $y\ \frac{3}{2}$, mi sarebbe venuta l'equazione $y^4\ 5y^3 - 10y^2 - \frac{1}{4}y\ \frac{39}{16}\ 0$, nella quale vi sono due radici positive, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ e due radici negative $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{13}{2}$. Se invece di x si scrivesse $y - 6$, si avrebbe un'equazione le cui radici sarebbero $7, 8, 9, 1$ che sono tutte positive. E infine se mettessi per x, $y\ 4$, le radici diverrebbero tutte più piccole di quattro unità e sarebbero $-3, -2, -1, -9$, che sono, come si vede, tutte negative.

In questo aumentando o diminuendo le radici, si perviene a meglio scoprire le immaginarie che con la regola data in precedenza. Infatti, questa regola non ci fa cogliere alcuna radice immaginaria nell'equazione

[51]Infatti, essendo i segni dei termini $- -$ e i segni che gli sono sottoscritti $-$ si vede che il segno del primo termine con il suo segno sottoscritto sono $\mp$ e che il segno del secondo termine con il suo segno sottoscritto sono $\pm$. Vi è quindi una variazione dal primo al secondo termine. Ve ne è ancora uno dal secondo al terzo. Pertanto, vi sono due variazioni e, di conseguenza, due radici immaginarie positive.

$x^3 - 3ax^2 - 3a^3 \;\; 0$. Ma se si aumenta le sue radici della quantità a, scrivendo $y - a$ al posto di x, l'equazione risultante sarà $y^3 - 3ay^2 - a^3 \;\; 0$. Applicando ora la regola, si trovano due radici immaginarie.

Possiamo anche, con lo stesso metodo, far scomparire il secondo termine di una equazione qualunque. Ecco me bisogna fare: *Sostituite nell'equazione, invece dell'incognita, una nuova incognita aumentata del coefficiente del secondo termine dell'equazione, preso con un segno contrario, e dividete per l'esponente del primo.*

Per esempio, se si proponesse di far scomparire il secondo termine dell'equazione $x^3 - 4x^2 \;\; 4x - 6 \;\; 0$; essendo il coefficiente del secondo termine -4, lo divido per 3 e lo assegno con il segno a una nuova incognita y e la sommo $y \;\; \frac{4}{3}$ e sostituendola al posto di x nella proposta, verrà

$$
\begin{array}{rrrr}
y^3 + 4y^2 & + \frac{16}{3}y & + \frac{64}{27} & \\
-4y^2 & - \frac{32}{3}y & - \frac{64}{9} & \\
 & + 4y & + \frac{16}{3} & \\
 & & - 6 & \\
\hline
y^3 \quad * & - \frac{4}{3}y & - \frac{146}{27} & = 0.
\end{array}
$$

Si può ancora, con lo stesso metodo, far svanire il terzo termine di una equazione. Sia proposta l'equazione $x^4 - 3x^3 \;\; 3x^2 - 5x - 2 \;\; 0$ e si suppone $x \;\; y - e$. Sostituendo $y - e$ per x, nascerà questa equazione

$$y^4 - \left(4e \;\; 3\right) y^3 \;\; \left(6e^2 \;\; 9e \;\; 3\right) y^2 - \left(4e^3 \;\; 9e^2 \;\; 6e \;\; 5\right) y \;\; e^4 \;\; 3e^3 \;\; 3e^2 \;\; 5e - 2 \;\; 0$$

Il terzo termine di questa equazione è, $6e^2 \;\; 9e \;\; 3$ moltiplicato per y^2. Affinché questo termine svanisca serve che la quantità $6e^2 \;\; 9e \;\; 3$ divenga zero. Supponiamo infatti che sia zero, allo scopo di poter scoprire così il numero da sostituire a e e di far scomparire questo terzo termine. Questa supposizione ci dà pertanto l'equazione di secondo grado, $6e^2 \;\; 9e \;\; 3 \;\; 0$ che, divisa per 6, diviene $e^2 \;\; \frac{3}{2}e \;\; \frac{1}{2} \;\; 0$ e risolvendola si ha $e \;\; -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}$ ossia, $-\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$ che si riduce a $-\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$. Così $e \;\; -\frac{1}{2}$ o $e \;\; -1$. Di conseguenza $y - e$ sarà o $y \;\; \frac{1}{2}$ o $y \;\; 1$. E siccome si è sostituito nell'equazione $y - e$ al posto di x, bisogna sostituire $y \;\; \frac{1}{2}$ o $y \;\; 1$ al posto di $y - e$ e nell'equazione che ne risulterà, il terzo termine non ci sarà più e scomparirà pure sia che si sostituisce $y \;\; \frac{1}{2}$ o $y \;\; 1$. Nel primo caso, l'equazione risultante sarà

$$y^4 - y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{65}{16} \;\; 0$$

e nel secondo

$$y^4 \;\; y^2 - 4y - 6 \;\; 0$$

Si può anche moltiplicare o dividere le radici delle equazioni per numeri dati; ciò serve ad aumentare o diminuire il valore delle radici o anche a far scomparire le frazioni o le quantità radicali.

Se si ha, per esempio, l'equazione $y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} \;\; 0$, che si riduce, togliendo il divisore 27 a $z^3 - 12z - 146 \;\; 0$ e le radici di questa nuova equazione sono triple di quelle della precedente. Se si volesse ora diminuire le ultime, porrei, $2v \;\; z$ e verrebbe $8v^3 - 24v - 146 \;\; 0$; e dividendo tutto per 8, si ridurrebbe a $v^3 - 3v - \frac{73}{4} \;\; 0$, equazione le cui radici sono solo la metà di quelle della equazione $z^3 - 12z - 146 \;\; 0$. Infine, quando si avrà ottenuto il valore di v dall'ultima equazione, si porrà $2v \;\; z$, $\frac{1}{3}z \;\; y$ e $y \;\; \frac{4}{3} \;\; x$. In questo modo si conoscerà il valore della radice x nella prima equazione proposta, $x^3 - 4x^2 \;\; 4x \;\; 6 \;\; 0$.

Analogamente, per far svanire il radicale $\sqrt{3}$ dall'equazione $x^3 - 2x \;\; \sqrt{3} \;\; 0$, pongo $x \;\; y\sqrt{3}$ e l'equazione proposta diviene $3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} \;\; \sqrt{3} \;\; 0$ e dividendo tutto per $\sqrt{3}$ essa si riduce a $3y^3 - 2y \;\; 1 \;\; 0$.

Si può anche cambiare le radici delle equazioni in altre che siano in ragione inversa delle prime e in questo modo l'equazione si trova qualche volta ridotta a una forma più comoda.

Così la nostra ultima equazione $3y^3 - 2y \;\; 1 \;\; 0$, ponendo $y \;\; \frac{1}{z}$, si cambia in $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} \;\; 1 \;\; 0$ o, moltiplicando tutti i termini per z^3 e ordinando, rispetto alle potenze di z, si avrà $z^3 - 2z^2 \;\; 3 \;\; 0$. Si può ancora, con questo metodo, far svanire il penultimo termine di una equazione, purché si abbia prima eliminato il secondo come abbiamo fatto con l'esempio precedente. Ma se volete sbarazzare l'equazione dal penultimo termine, bisognerà dapprima far svanire il terzo. Questo metodo serve ancora a convertire la più piccola radice di una equazione nella più grande e, reciprocamente, la più grande nella più piccola; e ciò fornisce qualche applicazione utile, come si vedrà in seguito. Per esempio, data l'equazione $x^4 - x^3 - 19x^2 \;\; 49x - 30 \;\; 0$, le cui radici sono $1, 2, 3, -5$, se si sostituisce $\frac{1}{y}$ al posto di x, risulterà l'equazione $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{10}{y^2} \;\; \frac{49}{y} - 30 \;\; 0$ e moltiplicando tutti i termini per y^4 e dividendoli per 30, ordinando e cambiando i segni, essa diverrà $y^4 - \frac{49}{30}y^3 \;\; \frac{19}{30}y^2 \;\; \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} \;\; 0$, le cui radici sono $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}$;

dove si vede che la maggiore delle radici positive 3, della proposta è convertita nella più piccola $\frac{1}{3}$ e che quella che prima era la più piccola 1, è divenuta ora la più grande e che la radice negativa -5, che tra tutte le radici della proposta si allontanava maggiormente da zero, è ora quella che ne è più vicina.

Vi sono ancora altre trasformazioni delle equazioni; ma tutte si possono riportare alla specie di quella in cui abbiamo eliminato il terzo termine di una equazione, così non ne parleremo più. Diciamo piuttosto qualcosa dei limiti delle equazioni.

È evidente, del modo in cui si formano le equazioni, che i coefficienti del secondo termine, preso con un segno contrario, è uguale alla somma di tutte le radici; che il coefficiente del terzo termine è uguale alla somma dei prodotti due a due di tutte le radici; che il coefficiente del quarto termine, preso con il segno contrario, è uguale alla somma dei prodotti tre a tre di tutte le radici; che il coefficiente del quinto è uguale alla somma dei prodotti quattro a quattro di tutte le radici e così all'infinito.

Prendiamo $x\ \ a$, $x\ \ b$, $x\ \ -c$, $x\ \ d$, ecc., ossia $x-a\ \ 0$, $x-b\ \ 0$, $x\ c\ \ 0$, $x-d\ \ 0$; e moltiplicando successivamente tutte queste equazioni le une per le altre, avremo 1.° moltiplicando $x-a$ per $x-b$, $x^2-\big(a\ b\big)\,x\ ab\ \ 0$, dove si vede che il coefficiente del secondo termine, cambiando il suo segno $+\ a\ b$, somma delle radici a,b; e ab, coefficiente del terzo termine è uguale al prodotto delle due radici. Moltiplicando poi l'equazione trovata per $x\ c$, si avrà l'equazione di terzo grado

$$x^3-\big(a\ \ b-c\big)\,x^2\ \ \big(ab-ac-bc\big)\,x\ \ abc\ \ 0$$

Cambiando i segni dei coefficienti del secondo termine, si ha $a\ \ b-c$ che è la somma delle radici $a,b,-c$; il coefficiente del terzo termine, $ab-ac-bc$ è uguale alla somma dei prodotti di a per b, di a per $-c$ e di b per $-c$; e infine il coefficiente del quarto termine, cambiando il suo segno, è $-abc$ che è uguale al prodotto delle tre radici $a,b,-c$. Se si moltiplica ancora l'equazione di terzo grado per $x-d$, verrà l'equazione di quarto

$$x^4-\big(a\ \ b-c\ \ d\big)\,x^3\ \ \big(ab-ac-bc\ \ ad\ \ bd-cd\big)\,x^2\ \ \big(abc-abd\ \ bcd\ \ acd\big)\,x-abcd\ \ 0$$

nella quale il coefficiente del secondo termine, cambiando i segni, è $a\ \ b-c\ \ d$, somma di tutte le radici; il coefficiente del terzo termine, $ab-ac-bc\ \ ad\ \ bd-cd$ è la somma dei prodotti a due a due di tutte le radici; il coefficiente del quarto termine, cambiando i segni è $-abc\ \ abd-bcd-acd$, somma dei prodotti tre a tre di tutte le radici; e infine il coefficiente del quinto termine è il prodotto di tutte le radici quattro a quattro.

Da tutto ciò possiamo concludere che una equazione qualunque, dove nessun termine è frazionario o incommensurabile, contiene tra i divisori intero del suo ultimo termine, sia le sue radici commensurabili, sia il prodotto due a due, tre a tre, ecc. delle sue radici. Così quando si sarà ben sicuri che nessuno dei divisori dell'ultimo non è né una delle radici dell'equazione, né il prodotto di due o più radici, sarà ben evidente che l'equazione non ha alcuna radice, alcun prodotto due a due, o tre a tre, ecc. delle sue radici che non sia incommensurabile.

Supponiamo ora che i coefficienti dei termini di una equazione qualsiasi siano rispettivamente p,q,r,s,t,v; supponiamo inoltre che i segni di questi coefficienti siano cambiati in tutti i termini in cui essi devono essere. Osservando i segni che devono avere i diversi termini, si avrà $p\ \ a$, $pa\ \ 2q\ \ b$, $pb\ \ qa\ \ 3r\ \ c$, $pc\ \ bq\ \ ra\ \ 4s\ \ d$, $pd\ \ qc\ \ rb\ \ sa\ \ 5t\ \ e$, $pe\ \ qd\ \ rc\ \ sb\ \ ta\ \ 6v\ \ f$ e così di seguito, secondo il percorso della progressione. E a sarà la somma delle radici, b la somma dei quadrati ciascuna delle radici, c la somma dei cubi, d la somma delle quarte potenze, e la somma delle quinte, f la somma delle seste e così via; di modo che nell'equazione $x^4-x^3-19x^2\ \ 49x-30\ \ 0$, dove il coefficiente del secondo termine è -1, quello del terzo -19, quello del quarto 49, quello del quinti -30, bisognerà porre, $p\ \ 1$, $q\ \ 19$, $r\ \ -49$, $s\ \ 30$. Da ciò si ricaverà, $a\ \ p\ \ 1$, $b\ \ pa\ \ 2q\ \ 1\ \ 38\ \ 39$, $c\ \ pb\ \ qa\ \ 3r\ \ 39\ \ 19-147\ \ -89$, $d\ \ pc\ \ qb\ \ ra\ \ 4s\ \ -89\ \ 741-49\ \ 120\ \ 723$. Così la somma delle radici è 1, la somma dei quadrati delle radici è 39, la somma dei cubi è -89, e la somma delle quarte potenze è 723. Ora essendo le radici di questa equazione $1,2,3,-5$ e la loro somma $1\ \ 2\ \ 3-5\ \ 1$, è chiaro che essa si riduce a 1; la somma dei quadrati è $1\ \ 4\ \ 9\ \ 25\ \ 39$; quella dei cubi è $1\ \ 8\ \ 27-125\ \ -89$, e quella delle quarte potenze è $1\ \ 16\ \ 81\ \ 626\ \ 783$.

Limiti delle equazioni

È con il metodo precedente che si giunge a determinare i limiti entro i quali sono racchiuse le radici di una equazione, quando essa non contiene immaginari; poiché essendo ciascuno dei quadrati delle radici positivo, la loro somma sarà pure positiva e supererà il quadrato della radice maggiore. Per la stessa ragione, la somma delle quarte potenze della radice maggiore e la somma delle loro seste potenze supererà la sesta potenza della radice maggiore.

Se desiderate quindi conoscere il limite che nessuna radice può superare, cercate la somma dei quadrati delle radici e prendete la radice quadrata, essa sarà necessariamente maggiore della più grande delle radici dell'equazione. Vi avvicinerete sempre più al valore della radice maggiore, se estrarrete la radice quarta della somma delle quarte potenze; più vicino ancora se estrarrete la radice sesta della somma delle seste potenze e così di seguito.

Così, nell'equazione precedente, essendo la somma dei quadrati delle radici 39, ed essendo il valore più vicino di $\sqrt{39}\ \ 6\,\frac{1}{2}$, si vede che $6\frac{1}{2}$ è più lontano da zero di tutte le radici $1,2,3-5$ dell'equazione. Ma essendo la radice quarta della somma delle quarte potenze $\sqrt[4]{723}$ o $5\frac{1}{2}$, si avvicina ancora di più a -5, radice più lontana dallo zero .

Se tra la somma dei quadrati e la somma delle quarte potenze delle radici, si prende un medio proporzionale geometrico, esso sarà un poco più grande della somma dei cubi delle radici prese tutte con il segno positivo. Poi se si aggiunge a questo medio proporzionale la somma dei cubi, presi con il loro segno, cioè il segno con il quale lo si è trovato prima; se poi lo si sottrae e si prende la semisomma e semi differenza di queste due quantità, la semisomma sarà più grande della somma dei cubi di tutte le radici positive dell'equazione e la semi differenza più grande della somma dei cubi delle radici negative.

Pertanto, la più grande delle radici positive dell'equazione sarà più piccola della radice cubica di questa semisomma e la più grande delle radici negative sarà più piccola della radice cubica di questa semi differenza.

Così, nell'equazione precedente, il medio proporzionale tra la somma dei quadrati delle radici 39 e la somma delle loro quarte potenze 723, è circa 168. La somma dei cubi presa con il suo segno, è, come abbiamo trovato prima, -89. La semisomma di 168 e di -89 è $39\frac{1}{2}$; e la semi differenza di questi due stessi valori è $128\frac{1}{2}$. La radice cubica di $39\frac{1}{2}$ è circa $3\frac{1}{2}$,quantità maggiore della più grande radice positiva che è 3. La radice cubica di $128\frac{1}{2}$ è circa $5\frac{1}{21}$, quantità maggiore della radice negativa -5. Si vede, per esempio, quanto ci si può avvicinare al valore della radice di una equazione, quando ve ne è una sola positiva e una sola negativa. Tuttavia, ci si avvicinerà ancora di più, se, dopo aver cercato un medio proporzionale tra la somma delle quarte e la somma delle seste potenze delle radici dell'equazione, si cercherà ancora la somma delle quinte potenze delle radici e, prendendo la semisomma e la semi differenza di queste due quantità, si ricavasse la radice quinta di questa semisomma e la radice quinta di questa semi differenza. Poiché la radice quinta della semisomma supererà ancora, ma meno di prima, la più grande radice positiva dell'equazione; e la radice quinta della semi differenza supererà pure, ma meno di prima, la più grande radice negativa. Abbiamo prima visto che aumentando o diminuendo tutte le radici di una equazione, si poteva rendere una qualunque tra di esse, la più piccola di tutte, e poi convertire questa più piccola nella più grande; infine rendere tutte le radici negative, eccetto la più grande. Risulta da ciò che ci si può avvicinare ulteriormente a piacere al valore di una radice cercata.

Se in una equazione tutte le radici sono negative, tranne due, se ne può determinare il valore con il metodo seguente:

Avendo trovato, con il metodo precedente, la somma dei cubi delle due radici positive, quelle delle quinte e settime potenze di tutte le radici, cercate tra le somme delle quinte e delle settime potenze, un medio proporzionale geometrico e questo sarà, all'incirca, la differenza tra la somma delle seste potenze delle radici positive e la somma delle seste potenze delle radici negative; aggiungete quindi la somma delle seste potenze di tutte le radici a questo medio proporzionale, poi sottraetelo e la metà della prima quantità sarà la somma delle seste potenze delle radici positive e la metà della seconda, la somma delle seste potenze delle radici negative. Così, prendendo sia la somma dei cubi, sia la somma delle seste potenze delle due radici positive, raddoppiate la somma delle seste potenze e togliete il quadrato della somma dei cubi, ricavate la radice quadrato del resto e questa radice quadrata sarà la differenza dei cubi delle due radici positive. Ora, una volta che si ah la somma e differenza dei cubi, si hanno i cubi stessi. Ricavate quindi le loro radici cubiche e avrete, all'incirca, il valore delle due radici positive. E se si eseguisse una operazione analoga nelle potenze più elevate, si otterrebbe una approssimazione ancora maggiore delle due radici. Ma questo metodo di trovare i limiti non può essere che di poco uso a causa della difficoltà dei calcoli; e d'altronde si può applicare solo alle equazioni che non contengono immaginari. Insegnerò ora, per trovare i limiti, un altro metodo più semplice e che si estende a tutti i tipi di equazione.

Moltiplicate ognuno dei termini dell'equazione per l'esponente dell'incognita in questo termine, poi dividete il prodotto per la radice. Ricominciate la stessa operazione sull'equazione risultante e continuate fino ad arrivare a un resto che contiene solo due termini. Allora se quest'ultimo resto, così come in quelli di tutte le operazioni precedenti, voi sostituite per l'incognita un numero dello stesso segno del termine più elevato dell'equazione proposta e, per effetto della sostituzione, tutti questi resti hanno risultati dello stesso segno del termine più elevato dell'equazione proposta; il numero che avete sostituito per l'incognita sarà più grande della più grande radice positiva dell'equazione.

Se si propone per esempio l'equazione

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 \ 30x^2 \ 63x - 120 \ \ 0$$

moltiplico i termini di questa equazione per $5, 4, 3, 2, 1, 0$ ed essendo il prodotto

$$5x^5 - 8x^4 - 30x^3 \ 60x^2 \ 63x \ \ 0$$

lo divido per x e ciò la riduce a

$$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 \ 60x \ 63 \ \ 0$$

Moltiplico poi i suoi termini per $4, 3, 2, 1, 0$ e ottengo

$$20x^4 - 24x^3 - 60x^2 \ 60x \ \ 0$$

e dividendo tutto per x, viene

$$20x^3 - 24x^3 - 60x \ 60 \ \ 0$$

moltiplico per $3, 2, 1, 0$ e questo prodotto dà

$$60x^3 - 48x^3 - 60x \;\; 0$$

divido quest'ultima per $12x$ e ho

$$5x^2 - 4x - 5 \;\; 0$$

moltiplico per $2, 1, 0$ e ho

$$10x^2 - 4x - 5 \;\; 0$$

e dividendo per $2x$ ottengo

$$5x - 2 \;\; 0$$

Ora, il termine di grado più elevato dell'equazione, x^5, essendo positivo, cerco quale numero positivo sostituito al posto di x in ciascuno dei risultati ottenuti, così come nell'equazione proposta, li converte tutti in numeri positivi. Provo dapprima con 1, che sostituisco al posto di x in $5x - 2$, e la trasforma in 3; ma questo numero 1 sostituito in $5x^2 - 4x - 5$ la trasforma in -4, quantità negativa. Così il limite è maggiore di 1, provo quindi con 2 e sostituendolo al posto di x nei risultati, si ha

$5x - 2$		8
$5x^2 - 4x - 5$		7
$5x^3 - 6x^3 - 15x \;\; 15$	*che diviene*	1
$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 \;\; 60x \;\; 63$		79
$x^5 - 2x^4 - 10x^3 \;\; 30x^2 \;\; 63x - 120$		46

Così essendo i numeri $8, 7, 1, 79, 46$ tutti positivi, il numero 2 è più grande della maggiore radice positiva dell'equazione. Analogamente, se volessi cercare il limite delle radici negative, proverei sostituzioni di numeri negativi, o, invece di questo, cambierei in tutti i risultati e nell'equazione proposta i segni dei termini di due in due e sostituirei numeri positivi. Infatti, cambiando i segni dei termini di due in due, i risultati dell'equazione proposta divengono

$$\begin{array}{l} 5x \;\; 2 \\ 5x^2 \;\; 4x - 5 \\ 5x^3 \;\; 6x^3 - 15x - 15 \\ 5x^4 \;\; 8x^3 - 30x^2 - 60x \;\; 63 \\ x^5 \;\; 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 \;\; 63x \;\; 120 \end{array}$$

Scelgo tra questi risultati uno di quelli che hanno più segni negativi, per esempio, $5x^4 \;\; 8x^3 - 30x^2 - 60x \;\; 63$; sostituisco al posto di x i numeri 1 e 2, ciò che la converte rispettivamente in due numeri negativi -14 e -33. Così il limite è maggiore di -2; ma sostituendo il numero 3, si ottiene il numero positivo 234. Ora sostituisco lo stesso numero 3 negli altri risultati, così come nella proposta, e ottengo sempre numeri positivi. Da ciò concludo che il numero -3 è più grande di ogni radice negativa. Di conseguenza, 2 e -3 sono i limiti tra i quali sono racchiuse tutte le radici dell'equazione.

La conoscenza di questi limiti è utile per trovare le radici razionali di una equazione, così come per determinare le sue radici incommensurabili. Serve a risparmiarci tentativi inutili che ci farebbero cercare radici oltre i limiti che le racchiudono. Per esempio, se voglio conoscere se l'ultima equazione contiene radici razionali, è certo, per quanto visto, che esse possono trovarsi solo tra i divisori dell'ultimo termine 120; così dovrò sostituire successivamente ciascun di questi divisori al posto di x e se nessuno di essi riduce l'equazione a zero, concluderò che essa non ha radici razionali. Ma l'ultimo termine 120 ha un gran numero di divisori, che sono $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120$. E con il segno negativo $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -8, -10, -12, -15, -20, -24, -30, -40, -60, -120$. La sostituzione di tutti questi numeri sarebbe fastidiosa. Ma sapendo che tutte le radici sono racchiuse tra i limiti 2 e -3, siamo liberati da tale lavoro, poiché si tratta di sostituire solo i divisori dell'ultimo termine che sono compresi tra i limiti e questi sono $1, -1$ e -2; e se nessuno di questi numeri è una radice, si è sicuri che l'equazione non ha alcuna radice commensurabile.

