

FISICA DEI NEUTRONI

Revisione degli Appunti di Halpern sulle Lezioni di E.Fermi nel 1945

Atomic energy Commission (Declassificato nel 1951)

(traduzione prof. Gianluigi Trivia¹)

PREFAZIONE *Nell'autunno del 1945 il prof. Enrico Fermi tenne un corso sulla Fisica dei Neutroni come parte del programma dell'Università di Los Alamos. Il corso consisteva di trenta lezioni la maggior parte delle quali furono tenute dallo stesso Fermi. In sua assenza lo sostituirono R.F. Christy e E. Segré.*

L'attuale revisione è basata sugli appunti preparati da Halpern con l'assistenza di B.T. Feld e pubblicati prima come documento LADC 255 e successivamente con una maggiore diffusione come MDDC 320.

Avendo trovato il documento assai utile nell'insegnamento per un corso introduttivo di fisica nucleare, l'autore della presente revisione ha creduto che il materiale dovesse avere la più ampia diffusione possibile, in particolare tra gli studenti di "ingegneria della pila". A tale scopo le note pubblicate come MDDC 320 sono state riviste e rese disponibili sotto questa forma per una maggiore diffusione.

Le revisioni principali nel testo riguardano alcune estensioni delle affermazioni per maggiore chiarezza e l'aggiunta di richiami e note per completezza. I problemi sono stati numerati e raggruppati alla fine di ogni capitolo. Le figure sono state rifatte, e in qualche caso ne sono state aggiunte di nuove. È stato pure aggiunto del materiale che potrebbe non essere stato presentato durante le lezioni. Ciò è stato fatto solo laddove era necessaria una maggiore chiarezza e per nuovi dati ottenuti per una maggiore completezza.

Il revisore non ha avuto l'onore di seguire il corso. È sua speranza, tuttavia, che la revisione renderà disponibile a un più ampio gruppo di studenti il materiale essenziale.

J. G. B.

¹Docente di Matematica-Fisica presso il Liceo Classico P. Sarpi di Bergamo)

Contents

1	Sorgenti di Neutroni	3
1.1	Sorgenti alfa-neutroni	3
1.2	Sorgenti di fotoneutroni	6
1.3	Sorgenti di Neutroni con Acceleratori di Particelle	7
2	Collisione dei Neutroni con i Nuclei	8
2.1	Tipologie generali di reazioni	8
2.2	Sezione d'urto dei neutroni in funzione dell'energia	8
2.3	Misura della sezione d'urto totale	9
2.4	Caratteristiche generali delle collisioni	10
2.5	Esempi dall'esperienza	14
3	Carta degli isotopi stabili e reazioni che coinvolgono i neutroni	19
3.1	La carta Isotopica di Segre	19
3.2	Pesi Isotopici e Energia di Legame dei Neutroni	22
4	Modelli di Nuclei e delle Reazioni Nucleari	24
4.1	I Nuclei Composti	24
4.2	Risonanze dei neutroni, spazature tra i livelli	25
4.3	Due modelli Nucleari	26
5	La diffusione dei neutroni	29
5.1	La formula di Breit-Wigner	29
5.2	Alcune considerazioni generali sulla diffusione dei neutroni	30
5.3	Diffusione da parte di un potenziale	31
5.4	La diffusione dei neutroni	35
6	Il Rallentamento dei Neutroni	40
6.1	Variazione di direzione ed energia subito dopo la collisione	40
6.2	Distribuzione dei neutroni dalla sorgente puntiforme - Metodi sperimentali	43
6.3	Distribuzione dei neutroni dal punto sorgente - Calcolo di r_{medio}^2	45
6.4	Distribuzione dei neutroni dalla sorgente puntiforme - Equazione d'età	48
7	La distribuzione di neutroni lenti in un mezzo	53
7.1	L'equazione differenziale per neutroni lenti	53
7.2	Condizioni a contorno per l'equazione differenziale dei neutroni lenti	55
7.3	Lunghezza di diffusione in acqua e grafite	56
7.4	L'albedo è la riflettività di superfici di confine per neutroni	59
8	FISSIONE NUCLEARE	63
8.1	Le energie di legame dei nuclei	63
8.2	Il processo di fissione - Considerazioni sull'Energia	65
8.3	Processi di fissione - Particelle derivanti	69
8.4	Il Processo di Fissione - Carattere generale della sezione d'urto	72

Chapter 1

Sorgenti di Neutroni

1.1 Sorgenti alfa-neutroni

Un tipo vantaggioso di sorgente di neutroni è basato sulla reazione (α, n) . Le particelle alfa incidenti su un nucleo bersaglio producono emissione di neutroni. Consideriamo la reazione $Li^7(\alpha, n)B^{10}$:



In questa equazione il B^{11} è lo stato intermedio o nucleo composto. Q è l'energia di reazione e può essere calcolata dalle masse misurate spettroscopicamente nel modo seguente:

Li^7	7.01804	<i>u.m.</i>	B^{10}	10.01605	<i>u.m.</i>
He^4	4.00388		n^1	1.00893	
	11.02192	<i>u.m.</i>		11.02498	<i>u.m.</i>

dove

$$Q = 11.02192 - 11.02498 = -0.00306 \text{ u.m.}$$

Le masse date sono quelle degli atomi neutri, cioè la "massa di un atomo" è uguale alla massa del nucleo più la massa degli elettroni associati e le unità sono definite dalla relazione

$$1 \text{ m.u.} = 1 \text{ massa unitaria} = \text{massa atomo neutro isotopo più abbondante dell'ossigeno}/16$$

Ora, nell'eq. 1.1 vi è un eccesso di massa nel secondo membro indicante che la reazione è endotermica. Cioè, deve essere fornita l'energia equivalente all'aumento di massa per rendere la reazione energeticamente possibile. Questa energia, indicata da Q , può essere calcolata convertendo il difetto di massa -0.00306 u.m. , nell'unità di energia usando la relazione $E = mc^2$. Poiché $1 \text{ u.m.} = 931 \text{ MeV}$ (si veda il problema 2 alla fine di questo capitolo) il valore dell'energia di reazione per la 1.1 è $Q = -0.00306 \cdot 931 \text{ MeV}$ o -2.85 MeV . Il segno *negativo* indica che la reazione è *endotermica*, cioè, Q è assunto *positivo* per reazioni *esotermiche*.

L'"energia di soglia" per questa reazione è quel *valore minimo dell'energia cinetica che devono avere le particelle alfa per rendere energeticamente possibile la reazione*. La soglia non corrisponde al valore Q , poiché i prodotti finali, come conseguenza della conservazione del momento, manterranno una parte di energia cinetica. Nella reazione $Li^7(\alpha, n)B^{10}$ le alfa incidenti dovranno possedere un'energia cinetica superiore ai 2.85 MeV .

L'esatta energia di soglia può essere calcolata considerando il momento iniziale del sistema. Il momento totale delle particelle collidenti prima e dopo la reazione dovrà essere lo stesso. Assumendo il Li^7 inizialmente stazionario e le particelle alfa dotate di velocità v , allora il momento totale del sistema¹ è proprio $4v$. La velocità del centro di gravità v_c è questo momento diviso per la massa totale del sistema o $4v/11$. Il nucleo composto formato dalla collisione B^{11} ha quindi un'energia cinetica di $E_c = 11v_c^2/2$, che è $1/2$ della massa totale, 11 unità, per il quadrato di v_c . Sostituendo $4v/11$ a v_c si ottiene $(4/11) \cdot 4v^2/2$ cioè proprio quattro undicesimi dell'energia cinetica della particella alfa incidente. Il complementare o i sette undicesimi dell'energia cinetica della particella alfa incidente è quindi disponibile per l'eccitazione nucleare. Affinché la reazione sia possibile

¹Le masse, in questo calcolo, sono semplificate al numero di massa, cioè Li^7 , He^4 , B^{10} e n^1 sono rappresentati da masse 7, 4, 10, 1, rispettivamente. Ciò introduce un errore trascurabile nel risultato calcolato.

questa frazione dell'energia cinetica alfa deve proprio essere uguale all'energia di reazione negativa Q :

$$\begin{aligned}
 -Q &= \left(\frac{7}{11}\right) E_c^{th(\alpha)} & (1.2) \\
 E_c^{th(\alpha)} &= -\left(\frac{11}{7}\right) Q \\
 &= -\left(\frac{11}{7}\right) (-2.85) \\
 &= 4.48 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

L'equazione 1.2 indica che affinché avvenga la reazione $Li^7(\alpha, n)B^{10}$ le particelle alfa incidenti devono avere un'energia cinetica di 4.48 Mev o superiore.