Riduzione di equazioni per i divisori incommensurabili

Finora ho fornito i mezzi per ridurre le equazioni che hanno divisori razionali. Ma prima di concludere che una equazione di quarto, sesto o grado maggiore è irriducibile, bisogna aver verificato se non vi sono quantità sorde o incommensurabili; o far vedere se l'equazione non potrebbe essere divisa in due parti uguali, da ciascuna delle quali si può estrarre la radice. Il metodo seguente ci fornirà il metodo.

Ordinate l'equazione rispetto ai gradi dell'incognita e facendo passare tutti i termini in un solo membri affinché la totalità sia uguale a zero, abbiate cura che il termine in cui si trova la potenza massima dell'incognita sia sempre positiva. Poi, se l'equazione è quadrata (perché voglio così a causa dell'analogia far entrare questo caso)*, sottraete, da una parte e dall'altra l'ultimo termine e aggiungere, ancora da entrambe le parti, il quadrato della metà del coefficiente del termine di mezzo.*

Sia l'equazione $x^2 - ax - b \ 0$, sottraete da entrambe le parti $-b$ e aggiungete $\frac{1}{4}a^2$ e verrà $x^2 - ax \ \frac{1}{4}a^2 \ b \ \frac{1}{4}a^2$ e ricavando la radice quadrata di ciascun membri si avrà

$$x - \frac{1}{2}a \ \pm\sqrt{b \ \frac{1}{4}a^2}$$

ossia

$$x \ \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b \ \frac{1}{4}a^2}$$

Se l'equazione è di quarto grado, come $x^4 \ px^3 \ qx^2 \ rx \ s \ 0$, dove p, q, r, s indicano i coefficienti dei termini dell'equazione, con i loro segni; ponete

$$q - \tfrac{1}{4}p^2 \ \alpha \quad r - \tfrac{1}{2}\alpha p \ \beta \quad s - \tfrac{1}{a}\alpha^2 \ \zeta$$

indicate con n un divisore comune di β e di 2ζ. Bisogna che questo divisore comune sia un numero intero, ma non un quadrato; serve inoltre che, nel caso in cui uno dei due numeri p e r sarà dispari, questo divisore comune sarà dispari ed, essendo diviso per 4, lascia l'unità come resto. Indicate poi con$k$ un divisore come di $\frac{\beta}{n}$ se p è un numero pari: ma se p è dispari, k indicherà la metà di un divisore dispari di $\frac{\beta}{n}$. Infine k sarà zero se β è nullo. Sottraete il quoziente di questa divisione da $\frac{1}{2}pk$ e chiamate l la metà del resto. Ponete poi $\frac{\alpha nk^2}{2} \ Q$ e vedete se la divisione di $Q^2 - s$ per n è possibile e se inoltre, la radice di questo quoziente è razionale e uguale a l. Se tutte queste condizioni valgono, aggiungete a ogni membro dell'equazione $nk^2x^2 \ 2nklx \ nl^2$ e ricavando la radice avrete

$$x^2 \ \frac{1}{2}px \ Q \ \left(kx \ l\right)\sqrt{n}$$

.

Esempio. Sia proposta l'equazione $x^4 \ 12x - 17 \ 0$. Siccome p e q mancano, $r \ 12$ e $s \ -17$, se si sostituiscono questi numeri nelle formule, si avrà $\alpha \ 0$, $\beta \ 12$ e $\zeta \ -17$ e il divisore comune di $\beta\left(12\right)$ e di $2\zeta\left(-34\right)$ essendo solo il numero 2, sarà indicato con n. Pertanto $\frac{\beta}{n} \ 6$. Bisogna provare successivamente per k ognuno dei divisori di 6, che sono $1, 2, 3, 6$ e poi i valori rispettivi di l, che sono $-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$. D'altro canto si ha, $\frac{\alpha nk^2}{2} \ Q$ che si riduce a $k^2 \ Q$. E bisogna anche avere $\sqrt{\frac{Q^2-s}{n}}$,cioè $\sqrt{\frac{Q^2 17}{2}} \ l$. Se si scrivono successivamente per k i numeri pari $2, 6$, allora Q diviene rispettivamente 4 e 36 e $Q^2 - s$ sarà un numero dispari, che non potrà, di conseguenza, essere diviso per n che è 2; così bisogna rigettare i due numeri 2 e 6. Ma quando di mettono per k i due numeri 1 e 3, allora Q diviene 1 e 9 e $Q^2 - s$ diviene rispettivamente 18 e 98. Questi due numeri sono divisibili per n e si possono estrarre le radici dei loro quozienti. Queste radici sono rispettivamente ± 3 e ± 7. Tuttavia la sola radice -3 è uguale a uno dei valori di l. Pongo quindi $k \ 1$, $l \ -3$ e $Q \ 1$. Poi aggiungo a ogni membro dell'equazione, $nk^2x^2 \ 2nklx \ nl^2$, ossia $2x^2 - 12x \ 18$ e ciò mi dà $x^4 \ 2x^2 \ 1 \ 2x^2 - 12x \ 18$ che diviene, ricavando la radice quadrata, $x^2 \ 1 \ x\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$. Se volete anche evitare una estrazione di radice, fate $x^2 \ \frac{1}{2}px \ Q \ \left(kx \ l\right)\sqrt{n}$ e troverete, come prima, $x^2 \ 1 \ \left(x - 3\right)x \pm \sqrt{2}$. E ricavando nuovamente la radice di questa equazione, si ha $x \ \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \mp 3\sqrt{2}}$, cioè a causa delle variazioni dei segni, $x \ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \ \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$ e $x \ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$; poi $x \ \frac{1}{2}\sqrt{2} \ \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$ e $x \ \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$. Queste sono le quattro radici dell'equazione proposta, $x^4 \ 12x - 7 \ 0$. Ma di queste quattro radici le ultime due sono immaginarie.

Sia proposta l'equazione $x^4 - 6x^3 - 58x^2 - 114x - 11 \ 0$ e si indichino rispettivamente $-6, -58. - 114, -11$ con p, q, r, s e si avrà $\alpha \ -67$, $\beta \ -315$, $\zeta \ -1133\frac{1}{4}$. 3 è il divisore comune e unico dei numeri β e 2ζ, o -315 e di $-\frac{4533}{2}$. Così $n \ 3$ e $\frac{\beta}{n} \ -105$ avrà per divisori $3, 5, 7, 15, 21, 35, 105$ che si devono provare per k. Così provo dapprima 3, e dividendo $\frac{\beta}{n}$ o -105 per k o per 3, elimino il quoziente -35, che non proviene da $\frac{1}{2}pk$ o da -3×3 e il resto è 26, di cui bisogna che la metà 13 sia uguale a l . Ma $\frac{\alpha nk^2}{2} \ \frac{-6727}{2} \ -20$ è uguale a Q; si avrà quindi $Q^2 - s \ 411$ che è divisibile per n o 3, ma il quoziente 137 non dà una radice razionale. Così non accetto 3, e provo a metter $k \ 5$ e il quoziente della divisione di $\frac{\beta}{n}$ per k, o di -105 per 5 è -21, che, essendo sottratto da $\frac{1}{2}pk$, o da -3×5, dà come resto 6, la cui metà 3 sarà l. Poi $Q \ \frac{\alpha nk^2}{2} \ \frac{-6775}{2} \ 4$ e $Q^2 - s \ 16 \ 11$ è divisibile per n ed essendo il quoziente 9, ha una radice razionale 3 che è identica al valore trovato per l. Così concludo che $l \ 3$, $k \ 5$, $Q \ 4$ e $n \ 3$. Pertanto aggiungendo a ogni membro dell'equazione proposta $nk^2x^2 \ 2nklx \ nl^2$ o $75x^2 \ 90x \ 27$, si potrà estrarre la radice di ogni membro e si avrà $x^2 \ \frac{1}{2}px \ Q \ \left(kx \ l\right)\sqrt{n}$ ossia $x^2 - 3x \ 4 \ \pm\left(5x \ 3\right)\sqrt{3}$. E ricavando una seconda volta la radice, $x \ \frac{3 \pm 5\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{17 \pm \frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

Analogamente, se si proponesse l'equazione $x^4 - 9x^3 \ 15x^2 - 27x \ 9 \ 0$, scrivo rispettivamente $-9, 15, -27, 9$ per p, q, r, s; e viene $\alpha \ -5\frac{1}{4}$, $\beta \ -50\frac{5}{8}$ e $\zeta \ 2\frac{7}{64}$. I divisori comuni di β e di 2ζ sono $3, 5, 9, 15, 27, 45, 135$; ma 9 è un quadrato e i numeri $3, 15, 27, 135$ divisi per 4 non danno l'unità come resto, come dovrebbero fare, a causa del numero dispari p. Respingo quindi tutti questi numeri e mi restano 5 e 45 che bisogna provare per n. Poniamo dapprima $n \ 5$; bisognerà provare per k la metà di ognuno dei divisori dispari di $\frac{\beta}{n}$ p $-\frac{81}{8}$ che sono

$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, \frac{81}{2}$. Se si pone $k\ \ \frac{1}{2}$, il quoziente $-\frac{81}{4}$ che proviene dalla divisione di $\frac{\beta}{n}$ con k, essendo sottratto da $\frac{1}{2}pk\ \ -\frac{9}{4}$ dà come resto 18 che sarà $2l$. E $\frac{\alpha nk^2}{2}\ \ -2\ \ Q$ e $Q^2 - s\ \ -5$ è divisibile per $n\ \ 5$; ma il quoziente essendo -1, la radice risulta impossibile e tuttavia servirebbe che fosse 9. Così concludo che k non può essere $\frac{1}{2}$. Provo con $\frac{3}{2}$. Dividendo $\frac{\beta}{n}\ \ -\frac{81}{8}$ per $k\ \ \frac{3}{2}$, il quoziente sarà $-\frac{27}{4}$, che sottraggo da $\frac{1}{2}pk$ o $-\frac{27}{4}$ e il resto è zero. Così l sarà 0. Ora, in questa ipotesi, $\frac{\alpha nk^2}{2}\ \ 3\ \ Q$ e $Q^2 - s\ \ 0$. Pertanto il secondo valore di l dovendo uguagliare $\sqrt{\frac{Q^2-s}{n}}$ sarà ancora 0. Tutte le condizioni sono dunque verificate e ne concludo che $n\ \ 5$, $k\ \ \frac{3}{2}$. $l\ \ 0$ e $Q\ \ 3$. Così aggiungo a ogni membro dell'equazione proposta la quantità $nk^2x^2\ \ 2nklx\ \ nl^2$ che si riduce a $\frac{45x^2}{4}$. E estraendo la radice quadrata di ogni membro, viene, $x^2\ \ \frac{1}{2}px\ \ Q\ \ \left(kx\ \ l\right)\sqrt{n}$, ossia $x^2 - \frac{9}{2}x\ \ 3\ \ \frac{1}{2}x\sqrt{5}$.

Si perviene con lo stesso metodo a ridurre le equazioni letterali.

Se, per esempio, si ha $x^4 - 2ax^3\ \ \left(2a^2 - c^2\right)x^2 - 2a^3x\ \ a^4\ \ \ 0$, sostituendo rispettivamente $-2a, 2a^2 - c^2, -2a^3, a^4$ per p, q, r, s, si avrà $\alpha\ \ \ a^2 - c^2, \beta\ \ \ -ac^2 - a^3$, $\zeta\ \ \ \frac{3}{4}a^4\ \ \frac{1}{2}a^2c^2 - \frac{1}{4}c^4$. Il divisore comune di β e di 2ζ è $a^2\ \ c^2$ che sarà di conseguenza n, e $\frac{\beta}{n}\ \ -a$ per divisori 1 e a. Ma poiché n è di secondo grado e $k\sqrt{n}$ deve essere solo di primo, ne segue che k non deve avere alcun grado; non può quindi essere a e bisogna che sia 1. E dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k e sottraendo il quoziente $-a$ da $\frac{1}{2}pk$ o $-a$, resterà zero per il valore di l. Poi $\frac{\alpha nk^2}{2}$ o $a^2\ \ Q$ e $Q^2 - s$, o $a^4 - a^4\ \ 0$. Così il secondo valore di l è ancora zero, ciò che prova che i valori trovati per n, k, l, Q sono validi. Così aggiungo a ogni membro dell'equazione proposta, $nk^2x^2\ \ 2nklx\ \ nl^2$, cioè $a^2x^2\ \ c^2x^2$, allora la radice di ogni membro può essere estratta e viene

$$x^2\ \ \frac{1}{2}px\ \ Q\ \ \left(kx\ \ l\right)\sqrt{n}$$

ossia

$$x^2 - ax\ \ a^2\ \ \pm x\sqrt{a^2\ \ c^2}$$

E ricavando di nuovo la radice quadrata, si ha

$$x\ \ \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2\ \ c^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2\ \ c^2}}$$

Finora abbiamo applicato la regola dell'estrazione delle radici sorde, ma si può anche farne uso per trovare le radici razionali; basta per questo supporre $n\ \ 1$. Facendo questa ricerca, potremo nello stesso tempo occuparci di un'altra, che sarà vedere se un'equazione, non avendo alcun termine frazionario o con radicali, non conterrà qualche divisore di secondo grado, sia commensurabile sia incommensurabile. Se si dà, per esempio, l'equazione $x^4 - x^3 - 5x^2\ \ 12x - 6\ \ 0$, sostituendo rispettivamente $-1, -5, 12, -6$ per p, q, r, s, verrà $\alpha\ \ -5\frac{1}{4}$, $\beta\ \ 9\frac{3}{8}$. E in questa ipotesi di $n\ \ 1$, i divisori di $\frac{\beta}{n}$ o $\frac{75}{8}$ sono $1, 3, 5, 15, 25, 75$ dei quali bisogna servirsi della metà per k, poiché p è dispari. Se si prova dapprima con $k\ \ \frac{1}{2}$ si avrà $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk}\ \ -5$ e la sua metà $-\frac{5}{2}\ \ l$. Poi $\frac{\alpha nk^2}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ Q$; e $\frac{Q^2-s}{n}\ \ 6\frac{1}{4}\ \ \frac{25}{4}$, la cui radice è identica al valore trovato per l.

Concludo quindi che i valori presi per n, k, l, Q sono accettabili e che aggiungendo a ogni membro dell'equazione $nk^2x^2\ \ 2nklx\ \ nl^2$, cioè $6\frac{1}{4}x^2 - 12\frac{1}{2}x\ \ 6\frac{1}{4}$ sarà possibile estrarre la radice di ogni membro, ciò che darà, $x^2\ \ \frac{1}{2}px\ \ Q$ $\pm\left(kx\ \ l\right)\sqrt{n}$, ossia, $x^2 - \frac{1}{2}x\ \ \frac{1}{2}\ \ \pm\left(2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}\right)\times 1$. Ossia le due equazioni seguenti, $x^2 - 3x\ \ 3\ \ 0$ e $x^2\ \ 2x - 2\ \ 0$. Queste ultime due equazioni sono i fattori dell'equazione di quarto grado. Ma si trovano i divisori razionali di questa specie in un modo assai più rapido con il metodo che abbiamo insegnato in precedenza nella prima parte del libro.

Succede spesso che essendo i divisori di $\frac{\beta}{n}$ numerosi, il lavoro di provarli tutti per k risulti assai gravoso. Ecco un modo per velocizzare i tentativi. Cercate i divisori di $\alpha s - \frac{1}{4}r^2$, poiché tra di essi o tra le metà di quelli che sono dispari, deve essercene qualcuno che sia uguale a Q, In questo modo, nell'ultimo esempio, $\alpha s - \frac{1}{4}r^2\ \ -\frac{9}{2}$, avente per divisori $1, 3, 9$, bisogna che tra questi divisoti o tra le loro metà $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$ si trovi qualche numero uguale a Q. Così, avendo provato successivamente per k le metà dei divisori della quantità $\frac{\beta}{n}$, che sono $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}, \frac{75}{2}$ elimini tutti quelli che non trasformano la quantità $\frac{1}{2}\alpha\ \ \frac{1}{2}nk^2$, o $\frac{21}{8}\ \ \frac{1}{2}k^2$ in Q, cioè in qualcuno dei numeri, $1, 3, 9, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$. Così scrivendo rispettivamente per k, $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}$, ecc., verrà anche rispettivamente, $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$, ecc. per Q. E $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ sono i soli che si trovano ripetuti nella serie di numeri $1, 3, 9, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$. Così eliminando tutti gli altri, pongo $k\ \ \frac{3}{2}$ e ciò dà $Q\ \ -\frac{3}{2}$, oppure $k\ \ \frac{5}{2}$, che dà $Q\ \ \frac{1}{2}$. Si esamineranno questi due casi. Ma qui dentro bastano per le equazioni di quarto grado.

Si voglia ridurre l'equazione di sesto grado, $x^6\ \ px^5\ \ qx^4\ \ rx^3\ \ sx^2\ \ tx\ \ v\ \ 0$. Posti

$$\begin{array}{ccc} q - \frac{1}{4}p^2\ \ \alpha & r - \frac{1}{2}p\alpha\ \ \beta & s - \frac{1}{2}p\beta\ \ \gamma \\ \gamma - \frac{1}{4}\alpha^2\ \ \zeta & t - \frac{1}{4}\alpha\beta\ \ \mu & v - \frac{1}{4}\beta^2\ \ \theta \\ & \zeta\theta - \frac{1}{4}\mu^2\ \ \lambda & \end{array}$$

Prendete poi per n qualcuno dei divisori comuni di $2\zeta, \mu, 2\theta$ e serve che questo divisore comune sia un numero intero e non quadrato, né divisibile per un numero quadrato e che, inoltre, essendo diviso per 4 abbia come resto l'unità, quando qualcuno dei numeri p, r, t è dispari. Prendete per k qualcuno dei divisori interi della quantità

$\frac{\lambda}{2n^2}$, nel caso in cui p è un numero pari, o se p è dispari, prendete la metà di un divisore dispari. Infine nel caso in cui $\lambda\ \ 0$, anche $k\ \ 0$. Prendete $Q\ \ \frac{1}{2}\alpha\ \ \frac{1}{2}nk^2$ e per t qualche divisore della quantità $\frac{Qr-Q^2p-t}{n}$, se Q è un numero intero; o la metà di un divisore della stessa quantità de Q è una frazione con denominatore 2. Infine $l\ \ 0$ nel caso in cui la quantità $\frac{Qr-Q^2p-t}{n}\ \ 0$. Ponete $R\ \ \frac{1}{2}r-\frac{1}{2}Qp\ \ nkl$; poi verificate se R^2-v sarà divisibile per n e se si può estrarre la radice del quoziente e infine se questa radice sarà uguale a $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$ e a $\frac{Q^2pR-nl^2-s}{2nk}$. Se tutte queste condizioni sono verificate, chiamate questa radice m; e invece dell'equazione proposta scrivete questa,

$$x^3\ \ \frac{1}{2}px^2\ \ Qx\ \ R\ \ \pm\left(kx^2\ \ lx\ \ m\right)\sqrt{n}$$

Infatti, se si quadra ogni membro di questa equazione e si traspongono tutti i termini da una stessa parte, essa restituirà l'equazione proposta. Ma se in nessun caso tutte queste condizioni possono verificarsi e ci si è assicurati che l'equazione non ha divisori razionali, si può essere certi che l'equazione è irriducibile.

Esempio. Sia proposta l'equazione

$$x^6-2ax^5\ \ 2b^2x^4\ \ 2ab^2x^2\ \ \left(2a^3b-2a^2b^2-4ab^3\right)x^2\ \ 3a^2b^4-a^4b^2\ \ 0$$

scritti rispettivamente, $-2a, 2b^2, 2ab^2, 2a^3b-2a^2b^2-4ab^3, 0$ per p, q, r, s, t, v si avrà, $\alpha\ \ 2b^2-a^2$, $\beta\ \ 4ab^2-a^3$, $\gamma\ \ 2a^3b\ \ 2a^2b^2-4ab^3-a^4$, $\zeta\ \ -b^4\ \ 2a^3b\ \ 3a^2b^2-4ab^3-\frac{1}{4}a^4$, $\mu\ \ -\frac{1}{2}a^5\ \ 3a^3b^2-4ab^4$ e $\theta\ \ -a^2b^4\ \ a^4b^2-\frac{1}{4}a^6$. I termini $2\zeta, \mu, 2\theta$ hanno per divisore comune, a^2-2b^2, oppure $2b^2-a^2$, secondo che a^2 è maggiore o minore di $2b^2$. Sia $a^2>2b^2$ e si avrà $a^2-2b^2\ \ n$; poiché n deve sempre essere positivo. Poi $\frac{\zeta}{n}\ \ -\frac{5}{4}a^2\ \ 2ab\ \ \frac{1}{2}b^2$, $\frac{\mu}{n}\ \ -\frac{1}{2}a^3\ \ 2ab^2$ e $\frac{\theta}{n}\ \ \frac{1}{4}4a^4\ \ \frac{1}{2}a^2b^2$. Così

$$\frac{\zeta}{2n}\times\frac{\theta}{n}-\frac{\mu^2}{8n^2}\ \ \frac{\lambda}{2n^2}\ \ \frac{1}{8}a^6-\frac{1}{4}a^5b-\frac{1}{8}a^4b^2\ \ \frac{1}{2}a^3b^3-\frac{1}{8}a^2b^4$$

i cui divisori sono $1, a, a^2$. Ma siccome $k\sqrt{n}$ deve essere solo di primo grado e $\sqrt{n}$ è già di primo grado, ne segue che k deve avere grado zero e, di conseguenza, può essere solo un numero. Io elimino quindi a e a^2 e rimane solo $k\ \ 1$, D'altro canto, $\frac{1}{2}\alpha\ \ \frac{1}{2}nk^2$ dà 0 per Q e $\frac{Qr-Q^2p-t}{n}\ \ 0$; di conseguenza l, che deve essere uno dei divisori di quest'ultima quantità, sarà pure 0. Infine $\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}pQ\ \ nkl$ dà $R\ \ ab^2$ e $R^2-v\ \ -a^2b^4\ \ a^4b^2$, quantità che può essere divisa per n, o a^2-2b^2 ed essendo il quoziente a^2b^2, se ne può estrarre la radice che è ab. Questa radice presa negativamente, essendo confrontata alla quantità indefinita $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$ o $\frac{0}{0}$ lo si può considerare come essendo uguale, e lo è certamente alla quantità determinata, $\frac{Q^2pR-nl^2-s}{2nk}$. Così indico questa radice $-ab$ per m e invece dell'equazione proposta, posso scrivere

$$x^3\ \ \frac{1}{2}px^2\ \ Qx\ \ R\ \ \left(kx^2\ \ lx\ \ m\right)\sqrt{n}$$

cioè $x^3-ax^2\ \ ab^2\ \ \left(x^2-ab\right)\sqrt{a^2-2b^2}$; ci si può accertare della legittimità delle operazioni che hanno condotto a questa equazione, così come alla bontà dell'equazione stessa, quadrando ognuno dei suoi membri e trasportando tutti i termini da una stessa parte; in questo modo ritroveremo l'equazione

$$x^6-2ax^5\ \ 2b^2x^4\ \ 2ab^2x^2\ \ \left(2a^3b-2a^2b^2-4ab^3\right)x^2\ \ 3a^2b^4-a^4b^2\ \ 0$$

che è l'equazione che ci si era riproposti di ridurre.

Se si ha un'equazione di ottavo grado, come

$$x^8\ \ px^7\ \ qx^6\ \ rx^5\ \ sx^4\ \ tx^3\ \ vx^2\ \ wx\ \ z\ \ 0$$

e si pone $\alpha\ \ q-\frac{1}{4}p^2$, $\beta\ \ r-\frac{1}{2}\alpha p$, $\gamma\ \ s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{2}\alpha^2$, $\delta\ \ t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta$, $\varepsilon\ \ v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta^2$, $\zeta\ \ w-\frac{1}{2}\beta\gamma$, $\mu\ \ z-\frac{1}{4}\gamma^2$. Si cerca ora un divisore comune delle quantità, $2\delta, 2\varepsilon, 2\zeta, 8\mu$; serve che questo divisore comune sia un numero intero, non quadrato né divisibile per un quadrato; serve inoltre, nel caso un cui uno dei coefficienti p, r, t, w dei termini alterni sia dispari, che questo divisore comune, diviso per 4, lasci l'unità come resto. Se non se ne trova nessuna che soddisfa tutte queste condizioni, si può essere certi che l'equazione non è riducibile mediante l'estrazione di una radice sorda di secondo grado. E quando non sarà riducibile, sarà assai difficile trovare un semplice divisore comune delle quantità $2\delta, 2\varepsilon, 2\zeta, 8\mu$. Finora tutto il nostro lavoro è stato impiegato a esaminare se una equazione era riducibile o meno; ma siccome queste riduzioni sono raramente possibili, questo basta su questo tema.

Tuttavia osserveremo ancora che esiste un metodo simile che ci assicura se una equazione di decimo o di dodicesimo grado, o anche di un grado maggiore, è irriducibile.

Per esempio, se si ha questa

$$x^{10}\ \ px^9\ \ qx^8\ \ rx^7\ \ sx^6\ \ tx^5\ \ vx^4\ \ ax^3\ \ bx^2\ \ cx\ \ d\ \ 0$$

si porrà $\alpha\ \ q-\frac{1}{4}p^2$, $\beta\ \ r-\frac{1}{2}\alpha p$, $\gamma\ \ s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha^2$, $\delta\ \ t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{4}\alpha\beta$, $\varepsilon\ \ v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta^2$, $\zeta\ \ a-\frac{1}{2}p\varepsilon-\frac{1}{2}\alpha\delta-\frac{1}{2}\beta\gamma$, $\mu\ \ b-\frac{1}{2}\beta\delta-\frac{1}{4}\gamma^2$, $\theta\ \ c-\frac{1}{2}\gamma\delta$ e infine $\chi\ \ d-\frac{1}{4}\delta^2$. Bisognerà cercare il divisore comune dei cinque termini $2\varepsilon, 2\zeta, 8\mu, 4\theta, 8\chi$; servirà che questo divisore sia un numero intero, non quadrato; e se qualcuno dei coefficienti dei termini alterni p, r, t, a, c è dispari, servirà inoltre, che questo comune divisore, essendo esso stesso diviso per 4, lasci l'unità come resto.

Se si ha l'equazione di dodicesimo grado,

$$x^{12}\ px^{11}\ qx^{10}\ rx^9\ sx^8\ tx^7\ vx^6\ ax^5\ bx^4\ cx^3\ dx^2\ ex\ f\ \ 0$$

bisognerà porre, $\alpha\ \ q - \frac{1}{4}p^2$, $\beta\ \ r - \frac{1}{2}\alpha p$, $\gamma\ \ s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{4}\alpha^2$, $\delta\ \ t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta$, $\varepsilon\ \ v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2$, $\zeta\ \ a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma$, $\mu\ \ b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma^2$, $\theta\ \ c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta\ \chi\ \ d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta^2$, $\lambda\ \ e - \frac{1}{2}\delta\varepsilon$, $\rho\ \ f - \frac{1}{4}\varepsilon$. E bisognerà cercare un divisore comune, che sia un numero intero e non quadrato, dei sei termini $2\zeta, 8\mu, 4\theta, 8\chi, 4\lambda, 8\rho$; e se uno dei coefficienti p, q, r, t, a, x, e dei termini alterni, è dispari, bisognerà che questo divisore comune, diviso per 4, lasci l'unità come resto.

Si potrà procedere in questo fino all'infinito e si sarà certi che l'equazione sarà irriducibile, mediante l'estrazione di una radice sorda quadrata, tutte le volte che non si troverà un divisore comune con tutte le condizioni enunciate. Se quindi si trova un divisore n che dà la speranza di poter ridurre l'equazione, bisognerà seguire per le operazioni, l'esempio che presentiamo, riducendo una equazione di ottavo grado.

Cercate un numero quadrato tale che, essendo moltiplicato per n, se si aggiunge al prodotto l'ultimo termine z dell'equazione con il suo segno, la somma faccia ancora un quadrato. Ciò si eseguirà assai facilmente nel modo seguente: se n è un numero pari, aggiungete successivamente a z, i numeri $n, 3n, 5n, 7n, 9n, 11n$, ecc., ma se n è dispari, è a $4z$ che si dovrà aggiungere successivamente $n, 3n, 5n, 7n, 9n, 11n$, ecc.; e nell'uno o altro caso, bisognerà provare i termini, seguendo la progressione, fino a che si cade su qualche numero quadrato; e per questo, suppongo che si abbia presente la tabella dei quadrati. Ma se, prima che nessuna somma provata dia un quadrato, si trovasse che la radice quadrata di una qualunque di esse, aumentata della radice quadrata dell'eccesso di questa stessa somma sull'ultimo termine dell'equazione, dà una quantità maggiore del quadruplo del più grande dei coefficienti p, q, r, s, t, v, ecc., dell'equazione proposta, sarà inutile proseguire ulteriormente il tentativo, l'equazione è irriducibile. Ma se c'è il quadrato che si incontra dapprima, si chiamerà la sua radice S, se n è pari, o $2S$ se n è dispari; e si porrà $\sqrt{\frac{S^2-z}{n}\ \ h}$.Se n è pari, S e h devono essere numeri interi; ma se n è dispari, S e h possono essere numeri frazionari aventi 2 per denominatore. E se uno dei due è frazionario, bisogna che anche l'altro lo sia. Si dirà la stessa cosa dei numeri R e m, Q e l, p e k che si troverà in seguito. Bisognerà scrivere in una tabella tutti i numeri S e h che si troveranno compresi nei limiti assegnati. Poi bisognerà provare per k tutti i numeri che non daranno $nk \pm \frac{1}{2}p$ maggiore del quadruplo del più grande coefficiente dell'equazione. E in tutti i casi, si porrà $\frac{nk^2\alpha}{2}\ \ Q$. Dopo questo, si proveranno per l tutti i numeri che non renderanno $nl \pm Q$ maggiore del quadruplo del più grande coefficiente dell'equazione. E servirà sempre che, $\frac{-npk^2 2\beta}{4}\ \ nkl\ \ R$. Infine servirà successivamente provare per m tutti i numeri che non renderanno $nm \pm R$ maggiore del quadruplo del più grande coefficiente dell'equazione e vedere per ogni caso se si ha, $s - Q^2 - pR\ \ nl^2\ \ 2H$ e $H\ \ nkm\ \ S$ e se questo S è uno dei numeri precedentemente messi per S nella tabella; e se inoltre, il numero che è stato messo per h nella tabella, è uguale alle tre quantità $\frac{2RS-w}{2mn}$, $\frac{2QSR^2-v-m^2n}{2nl}$ e $\frac{pS2QR-t-2nlm}{2nk}$. Se si trova un caso in cui tutte queste condizioni sono soddisfatte, invece dell'equazione proposta, si scriverà quest'altra

$$x^4\ \frac{1}{2}px^3\ Qx^2\ Rx\ S\ \ \left(kx^3\ lx^2\ mx\ h\right)\sqrt{n}$$

Esempio. sia proposta l'equazione

$$x^8\ 4x^7 - x^6 - 10x^5\ 5x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 10x - 5\ \ 0$$

si avrà $q - \frac{1}{4}p^2\ \ -1-4\ \ -5\ \ \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha\ \ -10\ 10\ \ 0\ \ \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha^2\ \ 5 - \frac{25}{4}\ \ -\frac{5}{4}\ \ \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta\ \ -5\ \frac{5}{2}\ \ -\frac{5}{2}\ \ \delta$, $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2\ \ -10 - \frac{25}{8}\ \ -\frac{105}{8}\ \ \varepsilon$, $w - \frac{1}{2}\beta\gamma\ \ -10\ \ \zeta$, $z - \frac{1}{4}\gamma^2\ \ -5 - \frac{25}{64}\ \ -\frac{345}{64}\ \ \mu$. Così $2\delta, 2\varepsilon, 2\zeta, 8\mu$ sono rispettivamente $-5, -\frac{105}{4}, -20, -\frac{345}{4}$. queste quantità hanno per divisore comune 5, che, diviso per 4 dà come resto 1, come doveva essere a causa del coefficiente dispari s. Così, avendo trovato un divisore comune n o 5 che mi dà la speranza di ridurre l'equazione, ed essendo questo divisore dispari, aggiungo successivamente a $4z$ o a -20, i numeri $n, 3n, 5n, 7n, 9n$, ecc., o $5, 15, 25, 35, 45$,ecc., e ottengo $-15, 0, 25, 60, 105, 160, 225, 300, 385, 480, 585, 700, 825, 960, 1105, 1260, 1425, 1600$, tra i quali si trovano solo i numeri $0, 25, 225, 1600$ che sono quadrati. Per questo, prendo la metà delle loro radici $0, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 20$, li scrivo in una tabella, per S; e scrivo nella stessa tabella, per h, $\sqrt{\frac{S^2-z}{n}}$, cioè $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 9$, valori di h che corrispondono rispettivamente ai valori $0, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 20$ di S. Ma se nella formula, $S\ \ nh$, si scrive 20 per S e 9 per h, si avrà 65, numero maggiore del quadruplo del più grande coefficiente dell'equazione. Io non considero quindi 20 e 9 e porto nella tabella soltanto gli altri numeri, come si vede sotto.

$$\begin{array}{c|l} h & 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{2} \\ \hline S & 0, \frac{5}{2}, \frac{15}{2} \end{array}$$

Essendo le cose così disposte, provo per k tutti i numeri che non renderanno la formula $\frac{1}{2}p \pm nk$ o $2 \pm 5k$ maggiore del quadruplo del più grande coefficiente dell'equazione, che è qui 40. Provo quindi i numeri $-8, -7-$

$6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; e pongo $\frac{nk^2\alpha}{2}\;\; \frac{5k^2-5}{2}\;\; Q$ e mettendo successivamente per k i valori posti prima, avremo così rispettivamente per Q i valori seguenti: $\frac{315}{2}, 120, \frac{175}{2}, 60, \frac{75}{2}, 20, \frac{15}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{15}{2}, 20, \frac{75}{2}, 60, \frac{175}{2}, 120$. Siccome $Q \pm nl$ non deve superare 40, a maggior ragione, Q da solo non deve superarlo; di conseguenza, è facile vedere che serve eliminare $\frac{315}{2}, 120, \frac{175}{2}, 60$, così come i loro numeri corrispondenti, $-8, -7, -6, -5, 6, 6, 7$; così i soli che bisogna provare per k sono $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. E quelli da provare rispettivamente per Q sono, $\frac{25}{2}, 20, \frac{15}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{15}{2}, 20, \frac{75}{2}$. Proviamo quindi -1 per k e 0 per Q, e in questo caso, bisognerà ancora provare per l tutti i numeri che renderanno $Q \pm nl$ maggiore di 40, cioè tutti i numeri che stanno tra -10 e -10. Si dovrà provare così per R tutti i numeri $\frac{2\beta-npk^2}{4}\;\; nkl$ o $-5-5l$, ossia $-55, -50, -45, -40, -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 3$ tra i quali, i primi tre e l'ultimo, essendo maggiori di 40 andranno esclusi. Proviamo ancora per $l\;\; -2$ e per $R\;\; 5$; in questo caso bisognerà provare per m tutti i numeri che non renderanno $R \pm nm$ o $5 \pm 5m$ maggiore di 40; cioè, i numeri che stanno tra 7 e -9. Poi bisognerà vedere se, ponendo $s - Q^2 - pR\;\; nl^2$, cioè $5 - 20\;\; 20$ o $5\;\; 2H$, vedere se $H \pm nkm$ o $\frac{5}{2} - 5m\;\; S$; o anche se tra i numeri $-\frac{65}{2}, -\frac{55}{2}, -\frac{45}{2}, -\frac{35}{2}, -\frac{25}{2}, -\frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}, \frac{35}{2}, \frac{45}{2}, \frac{55}{2}, \frac{65}{2}$ non se troverà qualcuno uguale a qualcuno dei numeri $0, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}$ che è stato messo nella tabella per S. Qui se ne incontrano quattro che sono $-\frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}$ che corrispondono ai numeri $\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{7}{2}$ che sono stati scritti per h nella tabella, secondo che si è sostituito $2, 1, 0, -1$ per m. Ma se proviamo $S\;\; -\frac{5}{2}$ e $m\;\; 1$ e $h\;\; \pm\frac{3}{2}$, verrà

$$\begin{array}{ccc} \frac{2RS-w}{2mn} & \frac{-2510}{10} & -\frac{5}{2} \\ \frac{2QSR^2-v-nm^2}{2nl} & \frac{2510-5}{-20} & -\frac{3}{2} \\ \frac{pS2QR-t-2nlm}{2nk} & \frac{-10520}{-10} & -\frac{3}{2} \end{array}$$

così come in tutti i casi, ci viene $h\;\; -\frac{3}{2}$, concludo che, tutti i numeri sono accettabili; di conseguenza, invece dell'equazione proposta scriverò quest'altra

$$x^4\;\; \frac{1}{2}px^3\;\; Qx^2\;\; Rx\;\; S\;\; \left(kx^3\;\; lx^2\;\; mx\;\; h\right)\sqrt{n}$$

ossia

$$x^4\;\; 2x^3\;\; 5x - 2\frac{1}{2}\;\; \left(-x^3 - 2x^2\;\; x - 1\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}$$

E quadrando ogni membro ne deriverà pure l'equazione di ottavo grado che ci si era proposto di ridurre.

Se dopo avere provato tutti i numeri, i valori trovati in ogni caso, per h, non fossero stati tutti uguali tra loro, questa sarebbe una prova che l'equazione proposta sarebbe stata irriducibile per l'estrazione di una radice sorda quadrata.

Salto qui qualche metodo più rapido che si sarebbe potuto impiegare, perché il mio scopo era piuttosto far vedere la possibilità di simili riduzioni che insegnare la pratica. Essi non possono essere di alcun uso, vista la loro grande difficoltà, e i pochi casi in cui riescono. Del resto li si chiama *riduzioni per l'estrazione di radici sorde quadrate*.

Si potrebbe ancora porre qui la riduzione delle equazioni per estrazione di radici sorde cubiche. Ma siccome esse sono assai raramente utili, non ne farò menzione.

Vi sono tuttavia alcune riduzioni conosciute delle equazioni cubiche che il lettore potrebbe rimpiangere di non trovare qui. Sia proposta, per esempio, l'equazione cubica $x^3 * qx\;\; r\;\; 0$, che manca del secondo termine (poiché abbiamo visto in precedenza che ogni equazione cubica può essere ricondotta a questa forma). Supponiamo che $x\;\; a\;\; b$, si avrà $a^3\;\; 3a^2b\;\; 3ab^2\;\; b^3$ (cioè x^3)$qx\;\; r\;\; 0$; supponiamo ancora $3a^2b\;\; 3ab^2\;\; qx\;\; 0$ ciò che dà (poiché $3a^2b\;\; 3ab^2\;\; 3abx$), $3abx\;\; qx\;\; 0$. Ne seguirà che $a^3\;\; b^3\;\; r\;\; 0$. Dalla prima, ricavo $b\;\; -\frac{q}{3a}$ e di conseguenza, $b^3\;\; -\frac{q^3}{-27a^3}$ e, sostituendo questo valore di b^3 nella seconda equazione, essa diviene $a^3 - \frac{q^3}{27a^3}\;\; r\;\; 0$, ossia, $a^6\;\; ra^3\;\; \frac{q^3}{27}$. E risolvendo questa equazione secondo il metodo delle equazioni di secondo grado, si avrà $a^3\;\; -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2\;\; \frac{q^3}{27}}$. E ricavando la radice cubica, si avrà il valore di a. Ma abbiamo visto prima che $b\;\; -\frac{q}{3a}$ e $x\;\; a\;\; b$, pertanto $a - \frac{q}{3a}$ sarà la radice dell'equazione proposta.

Per esempio, se si da l'equazione $y^3 - 6y^2\;\; 6y\;\; 12\;\; 0$. Per eliminare il secondo termine, porrò $x\;\; 2\;\; y$ e otterrò $x^3 * -6x\;\; 8\;\; 0$, dove $q\;\; -6$, $r\;\; 8$, $\frac{1}{4}r^2\;\; 16$, $\frac{q^3}{27}\;\; -8$, $a^3\;\; -4 \pm \sqrt{8}$, $a - \frac{q}{3a}\;\; x$ e $x\;\; 2\;\; y$. Pertanto si ha,

$$y\;\; 2\;\; \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}\;\; \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}}$$

Con questo metodo si trovano le radici di tutte le equazioni cubiche quando q è positivo, o quando essendo q negativo, $\frac{q^3}{27}$ non è maggiore di $\frac{1}{4}r^2$, cioè, *quando due radici dell'equazione sono impossibili o immaginarie*. Ma quando q è negativo e $\frac{q^3}{27}$ è maggiore di $\frac{1}{4}r^2$, le radici x o y dell'equazione si presentano allora sotto una forma impossibile, poiché la radice quadrata di $\sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{q^3}{27}}$ è una quantità immaginaria; *e tuttavia è allora che le tre radici sono reali.* Esse dipendono tutte e tre, e allo stesso modo, dai coefficienti q e r dell'equazione; sembrerebbe quindi che essi debbano essere determinate tutte e tre dalla stessa legge che ne fa ricavare una; *ma è impossibile determinarle.*

Nella nostra ipotesi, il valore di x è rappresentato da $a - \frac{q}{3a}$; questo binomio può avere un solo valore, mentre x deve averne numerosi, pertanto questa ipotesi è impossibile; non lo è da meno supponendo $a^3 \; b^2 \;\; \pm r$ e $3ab \;\; \pm q$. Non è sorprendente che da una ipotesi impossibile non si possa ricavare alcuna conclusione possibile.

Ecco tuttavia un altro modo di esprimere queste radici. Abbiamo supposto che $a^3 \; b^3 \; r \;\; 0$. Se da questa equazione sottraiamo $a^3 \;\; r$, ossia $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 \; \frac{q^3}{27}}$, resterà $b^3 \;\; -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}r^2 \; \frac{q^3}{27}}$. Di conseguenza

$$a \;\; \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}r \;\; \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 \; \tfrac{q^3}{27}}} \quad b \;\; \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 \; \tfrac{q^3}{27}}}$$

oppure

$$a \;\; \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 \; \tfrac{q^3}{27}}} \quad b \;\; \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}r \;\; \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 \; \tfrac{q^3}{27}}}$$

E allora, poiché $x \;\; a \; b$ si ha

$$x \;\; \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}r \;\; \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 \; \tfrac{q^3}{27}}} \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 \; \tfrac{q^3}{27}}}$$

Si possono anche ottenere le radici di equazioni di quarto grado con il metodo delle radici dell'equazione cubica.

Cominciate col far scomparire il secondo termine e sia l'equazione risultante $x^4 \; qx^2 \; rx \; s \;\; 0$. Immaginate che questa equazione sia il prodotto di due equazioni di secondo grado, $x^2 \; ex \; f \;\; 0$ e $x^2 - ex \; g \;\; 0$, o che l'equazione

$$x^4 * \left(f \; g - e^2\right) x^2 \;\; \left(eg - ef\right) x \; fg \;\; 0$$

sia identica all'equazione proposta. Confrontandole termine a termine, si avrà $f \; g - e^2 \;\; q$, $eg - ef \;\; r$, $fg \;\; s$. Così

$$q \; e^2 \;\; f \; g \qquad \tfrac{r}{e} \;\; g - f \qquad \tfrac{qe^2 \, \frac{r}{e}}{2} \;\; g$$
$$\tfrac{qe^2 - \frac{r}{e}}{2} \;\; f \qquad \tfrac{q^2 2e^2 qe^4 - \frac{r^2}{e^2}}{4} \;\; fg \;\; s$$

e riducendo

$$e^6 \;\; 2qe^4 \;\; \left(q^2 - 4s\right) e^2 - r^2 \;\; 0$$

Pongo $y \;\; e^2$ e sostituisco nell'equazione e ottengo $y^3 \;\; 2qy^2 \;\; \left(q^2 - 4s\right) y - r^2 \;\; 0$, equazione cubica, nella quale si può eliminare il secondo termine e ricavarne poi la radice, sia con la regola precedente, sia con un'altra qualunque. Una volta ottenuta questa radice, bisognerà risalire alle operazioni precedenti in questo modo $c \;\; \sqrt{y}$, $\frac{qe^2 \, \frac{r}{e}}{2} \;\; g$, $\frac{qe^2 - \frac{r}{e}}{2} \;\; f$ e risolte le equazioni $x^2 \; ex \; f \;\; 0$ e $x^2 - ex \; g \;\; 0$ si avranno le quattro radici dell'equazione $x^4 \; qx^2 \; rx \; s \;\; 0$, che saranno,

$$x \;\; -\tfrac{1}{2}e \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}e^2 - f} \quad x \;\; -\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}e^2 - g}$$

Bisogna osservare che se l'equazione di quarto grado ha le sue quattro radici reali, bisogna che l'equazione cubica $y^3 \;\; 2qy^2 \;\; \left(q^2 - 4s\right) y - r^2 \;\; 0$ abbia pure le sue radici reali; in questo caso, abbiamo visto, dalla regola precedente, che esse non possono essere determinate.

Se un'equazione artefatta di quinto o di grado maggiore è convertita in una equazione non artefatta, essendo tolti i termini medi con un procedimento qualsiasi. l'espressione delle radici di questa equazione sarà sempre impossibile, quando sarà di grado dispari avrà più di una radice reale o quando sarà di grado pari, non ne avrà più di due; a meno che, in quest'ultimo caso, essa non si possa ridurre mediante l'estrazione di una radice sorda quadrata, secondo il metodo che è stato precedentemente insegnato.

È Descartes che ha insegnato l'arte di ridurre le equazioni di quarto grado, come mostreremo. Per esempio, se si propone l'equazione di cui abbiamo già fatto prima la riduzione, $x^4 - x^3 - 5x^2 \;\; 12x - 6 \;\; 0$, si faccia scomparire il secondo termine ponendo $x \;\; v \;\; \frac{1}{4}$ e si avrà $v^4 - \frac{43v^2}{8} \;\; \frac{75v}{8} - \frac{851}{256} \;\; 0$. Per eliminare le frazioni, si sostituirà $v \;\; \frac{1}{4}z$ e verrà $z^4 - 86z^2 \;\; 600z - 851 \;\; 0$. Si ha, pertanto, $-86 \;\; q$, $600 \;\; r$, $-852 \;\; s$. Così, sostituendo questi valori nell'equazione $y^3 \;\; 2qy^2 \;\; \left(q^2 - 4s\right) y - r^2 \;\; 0$, essa diverrà $y^3 - 172y^2 \;\; 10800y - 360000 \;\; 0$. E provando tutti i divisori dell'ultimo termine, $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$ e così via, si troverà infine che $y \;\; 100$, risultato al quale si sarebbe giunti assai più rapidamente con il metodo da noi prima esposto.

Continuiamo il metodo di Descartes. Avendo trovato $y \;\; 100$,si avrà $e \;\; \sqrt{y} \;\; 10$ e $\frac{qe^2 - \frac{r}{e}}{2} \;\; \frac{-86100-60}{2} \;\; -23 \;\; f$ e $\frac{qe^2 \, \frac{r}{e}}{2} \;\; 37 \;\; g$. Così, sostituendo questi valori di e, f, g nelle due equazioni, $x^2 \; ex \; f \;\; 0$ e $x^2 - ex \; g \;\; 0$ e scrivendo $z \;\; x$, esse diverranno, $z^2 \;\; 10z - 23 \;\; 0$ e $z^2 - 10z \;\; 37 \;\; 0$. Rimettendo ora $v \;\; \frac{z}{4}$, otterremo $v^2 \;\; 2\frac{1}{2}v - \frac{23}{16} \;\; 0$ e $v^2 - 2\frac{1}{2}v \;\; \frac{37}{16} \;\; 0$. Rimettendo $v \;\; x - \frac{1}{4}$ si avrà infine $x^2 \;\; 2x - 2 \;\; 0$ e $x^2 - 3x \;\; 3 \;\; 0$. Le quattro radici di queste due equazioni sono

$$x \;\; -1 \pm \sqrt{3} \quad x \;\; 1\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}}$$

Queste radici sono le stesse di quelle che abbiamo trovato all'inizio di quest'opera per l'equazione proposta $x^4 - x^3 - 5x^2 \;\; 12x - 6 \;\; 0$; e per ottenerle allora, abbiamo fatto uso di un nuovo metodo di trovare i divisori, metodo più semplice di quello che abbiamo qui impiegato.