Una reazione alfa-neutrone ancora più vantaggiosa è quella in cui le alfa incidono sul berillio. Le reazioni risultanti sono esotermiche:



nelle quali la prima reazione è più probabile e ha luogo con $Q = +5.5 \text{ MeV}$. Essendo esotermica non vi è una soglia. Comunque la repulsione Coulombiana delle particelle alfa da parte dei nuclei di berillio diminuisce la possibilità di una collisione riuscita da parte di alfa lente. Il risultato netto è che il prodotto di neutroni da un sottile bersaglio di berillio (sottile per ridurre effetti di dispersione dalle collisioni alfa - elettroni) cresce con l'aumento dell'energia delle particelle alfa incidenti come illustrato nel grafico di figura 1.

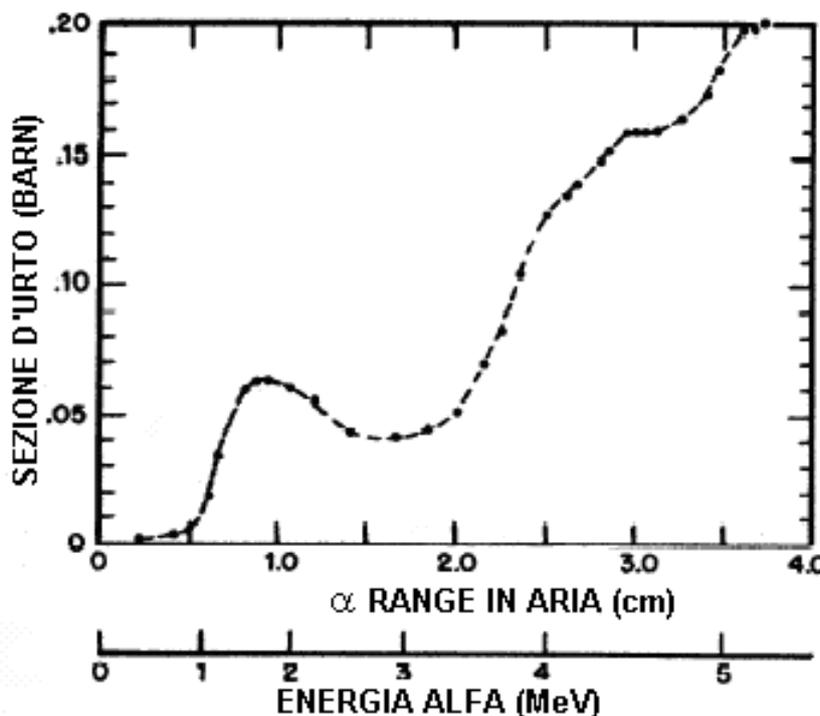


Fig.1 $Be^9(\alpha, n)C^{12}$ Alfa su un bersaglio sottile di berillio (0.22 mg/cm^2) (I. Halpern, MDDC-716)

La reazione alfa-berillio è usata come sorgente di neutroni. Le particelle alfa possono essere fornite da sostanze spontaneamente radioattive come radio, radon e polonio. Le caratteristiche delle sorgenti che usano questi materiali possono essere comprese esaminando la serie del radio, figura 2.

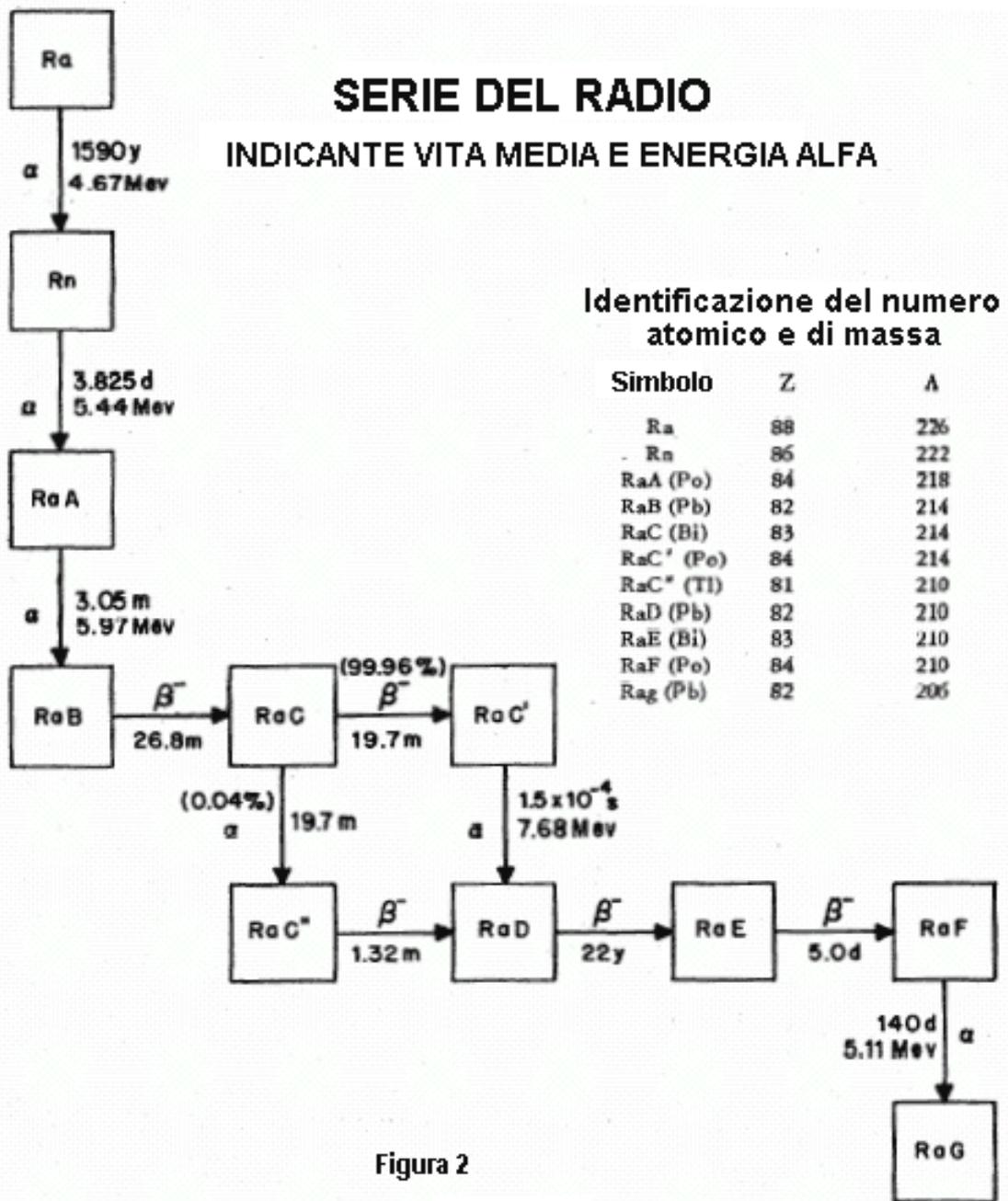


Figura 2

La sorgente di neutroni di radio berillio ha un vantaggio nel suo periodo di vita media che è sufficientemente lungo da rendere l'attenuazione trascurabile durante un esperimento o una serie di esperimenti. Il consueto rapporto dei pesi di *Be* : *Ba* va da 5 : 1 a 3 : 1. Una sorgente *Ra - Be* preparata deve essere "datata" per permettere ai prodotti figli (*Rn, RaA, ecc*) di raggiungere l'equilibrio. Gli emettitori alfa tra questi prodotti figli contribuiscono alla produzione di neutroni cosicché invecchiando per circa un mese aumenta l'intensità dei neutroni di un fattore di circa 6 rispetto al valore iniziale ("fresco" *Ra*).