Costruzione lineare delle equazioni

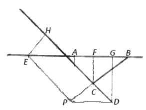
Finora ho insegnato le proprietà di equazioni, le loro trasformazioni, i loro limiti e tutti i metodi che si possono impiegare per ridurle. Non ho sempre dimostrato i metodi che ho usato, perché mi sono parsi assai semplici e le loro dimostrazioni avrebbero spesso occupato molto più spazio. Si sa ora qual è la forma più comoda che bisogna dare alle radici delle equazioni, rimane quindi da insegnare l'arte di tradurle in numeri; e la maggiore difficoltà consiste nell'ottenere le prime due o tre cifre che ne danno il valore approssimato. Ci si può arrivare molto facilmente costruendo l'equazione sia geometricamente, sia meccanicamente. Credo quindi che il lettore non sarà sorpreso di trovare qui qualche costruzione di questo tipo.

Gli Antichi, come ci insegna Pappo, provarono dapprima a trovare la trisezione dell'angolo e due medi proporzionali geometrici per mezzo della retta e del cerchio, ma i loro sforzi furono inutili. Essi considerarono in seguito altre curve, come la concoide, la cissoide e le sezioni coniche e tramite qualcuna di queste curve, risolsero questi problemi. Infine, dopo approfondito esame, essi considerarono le sezioni coniche come linee geometriche e classificarono i problemi in tre generi: chiamarono *Problemi piani*, quelli che possono essere risolto con linee che giacciono su un piano, come la retta e il cerchio; *Problemi solidi*, quelli che non possono essere risolta se non con linee che generano un solido come il cono; e infine, *Problemi lineari*, quelli la cui soluzione dipende da linee composte. Secondo questa distinzione, ogni problema solido la cui soluzione si può ottenere solo con curve diverse dalle sezioni coniche, non deve essere considerato come un problema geometrico, soprattutto se non lo si ammette al rango delle curve geometriche, come la retta, il cerchio e le sezioni coniche. Ma i moderni si sono allargati; hanno considerato come geometriche tutte le curve che potevano essere espresse da una equazione. Hanno classificato queste curve in diversi generi, secondo il grado delle loro equazioni e hanno posto per legge: che non fosse permesso costruire con una curva di qualsiasi genere un problema che può esserlo con quella di un genere inferiore.

Nello studio dello curve, nell'esame che si fa delle loro proprietà, si procede secondo l'ordine dei gradi delle loro equazioni; una tale scelta mi appare degna di essere approvata; tuttavia, si noterà che non è l'equazione, ma la descrizione della curva che la rende geometrica. Il cerchio è una curva geometrica, non perché può essere espressa da una equazione, ma perché può essere descritto geometricamente. Il motivo che deve far preferire una curva ad un'altra, per la costruzione di un problema, non è la semplicità della sua equazione, ma la facilità con la quale la si può descrivere. L'equazione della parabola è più semplice di quella del cerchio e, tuttavia, tutte le volte in cui è possibile, si preferisce il cerchio, poiché la sua descrizione è più facile. Se si considera il cerchio e le sezioni coniche sotto il rapporto del grado delle loro equazioni, le si distribuirà nello stesso ordine: cosa che tuttavia non si fa; poiché il cerchio nella costruzione dei problemi è messo allo stesso livello della retta, a causa della facilità della sua descrizione; di modo che si può, senza infrangere la regola, costruire con il cerchio un problema che si sarebbe potuto costruire anche con la retta. Si peccherebbe, al contrario, se si costruisse con le sezioni coniche ciò che può esserlo con un cerchio. Decidete voi ora e vedete se la legge dei gradi delle equazioni deve essere effettivamente osservata o se si possano fare eccezioni in favore del cerchio e allora respingere come inutile questa distinzione dei problemi in *piani* e in *solidi*; oppure dite se, malgrado questa legge, si può, nelle curve di ordine superiore, scegliere qualcuna preferibilmente dello stesso ordine e, per la facilità della sua descrizione, annoverarla, almeno per la costruzione del problema, tra quelle di un ordine inferiore. Quando si è padroni di scegliere tra più costruzioni ugualmente geometriche, bisogna sempre preferire la più semplice: questa regola non ammette eccezioni. Le espressioni algebriche più semplici non sono sempre le più facili da costruire. La semplicità che si deve preferire deve quindi intendersi come semplicità nella descrizione: è questa la sola che considerano i geometri che assegnano il cerchio alla stessa classe della retta; poiché i problemi sono più o meno facili da costruire, a seconda che le curve che ne danno la soluzione sono più o meno facili da descrivere. Così è ripugnante andare a cercare le leggi della costruzione altrove da loro stesse. Bisognerà quindi accordarci con gli antichi per ammettere come curve geometriche solo la *retta*, il *cerchio* e forse le *sezioni coniche*, oppure considerarle tutte come tali, distribuendole secondo il grado di semplicità della loro descrizione. Se la trocoide fosse intesa come curva geometrica, si potrebbe, tramite essa, dividere un angolo in ragioni date. Biasimereste pertanto un geometra che impiega la trocoide per tagliare un angolo nel rapporto tra due numeri, pretendendo che questa curva non potendo essere espressa da una equazione è obbligato ad impiegarne una che lo possa essere? Così se doveva dividere un angolo in 10001 parti, sarebbe tenuto, secondo voi, a impiegare una curva la cui equazione supererebbe il centesimo grado. È un uomo chi sia, non dico in grado di costruire, ma soltanto di comprendere una tale equazione? E potreste preferire una tale curva, se potesse esistere, alla trocoide, curva molto nota e così facile da descrivere con il moto di una ruota o di un cerchio? Del resto, credo di aver fatto toccare con mano l'assurdità di un tale sistema. Bisogna quindi, o rifiutare di ammettere la trocoide nella geometria, o preferirla nella costruzione dei problemi a tutte le altre curve di una costruzione meno facile; e quanto sostengo della trocoide, deve estendersi pure a tutte le altre specie di curve. Per questo motivo preferisco le trisezioni di angoli che ci hanno lasciato, Archimede nei suoi lemmi e Pappo nelle sue raccolte, a tutti gli altri metodi che si sono trovati per risolvere lo stesso problema, poiché, lo ripeto, bisogna escludere dalla geometria tutte le curve, al di fuori della retta e del cerchio, o ammetterle tutte, secondo il grado di difficoltà della loro descrizione. Ora, tranne il cerchio, non vi è alcuna curva più facile da descrivere della concoide.

Una equazione è, in generale, l'espressione di un calcolo aritmetico dove si dice che alcune quantità sono uguali ad altre. Una equazione può essere geometrica tanto quanto lo sono le quantità che essa contiene, come curve, superfici, solidi o proporzioni. È per una innovazione dei moderni che si fanno entrare moltiplicazioni, divisioni e altri calcoli di questo tipo; e questa innovazione non è sempre felice; essa ripugna ai primi principi della scienza. Se si riflette bene sulle costruzioni dei problemi con la retta e il cerchio, come le hanno immaginate gli antichi geometri, si vedrà facilmente che essi non ne hanno fatto ricorso per evitare, tracciando facilmente alcune curve, il fastidio di lunghi calcoli. Non bisogna quindi confondere queste due scienze; gli antichi ne separarono i limiti con tanta cura che mai si sono permessi di introdurre termini aritmetici nella geometria; e i moderni confondendoli, hanno fatto scomparire la semplicità che fa l'eleganza della geometria. La semplicità aritmetica consiste nell'esprimere un problema con l'equazione più semplice e la semplicità geometrica nel risolvere una equazione tracciando le curve più semplici. Non mi si dovrà quindi rimproverare se, con il più grande dei geometri, Archimede, e gli altri antichi, impiego la concoide per costruire i problemi solidi. Del resto, se si trovasse qualcuno che non condivide i miei sentimenti a questo riguardo, che si persuada che si tratta qui, meno di costruzioni geometriche che di costruzioni qualsiasi, con le quali cerco di avvicinare il più possibile il valore delle radici di una equazione. Di conseguenza, inizio con un problema che ci servirà da lemma.

Problema. *Tra due rette date AB, AC, porre una retta BC di lunghezza data in modo tale che essa passi per un punto dato P.*

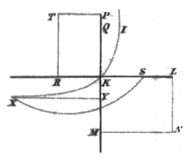


Se la retta BC ruota attorno al punto P come polo e una delle sue estremità C sia costretta a scorrere lungo AC, l'altra sua estremità B descriverà la concoide degli antichi e incontrerà la retta AB nel punto B. Congiungete i punti B e P e la parte BC di questa retta sarà la curva che si deve tracciare. Si potrebbe ancora, con lo stesso metodo, tracciare la linea BC, se, invece della retta AC, ci fosse data una curva qualsiasi.

Se questa costruzione, con la concoide, apparisse poco elegante, si può impiegare una sezione conica. Per questo, dal punto P, tracciate le rette PD, PE di modo che, incontrando le rette AD, AE formino il parallelogramma $EADP$ e dai punti C, D abbassate su AB le perpendicolari CF, DG; tracciate anche dal punto E sul prolungamento di Ac, la perpendicolare EH; e ponendo $AD\ \ a$, $PD\ \ b$, $BC\ \ c$, $AG\ \ d$, $AB\ \ x$, $AC\ \ y$, si avrà $AD\ \ AG\ \ AC\ \ AF$, da cui $AF\ \ \frac{dy}{a}$. Si avrà così $AB\ \ AC\ \ PD\ \ CD$, ossia $x\ \ y\ \ b\ \ a-y$ da cui si ricava $by\ \ ax-xy$, equazione che rappresenta un'iperbole. Poi (per la prop. 13 del II libro degli Elementi) si ha, $BC^2\ \ AC^2\ AB^2-2FA\times AB$, cioè $c^2\ \ y^2\ x^2-\frac{2dxy}{a}$. Moltiplicate per $\frac{2d}{a}$ l'equazione $by\ \ ax-xy$ e sottraete il prodotto dall'equazione $c^2\ \ y^2\ x^2-\frac{2dxy}{a}$ e resterà

$$c^2-\frac{2bdy}{a}\ \ y^2\ x^2-2dx$$

equazione di un cerchio quando x e y formano tra loro un angolo retto. Se combinate quindi l'iperbole con il cerchio, per mezzo delle due equazioni, l'intersezione delle due curve darà x e y, o AB e AC che determineranno la posizione della retta BC. Ed ecco in quale maniera si farà la combinazione di queste due curve.



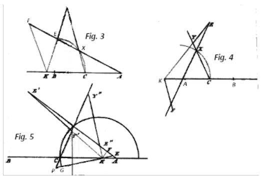
Tracciate due rette qualsiasi KL e KM. Ponete la prima $KL\ \ AD$ e la seconda $KM\ \ PD$; e fate in modo che queste due rette formino tra loro un angolo retto MKL; completate il parallelogramma $KLMN$; prendete LN, MN come asintoti e fate passare per il punto K, un'iperbole IKX.

Prolungate KM al di là di K, prendete $KP\ \ AG$ e $KQ\ \ BC$ e su KL prolungate oltre il punto K, prendete $KR\ \ AH$ e $RS\ \ RQ$; completate il parallelogramma $PKRT$ e dal centro T con un raggio uguale a TS, descrivete un cerchio, taglierà l'iperbole nel punto X; da questo punto, abbassate su KP la perpendicolare XY e la retta XY sarà uguale a AC e KY sarà uguale a AB. Questi due segmenti AC e AB, o solo uno di essi, con il punto P, bastano per determinare la posizione cercata della retta BC. Non mi dilungo a dimostrare questa costruzione, né i differenti cambiamenti che essa può subire, secondo i diversi casi del problema.

Ecco pertanto la costruzione che offrirei a coloro che non gradiscono la prima. Ma si vede bene che essa è troppo complicata per essere di qualche utilizzo. È quindi solo pura speculazione; ma le speculazioni geometriche sono tanto più eleganti quanto sono semplici e in proporzione alla loro utilità. Per questo preferisco la costruzione con la concoide, essendo più semplice dell'altra, non meno geometrica e risolvente perfettamente il problema.

Dopo aver dato questo lemma, procediamo alla costruzione geometrica dei problemi cubici e dei problemi di quarto grado. Questi ultimi possono ricondursi alla costruzione dei problemi cubici.

Sia proposta l'equazione cubica $x^3 \ qx \ r \ 0$, mancante del secondo termine, con il coefficiente del terzo q e del quarto r.



Tracciate un segmento qualunque KA che chiamerete n. Prolungato KA da entrambe le parti in modo sufficiente, prendete $KB \ \frac{q}{n}$ che porterete da K verso A, quando q sarà positivo e dalla parte opposta quando sarà negativo. Dividete AB in due parti uguali nel punto C e dal punto K come centro e con raggio KC, descrivete il cerchio CX, nel quale inscrivete il segmento $CX \ \frac{r}{n^2}$, prolungate questo segmento da entrambe le parti; tracciate ora AX che prolungherete pure da entrambe le parti. Infine tra CX e AX, o loro prolungamenti, inscrivete il segmento EY di lunghezza uguale a CA e che, prolungato, passa per K e XY sarà la radice dell'equazione. Tra queste radici, quelle che, dal punto X, tendente verso C, sono positive e quelle che vanno nel verso opposto, sono negative; nell'ipotesi pertanto che r è positivo, poiché se fosse negativo, sarebbe tutto il contrario.

Dimostrazione. Faremo precedere la dimostrazione dai tre Lemmi seguenti: □

Lemma. ***I.*** *- Si ha, $XY \ AK \ CX \ KE$. Infatti, tracciate a CX la parallela KF e per i triangoli simili ACX, AKF e EXY, EFK, avrete, $AC \ AK \ CX \ KF$ e $XY \ YE$ o $AC \ KF \ KE$. Da cui è facile ricavare la proporzione $XY \ AK \ CX \ KE$. (C.V.D.)*

Lemma. ***II.*** *- Si ha pure $XY \ AK \ CY \ AK \ KE$. Componendo l'ultima proporzione del Lemma precedente, essa diviene $XY \ AK \ XY \ CX \ CY \ AK \ KE$. (C.V.D)*

Lemma. ***III.*** *- Si ha pure, $KE - BK \ XY \ XY \ AK$. (per la prop. 12 del libro II degli Elementi) si ha,*

$$KY^2 - CK^2 \ CY^2 - CY \times CX \ CY \times YX$$

Pertanto $KY^2 - CK^2 \ CY \times XY$, ciò che dà la proporzione $CY \ KY - CK \ KY \ CK \ XY$. Ma $KY - CK$ $KY - EY \ CA - CK \ KE - BK$. E $KY \ CK \ KY - EY \ CA \ CK \ KE \ AK$. Così si ha, $CY \ KE \ AK$ $KE - BK \ XY$. Ma per il Lemma II, si aveva, $CY \ KE \ AK \ XY \ AK$, da cui è facile concludere che $XY \ KE - BK \ AK \ XY$ o $KE - BK \ XY \ XY \ AK$. (C.V.D.)

Dopo questi preliminari, ecco come si dimostrerà il problema.

Nel primo Lemma, abbiamo avuto, $XY \ AK \ CX \ KE$, che dà $KE \times XY \ AK \times CX$. Nel terzo, abbiamo avuto, $KE - BK \ XY \ XY \ AK$ e moltiplicando i due termini del primo rapporto per XY, diverrà $KE \times XY - BK \times XY \ XY^2 \ XY \ AK$. E se si sostituisce al posto di $KE \times XY$ il suo valore trovato prima, l'ultima proporzione diviene, $AK \times CX - BK \times XY \ XY^2 \ XY \ AK$. E facendo il prodotto degli estremi e dei medi, $AK^2 \times CX - AK \times BK \times XY \ XY^2$. Infine, per XY, AK, BK, CX, rimettendo i loro valori analitici, $x, n, \frac{q}{n}, \frac{r}{n^2}$, verrà $r - qx \ x^3$. (C.V.D.)

Quanto alle variazioni dei segni che possono influire sui termine dell'equazione, secondo i diversi casi del problema, non mi soffermerò a farne una ricerca.

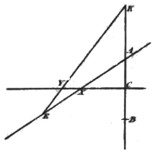
Sia ora proposta l'equazione, $x^3 \ px^2 \ r \ 0$, dove manca il terzo termine. Per costruirla, prendete una linea qualunque, che chiamerete n; prendete su un'altra linea le due lunghezze $AK \ \frac{r}{n^2}$ e $KB \ p$; portate queste due linee nello stesso verso, se r e p hanno gli stessi segni e in versi opposti se hanno segni contrari. Dividete BA in due parti uguali in C e dal punto K, come centro, con raggio CK, descrivete un cerchio, nel quale inscrivete CX uguale a n e lo prolungherete da entrambe le parti. Poi aggiungete i punti A, K con un segmento che prolungherete ancora da entrambe le parti. Infine tra le linee CX, AX, inscrivete EY della stessa lunghezza di CA, di modo che, una volta prolungato, EY passi per il punto K; allora KE sarà la radice dell'equazione. Le radici sono positive quando, rispetto al punto X, il punto Y cade dalla parte di C e negative quando il punto Y cade dalla parte opposta, rispetto a C. Tutto ciò nell'ipotesi che r abbia il segno ; il contrario se avesse il segno $-$.

Le figure e i lemmi utilizzati per costruire l'equazione $x^3 \ qx \ r \ 0$, serviranno pure per questa ed ecco in quale modo.

Dal il primo lemma abbiamo avuto, $XY \ AK \ CX \ KE$, ossia $XY \times KE \ AK \times CX$; e dal terzo lemma, $KE - BK \ XY \ XY \ AK$, o prendendo KB nel verso opposto, $KE \ KB \ XY \ XY \ AK$, che diverrà, moltiplicando i due termini del primo rapporto per KE, $(KE \ KB) \times KE \ XY \times KE \ XY \ AK$. E mettendo, invece di $XY \times KE$ il suo valore, $AK \times CX$, trovato prima, la proporzione diverrà, $(KE \ KB) \times KE \ AK \times CX$

$CD\ \ KE$, e facendo i prodotto degli estremi e quello dei medi, si ha $KE^2\ \ KB \times KE^2\ \ AK \times CX^2$. E se si pone, invece di KE, KB, AK, CX, i loro rispettivi valori analitici, si troverà l'equazione proposta, $x^3\ \ px^2\ \ r$.

Si tratta ora di costruire l'equazione di terzo grado, $x^3\ \ px^2\ \ qx\ \ r\ \ 0$, che ha tutti i suoi termini e le cui radici non sono né tutte positive, né tutte negative.



Se il coefficiente q è negativo, prendete su una retta qualunque KB, due segmenti $KA\ \ \frac{r}{q}$ e $KB\ \ p$ e portateli dalla stessa parte rispetto a K, se p e $\frac{r}{q}$ hanno segni diversi; e da parti opposte del punto K, se p e $\frac{r}{q}$ hanno gli stessi segni. Dividete AB in due parti uguali in C; innalzate da questo punto una retta CX, perpendicolarmente ad AB e uguale alla radice quadrata di q. Tracciate ora i segmenti AX e CX, che prolungherete indefinitamente e inscrivete in essi un segmento EY, uguale ad AC, di modo che il prolungamento di questo segmento inscritto passi per il punto K e KE sarà la radice dell'equazione; radice positiva se il punto X cade tra i punti A ed E e negativa se il punto E cade al di là del punto X dalla parte di A.

Se il coefficiente q è positivo, prendete sulla retta KB, due segmenti, l'uno $KA\ \ \sqrt{-\frac{r}{p}}$ e l'altro $KB\ \ \frac{q}{KA}$, e portateli entrambi dalla stessa parte, rispetto a K, se le quantità $\sqrt{-\frac{r}{p}}$ e $\frac{q}{KA}$ hanno segni diversi; e da parti opposte se hanno gli stessi segni. Dividete AB in due parti uguali in C e, da questo punto, innalzate su AB una perpendicolare CX uguale al coefficiente p e tra i prolungamenti dei segmenti AX, CX, inscrivete un segmento EY uguale ad AC e disposto in modo che una volta prolungato, passi per il punto K e XY sarà la radice dell'equazione; radice che sarà negativa se il punto X cade tra i punti A, E e positiva, se il punto Y cade dalla parte di C rispetto a X.

Dimostrazione del primo caso dove q è negativo. Dal primo lemma abbiamo avuto, $KE.CX\ \ AK\ \ XY$ e componendo, $KE\ AK$ o $KY\ KC\ \ CX\ XY$ o CY. Ma nel triangolo rettangolo KCY si ha, $CY^2\ \ KY^2 - KC^2\ \ (KY\ KC) \times (KY - KC)$; da cui si ricava la proporzione, $KY\ KC\ \ \ CY\ \ \ CY\ \ \ KY - KC$. Ma abbiamo prima visto che $KY\ KC$ era la stessa cosa di $KE\ AK$, pertanto $KE\ AK\ \ CY\ \ CY\ \ EK - KB$[52]. Il primo rapporto di questa proporzione è uguale a quello tra KE e CX. Pertanto si ha, $KE\ \ CX\ \ CY\ \ EK - KB$ ed elevando tutto al quadrato, $KE^2\ \ CX^2\ \ KE\ AK\ \ KE - KB$. Moltiplicando ora gli estremi e i medi, si avrà, $KE^2 - KB \times KE^2\ \ CX^2 \times KE\ CX^2 \times AK$ e, rimettendo al posto di queste quantità i loro valori analitici prima assegnati, si troverà $x^3 - px^2\ \ qx\ r$.

Dimostrazione del secondo caso dove q è positivo. Dal primo lemma si ha proporzione, $KE\ \ CX\ \ AK\ \ XY$. E facendo il prodotto dei due estremi e dei due medi, viene, $KE \times XY\ \ CX \times AK$. Se, nell'equazione trovata prima, $KE^3 - KB \times KE^2\ \ \ CX^2 \times KE\ CX^2 \times AK$, si sostituisce $KE \times XY$, al posto di $CX \times AK$, essa diverrà, $KE^3 - KB \times KE^2\ \ CX^2 \times KE\ CX \times KE \times XY$ e dividendo tutto per KE, essa si troverà ridotta a $KE^2 - KB \times KE\ \ CX^2\ CX \times XY$. Poi moltiplicando tutto per AK, si avrà,

$$AK \times KE^2 - AK \times KE \times KB\ \ AK \times CX^2\ \ AK \times CX \times XY$$

e rimettendo di nuovo $KE \times XY$, invece di $CX \times AK$, avremo,

$$AK \times KE^2 - AK \times KE \times KB\ \ KE \times XY \times CX\ \ KE \times XY^2$$

e dividendo tutto per KE, verrà

$$AK \times KE - AK \times KB\ \ XY \times CX\ \ XY^2$$

Moltiplico tutto per XY e mi viene

$$AK \times KE \times XY - AK \times KB \times XY\ \ XY^2 \times CX\ \ XY^3$$

Ora, nel primo termine di questa equazione, invece di $KE \times XY$, rimetto $CX \times AK$ e l'equazione diviene, $CX \times AK^2 - AK \times KB \times XY\ \ CX^2 \times XY^2\ \ XY^3$, ossia

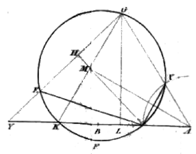
$$XY^3\ \ CX \times XY^2\ \ AK \times KB \times XY - AK^2 \times CX\ \ 0$$

Poi, sostituendo per XY, CX, AK, KB, i loro valori analitici assegnati prima, e che sono rispettivamente $x, p, \sqrt{-\frac{r}{p}}, q\sqrt{-\frac{p}{r}}$,verrà infine, $x^3\ \ px^2\ \ qx\ \ r\ \ 0$; equazione proposta che si doveva costruire.

Essendo dati un cerchio e una linea retta di posizione; se tracciate tra questa linea retta e il cerchio un'altra linea retta di grandezza data, con la condizione che essendo quest'ultima prolungata, passerà per un punto dato: voi avrete ancora un nuovo modo di risolvere questi problemi.