Come si può vedere esaminando la serie, nel radio di un mese vi saranno alfa disponibili da *Ra, Rn, RaA, Ra(C + C')*; come conseguenza lo spettro dei neutroni sarà complesso con neutroni di energia fino a $7.68 + 5.5 \approx 13 \text{ MeV}$. Inoltre l'effetto del passaggio delle alfa attraverso il berillio, anche in condizione finemente polverizzato, e la possibilità di lasciare il nucleo C^{12} risultante in uno stato eccitato tende a rendere la sorgente *Ra - Be* emettitore di neutroni con una distribuzione di energie quasi continua. Una chiara limitazione della sorgente *Ra - Be* è la presenza di radiazione gamma.

Quest'ultima limitazione non è presente nella sorgente polonio-berillio. Il Polonio (*RaF*) emette quasi esclusivamente alfa; i pochi gamma presenti nel *Po* puro provengono dalla emissione relativamente improbabile di alfa con energie appena al di sotto del normale. Le sorgenti Polonio-berillio hanno una vita media di 140 giorni che limita la loro utilità ad alcune misure.

Il Radon può essere usato con il berillio. Il gas è posto in una capsula di berillio. Il prodotto è sostanzialmente lo stesso della sorgente *Ra - Be*; tuttavia, la vita media è di soli 3.8 giorni. L'intensità di queste sorgenti naturali

(α, n) varierà in funzione della loro costruzione. In numeri interi le sorgenti $Ra - Be$ e $Rn - Be$ emetteranno circa da $1 - 2 \cdot 10^6$ neutroni/secondo/curie; Le sorgenti $Po - Be$ emetteranno circa $2.8 \cdot 10^6$ neutroni/secondo/curie. Usando la tecnica descritta da H. L. Anderson e B. T. Feld in Review of Scientific Instruments, 18:186 (1947) si ottiene una produzione di neutroni per sorgenti compresse $Ra - Be$ nel modo seguente:

$$\text{neutroni veloci/secondo/grammo Ra} = 1.7 \cdot 10^7 \frac{M_{Be}}{M_{Be} + M_{RaBr_2}}$$

Misure assolute con questo tipo di sorgente sono state presentate da F. G. P. Seidl e S. P. Harris in Review of Scientific Instruments, 18: 897 (1947). La loro "Sorgente No.38" consistente di $504 mc Ra$ e $3000 mg Be$ produceva $(5.5 \pm 0.4) \cdot 10^6$ neutroni/secondo. G. R. Gamettsfelder e M. Goldhaber in Physcal Review, 69:368 (1946) presentano una sorgente $Ra - Be$ produtente $6.8 \cdot 10^6$ neutroni/secondo/ $mc Ra$.

Il Boro bombardato con alfa produce neutroni. Le reazioni sono $B^{11}(\alpha, n)N^{14}$ e, $B^{10}(\alpha, n)N^{13}$ con la prima reazione dominante. I prodotti sono $\sim 2 \cdot 10^6$ neutroni/sec/curie per misiture boro-radio; il BF_3 può essere usato con prodotti di $\sim 2 \cdot 10^5$ neutroni/sec/curie.

Analogamente, la fluorina produce neutroni nella reazione $F^{19}(\alpha, n)Na^{22}$.

1.2 Sorgenti di fotoneutroni

Le reazioni del tipo (γ, n) possono essere usate per la produzione di neutroni. La radiazione gamma è prodotta naturalmente dalle sorgenti radioattive o artificialmente radioattive. I bersagli sono limitati a pochi elementi leggeri, quelli nei quali un neutrone è legato piuttosto debolmente. Il Berillio (Be^9) e l'idrogeno pesante (H^2) sono tra gli isotopi aventi una soglia (γ, n) sufficientemente bassa ($1.63 MeV$ e $2.185 MeV$ rispettivamente) da poter essere usati come emettitori gamma.

La sorgente $Ra - \gamma - Be^2$ produce neutroni in due gruppi di energia ($0.12 MeV$ e $0.51 MeV$) poiché due raggi gamma sono sopra la soglia. Una regola pratica per calcolare il numero totale di neutroni per secondo in una sorgente è: $1 g Ra$ a $1 cm$ da $1 g Be$ dà $3 \cdot 10^4$ neutroni/secondo.

Una panoramica pressoché completa delle sorgenti di fotoneutroni è stata fatta all'Argonne National Laboratory. Vari emettitori gamma a radioattività artificiale sono state usate con il berillio e l'acqua pesante. Per alcuni di questi sono state misurate le energie dei neutroni emessi. La tabella 1 elenca questi dati.

TABELLA 1. SORGENTI DI FOTOELETTRONI

Sorgente	Neutroni/secondi/curie			Energia Neutroni (KeV)		
	Vita Media	Sorgente Standard	Altre sorgenti	Media	Massima	Rif.
$Na^{24} + D_2O$	14.8 h	$29.0 \cdot 10^4$	$2.7 \cdot 10^6$	220	320	A,B
$Na^{24} + Be$	14.8 h	14.0	2.4	800	1020	A,B
$Mn^{56} + D_2O$	2.6 h	0.31	0.029	220		A,C
$Mn^{56} + Be$	2.6 h	2.9	0.50	$\left\{ \begin{array}{l} 300 \\ < 150 \\ 130 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 375 \\ < 150 \end{array} \right.$	A,B
$Ga^{72} + D_2O$	14 h	6.9	0.64	130		A,C
$Ga^{72} + Be$	14 h	5.9	1.04			A
$In^{116} + Be$	54 m	0.82	0.14	$\left\{ \begin{array}{l} 300 \\ < 150 \\ 35 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 400 \\ < 150 \\ 68 \end{array} \right.$	A,B
$Sb^{124} + Be$	60 g	19.0	3.2	35		A,B
$La^{140} + D_2O$	40 h	0.68	0.062	130		A,C
$La^{140} + Be$	40 h	0.23	0.041	620		A,C
$Y + Be$	100 g			220 ± 20		D

Altre sorgenti di fotoneutroni a vita breve sono state investigate (riferimento C della Tabella 1). Questo include $F^{20}(12 sec) + Be$, $Al^{28}(2.4 min) + Be$ e $Cl^{38}(37 min) + Be$, tutti aventi un raggio gamma utile maggiore di 0.1 per disintegrazione. (Ciò è confrontato con il Na^{24} con un raggio gamma di $2.8 MeV$ per disintegrazione).

²Riferimenti:

- A. Russel,Sachs, Watterberg, Fields, *Phys.Rev.*, 73: 545(1948), su prodotti neutroni
- B. Hughes, Egger, *Phys.Rev.*, 72: 902(1947), sulle energie dei neutroni
- C. O'Neil, *Phys.Rev.*, 71: 497(1947), sulle energie dei neutroni
- D. O'Neal, *Phys.Rev.*, 70: 1(1946), sulle energie dei neutroni

As^{76} (26.8 ore) + Be e As^{76} (26.8 ore) + D_2O forniscono sorgenti di neutroni relativamente meno efficienti di 0.1 e meno di 0.01 gamma utili per disintegrazione, rispettivamente.

In aggiunta all'uso di radiazione gamma da radioisotopi specifici può essere usata la radiazione dai prodotti di fissione. I prodotti di fotoneutroni dai prodotti di fissione dell' U^{235} che irradiano acqua pesante sono descritti da S. Bernstein, W. M. Preston, G. Wolfe, R. E. Slattery in *Physical Review* 71: 573 (1947) e anche 72: 163 (1947).

La radiazione gamma prodotta nel betatrone o acceleratore di Van de Graaf può essere usata per generare fotoneutroni. Le curve di produzione dei gamma dal Van de Graaf sul berillio sono stati determinati da M. L. Wiedenbeck, *Phys. Rev.* 69: 235 (1946).

1.3 Sorgenti di Neutroni con Acceleratori di Particelle

La reazione deutone-deutone, $H^2 (H^2, n) He^3$, può essere usata per produrre neutroni. Deutoni, accelerati con un opportuno generatore di potenziale elettrostatico (cioè, Van de Graaf, Cockcroft-Walton, etc.), bombardano un bersaglio di ghiaccio pesante o paraffina. Nello stesso tempo sono prodotti dei protoni dalla reazione $H^2 (H^2, p) H^3$, producendo all'incirca altrettanti protoni quanti neutroni. La reazione $H^2 (H^2, n)$ essendo esotermica con $Q \sim 3.2 MeV$ è in accordo abbastanza buono per prodotti a energie relativamente basse, figura 3, poiché per il deutone incidente è necessario solo penetrare la barriera coulombiana del deutone bersaglio, e non sarà necessaria energia extra per l'eccitazione.

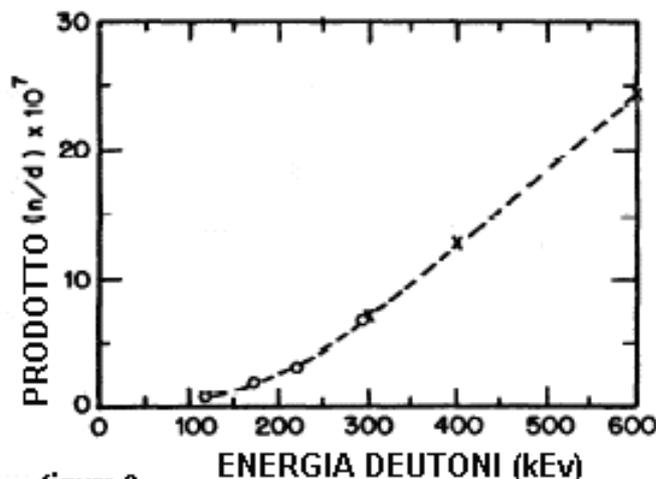


figura 3

Sebbene la reazione abbia un considerevole vantaggio nel produrre un ragionevole numero di neutroni monoenergetici per energie relativamente basse, l'impossibilità pratica di progettare un bersaglio adatto ne limita l'uso come sorgente di neutroni. (Si deve ricordare che in pratica non tutti i deutoni producono neutroni ma, piuttosto, riscaldano il bersaglio).

Un'altra reazione che usando protoni sul litio produce neutroni monoenergetici fino ad energie piuttosto basse. La reazione è $Li^7 (H^1, n) Be^7$ con un valore di $Q = -1.62 MeV$. Allo stesso modo dell'esempio discusso nel Paragrafo 1.1 la soglia è maggiore di Q , essendo in questo caso $\frac{8}{7}162 = 1.85 MeV$. Se il bersaglio di litio è bombardato con protoni dell'energia di soglia, i neutroni fuoriescono con energia finita, circa $30 KeV$, per cui si muovono con la velocità del centro di gravità. Se si aumenta l'energia del protone allora ci sarà energia sufficiente per dare ai neutroni una velocità rispetto al centro di gravità. La velocità netta è calcolata sommando il vettore della velocità del centro di gravità a quello della velocità del neutrone relativa al centro di gravità, cosicché per energie sufficientemente alte, i neutroni possono avere velocità risultanti zero o anche velocità all'indietro. Per un protone di fissata energia, l'energia dei neutroni varierà con l'angolo tra il fascio del protone incidente e la direzione del neutrone risultante, cioè per ogni angolo di uscita dei neutroni vi sarà una corrispondente energia del neutrone. Ciò sarà discusso con maggior dettaglio in un capitolo successivo.

Probabilmente la sorgente più comune di neutroni è il "ciclone" nel quale i deutoni bombardano un bersaglio di berillio. Nella reazione, $Be^9 (H^2, n) B^{10}$, il bersaglio è stabile e può essere utilizzato per disperdere il calore generato nelle collisioni che non hanno avuto successo. Per un bersaglio spesso deutoni da $1 MeV$ danno circa $108 \text{ neutroni/sec/microamp}$; deutoni da $8 MeV$ danno $10^{10} \text{ neutroni/sec/microamp}$.

Chapter 2

Collisione dei Neutroni con i Nuclei

2.1 Tipologie generali di reazioni

Uno dei più importanti processi di collisione è il processo di "diffusione". Un processo di diffusione è caratterizzato dall'identità tra una delle particelle emesse e quella incidente. Se un neutrone collide con un nucleo bersaglio (in un successivo capitolo definiremo in dettaglio cosa si intende per "collisione") e dopo la collisione si manifesta ancora un neutrone, allora si può dire che il neutrone è stato *diffuso* dal nucleo bersaglio. Se l'energia cinetica del neutrone prima della collisione è uguale alla somma dell'energia cinetica del nucleo di rinculo e del neutrone diffuso dopo una tale collisione, allora il processo è detto "diffusione elastica". Se l'energia cinetica non è conservata, cioè, una parte dell'energia eccita il nucleo, allora il processo è di "diffusione anelastica". Usando una notazione opportuna (si veda 1.1), queste definizioni possono essere così schematizzate:

Processo di diffusione $A(n, n) A^*$
Diffusione elastica $A = A^*$
Diffusione anelastica $A^* = \text{stato eccitato di } A$
 $A = \text{nucleo bersaglio}; A^* = \text{nucleo di zinco}$

Per semplicità i processi di diffusione sono in genere indicati come processi (n, n) .

Oltre al processo di diffusione, le collisione dei neutroni con i nuclei possono presentare l'emissione di altre particelle o di radiazione, per esempio (n, γ) , (n, p) o $(n, 2n)$, p reazioni (n, α) . La distinzione tra nucleo risultante eccitato o stabile non viene, in genere, fatta.

Vi sono altri tipi di reazione che avvengono quando i neutroni collidono con nuclei, le più importanti delle quali sono le reazioni $(n, 2n)$ e $(n, \text{fissione})$. Nella reazione $(n, 2n)$ un neutrone incidente su un nucleo produce l'espulsione di due neutroni, mentre il nucleo di rinculo è isotopico con il nucleo bersaglio. Questa reazione è sempre endotermica. La reazione $(n, \text{fissione})$ o (n, f) verrà discussa a lunga in un prossimo capitolo. In questa reazione un neutrone collide con un nucleo producendone una fissione.

2.2 Sezione d'urto dei neutroni in funzione dell'energia

La collisione dei neutroni con i nuclei si può descrivere in relazione al bersaglio presentato dai nuclei ai neutroni incidenti. La grandezza del bersaglio è specificata dalla "sezione d'urto o da un dato numero in centimetri quadrati per atomo. È diventato di uso comune esprimere la sezione d'urto in "barn", dove $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2/\text{atomo}$. Se un fascio di neutroni di densità n neutroni per cm^3 si sposta con una velocità v in cm/s incide su un nucleo bersaglio di area σ (sezione d'urto), allora il numero di neutroni che colpiscono il bersaglio ogni secondo è $nv\sigma$. Ciò può essere visualizzato considerando l'area del bersaglio σ in moto con velocità v attraverso il fascio dei neutroni. Nel suo moto il bersaglio "spazzerà" ogni secondo un volume $v\sigma$ nel quale vi saranno $nv\sigma$ neutroni, poiché vi sono n neutroni per unità di volume.