Infatti, sia proposta l'equazione di terzo grado, $x^3\ \ qx\ \ r\ \ 0$, priva del secondo termine:

[52] L'ultimo termine di questa proporzione dovrebbe essere $KY - CK$, ma abbiamo visto che $KF - CK\ \ KE - BK$.



Tracciate la linea KA a piacere, e chiamatela n. Su KA prolungata da entrambe le parti, prendete $KB\ \ \frac{q}{n}$ che porterete da K verso A, quando q sarà negativo e da K verso Y, quando q sarà positivo. Dividete BA in due parti uguali nel punto C e dal punto A come centro, con un raggio AC, descrivete il cerchio CX. Inscrivete in questo cerchio una retta $CX\ \ \frac{r}{n^2}$, e per gli stessi punti K, C, X, fate passare una circonferenza di cerchio $KCXG$. Unite i punti A e X con una retta che prolungherete fino ad incontrare il cerchio $KCXG$ in un punto G. Infine, tra quest'ultimo cerchio e la retta e la retta KC prolungata, inscrivete una linea retta EY, della stessa lunghezza di AC e in modo che essa sia diretta verso il punto G. Ora, per il punto E, dove questa retta incontra il cerchio, tracciate la linea EC; questa sarà una delle radici dell'equazione. Tutte le radici che cadranno nel grande segmento KGC del cerchio, saranno positive; tutte quelle al contrario che cadranno nel piccolo segmento KFC, saranno negative. Tutto questo, tuttavia, nell'ipotesi che r è negativo; poiché se fosse positivo, sarebbe tutto il contrario e le radici positive si troverebbero nel piccolo segmento e le negative nel grande.

Per dimostrare questa costruzione, inizieremo col dimostrare i seguenti Lemmi.

Lemma. ***I***. *Servendoci della costruzione precedente, avremo,* $CE\ \ KA\ \ CE\ EX\ \ AY\ \ CX\ \ KY$.

Avendo tracciato la retta KG, si ha, $AC\ \ AK\ \ CX\ \ KG$, per i triangoli simili ACX, AKG. Anche i triangoli EYC, KGY sono simili poiché hanno un angolo in comune in Y e, inoltre, l'angolo YGK e ECY misurano ciascuno la metà dello stesso arco EK, pertanto questi due angoli sono pure uguali e, di conseguenza, i triangoli sono simili. Così si ha la proporzione, $CE\ \ EY\ \ KG\ \ KY$, ossia, poiché $EY\ \ AC$, $CE\ \ AC\ \ KG\ \ KY$, ciò che dà, $AC \times KG\ \ CE \times KY$. Ma la proporzione trovata prima, $AC\ \ AK\ \ CX\ \ KG$, dà, $AC \times KG\ \ AK \times CX$. Pertanto, $AK \times CX\ \ CE \times KY$. Da cui si ricava la proporzione, $CE\ \ AK\ \ CX\ \ KY$, ossia, alternando, $CE\ \ CX\ \ AK\ \ KY$, e componendo, $CE\ CX\ \ CX\ \ AK\ KY\ \ KY\ \ AY\ \ KY$; e alternando ancora quest'ultima proporzione, $CE\ CX\ \ AY\ \ CX\ \ KY$. E per la proporzione trovata prima, $CE\ \ AK\ \ CX\ \ KY$, si ha, $CE\ CX\ \ AY\ \ CX\ \ KY\ \ CE\ \ AK$. C.V.D.

Lemma. ***II***. *Avendo abbassato sulla linea* GY *la perpendicolare* CH, *si avrà il rettangolo* $2HE \times EY\ \ CE \times CX$.

Poiché, abbassando anche sulla linea AY la perpendicolare GL, si avranno i triangoli rettangoli EHC, GLK, simili, poiché, oltre all'angolo retto, i rispettivi angoli E e K, hanno ciascuno per misura la metà dell'arco GXC. Pertanto questi triangoli sono equiangoli e, di conseguenza, si ha la proporzione, $KG\ \ KL\ \ EC\ \ EH$. Poi dal punto A abbasso su KG la perpendicolare AM, e a causa delle secanti uguali, AK, AG, questa perpendicolare taglierà KG in due parti uguali in M. I due triangoli rettangoli KAM, KGL, aventi un angolo in comune in K, sono simili, e, di conseguenza, si ha la proporzione, $AK\ \ KM\ \ KG\ \ KL$. Ora, $AK\ \ KM\ \ 2AK\ \ 2KM$ o KG. Pertanto, per i triangoli simili ACX, AKG, si ha, $2AK\ \ KG\ \ 2AC\ \ CX\ \ 2EY\ \ CX$ (poiché $AC\ \ EY$). Quindi $AK\ \ KM\ \ 2AK\ \ KG\ \ 2EF\ \ CX$. E per la proporzione $AK\ \ KM\ \ KG\ \ KL$, segue che si ha la seguente, $2EY\ \ CX\ \ KG\ \ KL$. Ma abbiamo già, $KG\ \ KL\ \ EC\ \ EH$. Pertanto $2EY\ \ CX\ \ EC\ \ EH$, e, di conseguenza, facendo il prodotto degli estremi e dei medi, si ha, $2EY \times EH\ \ EC \times CX$. C.V.D.

Abbiamo considerato AK e AG come uguali; e infatti il rettangolo $CA \times AK$ rettangolo $AX \times AG$ (per il corollario della proposizione 3-36 degli Elementi); da cui si ricava la proporzione $CA\ \ AX\ \ AG\ \ AK$. Ora $AX\ \ CA$, pertanto $AG\ \ AK$.

Lemma. ***III***. *Considerando tutte le costruzioni precedenti, i tre segmenti* BY, CE, KA *sono in proporzione continua.*

Poiché si ha (per la prop. 2-12 degli Elementi) $CY^2\ \ EY^2\ CE^2\ 2EY \times EH$. E sottraendo EY^2 da ogni membro di questa equazione, essa diverrà, $CY^2 - EY^2\ \ CE^2\ 2EY \times EH$. Ma abbiamo visto, dal Lemma II, che $2EY \times EH\ \ EC \times CX$. Aggiungiamo a ciascun membro di quest'ultima equazione CE^2 e avremo,

$$CE^2\ 2EY \times EH\ \ CE^2\ CE \times CX$$

Pertanto, $CY^2 - EY^2\ \ CE^2\ CE \times CX$, che si può scomporre così,

$$\left(CY\ EY\right)\left(CY - EY\right)\ \ CE\left(CE\ EX\right)$$

da cui si ricava la proporzione, $CE\ CX\ \ CY\ EY\ \ CY - EY\ \ CE$. Ora, essendo uguali i tre segmenti EY, CA, CB, ne segue che si ha pure, $CY\ EY\ \ CY\ CA\ \ AY$; e $CY - EY\ \ CY - BC\ \ BY$. Scriviamo quindi nella nostra proporzione, AY al posto di $CY\ EY$ e BY al posto di $CY - EY$ ed essa diverrà, $CE\ CX\ \ AY\ \ BY\ \ CE$. Ma, per il Lemma I, si ha, $CE\ CX\ \ AY\ \ CE\ \ AK$. Pertanto $CE\ \ AK\ \ BY\ \ CE$. o, invertendo l'ordine, $BY\ \ CE\ \ CE\ \ AK$. Questi tre segmenti sono quindi in proporzione continua ed *è quanto bisognava dimostrare.*

Infine, con l'aiuto di questi Lemmi, ecco come dimostreremo la costruzione del problema proposto.

Per il Lemma I, si ha, $CE\ \ AK\ \ CX\ \ KY$, per cui $CE \times KY\ \ AK \times CX$; e dividendo i due membri di questa equazione per CE, essa diviene, $KY\ \ \frac{AK \times CX}{CE}$. Aggiungete BK a ogni membro e avrete $BK\ \ KY$ o

$$BY\ \ \frac{AK \times CX}{XE}\ \ BK\ \ CE\ \ CE\ \ AK$$

E facendo il prodotto degli estremi e quello dei medi, viene,

$$\frac{AK^2 \times CX}{CE}\ \ AK \times BK\ \ CE^2$$

e moltiplicando ancora ogni membro per CE, si ha infine,

$$AK^2 \times CX\ \ AK \times BK \times CE\ \ CE^2$$

Abbiamo detto che la radice x dell'equazione fosse il segmento CE e siccome abbiamo posto $KA\ \ n$, $KB\ \ \frac{q}{n}$ e $CX\ \ \frac{r}{n^2}$, se mettiamo questi valori analitici al posto dei segmenti che rappresentano, l'equazione diverrà, $r\ qx\ \ x^3$, ossia $x^3 - qx - r\ \ 0$, equazione che si doveva costruire. Quando q e r sono negativi, le linee KA, KB devono portarsi dalla stessa parte rispetto al punto K e la radice positiva si trova nel segmento maggiore CGK. *Ecco quindi uno dei casi della proposizione che bisogna dimostrare.*

Portate ora KB dalla parte opposta a quella di prima; con ciò, cambiate il segno del valore $\frac{q}{n}$ o, che è la stessa cosa, il segno di q e la costruzione della vostra equazione darà, $x^3\ \ qx - r\ \ 0$. *Questo è un secondo caso.* In questi due casi, CX e la radice positiva CE, cadono dalla stessa parte di AK. Se la linea CX e la radice negativa cadono ancora dalla stessa parte di AK, dopo aver cambiato il segno di r, *voi avrete il terzo caso*, $x^3\ \ qx\ \ r\ \ 0$, nel quale tutte le radici sono negative. E cambiando di nuovo il segno di KB o di $\frac{q}{n}$, o della sola quantità q, cadrete nel *quarto caso*, $x^3 - qx\ \ r\ \ 0$. Il lettore potrà esercitarsi nel ricercare le costruzioni per tutti questi casi e a trovare le loro dimostrazioni, seguendo il percorso che abbiamo dato per il primo caso. Ci è parso sufficiente avere dimostrato questo solo caso e indicato rapidamente gli altri, la cui dimostrazione si farà impiegando gli stessi termini e cambiando soltanto la posizione di qualche linea.

Si tratta ora di costruire l'equazione di terzo grado $x^3\ \ px^2\ \ r\ \ 0$ mancante del terzo termine.

Impiegate sempre la stessa figura e prendete una linea di una lunghezza qualunque, che chiamerete n; sul prolungamento di questa linea da A verso Y, prendete KA e KB; ponete $KA\ \ \frac{r}{n^2}$ e $KB\ \ p$; portate queste linee dalla stessa parte del punto K, se le linee dei termini p e r sono le stesse, ma se esse sono diverse, portatele dalla parte opposta. Dividete BA in due parti uguali nel punto C e dal punto A come centro, con un raggio AC, descrivete il cerchio CX. Inscrivete in questo cerchio una linea CX uguale alla linea n; congiungete i punti A e X con una retta che prolungherete fino a G, di modo che $AG\ \ AK$, e per i punti K, C, X, G, fate passare una circonferenza di cerchio. Infine, tra questo cerchio e la retta KC prolungata da entrambe le parte, inscrivete una retta EY della stessa lunghezza di AC e con questa condizione, che essendo EY prolungato, passerà per il punto G. E la retta KY sarà una delle radici dell'equazione. Ma se r è negativo, allora le radici positive tenderanno da K verso la parte opposta di A. È ben evidente che, in tutti i casi, quando le radici positive tendono da una parte di K, le radici negative tendono dalla parte opposta.

Ecco in quale maniera si dimostra la legittimità di questa costruzione per mezzo dei tre ultimi Lemmi.

Dal terzo Lemma, abbiamo visto che BY, CE, KA sono in proporzione continua e *dal primo*, che si ha la proporzione $CE\ \ AK\ \ CX\ \ KY$. Pertanto $BY\ \ CE\ \ CX\ \ KY$. Ora, $BY\ \ KY - KB$. Si avrà quindi la proporzione $KY - KB\ \ CE\ \ CX\ \ KY$ e (per la prop 6-1 degli Elementi), si ha $\big(KY - KB\big) \times KY\ \ CE \times KY\ \ KY - KB\ \ CE$. E per la proporzione $CE\ \ AK\ \ CX\ \ KY$, si ha, $CE \times KY\ \ AK \times CX$. Pertanto, sostituendo nella proporzione precedente, $AK \times CX$ al posto di $CE \times KY$, essa diverrà

$$\big(KY - KB\big) \times KY\ \ AK \times CX\ \ KY - BK\ \ CE\ \ \textit{cioè}\quad CX\ \ KY$$

Pertanto $\big(KY - KB\big) \times KY\ \ AK \times CX\ \ CX\ \ KY$. E facendo il prodotto degli estremi e dei medi si avrà

$$KY^3 - KB \times KY^2\ \ AK \times CX^2$$

Ora, nella costruzione abbiamo considerato KY come la radice dell'equazione e, di conseguenza, $KY\ \ x$, $KB\ \ p$, $KA\ \ \frac{r}{n^2}$ e $CX\ \ n$. Scriviamo quindi questi valori analitici nell'equazione, invece delle linee che essi rappresentano ed essa diverrà, $x^3 - px^2\ \ r$, ossia $x^3 - px^2 - r\ \ 0$.

La costruzione che si trattava di dimostrare avrebbe potuto essere suddivisa in quattro casi, $x^3 - px^2 - r\ \ 0$, $x^3 - px^2\ \ r\ \ 0$, $x^3\ \ px^2 - r\ \ 0$, $x^3\ \ px^2\ \ r\ \ 0$. Ho già dimostrato il primo caso; per dimostrare gli altri, basta cambiare la posizione delle linee. Poiché così come abbiamo portato KA e KB dalla stessa parte del punto K e abbiamo avuto per radice positiva la linea KY che tende dalla parte opposta, che ci ha fornito l'equazione $KY^3 - KB \times KY^2\ \ KA \times CX^2$, o $x^3 - px^2\ \ r$; analogamente, portando KB dal lato opposto, e ragionando come prima, avremo, $KY^3\ \ KB \times KY^2\ \ KA \times CX^2$, o $x^3\ \ px^2\ \ r$. E se„ in ognuno di questi casi, si cambia soltanto la posizione della radice KY, prendendola dalla parte opposta del punto K e ragionando sempre come abbiamo fatto, si arriverà agli altri due casi, che sono,

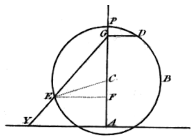
$$KY^3\ \ KB \times KY^2\ \ -KA \times CX^2$$

o $x^3\ \ px^2\ \ -r$ e

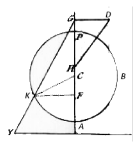
$$KY^3 - KB \times KY^2\ \ -KA \times CX^2$$

o $x^3\ \ px^2\ \ -r$. Ecco tutti i casi che bisognava dimostrare.

Sia proposto ora di costruire l'equazione cubica $x^3\ \ px^2\ \ qx\ \ r\ \ 0$*, che ha tutti i suoi termini, ad eccezione forse del terzo.*



Ecco in quale maniera essa si costruirà. Prendete una linea arbitraria n; prendete GC uguale alla sua metà e dal punto G innalzate una perpendicolare $GD\ \ \sqrt{\frac{r}{p}}$. Infine se i termini p ed r hanno segni diversi, dal punto C, come centro, e dall'intervallo CD, descrivete una circonferenza di cerchio PBE; ma se p ed r hanno gli stessi segni, dal punto D, come centro, e con un raggio uguale a GC, descrivete un arco che taglierà GA in H.



Poi dal centro C e con un raggio uguale a GH, descrivete una circonferenza PBE. Ponete $GA\ \ -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$. Portate questa linea GA, da G verso C, se la quantità $-\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$ è positiva; ma se GA è negativo, la porterete dalla parte opposta. Bisognerà quindi fare attenzione ai segni dei coefficienti p, q, r. Nel primo caso, innalzate una perpendicolare AY dal punto A; tra questa perpendicolare e il cerchio PBE, descritto prima, inscrivete la linea EY uguale al coefficiente p, con la condizione che una volta prolungata, passerà per il punto G. Prolungatela e la linea EG sarà una delle radici dell'equazione da costruire. Tutte le radici che avranno una posizione simile, saranno positivi, se il punto E cade tra Y e G; saranno negative se il punto E cade al di fuori dei punti Y e G. Tutto ciò tuttavia deve intendersi solo per il caso in cui si ha $a\ \ p$, poiché se si avesse $-p$, bisognerebbe dire tutto il contrario.

Prima di fare la dimostrazione di questa costruzione, presentiamo i seguenti Lemmi.

Lemma. ***I***. *Se dal punto* E *si abbassa su* AG *la perpendicolare* EF *e si traccia la retta* EC*, si ha,*

$$EG^2\ \ GC^2\ \ EC^2\ \ 2GC \times GF$$

Per la prop. 12-2 degli Elementi si ha, $EG^2\ \ EC^2\ \ GC^2\ \ 2GC \times CF$. Aggiungiamo da entrambe le parti GC^2 e avremo,

$$EG^2\ \ GC^2\ \ EC^2\ \ 2GC^2\ \ 2GC \times CF$$

Ma

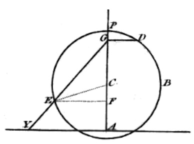
$$2GC^2\ \ 2GC \times CF\ \ 2GC\,(GC\ \ CF)$$

cioè $2GC \times GF$. Pertanto

$$EG^2\ \ GC^2\ \ EC^2\ \ 2GC \times GF$$

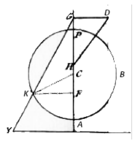
C.V.D.

Lemma. ***II***. *Nel primo caso della costruzione, quando il cerchio* PBE *passa per il punto D, si ha* $EG^2 - GD^2\ \ 2GC \times GF$.



Per il Lemma I, si ha $EG^2\ \ GC^2\ \ \ EC^2\ \ 2GC \times GF$ e sottraendo da entrambe le parti GC^2, rimane, $EG^2\ \ EC^2 - GC^2\ \ 2GC \times GF$. Ma $EC^2 - GC^2$ è la stessa cosa di $CD^2 - GC^2$, quantità uguale a GD^2. Pertanto $EG^2\ \ GD^2\ \ 2GC \times GF$. C.V.D.

Lemma. ***III***. *Nel secondo caso della costruzione, dove il cerchio* PBE *non passa per il punto D, abbiamo* $EG^2\ \ GD^2\ \ 2GC \times GF$.



Per il Lemma I, $EG^2\ \ GC^2\ \ EC^2\ \ 2GC \times GF$. Sottraete da entrambe le parti EC^2 e il resto sarà, $EG^2\ \ GC^2 - EC^2\ \ 2GC \times GF$. Ma $GC\ \ DH$ e $EC\ \ CP\ \ GH$. Pertanto $GC^2 - EC^2\ \ DH^2 - GH^2\ \ DG^2$. Quindi $EG^2\ \ DG^2\ \ 2GC \times GF$. C.V.D.

Lemma. ***IV***. *Si ha,* $2CG \times GF \times GY\ \ 2CG \times AG \times GE$.

Per i triangoli simili GEF, GYA, si ha $GF\ \ GE\ \ AG\ \ GY$, cioè (per la prop. 4-1 degli Elementi) $2CG \times AG\ \ 2CG \times GY$. Facendo il prodotto degli estremi e dei medi si avrà,

$$2GC \times GY \times GF\ \ 2GC \times AG \times GE$$

C.V.D.

Infine per tutti questi Lemmi, ecco come si dimostrerà la costruzione del problema.

Per il primo caso. Si ha, per il Lemma II, $EG^2 - GD^2\ \ 2GC \times GF$. E moltiplicando i due membri per GY, si avrà,

$$GY \times EG^2 - GY \times GD^2\ \ 2GC \times GF \times GY\ \ 2GC \times AG \times GE$$

(per il Lemma IV). Ora, al posto di GY mettete $EG\ \ EY$ e avrete

$$\left(EG\ \ EY\right) EG^2 - GD^2 \left(EG\ \ EY\right)\ \ 2GC \times AG \times GE$$

ossia

$$EG^2\ \ EY \times EG^2 - EG \times GD^2 - EY \times GD^2\ \ 2GC \times AG \times GE$$

ossia

$$EG^2\ \ EY \times EG^2 - \left(GD^2 - 2CG \times GA\right) EG - GD^2 \times EY\ \ 0$$

Nel secondo caso. Si ha per il Lemma III, $EG^2\ \ GD^2\ \ 2GC \times GF$ e moltiplicando ogni membro per GY, viene,

$$EG^2 \times GY\ \ GD^2 \times GY\ \ 2CG \times GF \times GY$$

Ora, per il Lemma IV, $2CH \times GF \times GY\ \ 2CG \times AG \times GE$. Pertanto, $EG^2 \times GY\ \ GD^2 \times GY\ \ 2CG \times AG \times GE$. E, mettendo per GY il suo valore $GE\ \ EY$, si avrà

$$EG^2\ \ EY \times EG^2\ \ GD^2 \times EG\ \ GD^2 \times EY\ \ 2GC \times AG \times EG$$

Ossia,

$$EG^2\ \ EY \times EG^2\ \ \left(GD^2 - 2GC \times AG\right) EG\ \ GD^2 \times EF\ \ 0$$

In realtà, abbiamo chiamato x la radice EG dell'equazione, e abbiamo posto $GD\ \ \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY\ \ p$, $GC\ \ n$ e $GA\ \ -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$; tali sono le quantità e i loro segni, per il primo caso, dove p e r hanno segni diversi. Ma per il secondo caso, dove cambia il segno di p o quello di r, si avrà, $GA\ \ -\frac{q}{n}\ \ \frac{r}{np}$. Scriviamo quindi, invece di $EG, GD, EY, 2GC, GA$, i loro valori analitici, che sono rispettivamente, $x, \sqrt{\frac{r}{p}}, p, n, -\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$; e il primo caso darà,

$$x^3\ \ px^2\ \ \left(-\frac{r}{p}\ \ q\ \ \frac{r}{p}\right) x - r\ \ 0$$

che si riduce a

$$x^3\ \ px^2\ \ qx - r\ \ 0$$

e il secondo caso dà

$$x^3\ \ px^2\ \ \left(\frac{r}{p}\ \ q - \frac{r}{p}\right) x\ \ r\ \ 0$$

che si riduce a

$$x^3\ \ px^2\ \ qx\ \ r\ \ 0$$

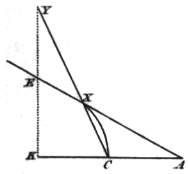
Nei due casi, EG è quindi la effettiva lunghezza della radice c. C.V.D.

Ognuno di questi due casi è suddiviso in più casi particolari; il primo in questi: $x^3\ \ px^2\ \ qx - r\ \ 0$, $x^3\ \ px^2 - qx - r\ \ 0$, $x^3 - px^2\ \ qx\ \ r\ \ 0$, $x^3 - px^2 - qx\ \ r\ \ 0$, $x^3\ \ px^2 - r\ \ 0$ e $x^3 - px^2\ \ r\ \ 0$; e il secondo in questi $x^3\ \ px^2\ \ qx\ \ r\ \ 0$, $x^3\ \ px^2 - qx - r\ \ 0$, $x^3 - px^2\ \ qx - r\ \ 0$, $x^3 - px^2 - qx - r\ \ 0$, $x^3\ \ px^2\ \ r\ \ 0$, e $x^3 - px^2 - r\ \ 0$. Se si cambia, per ognuno dei casi, la posizione delle linee, il resto della dimostrazione si otterrà interamente come pere il caso che abbiamo dimostrato.

Ecco le principali costruzioni che si possono dare dei problemi, inscrivendo una linea retta di lunghezza data tra un cerchio e un'altra linea retta data di posizione, con la condizione che la linea inscritta prolungata, passerà per un punto dato. Ora, si troverà sempre il modo di inscrivere questa retta tracciando la *concoide* degli antichi, e dandole per polo, il punto per il quale deve passare il prolungamento della retta inscritta. Questa concoide avrà per asintoto la retta data di posizione e per intervallo[53] la lunghezza stessa della linea da inscrivere; poiché questa concoide taglierà il cerchio nel punto E, per il quale bisognerà far passare la retta da inscrivere. In pratica, si potrà impiegare un metodo meccanico qualsiasi, per porre *la retta da inscrivere* tra il cerchio e la retta data di posizione.