Se questa rappresentazione è conveniente si deve comprendere però che il nucleo non è un'area nel comune significato geometrico. Tra le altre cose l'area dipende dall'energia della particella incidente. Per i neutroni questa dipendenza può essere compresa qualitativamente considerando la variazione della lunghezza d'onda di De Broglie dei neutroni con l'energia. La relazione fondamentale tra la lunghezza d'onda λ di una particella e il momento p è $\lambda = h/p$ dove h è la costante di Planck. In termini dell'energia del neutrone diviene:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{o} \quad p = \sqrt{2mE} \quad (2.1)$$

Allora

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \quad \text{per} \quad v \ll c$$

La condizione che v deve essere minore di c , la velocità della luce, è necessaria perché è stata usata la relazione non relativistica dell'energia. (Questa limitazione è trascurabile poiché la massa a riposo del neutrone è 931 MeV). Esprimendo l'energia E del neutrone in ellettron-volt e sostituendo $h = 6.61 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}$, $m = 1.675 \cdot 10^{-24} \text{ g}$, $1 \text{ eV} = 1.601 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$ nella 2.1 si ottiene la conveniente relazione seguente:

$$\lambda = \frac{0.286}{\sqrt{E}} \times 10^{-8} \text{ cm} \quad (E \text{ in eV}) \quad (2.2)$$

Ora, la distanza tra gli atomi in un solido è dell'ordine di 3 o 4 Angstrom, cioè $\sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$. Ponendo i valori numerici nella 2.2 si vede che neutroni di circa 0.01 eV hanno una lunghezza d'onda caratteristica di circa le dimensioni interatomiche, o molte volte maggiore delle dimensioni di qualsiasi nucleo. Per avere una lunghezza d'onda uguale al diametro nucleare di un nucleo mediamente pesante, cioè 10^{-12} cm , l'energia del neutrone dovrebbe essere di circa 10 MeV .

Ora, un nucleo di diametro 10^{-12} cm , dove il diametro è definito come il doppio del range delle forze nucleari, avrà una sezione d'urto "geometrica" di circa 10^{-24} cm^2 o 1 barn . Se il neutrone fosse una particella puntiforme allora dovrebbe essere ragionevole anticipare che l'intera sezione d'urto dovrebbe essere dell'ordine dei barn. Tuttavia, come mostrato nella 2.2 se il neutrone si comporta in un modo conforme alle leggi fondamentali della meccanica ondulatoria allora solo un neutrone può essere considerato come una particella "puntiforme" rispetto al nucleo quando la sua lunghezza d'onda è almeno minore delle dimensioni del nucleo stesso. Quest'ultima sarà vera solo per neutroni veloci, cioè, con energie almeno maggiori di 1 MeV . Per neutroni più lenti la lunghezza d'onda cresce cosicché per neutroni termici di energia $1/40 \text{ eV}$, $\lambda \simeq 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$. In questo caso è il nucleo che è una particella "puntiforme" rispetto al neutrone cosicché la dimensione del neutrone potrebbe rappresentare la sezione d'urto. Pertanto, σ dovrebbe essere dell'ordine di λ^2 per neutroni lenti. Per neutroni termici ci si può aspettare una sezione d'urto di 10^{-16} cm^2 o 10^8 volte la sezione d'urto dei neutroni veloci. In realtà, analisi teoriche più rigorose mostrano che λ^2 è un valore massimo e che $\sigma < \lambda^2$.

La discussione precedente ha lo scopo di presentare un argomento che mostra l'impossibilità di assegnare un'unica sezione d'urto geometrica a un nucleo valida per tutte le energie dei neutroni incidenti, poiché nell'intervallo di energie generalmente considerate nei casi pratici, cioè da 10^{-3} a 10^7 eV , le "dimensioni" di un neutrone variano da 10^{-8} a 10^{-12} cm . Altri fattori aggiuntivi possono influire sulla sezione d'urto e saranno discussi in un capitolo successivo.

Considerando l'idea che la sezione d'urto non è una quantità strettamente geometrica, la relazione stabilita nel primo paragrafo di questa sezione potrebbe essere risolta rispetto a σ .

$$\sigma = \frac{\text{Processi per nuclei per unità di tempo}}{nv} \quad (2.3)$$

dove n sono i neutroni per unità di volume in un fascio incidente e v la loro velocità.

La quantità nv è in genere detta "flusso di neutroni" poiché rappresenta il numero di neutroni incidenti per unità di area per unità di tempo sul bersaglio. I valori di σ obbediscono alla diseuguaglianza approssimata

$$10^{-24} \text{ cm}^2 \lesssim \sigma < \lambda^2 \quad (2.4)$$

dove la lunghezza di de Broglie λ del neutrone è definita dalle 2.1 e 2.2.

2.3 Misura della sezione d'urto totale

La sezione d'urto "totale" di un dato materiale per neutroni incidenti è determinata misurando la trasmissione dei neutroni di un dato campione del materiale. Una sorgente emette neutroni cosicché un fascio di intensità I_0 (neutroni/s/cm²) incide su un campione, vedasi la figura 4. Come conseguenza dei processi di diffusione e assorbimento nel passaggio attraverso il materiale, l'intensità dei neutroni si riduce a I . Si misura la risposta del rivelatore con campione nel fascio e fuori dal fascio per determinare, rispettivamente, I e I_0 .

La disposizione geometrica deve essere tale che ogni neutrone diffuso non sarà rivelato. Ciò significa che l'angolo solido dall'assorbitore alla sorgente e al rivelatore dovrà essere molto piccolo. La linea tratteggiata in fig. 4 mostra come un neutrone diffuso possa essere rivelato se il fascio di neutroni non fosse correttamente collimato. Definendo il fascio (cioè rendendo i fasci incidenti e trasmessi paralleli) con opportune aperture, si possono trovare le opportune condizioni geometriche prima ricordate. Oltre a queste condizioni geometriche è pure necessario che ogni processo di diffusione multipla nel quale un neutrone diffuso risulti diffuso all'indietro nel fascio abbia una probabilità trascurabile. Ciò non può sempre essere soddisfatto per campioni "spessi" nei quali la diffusione prevale sull'assorbimento. (Nella discussione della diffusione dei neutroni e del rallentamento, in un successivo capitolo, sarà avvio che la legge esponenziale qui derivata non sarà valida).

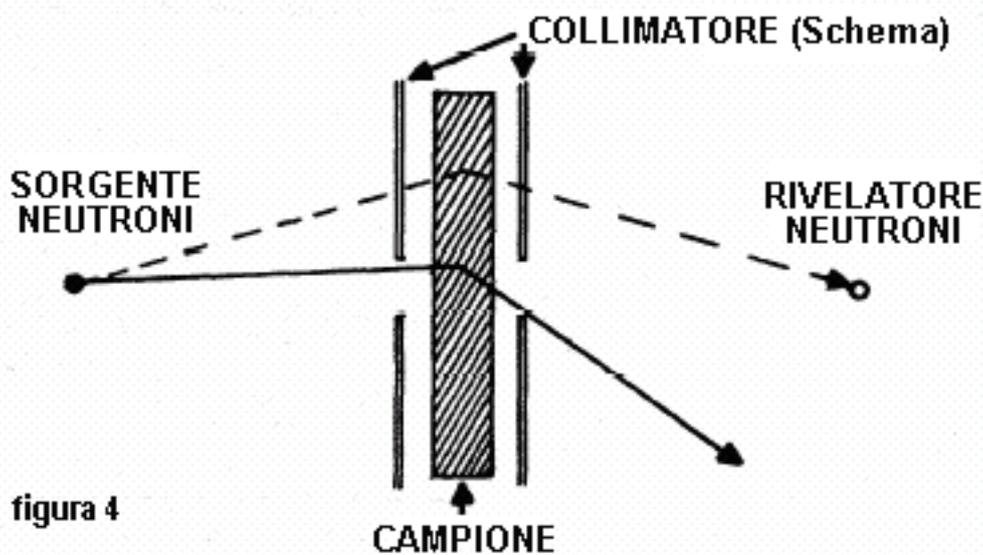


Figura 4. Disposizione generale per l'esperimento di trasmissione dei neutroni (misura della sezione d'urto totale)

2.4 Caratteristiche generali delle collisioni

In ogni processo di collisione lo "stato iniziale" consiste di una particelle incidente sul nucleo bersaglio e lo "stato finale" di una particelle emessa e del nucleo di rinculo. Per una data energia dello stato iniziale vi sono più energie possibili della particella emessa così come più energie possibili dei nuclei di rinculo, valendo sempre la conservazione dell'energia.

Se modulo e direzione di moto del momento della particella emessa sono fissati, allora la conservazione del momento stabilisce pure il momento e l'energia cinetica del nucleo indietreggiante. La legge della conservazione dell'energia stabilisce allora lo stato di eccitazione del nucleo. Specificando, pertanto, (modulo e direzione) della particella emessa si determina completamente lo stato finale.

Supponiamo che la particella emessa abbia un'energia E . Allora qual è la probabilità che avvenga una transizione tra stati iniziali e finali? Assumendo che tale transizione obbedisca alle leggi generali della meccanica quantistica, è possibile mostrare che la probabilità di accadimento di una transizione nella quale l'energia della particella emessa sta tra E e $E + dE$ si può scrivere come il prodotto $M\rho$ dove $M = \frac{|H|^2}{\hbar^2}$ e $\rho(E)$ è la densità di possibili stati finali nell'intorno di e . H è un elemento di matrice che sarà qui discusso quantitativamente e in un capitolo successivo; \hbar è la costante di Planck divisa per 2π .

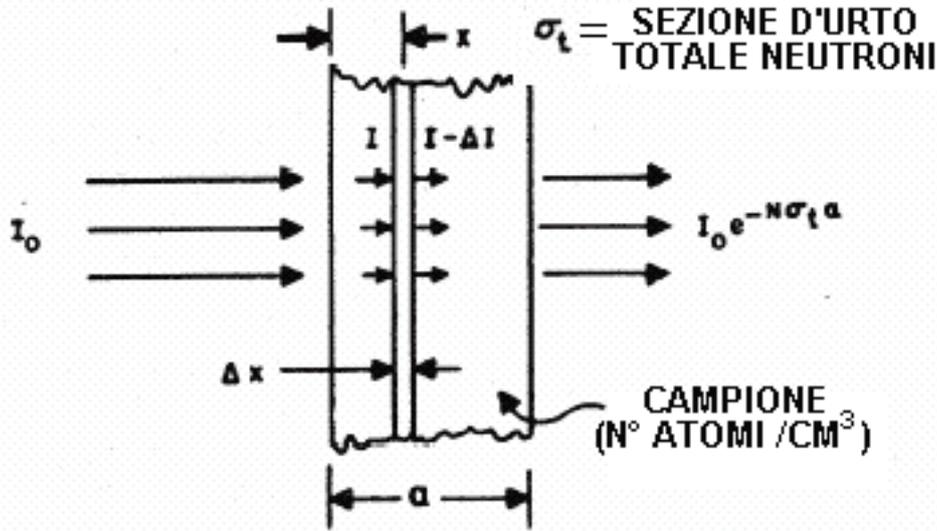
La funzione densità può essere dedotta da considerazioni di meccanica statistica. In alcuni casi la variazione di questo fattore sarà più efficace della variazione di M . Usando una tecnica familiare in meccanica quantistica, la particella emessa è immaginata essere in un grande contenitore di volume Ω . Questo volume sarà infinito in ogni caso pratico. Il numero di stati della particella emessa che avrà un'energia E in questo box è proporzionale al volume nello spazio delle fasi corrispondente a questa energia. Con coordinate cartesiane dove h è la dimensione lineare di una cella nello spazio delle fasi (una cella può contenere uno stato), allora il numero degli stati per i quali x è tra x e $x + dx$, y tra y e $y + dy$, ecc. e p_x è tra p_x e $p_x + dp_x$, p_y e $p_y + dp_y$, ecc. è proprio $dx dy dz dp_x dp_y dp_z / h^3$. Integrando sullo spazio delle configurazioni (x, y, z) si riduce a $\Omega dp_x dp_y dp_z / h^3$ o $(\frac{\Omega}{h^3})$ volte l'elemento di volume momento. È chiaro che il numero di stati per i quali il momento totale $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ è tra p e $p + dp$ è proprio Ω/h^3 volte l'elemento di volume tra p e $p + dp$. Questo elemento di volume, un guscio sferico nello spazio dei momenti, è $4\pi p^2 dp$. Pertanto

$$\text{Numero di stati con momento tra } p \text{ e } p + dp = dN = \left(\frac{\Omega}{h^3}\right) 4\pi p^2 dp \quad (2.5)$$

La densità degli stati per unità di intervallo di energia, si può ora calcolare dalla 2.5 passando dalla variabile momento all'energia. Per particelle (α, p, n, ecc) $E = mv^2/2 = p^2/2m$ così che $dE = p dp/m = v dp$. Per protoni $E = h\nu = hc/\lambda$ o, poiché, $\lambda = h/p$ ciò significa $E = pc$ o $dE = c dp$. (In entrambi i casi dE/dp è la velocità della particella o del fotone). Sostituendo questo nella 2.5, il numero degli stati per intervallo di unità di energia con energia tra E e $E + dE$ è

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{4\pi\Omega}{h^3} \cdot \frac{p^2}{v} \quad (2.6)$$

dove $p^2/v = m^2/v$ per particelle o $= h^2\nu^2/c^3$ per i fotoni



È chiaro che nell'assorbitore (Fig. 5) su uno strato di spessore Δx incide un fascio parallelo di I neutroni/sec/cm². Se N è il numero di atomi assorbenti per centimetro cubico, allora $N\Delta x$ nuclei per centimetro quadrato rappresentano il "bersaglio" per il fascio di neutroni incidenti. Dalla 2.3 è chiaro che il numero di processi che avverranno per unità di area per unità di tempo è $\sigma_t nv$ per il numero di nuclei per unità di area $N\Delta x$. Poiché nv è proprio il flusso di neutroni incidenti I e ciò significa che il numero di collisioni dei neutroni per unità di area per unità di tempo nello strato

$$\Delta x = \sigma_t I n \Delta x \quad (2.7)$$

dove $\sigma_t = \sigma_{totale}$ = alla sezione d'urto per tutti i processi di collisione.

Ogni collisione rimuove il neutrone dal fascio parallelo così quello sopra è proprio $-\Delta I$, la diminuzione nell'intensità del fascio. Eguagliando e risolvendo si ottiene la familiare legge esponenziale:

$$\begin{aligned} -\Delta I &= \sigma_t I N \Delta x \\ -\frac{\Delta I}{I} &= N \sigma_t \Delta x \\ I &= I_0 e^{-N \sigma_t a} \end{aligned} \quad (2.8)$$

o integrando

$$\sigma_t = \frac{\ln\left(\frac{I_0}{I}\right)}{Na}$$

dove I_0 è l'intensità del fascio incidente (a $x = 0$) e a è lo spessore del campione. L'ultima equazione esprime la sezione d'urto totale in termini di quantità sperimentalmente misurabili. La sezione d'urto totale σ_t si può definire come

$$\sigma_t = \sigma_{elastica} + \sigma_{assorbimento} \quad (2.9)$$

dove $\sigma_{assorbimento}$ include tutti i processi in cui scompaiono i neutroni, cioè, (n, γ) , (n, n) , (n, p) , ecc.