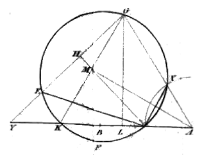
Si osserverà che, in tutte queste costruzioni, si è preso la retta n indeterminata e potendo essere prolungata da entrambe le parti, a piacere, allo scopo di renderla specifica per le diverse costruzioni che esigono i diversi casi del problema. Daremo un esempio di ciò nella ricerca di due medi proporzionali continui, così come nella trisezione dell'angolo.

Si tratta di trovare tra a e b due medi proporzionali x e y. Poiché le quantità a, x, y, b sono in proporzione continua, si avrà, $a^2 \;\; x^2 \;\; x \;\; b$[54], così $x^3 \;\; a^2b$, o $x^3 - a^2b \;\; 0$. In questa equazione, i termini p, q mancano e $r \;\; -a^2b$. Così faremo uso della prima formula di costruzione, dove si tratta di inscrivere una linea retta tra due linee date di posizione, con la condizione che questa retta sarà diretta verso un punto dato.

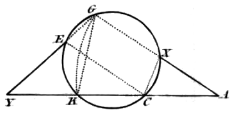


Qui la retta da inscrivere è EY che è diretta verso il punto K e le due rette tra le quali deve essere inscritta sono EX, CY. Pongo $CX \;\; \frac{r}{n^2} \;\; \frac{-a^2b}{n^2}$; e siccome n è indeterminata, la suppongo uguale ad a, e ciò dà $CX \;\; -b$; ed ecco la costruzione che ne deriva.

Traccio una retta $KA \;\; a$, che divido in due parti uguali in C, e dal punto K come centro, con un raggio uguale a CK, descrivo il cerchio XC, nel quale pongo la retta $CX \;\; b$ e tra le rette XA e CX prolungate indefinitamente, metto $EY \;\; CA$, di modo che essendo EY prolungata, possa passare per il punto K; e le linee KA, XY, KE, CX saranno in proporzione continua, cioè, XY e KE saranno i due medi proporzionali cercati tra a e b. Questa costruzione è ben conosciuta.

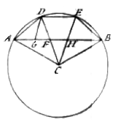


In una delle altre formule di costruzione, quando la retta EY deve essere posta tra il cerchio e una retta AK data di posizione e, inoltre, essere diretta verso il punto dato G, si ha $CX \;\; \frac{r}{n^2}$, cioè, nel problema attuale, $\frac{-a^2b}{n^2}$. Faccio quindi come prima, $n \;\; a$ e ciò dà $CX \;\; b$, Il resto si otterrà come si mostrerà.



Traccio una retta $KA \;\; a$, la divido in due parti uguali in C e dal punto A come centro con il raggio AK, descrivo un arco KG, nel quale inscrivo una corda $KG \;\; 2b$, inscrizione alla quale pervengo facilmente costruendo il triangolo isoscele KAG. Poi per i punti C, K, G, faccio passare una circonferenza di cerchio e tra questa circonferenza e la retta AK prolungata, inscrivo la retta $EY \;\; CK$, in modo che questa retta EY sia diretta verso il punto$G$. Fatto questo, si avranno le quattro rette $AK, EC, KY, \frac{1}{2}KG$ in proporzione continua; cioè, che EC e KY sono i due medi tra a e b.

Si tratti ora di dividere un angolo in tre parti uguali; l'angolo proposto sia ACB e siano, inoltre, le parti nelle quali deve essere diviso, ACD, DCE, ECB.



Dal punto C come centro e con un raggio arbitrario sia tracciata la circonferenza $ADBE$, che taglia rispettivamente le rette CA, CD, CE, CB nei punti A, D, E, B. Tracciate le rette AD, DE, EB, così come AB che taglierà le rette CD, CE nei punti F e H; tracciate poi dal punto D e parallelamente a CE la retta DG

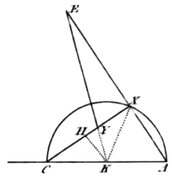
[53]N.d.T francese: L'intervallo è la distanza costante che vi è tra ogni punto della curva e il suo asintoto, essendo tale distanza presa sulle linee che si dirigono dal polo verso ogni punto della curva.

[54]N.d.T francese: Infatti, poiché si ha, $a \;\; x \;\; x \;\; y \;\; y \;\; b$, ne segue che si ha pure, $a^2 \;\; x^2 \;\; y^2 \;\; b^2$; ora $x \;\; y \;\; y \;\; b$, dà $y^2 \;\; bx$. Sostituendo pertanto al posto di y^2 il suo valore bx, nella proporzione $a^2 \;\; x^2 \;\; y^2 \;\; b^2$, essa diverrà $a^2 \;\; x^2 \;\; bx \;\; b^2 \;\; x \;\; b$.

che incontrerà AB in G. Per i triangoli simili CAD, ADF, DFG, le linee CA, AD, DF, FG sono in proporzione continua. Se si pone quindi $AC \;\; a$ e $AD \;\; x$, si avrà, $DF \;\; \frac{x^2}{a}$ e $FG \;\; \frac{x^3}{a^2}$. D'altra parte, si ha,

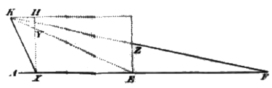
$$AB \;\; BH \;\; GH \;\; FA - GF \;\; 3AD - GF \;\; 3x - \frac{x^3}{a^2}$$

Ossia ponendo $AB \;\; b$, si avrà $b \;\; 3x - \frac{x^3}{a^2}$ e riducendo si ha $x^3 - 3a^2x \;\; a^2b \;\; 0$. Questa equazione non ha il secondo termine, così $p \;\; 0$ e le quantità q, r sono rispettivamente uguali a $-3a^2$ e a^2b. Così, nella prima delle formule di costruzione, dove si aveva, $p \;\; 0$, $KA \;\; n$, $KB \;\; \frac{q}{n}$ e $CX \;\; \frac{r}{a^2}$, queste linee di cambieranno per il problema attuale in $KB \;\; -\frac{3a^2}{n}$ e $CX \;\; \frac{a^2b}{n^2}$; e affinché esse diventino le più semplici possibili, suppongo $n \;\; a$ e in questo modo, $KB \;\; -3a$ e $CX \;\; b$. Ecco come si costruirà il problema.



Traccio una linea $KA \;\; a$ e al di là del punto K, la prolungo di una quantità $KB \;\; 3a$. Divido BA in due parti uguali in C e dal punto K come centro con raggio KC, descrivo un cerchio nel quale inscrivo la corda $CX \;\; b$. E avendo tracciato la retta AX che prolungo indefinitamente, inscrivo tra AX e CX la retta $EY \;\; AC$ e la inscrivo in modo tale che sia diretta verso il punto K. Così otterrò $XY \;\; x$. Inoltre, essendo i cerchi $ADEB, CXA$ uguali così come le corde AB, CX e le parti BH, XY di queste corde, anche gli angoli ACB, CKX saranno uguali, così come gli angoli BCH, XKY. Di conseguenza, l'angolo XKY sarà la terza parte dell'angolo CKX. Si troverà quindi il terzo XKY di un angolo qualunque CKX, se, tracciando la corda CX di questo angolo e la corda AX del suo supplementare, prolungata indefinitamente, si inscrive una retta EY uguale al diametro AC, di modo che essa sia diretta verso il centro K del cerchio.

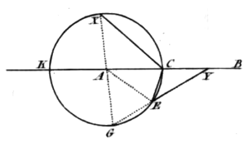
Da ciò segue che se, dal centro K del cerchio, si abbassa su una corda CX la perpendicolare KH, l'angolo HKY sarà il terzo dell'angolo HKX[55]. Pertanto se un angolo qualsiasi HKX è dato, si abbassi sa un punto qualunque X di uno dei suoi lati KX una perpendicolare XH, sull'altro lato KH, che poi dal punto X si traccia al lato KH, la parallela XE, e si inscrive tra questa parallela e la linea XH una retta EY, doppia di KX, di modo che essa sia diretta verso il punto K e l'angolo HKY sarà un terzo dell'angolo HKX. Ossia ancora...



Sia AXK l'angolo dato su uno dei suoi lati, AX per esempio, innalzate una perpendicolare XH e da un punto qualunque K dell'altro lato KX tracciate una retta KE la cui parte EY, sia doppia dell'altro lato XK; e l'angolo KEA sarà un terzo dell'angolo AXK. Innalzando poi un'altra perpendicolare EZ, e tracciando la retta KF in modo che la sua parte ZF intercettata tra EF e EZ, sia doppia di KE, l'angolo KFA sarà un terzo dell'angolo KEA. Così si potrà continuare la trisezione fino all'infinito. Questo metodo si trova in Pappo, libro 4, prop. 32.

Se preferite, per operare la trisezione dell'angolo, impiegare quella delle formula di costruzione, dove si inscrive una retta tra la circonferenza di un cerchio e un'altra retta data di posizione; allora avrete ancora $KB \;\; \frac{q}{n}$ e $CX \;\; \frac{r}{n^2}$, quantità che divengono nel problema attuale, $KB \;\; \frac{-3a^2}{n}$ e $CX \;\; \frac{a^2b}{n^2}$. E ponendo $n \;\; a$, si avrà, $KB \;\; -3a$ e $CX \;\; b$. Da ciò risulta la costruzione seguente...

Lemma. *Lemma di Archimede*

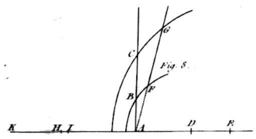


Da un punto qualunque K, siano tracciate dallo stesso lato, rispetto al punto K, due rette $KA \;\; a$ e $KB \;\; 3a$. Dividete AB in due parti uguali in C e dal punto A, come centro con raggio AC, descrivete una circonferenza nella quale porrete la corda $CX \;\; b$; poi unite i punti A e X con una retta che prolungherete fino ad incontrare di nuovo la circonferenza in G; e tra la retta KC prolungata indefinitamente e la circonferenza, inscrivete una retta $EY \;\; AC$ e diretta in modo che, una volta prolungata, passi pere il punto G; e avendo tracciato la linea EC, essa

[55] N.d.T. francese: È assai facile vedere che l'angolo $HKY \;\; \frac{1}{3}HKX$. Poiché $HKX \;\; \frac{1}{2}CKX$ e $YKX \;\; \frac{1}{3}CKX$. Ora HKY $HKX - YKX \;\; \frac{1}{2}CKX - \frac{1}{3}CKX \;\; \frac{1}{6}CKX \;\; \frac{1}{3}HKX$.

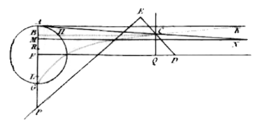
sarà la radice cercata x, o la corda che sottenderà un terzo dell'angolo dato. Questa costruzione ci restituirà la formula riferita in precedenza.

Ma ecco ancora un modo per semplificarla. Essendo uguali i due cerchi $ADEB, KXG$ così come le loro corde CX, AB, come gli angoli CAX KGB,e ACB, così CE è la sottendente del terzo dell'angolo KAG. Di conseguenza essendo dato un angolo qualunque KAG, per trovare la sua terza parte CAE, inscrivete tra il cerchio KGC e il lato dell'angolo KA prolungato indefinitamente, una retta EY uguale al raggio AG del cerchio e diretta verso il punto G. Così Archimede ha insegnato a dividere un angolo in tre parti uguali. Si sarebbe potuto spiegare queste costruzioni in un modo più semplice di quanto si sia fatto qui; ma ho voluto far vedere come si potevano dedurre le costruzioni particolari di problemi, dalle costruzioni generali che sono state esposte in precedenza.



Si potrebbero aggiungere qui molte costruzioni a quelle già date. Per esempio, se si volessero trovare due medi proporzionali geometrici tra a e b, tracciate una retta AK b e innalzate una perpendicolare AB a; dividete AK in due parti uguali in I; portate da A ad H una linea uguale alla distanza BH; poi sul prolungamento di AK oltre A, prendete una lunghezza arbitraria AD che porterete anche da D a E. Ora dai punti D, E, come centri e DB, EC come raggi, descrivete le due circonferenze BF, CG; ponete poi tra queste due circonferenze la retta FG AI, di modo che FG sia diretta verso A, e AF sarà il primo dei due medi proporzionali.

Gli antichi hanno mostrato che si potevano ottenere due medi proporzionali mediante la costruzione di una cissoide; ma nessuno che io sappia aveva indicato finora un metodo meccanico molto semplice per descrivere questa curva; eccolo.

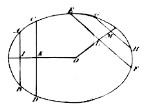


Sia AG il diametro e F il centro del cerchio al quale apparterrà la cissoide. Dal punto F innalzate sul diametro una perpendicolare FD che prolungherete indefinitamente. Prolungate FG fino al punto P, di modo che FP sia uguale al diametro. Fate muovere ad angolo retto PED di modo che il suo lato EP passi sempre per il punto P e l'altro lato ED, uguale al diametro AG o FP, abbia sempre la sua estremità D sulla linea FD e non possa muoversi se non scorrendo su di essa. Nel movimento di questa squadretta, il punto C, punto medio del lato ED, descriverà una cissoide VGK, come ho già in precedenza dimostrato (problema geometrico 34). Se si tratta quindi di trovare tra a e b due medi proporzionali, prendete AM a, innalzate dal punto M una perpendicolare MN b, congiungete i punti A, N, fate muovere secondo la legge prescritta, la squadretta PED, finché il suo punto C sia giunto nella linea AN; allora abbassando dal punto C una perpendicolare CB su AP e ponendo t BH u BG MN BC, avrete, a causa delle linee AB, BH, BG, BC che sono in proporzione continua, a, t, u, b in proporzione continua.

Ci si può ancora servire della squadretta per costruire altri problemi solidi. Per esempio, sia proposta l'equazione cubica, $x^3 \pm px^2\ qx - r\ 0$, nella quale si suppone che q è sempre positivo, r sempre negativo e p positivo o negativo. Ponete $AG\ \frac{r}{q}$; dividete AG in due parti uguali nel punto F e prendete $FR\ GL\ \frac{1}{2}p$; portate FR da F verso A, e GL da G verso A, se avete p, ma se avete $-p$, porterete queste due linee verso P; innalzate dal punto F la perpendicolare FD e su di essa prendete $FQ\ \sqrt{q}$; innalzate ancora dal punto Q la perpendicolare QC; prendete sulla parte ED della squadra le parti ED, EC, rispettivamente uguali a AG e a AR, poi applicate la squadra sulla figura in modo che il punto D tocchi la retta FD e il punto C la retta QC; allora se completate il parallelogramma BQ, la retta BL sarà il valore di x.

Finora ho impiegato, per costruire i problemi solidi, solo metodi meccanici di uso semplice e veloce. In questo modo gli antichi hanno determinato, per composizione, i luoghi dei problemi solidi, hanno presto sentito che tali costruzioni rimanevano inutili, a causa della difficoltà di descrivere le sezioni coniche; ciò li ha impegnati a ricercarne di più semplici, o con la concoide, o con la cissoide, o tendendo dei fili, o infine con qualche altre mezzo meccanico, preferendo, come ci insegna Pappo, una costruzione meccanica, ma di facile esecuzione, a un'altra geometrica ma, in verità, utile solo in via speculativa. Per questa ragione il grande Archimede, trascurando il metodo trovato dai geometri suoi predecessori, nell'operare la trisezione di un angolo con le sezioni coniche, insegnò nei suoi lemmi un nuovo metodo di affrontare questo problema; è quello che abbiamo fatto conoscere prima. Se gli antichi, considerando certe curve come meccaniche, le hanno preferite per la costruzione dei problemi, mi sembra che vi siano ancora più motivi di preferirli per questo uso, oggi che la maggior parte dei geometri li considerano come del tutto geometrici come le stesse sezioni coniche.

Del resto, non condivido la loro opinione a questo riguardo. La loro regola, che consiste nell'ammettere per la costruzione dei problemi tutti i tipi di linee, secondo il grado delle loro equazioni, mi sembra arbitrario e senza alcuna base solida in geometria. Dico anche che è quella falsa; poiché, secondo questa regola, il cerchio sarebbe dello stesso ordine delle sezioni coniche e tuttavia, lo si considera del rango della retta; e la certezza di questa regola una volta compromessa, diviene solo quella di ammettere in geometria tutte le linee, secondo l'ordine delle loro dimensioni? Non ne minerebbe i fondamenti? Quanto a me, credo che non si debba ammettere tra le figure piane la retta e il cerchio, a meno che si immagini prima un nuovo metodo per distinguere le linee, come la retta e il cerchio riuniti con una caratteristica comune, siano distinte da tutte le altre. E in questa ipotesi il numero delle linee piane non potrebbe essere aumentato. Infatti, ogni linea che si può tracciare su un piano è realmente piana, e ogni problema che si può costruire con una tale linea è un problema piano. Supponiamo quindi che si ammettano nella geometria piana le sezioni coniche e altre curve di grado maggiore, ne risulterà che i problemi solidi e altri anche di grado superiore che potrebbero essere costruiti con queste curve, diverranno problemi piani; pertanto, i problemi piani, i problemi solidi, ecc., saranno tutti dello stesso ordine, poiché saranno tutti costruiti da curve piane. La linea retta è analiticamente più semplice del cerchio; ma, malgrado questa differenza, i problemi che si costruiscono con l'una, sono dello stesso ordine di quelli che si costruiscono con l'altra. Con una sola richiesta per questo nuovo di suddividere le linee, la retta e il cerchio sono ricondotti allo stesso ordine; l'ellisse si pone ancora più facilmente, poiché differisce meno dal cerchio che il cerchio dalla retta; così, richiedendo che l'ellisse sia descritto su un piano, esso è, per effetto di questa sola richiesta, ricondotto allo stesso ordine del cerchio. Supponiamo che qualcuno, esaminando le proprietà di un ellisse, sia portato a un problema solido e che gli sia possibile costruire questo problema con l'aiuto di questo stesso ellisse e di un cerchio, non sembrerebbe ragionevole considerare questo problema come piano, poiché si suppone che già l'ellisse è tracciato su un piano e che si tratta solo, per ottenere la costruzione, di tracciare un cerchio? Per lo stesso motivo non sembrerebbe legittimo costruire problemi piani per mezzo dell'ellisse già tracciato?

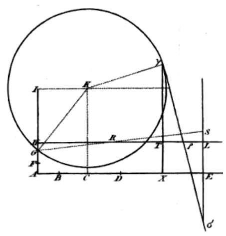


Per esempio se questa ellisse è $ADFG$ e si chiede il suo centro O, traccerò le due parallele AB, CD, che incontreranno l'ellisse nei punti a, B, C, D; traccerò poi altre due parallele EF, GH, che incontreranno l'ellisse nei punti E, F, G, H; dividerò ognuna di queste parallele in due parti uguali nei punti I, K, L, M; unirò i punti I, K e L, M con rette che prolungherò fino al loro punto di incontro in O; e questa costruzione di un problema piano per l'ellisse non sarebbe legittima? Poco importerebbe che questa curva sia espressa analiticamente da una equazione di secondo grado, o che essa sia generata dalla sezione di un solido: la sola ipotesi che essa è già tracciata su un piano, basterebbe a rendere piani tutti i problemi solidi che si costruirebbero tramite essa; e reciprocamente essa sarebbe molto ben impiegata a costruire tutti i problemi piani, poiché la richiesta non è reciproca? Ciò che si può fare in virtù di una richiesta, deve essere considerato come fatto e accordato. La richiesta sarà quindi: un ellisse sia descritta su un piano e da allora tutti i problemi che saranno costruiti per mezzo di questa ellisse, saranno classificati tra i problemi piani; e reciprocamente tutti i problemi piani potranno essere costruiti con questa ellisse.

Da tutto quanto detto, bisogna necessariamente concludere o che si deve confondere insieme e classificare nella stessa classe i problemi piani e solidi, o espellere dalla geometria tutte le linee, al di fuori della retta e del cerchio e forse qualche altra ancora che, in certi casi, potrebbe servire alla costruzione di qualche problema. Ora si può supporre che si trovi un geometra che voglia confondere tutti i generi di problemi? No, senza dubbio. Ebbene quindi, bisogna respingere dalla geometria piana le sezioni coniche, così come tutte le altre specie di linee, eccetto la retta, il cerchio e quelle che potrebbero essere date in qualche caso particolare. Così questa pratica, se comune tra i geometri moderni, di descrivere le sezioni coniche su un piano è interamente contraria allo spirito della geometria. Non pretendo pertanto che si debba escludere dalla geometria le sezioni di un cono; dico solo che non le si deve descrivere su un piano, poiché esse non sono generate geometricamente. Esse nascono dall'intersezione di un solido geometrico con un piano. Ora, il cono si costruisce geometricamente e la sua sezione con un piano è una operazione molto geometrica. Anche il segmento di cono è una figura geometrica, che occupa nella geometria solida lo stesso livello del segmento di cerchio nella geometria piana; e, di conseguenza, la base di questo segmento di cono, che si chiama sezione conica, è una effettiva figura geometrica. Di conseguenza, una sezione conica non è ammessa nella geometria se non perché essa è la superficie di un solido geometrico; e siccome il solo metodo geometrico di ottenere queste curve è di tagliare un solido, gli antichi non le hanno mai ammesse se non nella geometria solida. Si vede bene che una tale generazione di sezioni coniche diviene così difficile, tanto che esse non possono essere di alcuna utilità per la pratica; e tuttavia il principale scopo della geometria è di facilitare i metodi operativi. Così gli antichi hanno fatto ricorso a differenti curve meccaniche descritte su un piano, ed è sul loro esempio che ho costruito i problemi precedenti. Queste costruzioni sono meccaniche, direte; lo so. Ma il metodo moderno di costruire per mezzo delle sezioni coniche descritte su un piano, non è pure meccanico? E se si vuole che le costruzioni con le sezioni coniche siano geometriche, perché quindi non lo sarebbero pure quelle che si fanno con tutt'altre figure? Le une e le altre non sono dello stesso ordine dei problemi piani? Non vedo alcuna ragione di preferire le sezioni coniche alle altre figure, a meno che non sia perché le prime sono generate dalle sezioni del cono; ma questa proprietà è alquanto inutile nella pratica. Del resto, per non omettere del tutto le costruzioni con le sezioni coniche, darò qui qualche esempio, dove non dimenticherò pure di indicare dei metodi particolari per facilitarne l'uso.

Di tutte le sezioni coniche, la più semplice è l'ellisse. Essa è anche la più nota e quella che ha maggiore affinità con il cerchio, infine quella che può essere la più facilmente descritta su un piano. Tuttavia la maggior parte dei geometri gli preferisce la parabola, poiché l'equazione di questa è più semplice. Ma per la stessa ragione dovrebbero quindi anche preferire la parabola al cerchio ed è quanto non fanno. Nulla è più destituito di fondamento di questa classificazione di curva secondo la semplicità delle loro equazioni e i geometri moderni ne hanno troppo riguardo. La semplicità delle equazioni è solo una semplicità analitica che non ha in comune con la composizione. Le leggi di queste sono interamente indipendenti dall'analisi; quest'ultima ci porta come per mano alla composizione; ma vi è vera composizione solo nel momento in cui l'analisi è interamente scomparsa, fintanto che ne rimane la traccia minore, voi non avete ancora l'effettiva composizione. La semplicità delle figure dipende e dalla semplicità della loro descrizione e dalle idee che esse esprimono. Una figura non è un'equazione; è un dipinto sia geometrico, sia meccanico, con il quale si esprimono le sue proprietà per renderle di facile comprensione. Daremo quindi il primo rango all'ellisse e insegneremo in quale modo si possono costruire le equazioni tramite esso.

Sia proposta l'equazione generale di terzo grado, $x^3 - px^2 - qx - r \;\; 0$*, dove le quantità* p, q, r *sono i coefficienti noti dei termini dell'equazione e possono essere indifferentemente positivi o negativi, e dove uno dei due termini* p, q *e anche entrambi, possono mancare, ossia essere uguali a zero.* La sola costruzione seguente potrà servire da formula per costruire tutte le equazioni cubiche.



Su una retta data qualsiasi, portate dalla stessa parte, a partire dal punto B, le rette BC, BE. Chiamate $BC \;\; n$, e ponete $BA \;\; \frac{q}{n}$, che porterete verso C, se q è positivo, e dalla parte opposta, se è negativo. Innalzate dal punto A una perpendicolare AI; prendete su questa perpendicolare, $AF \;\; p$, $FG \;\; AF \;\; FI \;\; \frac{r}{n}$; e infine fate la proporzione $BE \;\; BC \;\; FI \;\; FH$ e porterete FH da F in H. Le due linee FH, FI devono portarsi dalla stessa parte di F, cioè entrambe verso G, se p, r hanno lo stesso segno ed entrambe verso A, se hanno segni diversi. Completate i parallelogrammi $IACK, HAEL$ e dal punto K, come centro con raggio KG, descrivete un cerchio. Prendete sulla retta HL, da una parte o dall'altra del punto H, una linea HR di cui determinerete la lunghezza con questa proporzione, $BE \;\; BD \;\; HL \;\; HR$; dai punti G e R tracciate la retta GR fino ad incontrare in qualche punto S la perpendicolare EL; poi fate muovere la linea GRS in modo che il suo punto R scorra sempre sulla retta HL e il suo punto S sulla retta EL; con questo movimento, il punto G descriverà un ellisse che taglierà il cerchio, come si può vedere quando la linea GRS è giunta nella sua posizione $\gamma\rho\sigma$. Ora, se dal punto γ si abbassa su AE la perpendicolare γX, la metà di questa perpendicolare sarà una delle radici dell'equazione. E l'estremità G o γ del righello GRS o $\gamma\rho\sigma$, potrà incontrare il cerchio in tanti punti quante radici reali vi sono nell'equazione. Tutte quelle radici che saranno poste, rispetto ad AE, dalla stessa parte di FI contato dal punto F, saranno positive e tutte quelle che saranno situate, rispetto ad AE, in un verso contrario a FI, saranno negative. Tutto ciò tuttavia nell'ipotesi che si abbia $-r$; poiché se si avesse r, sarebbe tutto il contrario.

Questa costruzione si dimostra con l'aiuto dei Lemmi seguenti.

Lemma. ***I***. *Essendo tutto supposto come nella costruzione precedente, si ha*

$$2AC \times AX - AX^2 \;\; \gamma X^2 - 2AI \times \gamma X \;\; 2AG \times FI$$

Poiché si ha, per la proprietà del triangolo rettangolo, $K\gamma^2 - CX^2 \;\; \left(X\gamma - CK\right)^2$, ossia, $K\gamma^2 - CX^2 \;\; \left(X\gamma - AI\right)^2$. Ma $K\gamma^2 \;\; GI^2 \;\; AC^2$ e $CX^2 \;\; \left(AX - AC\right)^2 \;\; AX^2 - 2AX \times AC \;\; AC^2$. Pertanto, $K\gamma^2 - CX^2 \;\; GI^2 - AX^2 \;\; 2AX \times AC$. E di conseguenza, $\left(X\gamma - AI\right)^2 \;\; GI^2 - AX^2 \;\; 2AX \times AC$, ossia, $X\gamma^2 - 2X\gamma \times AI \;\; AI^2 \;\; GI^2 - AX^2 \;\; 2AC \times AX$. Sottraiamo da entrambe le parti GI^2 e resterà, $X\gamma^2 - 2X\gamma \times AI \;\; AI^2 - GI^2 \;\; 2AC \times AX - AX^2$. Ora, (per la prop. 2-4 degli elementi) si ha, $AI^2 \;\; AG^2 \;\; 2AG \times GI \;\; 2AG\left(\frac{AG}{2} \;\; GI\right)$. Ora $\frac{1}{2}AG \;\; GI \;\; FI$. Pertanto $AI^2 - GI^2 \;\; 2AG \times FI$. Infine $2AC \times AX - AX^2 \;\; X\gamma^2 - 2X\gamma \times AI \;\; 2AG \times FI$. C.V.D.

Lemma. ***II***. *Essendo supposto tutto come nella costruzione precedente, si avrà,*

$$2EA \times AX - AX^2 \;\; \frac{FI}{FH} \times X\gamma^2 - \frac{2FI}{FH} \times X\gamma \times AH \;\; 2AG \times FI$$

Si sa, per il modo in cui abbiamo fatto muovere sopra, il righello $\gamma\rho\sigma$, che il suo punto γ descrive un ellisse, il cui centro è in L e che i due assi sono posti sulle rette LE e LH. Quello di questi due assi che cade su LE, uguale $2\gamma\rho$, o $2GR$, e quello che cade su LH, uguale $2\gamma\sigma$, o $2GS$. I triangoli simili HGR, SRL ci danno la proporzione, $GR\ \ RS\ \ RH\ \ RL$, da cui ricaviamo $GR\ \ GS\ \ RH\ \ HL$. Ma abbiamo avuto la proporzione, $BE\ \ BD\ \ HL\ \ HR$. Si conclude da queste due proporzioni, questo, $BD\ \ BE\ \ 2GR\ \ 2GS$. Da cui segue che l'asse maggiore sta al suo parametro $BE\ \ BC$, ossia $FI\ \ FH$. Così $T\gamma$, essendo una ordinata dell'asse HL, si ha la proprietà dell'ellisse, $GS^2 - LT^2\ \ \frac{FI}{FH} \times T\gamma^2$. Ma $LT\ \ AE - AX$ e $T\gamma\ \ \gamma X - AH$. Così

$$LT^2\ \ AE^2 - 2AE \times AX\ \ AX^2$$

e

$$T\gamma^2\ \ \gamma X^2 - 2\gamma X \times AH\ \ AH^2$$

Sostituiamo, al posto di questi due quadrati, i loro valori nell'equazione $GS^2 - LT^2 \times T\gamma^2$, essa diverrà,

$$GS^2 - AE^2\ \ 2AE \times AX - AX^2\ \ \frac{FI}{FH}\left(\gamma X^2 - 2\gamma X \times AH\ \ AH^2\right)$$

Ma $GS^2 - AE^2\ \ \left(GH\ \ LS\right)^2$, poiché GS è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui lati sono uguali, uno ad AE e l'altro a $GH\ \ LS$. E per i triangoli simili RGH, RSL, si ha, $LS\ \ GH\ \ LR\ \ HR$, e componendo, $LS\ GH\ \ GH\ \ LR\ HR\ \ HR$. Ossia, $LS\ GH\ \ GH\ \ HL\ \ HR$. Da cui si ricava $\left(LS\ GH\right)^2\ \ GH^2\ \ HL^2\ \ HR^2$. Ma abbiamo fatto per costruzione, $BE\ \ BD\ \ HL\ \ HR$ e ciò dà $BE\ \ BD^2\ \ HL^2\ \ HR^2$; e mettendo per BD^2 il suo valore $BC \times BE$, avremo, $BE^2\ \ BC \times BE\ \ HL^2\ \ HK^2$. Ossia, $BE\ \ BC\ \ HL^2\ \ HR^2$. Ora $BE\ \ BC\ \ FI\ \ FH$, pertanto $FI\ \ FH\ \ HL^2\ \ HR^2$, quindi anche $\left(LS\ GH\right)^2\ \ GH^2\ \ FI\ \ FH$ da cui si ricava $\left(LS\ GH\right)^2\ \ \frac{FI}{FH} \times GH^2$. E vediamo che $GS^2 - AE^2\ \ \left(LS\ GH\right)^2$. Pertanto $GS^2 - AE^2\ \ \frac{FI}{FH} \times GH^2$. Si avrà quindi

$$\frac{FI}{FH} \times GH^2\ \ 2AE \times AX - AX^2\ \ \frac{FI}{FH}\left(\gamma X^2 - 2\gamma X \times AH\ \ AH^2\right)$$

Sottraete da entrambe le parti $\frac{FI}{FH} \times GH^2$ e resterà,

$$2AE \times Ax - AX^2\ \ \frac{FI}{FH}\left(\gamma X^2 - 2\gamma X \times AH\ \ AH^2 - GH^2\right)$$

Ma $AH\ \ AG\ GH$, PERTANTO $AH^2\ \ AG^2\ 2AG \times GH\ GH^2$. E sottraendo da entrambe le parti GH^2, il resto sarà, $AH^2 - GH^2\ \ AG^2\ 2AG \times GH$, ossia $AH^2 - GH^2\ \ 2AG\left(\frac{AG}{2}\ GH\right)\ \ 2AG \times FH$. Così si avrà

$$2AE \times AX - AX^2\ \ \frac{FI}{FH}\left(\gamma X^2 - 2\gamma X \times AH\ 2AG \times FH\right)$$

Infine

$$2AE \times AX - AX^2\ \ \frac{FI}{FH} \times \gamma X^2 - \frac{2FI \times \gamma X \times AH}{FH}\ \ 2FI\ \ AG$$

C.V.D.

Lemma. ***III***. *Supponendo sempre che tutto sia come nella costruzione, si avrà la proporzione*

$$AX\ \ \gamma X - AG\ \ \gamma X\ \ 2BC$$

Se si sottrae l'equazione data dal Lemma I da quella data dal Lemma II, si avrà come resto

$$2AX \times CE\ \ \frac{HI}{FH} \times \gamma X^2 - \frac{2FI}{FH} \times AH \times \gamma X\ \ 2AI \times \gamma X$$

E moltiplicando ogni membro di questa equazione per FH, verrà

$$2FH \times AX \times CE\ \ HI \times \gamma X^2 - 2FI \times AH \times \gamma X\ \ 2AI \times FH \times \gamma X$$

Ma $AI\ \ AH\ \ HI$. Così

$$2FI \times AH - 2FH \times AI\ \ 2FI \times AH - 2FH \times AH - 2FH \times IH$$

Poi

$$2FI \times AH - 2FH \times AH\ \ 2AH \times HI$$

e $AH \times HI - 2FH \times HI\ \ 2HI \times AF$. Pertanto $2FI \times AH - 2FH \times AI\ \ 2HI \times AF$; di conseguenza

$$2FH \times CE \times AX\ \ HI \times \gamma X^2 - 2HI \times AF \times \gamma X$$

Da questa equazione si ricava la proporzione,

$$HI\ \ FH\ \ 2AX \times CE\ \ \left(\gamma X - 2AF\right) \times \gamma X$$

Ma si ha $CE\ \ BC\ \ HI\ \ FH$. Pertanto $CE\ \ BC\ \ 2AX \times CE\ \ \left(\gamma X - 2AF\right) \times \gamma X$. Da cui si ricava

$$2AX \times BC\ \ \left(\gamma X - 2AF\right) \times \gamma X$$

e infine $AX\ \ \gamma X - 2AF\ \ \gamma X\ \ 2BC$. C.V.D.

LEMMA. ***IV***. *Sempre con le stesse ipotesi, si ha,* $2FI\ \ AX-2AB\ \ \gamma X\ \ 2BC$.

Se dall'equazione risultante dal Lemma III, $2BC\times AX\ \ \gamma X^2\ \ 2AF\times\gamma X$, si sottrae l'equazione risultante dal Lemma I, che è, $2AC\times AX-AX^2\ \ \gamma X^2-2AI\times\gamma X-2FI\times AG$, resterà,

$$-2AB\times AX\ \ AX^2\ \ 2FI\times\gamma X-2FI\times AG$$

ossia $AX\left(AX-2AB\right)\ \ 2FI\left(\gamma X-AG\right)$; da cui si ricava la proporzione $2FI\ \ AX-2AB\ \ AX\ \ \gamma X-AG$. Ma dal Lemma III si ha, $AX.\gamma X-2AF\ \ \gamma X\ \ 2BC$, ossia (perché $2AF\ \ AG$), $AX.\gamma X-2AF\ \ \gamma X\ \ 2BC$. Pertanto, per l'uguaglianza dei due rapporti, si ha, $2FI\ \ AX-2AB\ \ \gamma X\ \ 2BC$. C.V.D.

Dopo aver stabilito tutti questi Lemmi, ecco infine in quale modo si dimostra la costruzione del problema.

Dal Lemma IV si ha questa proporzione, $2FI\ \ AX-2AB\ \ \gamma X\ \ 2BC$, ossia $\gamma X\ \ 2BC\ \ 2FI\ \ AX-2AB$; e per la prop. 6-1 degli Elementi, questa proporzione diviene, $\gamma X\ \ 2BC\ \ 2FI\times 2BC\ \ 2BC\left(AX-2AB\right)$, ossia, $\gamma X\ \ 2BC\ \ 2FI\times 2BC\ \ AX\times 2BC$. E dal Lemma III abbiamo avuto, $\gamma X\ \ 2BC\ \ AX\ \ \gamma X-2AF$. Pertanto

$$\gamma X\ \ 2BC\ \ 2BC\times 2FI\ \ \gamma X\left(\gamma X-2AF\right)-2BC\times 2AB$$

E facendo il prodotto dei medi e quello degli estremi, si avrà

$$\gamma X^2-2AF\times\gamma X^2-4BC\times AB\times\gamma X\ \ 8BC^2\times FI$$

E trasportando tutti i termini dalla stessa parte,

$$\gamma X^2-2AF\times\gamma X^2-4BC\times AB\times\gamma X-8BC^2\times FI\ \ 0$$

Ora, nella costruzione che si deve dimostrare, abbiamo chiamato $\frac{1}{2}\gamma X\ \ x$; $AF\ \ p$; $BC\ \ n$; $AB\ \ \frac{q}{n}$ e $FI\ \ \frac{r}{n^2}$. Così $BC\times AB\ \ q$ e $BC^2\times FI\ \ r$, e sostituendo tutti questi valori nell'equazione finali, si avrà $x^3-px^2-qx-r\ \ 0$. C.V.D.

COROLLARIO. *Se si suppongono le linee* AB *e* AF *uguali a zero, si avrà, dal Lemma III,* $AX\ \ \gamma X\ \ \gamma X\ \ 2BC$*; e dal Lemma IV,* $2FI\ \ AX\ \ \gamma X\ \ 2BC$*. Da cui si deduce il metodo per trovare due medi proporzionali tra due rette qualsiasi* FI *e* BC*.*

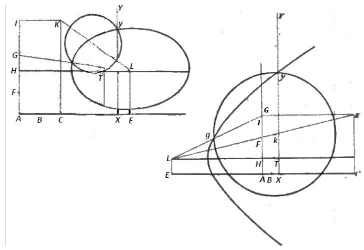
Scolio. Finora ho impiegato solo l'ellisse per costruire l'equazione di terzo grado; ma la regola è più generale per sua natura; essa si estende indifferentemente a tutte le sezioni coniche. Infatti, se, invece dell'ellisse, volete impiegare l'iperbole, portate le linee BE, BE nel verso opposto a partire dal punto B; determinate poi, come prima, i punti A, F, G, H, I, K, L, R, eccetto soltanto FH partendo dal punto F, deve essere portato dal lato opposto a FI; e che HR non deve essere contato su HL, ma su AI, e che bisogna portare HR da entrambe le parti del punto H; poi, invece della linea GRS, tracciate dal punto L e dai due punti R e R due rette, che saranno gli asintoti dell'iperbole. Per mezzo di questi asintoti, LR, LR, descrivete un'iperbole che farete passare dal punto G; poi descrivete pure un cerchio di centro K e raggio KG; e le metà delle perpendicolari abbassate da ogni punto d'intersezione dell'iperbole con il cerchio, sulla retta AE, saranno le radici della equazione proposta. La dimostrazione si farà come prima, osservando di cambiare opportunamente i segni e $-$, secondo che si è cambiata la posizione delle linee.

Se volete impiegare la parabola, il punto E si allontanerà all'infinito, così non se ne troverà nessuna parte e i punto H cadrà sul punto F. Questa parabola avrà per asse HL e BC per parametro dell'asse; essa passerà per i punti G e A; e il suo vertice sarà posto rispetto a F dalla stessa parte di cui B è posto rispetto a C.

Le costruzioni fatte per la parabola sono le più semplici di tutte, considerandone la semplicità analitica; vengono poi quelle fatte per l'iperbole e in ultimo le costruzioni per l'ellisse. Ma se preferite la semplicità pratica, alla facilità di descrivere le figure, invertite questo ordine.

Bisogna osservare in tutte queste costruzioni, che in generale un ellisse o un'iperbole è determinata dal rapporto che esiste tra il parametro del suo asse e l'asse stesso; ed essendo questo rapporto lo stesso di quelli delle linee BC, BE, si vede che conoscendo questo, si avrà l'altro. Per la parabola, basterà supporre BE infinita e BC sarà il parametro, linea la cui conoscenza basta da sola per costruire la parabola. Così si può sempre costruire una equazione qualunque di terzo grado per mezzo di tale sezione conica, quando anche la figura è già tracciata e, di conseguenza, invariabile. E per arrivare dalla figura tracciata a quella che deve dare le radici dell'equazione proposta, basterà aumentare o diminuire in un rapporto dato, tutte le dimensioni della prima; mi spiegherò più chiaramente.

Ci si proponga di costruire l'equazione qualsiasi di terzo grado $x^3\pm px^2\pm qx\pm r\ \ 0$*, tramite una sezione conica qualsiasi già tracciata.*



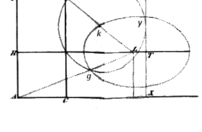
Da un punto qualsiasi B, prendete sulla retta indefinita BCE, due rette di lunghezza arbitraria BC, BE, con la condizione che esse stiano tra loro nel rapporto del parametro dell'asse principale con l'asse stesso della sezione tracciata; portate queste linee da una stessa parte del punto B, se la sezione conica è un ellisse e dall'altra parte se è un'iperbole. Ponete $BC\ \ n$ e $BA\ \ \frac{q}{n}$ e portate BA da B verso C, se q è positivo, e dalla parte opposta, se è negativo; innalzate dal punto A una perpendicolare AI, sulla quale prenderete $AF\ \ p$ e $FG\ \ AF$. Infine farete $FI\ \ \frac{r}{n^2}$; porterete FI da F verso G, se p e r hanno gli stessi segni; ma da F verso A se hanno segni diversi. Fate poi la proporzione $BE\ \ BC\ \ FI\ \ FH$. I primi tre termini di questa proporzione sono noti, così lo sarà anche il quarto; portatelo da F verso I, se la sezione tracciata è un ellisse e nel verso opposto se è un'iperbole. Infine completate i parallelogrammi $IACK, AHLE$. Descritte tutte queste linee, applicatele sulla sezione conica tracciata, cioè applicate su di esse la sezione conica in modo che il suo asse principale coincida con la retta LH e che il suo centro cada sul punto L. Fatte queste cose, unite con rette i punti L e K, così come i punti L e G; la retta LG taglierà la sezione conica nel punto g. Poi prendete su LK a partire dal punto L, un quarto proporzionale che determinerete facendo la proporzione $LG\ \ Lg\ \ LK\ \ Lk$ e dal punto k come centro con raggio kg descrivete un cerchio; dai punti in cui questo cerchio taglierà la sezione conica sovrapposta, abbassate su LH perpendicolari, come γT; dopo di che, portate da T verso γ un quarto proporzionale TY, che determinerete dalla proporzione $Lg\ \ LG\ \ T\gamma\ \ TY$; prolungate TY fino a incontrare la linea AB in un punto X, e $\frac{1}{2}XY$ sarà una delle radici dell'equazione proposta. Tutte le radici che saranno poste rispetto ad AB dalla stessa parte in cui FI è posto rispetto al punto F, saranno positive; e tutte quelle che saranno situate in un verso contrario, saranno negative; nell'ipotesi, tuttavia, che nell'equazione si abbia $-r$; se si avesse r, bisognerebbe fare il contrario.

In questo modo, per mezzo dell'ellisse e o dell'iperbole date, si costruiscono tutte le equazioni di terzo grado. Se le si vuole costruire tramite una parabola data, bisognerà prendere BC uguale al parametro di questa parabola; e dopo aver determinato, come sopra, i punti A, F, G, I, K, dal punto K come centro con raggio KG, si descriverà un cerchio e su queste linee così tracciate, si applicherà la parabola data, o le linee sulla parabola, di modo che questa passi per i punti A e G e che il suo asse passante per il punto F, sia parallelo ad AC e che il suo vertice cada, rispetto a F, dalla stessa parte in cui B è posto rispetto a C. Disposto tutto questo, se, dai punti di intersezione del cerchio con la parabola, si abbassano perpendicolari sulla retta BC, le metà di queste perpendicolari saranno le radici dell'equazione da costruire.

E osservate che se manca il secondo termine dell'equazione e il parametro della parabola è il numero 2, la nostra costruzione diviene quella che Descartes ha presentato nella sua geometria, eccetto che tutte le linee sono qui doppie di quella della costruzione di Descartes.

Questa è la regola generale delle costruzioni. Ma quando si tratta di costruire problemi particolari, bisogna cercare di farlo con le formule più semplici possibili. Per esempio, ho introdotto l'indeterminata n, per mezzo della quale si può spesso semplificare la costruzione. Ne presento un esempio.

Sia dato un ellisse e che si tratti di trovare due medi proporzionali tra a e b. Siano, il primo dei due medi x e il secondo $\frac{x^2}{a}$; allora i quattro termini $a, x, \frac{x^2}{a}, b$ saranno in proporzione continua e si avrà. $ab\ \ \frac{x^3}{a}$ o $x^3\ \ a^2b$ e infine $x^3 - a^2b\ \ 0$, equazione che bisogna costruire. Si vede che in questa equazione i termini p, q mancano e che $r\ \ a^2b$. Così BA e AF sono qui nulli e $FI\ \ \frac{a^2b}{n^2}$. Affinché l'ultimo termine divenga più semplice, suppongo l'indeterminata $n\ \ a$; allora $FI\ \ b$ ed ecco come si fa la costruzione.



Su una linea indefinita AE prendete a contare dal punto A, una linea $AC\ \ a$. Poi determinate una linea AE con questa proporzione: il parametro dell'asse maggiore dell'ellisse sta a questo asse come $AC\ \ AE$; portate AE dalla stessa parte di AC a partire dal punto A. Innalzate su AC e dal punto A una perpendicolare, sulla quale prenderete $AI\ \ b$; determinate poi una linea AH da questa proporzione, $AE\ \ AC\ \ AI\ \ AH$ e completate i parallelogrammi $IACK, HAEL$; tracciate le rette LA, LK; applicate su tutto questo tracciato l'ellisse dato e supponete che esso tagli la retta AL in un punto g; fate la proporzione, $LA.Lg\ \ LK\ \ lk$; dal punto k, come centro con raggio kg, descrivete un cerchio che taglierà l'ellisse in γ; dal punto γ abbassate su AE la perpendicolare γX, che incontrerà HL in T; determinate una linea TY con questa proporzione, $Lg \quad LA \quad T\gamma \quad TY$ e avrete $\frac{1}{2}XY \quad x$, cioè $\frac{1}{2}XY$ sarà il primo dei due medi proporzionali. C.V.D.

Parte 3

ALCUNE NOTE

Osservazioni su alcuni problemi proposte dal traduttore in italiano.

Osservazione. **Problema 1**: La somma di due numeri uguali ad a; la differenza dei loro quadrati è b; si chiede quali sono questi due numeri?

I termini incogniti sono ovviamente i due numeri. Non è necessario utilizzare due incognite, perché questi due numeri sono legati in modo semplice attraverso la loro somma. Pertanto, posto

$$\begin{array}{ll} 1^\circ\, numero & x \\ 2^\circ\, numero & a-x \end{array}$$

con $a > x$

La relazione che lega i quadrati, può essere scritta quindi

$$\left|x^2 - (a-x)^2\right| \ \ b$$

svolgendo

$$\left|x^2 - a^2 - x^2\ \ 2ax\right| \ \ \left|2ax - a^2\right| \ \ b$$

avremo quindi due casi, uno per $x \geq \frac{a}{2}$ e l'altro per $x < \frac{a}{2}$:

$$\begin{array}{ll} x_1\ \frac{a^2 b}{2a}\ \ \frac{a}{2}\ \ \frac{b}{2a} & per \quad x \geq \frac{a}{2} \\ x_2\ \frac{a^2 - b}{2a}\ \ \frac{a}{2} - \frac{b}{2a} & per \quad x < \frac{a}{2} \end{array}$$

Osservazione. **Problema 2**: Si hanno tre quantità x, y, z. Si conosce la somma di queste quantità prese a due a due, si chiede il valore di ognuno di loro?