L'evento di Ω in $\rho(E)$ mostra come il volume, nel quale è confinata la particella emessa, può anche divenire infinitamente grande, la densità degli stati diviene infinita o la particella può essere emessa con qualsiasi energia (cioè, un continuo di stati di energie possibili). La probabilità di transizione non diviene, tuttavia, infinita, perché l'elemento di matrice contiene Ω in modo tale che M è proporzionale a Ω^{-1} . Allora la probabilità di una transizione allo stato in cui la particella emessa o il fotone ha un momento p_e è proporzionale a $M \cdot p_e^2 / v_e$. Allora per una singola particella incidente con velocità v_1 che collide con un singolo nucleo segue dalla 2.3 che la probabilità di una collisione (per unità di tempo) è $v_1 \sigma$ dove σ è la sezione d'urto per particelle incidenti con velocità v_1 che determina particelle emesse con velocità v_e . Eguagliando le probabilità e incorporando le varie costanti in M otteniamo l'equazione per la sezione d'urto:

$$\sigma = M' \cdot \frac{p_e^2}{v_e} \cdot \frac{1}{v_1} \quad (2.10)$$

Quest'ultima equazione è troppo generale perché se ne possa comprendere pienamente il significato. Si applica il risultato a numerose specifiche situazioni:

Diffusione Elastica

In una collisione elastica le velocità iniziali e finali sono uguali, cioè, $v_i = v_e$. Sostituendo questa nella 2.10 la sezione d'urto si riduce a

$$\sigma = M' m^2$$

Ciò significa che la sezione d'urto è proporzionale a M' . Per neutroni lenti, dove l'intervallo di energia è piccolo, la sezione d'urto di diffusione elastica non dipende in modo apprezzabile dall'energia del neutrone. Si sottolinea che per diffusione elastica dai nuclei di piccolo numero di massa le velocità iniziali e finali sono uguali solo nel sistema del centro di gravità e che è in questo sistema che la precedente derivazione è vera.

Processi di assorbimento

Supponiamo che il nucleo sia pesante cosicché la particella emessa (di massa piccola) possiede quasi tutta l'energia cinetica nello stato finale. La situazione è mostrata in figura 6. Un neutrone di massa m , velocità v_i colpisce il nucleo bersaglio, è assorbita e una nuova particella (di piccola massa) è emessa di massa m' e velocità v_e . La conservazione dell'energia richiede che l'energia cinetica della particella emessa debba essere uguale all'energia cinetica del neutrone incidente più una qualche energia Q derivante dalla reazione nucleare:

$$\frac{m'v_e^2}{2} = \frac{mv_i^2}{2} + Q$$

o

$$p_e^2 = m'^2 \left[\frac{m}{m'} v_i^2 + \frac{2}{m'} Q \right]$$

Si noti che $p_e^2/v_e = m'p_e$ e sostituendo nella 2.10 dà la seguente espressione per la sezione d'urto

$$\sigma = M' m'^2 \frac{1}{v_i} \left[\frac{m}{m'} v_i^2 + \frac{2}{m'} Q \right]^{1/2}$$

Quando Q è positivo (reazione esotermica) e v_i è piccola, la sezione d'urto è proporzionale a $1/v_i$ - la cosiddetta legge $1/v$. Un Q negativo e una v_i molto piccola non ha senso fisico, producendo una sezione d'urto immaginaria e mostrando che la formula non copre questo caso. σ dovrebbe essere zero per una tale situazione.

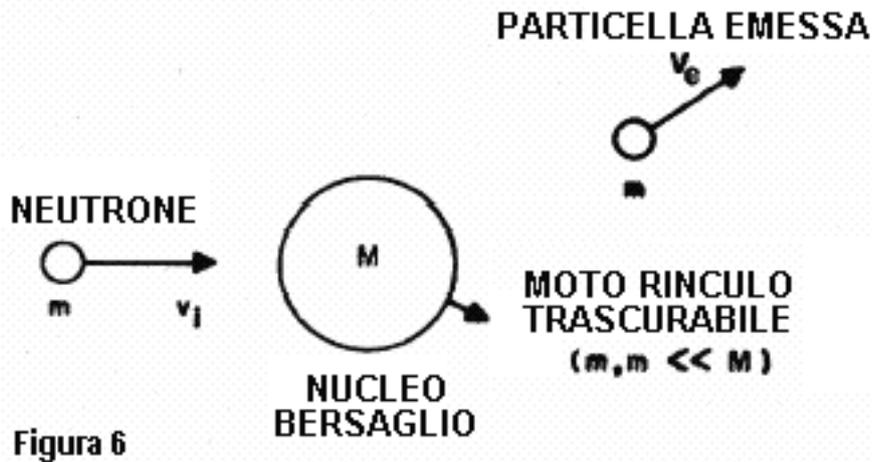


Fig. 6 - Processo di assorbimento

Diffusione Anelastica

Consideriamo un neutrone di massa m incidente su un nucleo di massa M . Se il nucleo bersaglio non è considerato molto pesante rispetto al neutrone, allora tutte le variabili si dovrebbero riferire al centro di gravità del sistema. In questo caso la massa del neutrone deve essere sostituita dalla sua "massa ridotta"

$$\mu = \frac{mM}{m + M}$$

(Per $M/m \gg 1$ questa si riduce a m cosicché il centro di gravità e il sistema del laboratorio sono approssimativamente gli stessi). Supponiamo che il primo livello eccitato del nucleo bersaglio si trovi ad un'energia W sopra il

livello fondamentale. Allora se il neutrone ha un'energia cinetica $\frac{1}{2}\mu v_i^2 < W$ (centro di gravità del sistema) non vi sarà alcuna diffusione anelastica. Ma se $\frac{1}{2}\mu v_i^2 > W$ e il nucleo è eccitato a questo livello, l'energia cinetica del neutrone emergente dopo la collisione sarà

$$\frac{1}{2}\mu v_e^2 = \frac{1}{2}\mu v_i^2 - W$$

cosicché la sezione d'urto diviene

$$\sigma = M' \frac{(\mu v_e)^2}{v_e} \frac{1}{v_i} = M' \mu^2 \frac{v_e}{v_i} = M' \mu^2 \sqrt{1 - \frac{2W}{\mu v_i^2}}$$

Scrivendo W come $\frac{1}{2}\mu v_0^2$ con v_0 la velocità di soglia per l'eccitazione del nucleo all'energia W rende più facile vedere come la sezione d'urto che ci si aspetta si collochi vicino alla soglia.

$$\sigma = M' \mu^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v_i}\right)^2} = M' \mu^2 \sqrt{\frac{v_i + v_0}{v_i}} \sqrt{\frac{v_i - v_0}{v_i}}$$

Per $\frac{v_i - v_0}{v_i} \ll 1$ (vicino alla soglia) la sezione d'urto è approssimativamente $M' \mu^2 \sqrt{2/v_i} (v_i - v_0)$ e mostra che vicino alla soglia la sezione d'urto aumenta da zero come la radice quadrata dell'eccesso di velocità, considerando M' costante. Poiché la sezione d'urto è proporzionale a v_e , la velocità del neutrone dopo la diffusione anelastica segue che questa velocità dovrebbe analogamente aumentare in proporzione alla radice quadrata dell'eccesso di velocità vicino alla velocità. Ciò è illustrato in figura 7.