La soluzione passa attraverso il sistema

$$\begin{cases} x\ y\ \ a \\ x\ z\ \ b \\ y\ z\ \ c \end{cases} \quad \begin{cases} y\ \ a-x \\ z\ \ b-x \\ a-x\ \ b-x\ \ c \end{cases} \quad \begin{cases} y\ \ a - \frac{ab-c}{2}\ \ \frac{a-bc}{2} \\ z\ \ b - \frac{ab-c}{2}\ \ \frac{b-ac}{2} \\ x\ \ \frac{ab-c}{2} \end{cases}$$

Osservazione. **Problema 1. di Geometria**. - Si conosca $BC\ \ a$, $A\widehat{B}D\ \ \beta$, $A\widehat{C}D\ \ \gamma$. Poniamo $AD\ \ x$. Consideriamo il triangolo BDA, rettangolo in A; dalla definizione di tangente di un angolo, ricaviamo $\tan\beta\ \ \frac{AD}{BD}$, da cui $BD\ \ \frac{x}{\tan\beta}$; analogamente per il triangolo ADC, retto in D, si ha $DC\ \ \frac{x}{\tan\gamma}$. Ma $BD\ \ DC\ \ BC\ \ a$, per cui

$$\frac{x}{\tan\beta}\ \ \frac{x}{\tan\gamma}\ \ a$$

e risolvendo rispetto a x, otteniamo

$$x\ \ \frac{a\tan\beta\tan\gamma}{\tan\beta\ \ \tan\gamma}$$

Osservazione. **Problema 3 - Geometria**

Soluzione con due incognite (sistema risolvente): Newton non restituisce il valore di y. Sia $2p\ \ a$, $A\ \ b^2$, $BC\ \ x$ e $AC\ \ y$. (La scelta di assegnare le incognite ai due cateti, porta ad un sistema simmetrico di soluzione non agevole). Allora $AB\ \ \sqrt{x^2 - y^2}$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2}\ x\ y\ \ a \\ y\sqrt{x^2 - y^2}\ \ 2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2\ y^2} & a - x - y \\ y\left(a - x - y\right) & 2b^2 \end{cases}$$

eleviamo la prima equazione al quadrato

$$\begin{cases} x^2 - y^2\ \ a^2\ x^2\ y^2 - 2ax - 2ay\ \ 2xy \\ ay - xy - y^2\ \ 2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2\ \ ax\ ay - xy - \frac{a^2}{2} \\ y^2\ \ ay - xy - 2b^2 \end{cases}$$

sottraendo le due equazioni

$$\begin{cases} 0\ \ ax - \frac{a^2}{2}\ \ 2b^2 \\ y^2\ \ ay - xy - 2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \quad \frac{\frac{a^2}{2}-2b^2}{a} \quad \frac{a}{2}-\frac{2b^2}{a} \\ y^2-ay \ y\left(\frac{a}{2}-\frac{2b^2}{a}\right) \ 2b^2 \quad 0 \end{cases}$$

Soluzione con una sola incognita.

Manteniamo gli stessi dati per un miglior confronto. Sia $2p \quad a$, $A \quad b^2$, e $BC \quad x$. Allora $x^2 \quad AB^2 \ AC^2$ e $AB \times AC \ \ 2b^2$. Poiché $AB \ AC \quad a-x$, allora $\left(AB \ AC\right)^2 \ \ AB^2 \ AC^2 \ 2AB \times AC \quad \left(a-x\right)^2$; da cui segue

$$\left(a-x\right)^2 \quad x^2 \ 4b^2$$

risolvendo

$$a^2 \ x^2-2ax \ \ x^2 \ 4b^2$$
$$x \quad \frac{a}{2}-\frac{2b^2}{a}$$

Osservazione. **Problema 7 di Geometria -** Il problema si può risolvere anche con una sola incognita, mantenendo i dati iniziali così come formulati sopra.

Siano $BC \ AC \quad a$, $AB \ CD \quad b$, $AC \quad x$, $BC \quad a-x$, da cui $AB \quad \sqrt{2x^2-2ax \ a^2}$, $CD \quad b-\sqrt{2x^2-2ax \ a^2}$. Dalla formula dell'area si ha $CD \quad \frac{AC\times BC}{AB} \quad \frac{x\left(a-x\right)}{\sqrt{2x^2-2axa^2}}$. Uguagliando i due valori ricavati di CD si ottiene

$$b-\sqrt{2x^2-2ax \ a^2} \quad \frac{x\left(a-x\right)}{\sqrt{2x^2-2ax \ a^2}}$$

Il radicando, avendo discriminante negativo, risulta sempre positivo e quindi

$$b\sqrt{2x^2-2ax \ a^2}-2x^2 \ 2ax-a^2 \quad ax-x^2$$

Isolando la radice si ha

$$b\sqrt{2x^2-2ax \ a^2} \quad x^2-ax \ a^2$$

Elevando al quadrato entrambi i membri, si ha

$$2b^2x^2-2ab^2x \ a^2b^2 \quad x^4 \ a^2x^2 \ a^4-2ax^3 \ 2a^2x^2-2a^3x$$

Trasportando e ordinando si ha

$$x^4-2ax^3 \ \left(3a^2-2b^2\right)x^2 \ \left(2ab^2-2a^3\right) \ a^4-a^2b^2 \quad 0$$

che, come si vede è la stessa ottenuta in precedenza.

Osservazione. **Problema 9 - Geometria** - Poniamo $CD \quad a$ e $\frac{AB}{2} \quad b$. Sia BC il lato maggiore e AC quello minore, per cui si pone $\frac{BCAC}{2} \quad c$, $\frac{BC-AC}{2} \quad z$, dove z è la nostra incognita. Possiamo ricavare i due lati in funzione di z

$$\begin{cases} BC \ AC \ \ 2c \\ BC-AC \ \ 2z \end{cases}$$

sottraendo la seconda equazione dalla prima, si ha

$$\begin{cases} 2BC \ \ 2c \ 2z \\ BC \ AC \ \ 2c \end{cases} \qquad \begin{cases} BC \quad c-z \\ c-z \ AC \ \ 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} BC \quad c-z \\ AC \quad c \ z \end{cases}$$

Ora $BD^2 \quad BC^2-CD^2$ e $AD^2 \quad AC^2-CD^2$(per il th. di Pitagora applicato ai due triangoli rettangoli che si formano dopo aver tracciato l'altezza CD). Avremo

$$BD^2 \qquad \left(c-z\right)^2-a^2 \ \ c^2 \ z^2-2cz-a^2$$
$$AD^2 \qquad \left(c \ z\right)^2-a^2 \ \ c^2 \ z^2 \ 2cz-a^2$$

Ma $AD \ BD \quad AB$, quindi $AD \quad AB-BD \quad 2b-\sqrt{c^2 \ z^2-2cz-a^2} \quad \sqrt{c^2 \ z^2 \ 2cz-a^2}$. Elevando al quadrato la precedente relazione che confronta le due espressioni di AD, si ha

$$4b^2 \ c^2 \ z^2-2cz-a^2-4b\sqrt{c^2 \ z^2-2cz-a^2} \quad c^2 \ z^2 \ 2cz-a^2$$
$$b^2-cz \quad b\sqrt{c^2 \ z^2-2cz-a^2}$$
$$b^4 \ c^2z^2-2b^2cz \quad b^2c^2 \ b^2z^2-2b^2cz-a^2b^2$$

riordinando rispetto all'incognita z, si ha

$$\left(c^2 - b^2\right) z^2 \ \ b^2c^2 - b^4 - a^2b^2$$

$$z \ \ \sqrt{\frac{b^2c^2 - b^4 - a^2b^2}{c^2 - b^2}} \ \ \sqrt{\frac{b^2\left(b^2 \ a^2 - c^2\right)}{b^2 - c^2}} \ \ b\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2 - c^2}}$$

(si suppone, contrariamente alla scelta di Newton, che l'altezza sia minore della base).

Osservazione. **Problema 10 Geometria -** Possiamo risolvere questo problema utilizzando il teorema di Carnot (versione algebrico-goniometrica del teorema di Euclide). Assumiamo sempre $AB \ \ a \ AC \ \ BC \ \ b$, $\hat{C} \ \ \alpha$. Poniamo $AC \ \ x$, sarà $BC \ \ b - x$. Il Th di Carnot è una generalizzazione del th. di Pitagora. Esso afferma che:

$$AB^2 \quad\quad BC^2 \ AC^2 - 2BC \times AC \times \cos\alpha$$

$$AB^2 \quad\quad \left(BC \ \ AC\right)^2 - 2BC \times AC - 2BC \times AC\cos\alpha$$

$$a^2 \ \ b^2 - 2x\left(b - x\right)\left(1 \ \cos\alpha\right)$$

Svolgendo avremo

$$a^2 \ \ b^2 - 2bx\left(1 \ \cos\alpha\right) \ 2x^2\left(1 \ \cos\alpha\right)$$

trattandosi di un triangolo dove la somma degli angoli interni è sempre uguale a un angolo piatto, $\left(1 \ \cos\alpha\right) > 0$. Poniamo, per comodità $\left(1 \ \cos\alpha\right) \ \ d$.

$$2dx^2 - 2bdx \ b^2 - a^2 \ \ 0$$

risolvendo questa equazione di secondo grado, avremo

$$x \ \ \frac{bd \pm \sqrt{b^2d^2 - 2\left(b^2 - a^2\right)}}{2d}$$

la soluzione negativa non è accettabile perché, ponendo $bd > \sqrt{b^2d^2 - 2\left(b^2 - a^2\right)}$, si ha $a^2 > b^2$,cioè $a > b$ (trattandosi di misura di segmenti) e ciò vorrebbe dire che la base è maggiore della somma degli altri due lati; questa condizione è opposta a quella che caratterizza la costruzione dei triangoli per i quali ogni lato è minore della somma degli altri e maggiore della loro differenza). La soluzione richiede che $b^2\left(d^2 - 2\right) \ 2a^2 \geq 0$, ma $d^2 \ \ \left(1 \ \cos\alpha\right)^2$, per cui $d^2 - 2 \ \ 1 \ 2\cos\alpha \ \cos^2\alpha$, cioè

$$d^2 \ \ \cos^2\alpha \ 2\cos\alpha - 1$$

il secondo membro sarà positivo per

$$\cos\alpha \ \ -1 \pm \sqrt{2}$$

la soluzione negativa non è accettabile, essendo il coseno una funzione limitata con estremo inferiore -1 e quindi avremo

$$-1 \ \sqrt{2} < \cos\alpha < 1$$

Per trovare gli angoli alla base basta applicare il teorema di Eulero o dei seni, per il quale

$$\frac{AC}{\sin B} \ \ \frac{AB}{\sin\alpha} \ \ \frac{BC}{\sin A}$$

Osservazione. **Problema 17. Geometria -** Basandoci sul teorema di Carnot, possiamo risolvere così: poniamo $AC \ \ a$, $AB \ \ b$, $BC \ \ c$ e indichiamo con x l'angolo ACB. Allora applicando il teorema di Carnot al triangolo ACB, si ha

$$b^2 \ \ a^2 \ c^2 - 2ac\cos x$$

da cui

$$\cos x \ \ \frac{a^2 \ c^2 - b^2}{2ac}$$

Applichiamo ora lo stesso teorema al triangolo AEC. Avremo

$$AE^2 \ \ a^2 \ \frac{c^2}{4} - ac\cos x$$

da cui

$$\cos x \ \ \frac{a^2 \ \frac{c^2}{4} - AE^2}{ac}$$

per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, scriviamo

$$\frac{a^2 \ c^2 - b^2}{2ac} \ \ \frac{a^2 \ \frac{c^2}{4} - AE^2}{ac}$$

e risolvendo rispetto ad AE

$$2AE^2 \;\; 2a^2 \;\; \frac{c^2}{2} - a^2 - c^2 \;\; b^2 \;\; a^2 - \frac{c^2}{2} \;\; b^2$$

pertanto

$$AE \;\; \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - c^2 \;\; 2b^2}$$

ma $AE \;\; \frac{1}{2}AD$, per cui

$$AD \;\; \sqrt{2a^2 - c^2 \;\; 2b^2} \;\; \sqrt{2AC^2 - BC^2 \;\; 2AB^2}$$

Osservazione. **Problema 21. Geometria** - Anche in questo caso i punti sono dati per posizione indicando la lunghezza dei segmenti AD, BF, perpendicolari alla retta DF e quella del segmento DF appartenente alla stessa retta. Questo può essere posto anche considerando il problema in un piano cartesiano, nel quale i punti dati per posizione hanno coordinate $A\left(0;a\right)$, $B\left(c;b\right)$ e $C\left(x;0\right)$. Ne segue che $\overline{AC} \;\; \sqrt{x^2 \;\; a^2}$, $\overline{BC} \;\; \sqrt{\left(c-x\right)^2 \;\; b^2}$ (applicando la formula della distanza). La loro differenza sarà

$$\sqrt{x^2 \;\; a^2} - \sqrt{\left(c-x\right)^2 \;\; b^2} \;\; d$$

Elevando al quadrato, spostando i termini tra i due membri

$$x^2 \;\; a^2 - 2d\sqrt{x^2 \;\; a^2} \;\; c^2 \;\; x^2 - 2cx \;\; b^2$$

riducendo e isolando il radicale, si ha

$$2cx \;\; a^2 \;\; d^2 - c^2 - b^2 \;\; 2d\sqrt{x^2 \;\; a^2}$$

applicando la sostituzione $a^2 \;\; d^2 - c^2 - b^2 \;\; 2e^2$, dividendo per 2 e elevando al quadrato, si ha

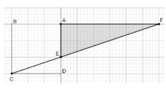
$$x^2\left(d^2 - c^2\right) - 2ce^2x - e^4 \;\; a^2d^2 \;\; 0$$

da cui, considerando solo la radice positiva,

$$x \;\; \frac{ce^2 \;\; \sqrt{a^2c^2d^2 - a^2d^4 \;\; d^2e^4}}{d^2 - c^2}$$

una tale soluzione è accettabile se $d \not{c}$, cioè se i punti A e B non stanno su una retta parallela a DF.

Osservazione. **Problema 24. Geometria** - La figura invita a risolvere il problema con i metodi della geometria analitica con i lati del triangolo rettangolo appartenenti agli assi cartesiani e il vertice dell'angolo retto posto nell'origine. Una tale scelta non implica una perdita di generalità perché altre posizioni del triangolo sarebbero riconducibili a questa applicando le equazioni delle isometrie.



Poniamo $EF \;\; 2b$ e $C\left(-a;-a\right)$. Il punto C appartiene alla bisettrice del primo e terzo quadrante e apparterrà alla retta di equazione $y \;\; x$. Si tratta quindi di trovare il coefficiente angolare, m, della retta CF affinché intersechi gli assi cartesiani formando un segmento di lunghezza $2b$.

Il fascio di rette aventi come sostegno il punto C è espresso da $y - y_C \;\; m\left(x - x_C\right)$. Determiniamo l'intersezione di questo fascio con gli assi cartesiani

$$E\begin{cases} y \;\; a \;\; m\left(x \;\; a\right) \\ x \;\; 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \;\; a\left(m-1\right) \\ x \;\; 0 \end{cases}$$

$$F\begin{cases} y \;\; a \;\; m\left(x \;\; a\right) \\ y \;\; 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \;\; \frac{a\left(1-m\right)}{m} \\ y \;\; 0 \end{cases}$$

Calcoliamo la distanza tra i due punti e poniamola uguale a $2b$.

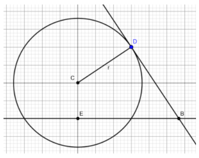
$$EF \;\; \sqrt{\left(ma - a\right)^2 \;\; \left(\frac{a\left(1-m\right)}{m}\right)^2} \;\; 2b$$

Quadrando entrambi i membri e svolgendo i calcoli necessari, si ottiene

$$a^2m^4 - 2a^2m^3 \;\; 2\left(a^2 - 2b^2\right)m^2 - 2a^2m \;\; a^2 \;\; 0$$

equazione non certo semplice da risolvere.

Osservazione. **Problema 25. Geometria** - Si può interpretare mediante la geometria analitica considerando un cerchio di centro C nell'origine del piano cartesiano e di raggio $DC\ \ r$.



Consideriamo il caso in cui sono dati il punto D e la distanza DB. Si tratta di trovare la posizione della retta EB che interseca la tangente in B. Poniamo $D\left(a,b\right)$ e la distanza $DB\ \ c$. Indichiamo $CE\ \ h$, che rappresenterà la nostra incognita. La retta CE avrà equazione $y\ \ -h$ (facendo riferimento alla sola disposizione della figura). Troviamo l'equazione della tangente in D. Il coefficiente angolare della retta contenente il raggio è $m_r\ \ \frac{b}{a}$ per cui $m_{tg}\ \ -\frac{b}{a}$. Per cui la retta tangente ha equazione $y-b\ \ -\frac{b}{a}\left(x-a\right)$, ossia $y\ \ -\frac{a}{b}x\ \ \frac{a^2}{b}\ \ b$. Troviamo ora il punto B come intersezione tra la retta tangente e la retta EB.

$$\begin{cases} y\ \ -h \\ y\ \ -\frac{a}{b}x\ \ \frac{a^2}{b}\ \ b \end{cases} \quad \begin{cases} y\ \ -h \\ -\frac{a}{b}x\ \ \frac{a^2}{b}\ \ b\ h\ \ 0 \end{cases} \quad B \quad \begin{cases} y\ \ -h \\ x\ \ \frac{a^2}{b}\ \ \frac{b^2}{a}\ \ \frac{bh}{a} \end{cases}$$

Poiché DB è dato e uguale a c, avremo

$$DB\ \ c\ \ \sqrt{\left(\frac{b^2\ \ bh}{a}\right)^2\ \ \left(b\ \ h\right)^2}$$

Quadrando e svolgendo i calcoli si avrà

$$\left(a^2\ \ b^2\right)h^2\ \ 2b\left(a^2\ \ b^2\right)h\ \ a^2\left(b^2-c^2\right)\ \ 0$$

la cui soluzione sarà

$$h\ \ -1\pm\frac{\sqrt{b^4\ \ a^4\ \ 2a^2b^2-a^4b^2\ \ a^4c^2-a^2b^4\ \ a^2b^2c^2}}{a^2\ \ b^2}$$

Osservazione. **Problema 26. Geometria**.

Dalla soluzione proposta da Newton si evince che "medio proporzionale aritmetico" sta per la nostra media aritmetica, cioè il lato AB è uguale alla semisomma degli altri due lati:

$$AB\ \ \frac{AC\ \ BC}{2}$$

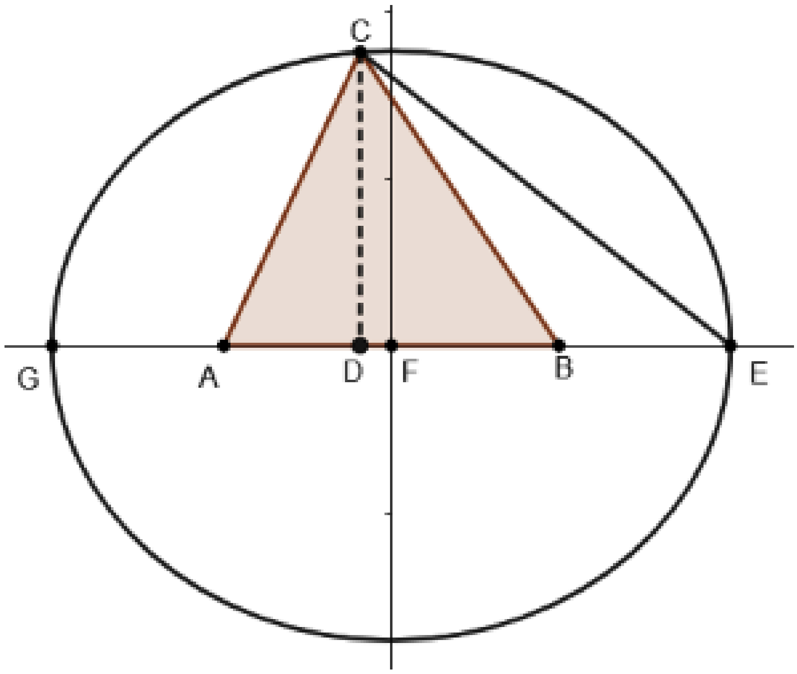
da cui si ottiene

$$2AB\ \ AC\ \ BC$$

Tale relazione richiama quella che, dati due punti detti fuochi, definisce un ellisse come luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da i due punti fuochi.

Se i punti A e B, estremi della base del triangolo sono considerati come i due fuochi, il punto C è un punto dell'ellisse.

Il problema può essere affrontato secondo le procedure della geometria cartesiana. Scegliamo un caso particolare nel quale l'ellisse è centrato nell'origine, come in figura, e la base AB è uguale al semiasse maggiore.



L'equazione generale dell'ellisse è data da

$$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1$$

dove a è il semiasse maggiore e b il semiasse minore. La relazione che li lega è $a^2 - b^2 \quad c^2$, con c distanza focale. Pertanto

$$b^2x^2 \quad a^2y^2 \quad a^2b^2$$

da cui

$$y \quad \pm\sqrt{\frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}} \quad \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

ma $b^2 \quad a^2 - c^2$, e nel nostro caso particolare $c \quad AF \quad FB \quad \frac{a}{2}$; ne segue

$$b^2 \quad a^2 - \frac{a^2}{4} \quad \frac{3}{4}a^2$$

L'ellisse avrà equazione

$$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{4y^2}{3a^2} \quad 1$$

cioè

$$3x^2 \quad 4y^2 \quad 3a^2$$

da cui

$$y \quad \pm\sqrt{\frac{3a^2 - 3x^2}{4}} \quad \pm\frac{1}{2}\sqrt{3\left(a^2 - x^2\right)}$$

Possiamo quindi scrivere le coordinate del punto C, vertice del triangolo che appartiene all'ellisse.

$$C\left(-x; \frac{1}{2}\sqrt{3\left(a^2 - x^2\right)}\right)$$

Come Newton, $AB \quad a$ e l'asse maggiore sarà pertanto $2a$. Poniamo $DF \quad x$, $\left(0 < x < a\right)$; ne segue che $AD \quad \frac{a}{2} - x$ e $DB \quad \frac{a}{2} \quad x$. L'altezza CD è pertanto $CD \quad \frac{1}{2}\sqrt{3\left(a^2 - x^2\right)}$.

Applichiamo il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli ADC e BDC.

$$AC \quad \sqrt{AD^2 \quad CD^2} \quad \sqrt{\left(\frac{a - 2x}{2}\right)^2 \quad \frac{3a^2 - 3x^2}{4}} \quad \sqrt{\frac{a^2 - 4ax \quad 4x^2 \quad 3a^2 - 3x^2}{4}} \quad \frac{x - 2a}{2}$$

$$BC \quad \sqrt{DB^2 \quad CD^2} \quad \sqrt{\left(\frac{a \quad 2x}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{x - 2a}{2}\right)^2} \quad \frac{\sqrt{5x^2 \quad 5a^2}}{2}$$

Ora sappiamo che $AC \quad BC \quad 2AB$, per cui

$$\frac{x - 2a}{2} \quad \frac{\sqrt{5x^2 \quad 5a^2}}{2} \quad 2a$$

$$x - 2a \quad \sqrt{5x^2 \quad 5a^2} \quad 4a$$

o

$$\sqrt{5x^2 \quad 5a^2} \quad 6a - x$$

elevando al quadrato e svolgendo si ottiene

$$4x^2 \quad 12ax - 31a^2 \quad 0$$

da cui, trascurando la soluzione negativa,

$$x \quad a\left(-\frac{3}{2} \quad \sqrt{10}\right)$$

Osservazione. **Problema 43 - Geometria**

Questo è un classico esercizio di geometria analitica nel quale si chiede di trovare l'equazione di una circonferenza dati due punti e una retta ad essa tangente. La procedura è tecnicamente un poco laboriosa e consiste nel risolvere un sistema a tre equazioni tre incognite, così costruito:

Osservazione. Nota l'equazione canonica di una circonferenza $x^2 \quad y^2 \quad ax \quad by \quad c \quad 0$

(1) equazione nelle incognite a, b, c ottenuta sostituendo a x, y le coordinate del primo punto
(2) equazione nelle incognite a, b, c ottenuta sostituendo a x, y le coordinate del secondo punto
(3) equazione nelle incognite a, b, c che rappresenta la condizione di tangenza tra una curva e una retta (cioè, si pone a sistema l'equazione generale della circonferenza con l'equazione della retta tangente e si impone, dopo aver sostituito, che l'equazione risolvente abbia discriminante nullo, condizione di tangenza)