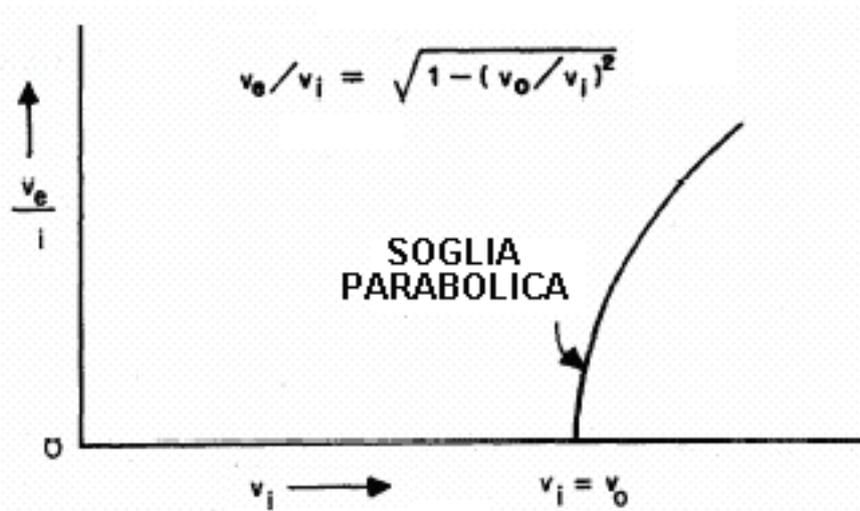


Fig. 7: Diffusione anelastica dei neutroni (v_i = velocità del neutrone incidente, v_e = velocità del neutrone diffuso)

Cattura radiativa (n, γ)

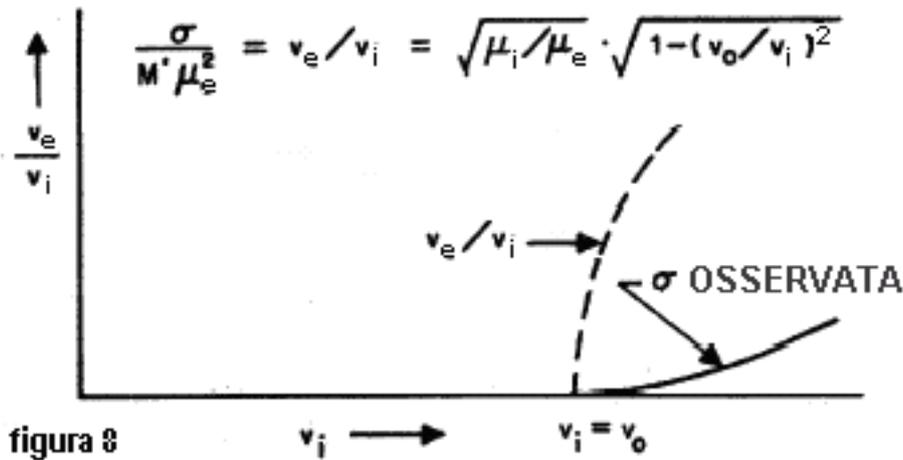
La particella emessa è un fotone cosicché si deve considerare la quantità $\frac{h^2 v^2}{c^2}$ invece di p^2/v , si veda la 2.6. Se il neutrone urta un nucleo ed è catturato vi è in genere un eccesso di energia - quella energia associata con il legame del neutrone al nucleo. La cattura di neutroni è quasi sempre esotermica, con una notevole eccezione per l'elio. L'energia disponibile per l'emissione di fotoni sarà $\mu \frac{v_i^2}{2} + W$ dove W è l'energia di legame del neutrone. Se il primo fotone corrisponde ad un salto al livello L (non necessariamente quello fondamentale) allora avrà un'energia $h\nu = \mu \frac{v_i^2}{2} + W_L$. Quando v_i tende a zero la quantità $h\nu$ tende ad un valore finito W_L cosicché $h^2 \frac{v^2}{c^2}$ diviene costante. L'altro fattore nella sezione d'urto è $1/v_i$ che cresce rapidamente. Di conseguenza i processi (n, γ) dovrebbero avere sezioni d'urto che aumentano come $1/v$ per neutroni lenti ($v \sim 0$), supposto M' costante.

Processi (n, α)

Queste reazioni, nelle quali la cattura di un neutrone determina l'emissione di una particella α , può essere endotermica o esotermica (Q positivo o negativo). Come nel precedente esempio di un processo di assorbimento l'equazione dell'energia nel sistema del centro di gravità è

$$\mu_e \frac{v_e^2}{2} = \mu_i \frac{v_i^2}{2} + Q$$

dove μ_e è la massa ridotta della particella α emessa e μ_i la massa ridotta del neutrone incidente. Se $Q > 0$ allora v_e^2 è almeno $(\frac{2Q}{\mu_e})$ cosicché la sezione d'urto che dalla 2.10 è $M' \mu_e^2 \frac{v_e}{v_i}$ segue la legge $1/v_i$, almeno per piccole v_i . Allora neutroni lenti in un processo (n, α) per i quali $Q > 0$ dovrebbero essere assorbiti in accordo con la legge $1/v$. Tuttavia, per $Q < 0$ la situazione è diversa. Indicando l'energia di soglia con $Q = -\mu_i v_0^2/2$ l'equazione dell'energia si può ridurre a $(\frac{\mu_e}{\mu_i}) v_e^2 = (v_i^2 - v_0^2)$ dove v_0 è la velocità di soglia. Come discusso nel processo di diffusione anelastica la velocità delle α emesse aumenta in proporzione alla radice quadrata dell'eccesso di velocità alla soglia, figura 7. In realtà, si veda la fig. 8, l'aumento in σ non è parabolico. Questo è dovuto alla variazione di M' in questo caso. La particella α possiede una carica e deve, quindi, sfuggire attraverso una barriera di potenziale elettrostatico (barriera di "Gamow"). Ciò diminuisce effettivamente la sezione d'urto come mostrato nella figura.



Processo (n, α) con Q negativo. La σ osservata non ha la forma di v_e/v_i alla soglia che mostra la variazione di M' .

2.5 Esempi dall'esperienza

L'assorbimento di neutroni da parte del boro nella reazione $B^{10} \rightarrow (n, \alpha) Li^7$ illustra il tipico processo discusso alla fine della precedente sezione. Q è positivo circa $3 MeV$ (sebbene il Li^7 è normalmente lasciato in uno stato eccitato e solo $2.5 MeV$ sono disponibili per l'energia cinetica). Per neutroni lenti, questa reazione dovrebbe andare come $1/v$. Gli esperimenti lo confermano. Nel boro non separato (B^{10} e B^{11}) la sezione d'urto è stata misurata in un ampio intervallo di energie con i risultati mostrati in figura 9. Per neutroni a temperatura ambiente la sezione d'urto totale è di $737 barns$; poiché questa temperatura¹ ($15^\circ C$) corrisponde a una velocità del neutrone di $2200 ms^{-1}$ e la sezione d'urto è allora $737 \times \frac{2200}{v} = \frac{1.62 \cdot 10^6}{v}$ in barn (v in m/s). Per il B^{10} puro la sezione d'urto di temperatura ambiente è $3525 barns$. Questa alta sezione d'urto e la potere ionizzante di entrambi i prodotti (He^4 e Li^7) così come il fatto che la dipendenza funzionale di σ dall'energia del neutrone E è relativamente semplice ($\sigma = \frac{116}{\sqrt{E}}$ per σ in barn ed E in eV) rende il boro estremamente utile nella rivelatori di neutroni, in particolare sotto forma di gas BF_3 . Se questo gas è preparato con boro arricchito nell'isotopo B^{10} la sensibilità del rivelatore per neutroni lenti può aumentare, come appare dal valore della sezione d'urto, per un fattore cinque.

¹La figura 11 mostra la relazione tra velocità, energia e temperatura dei neutroni.

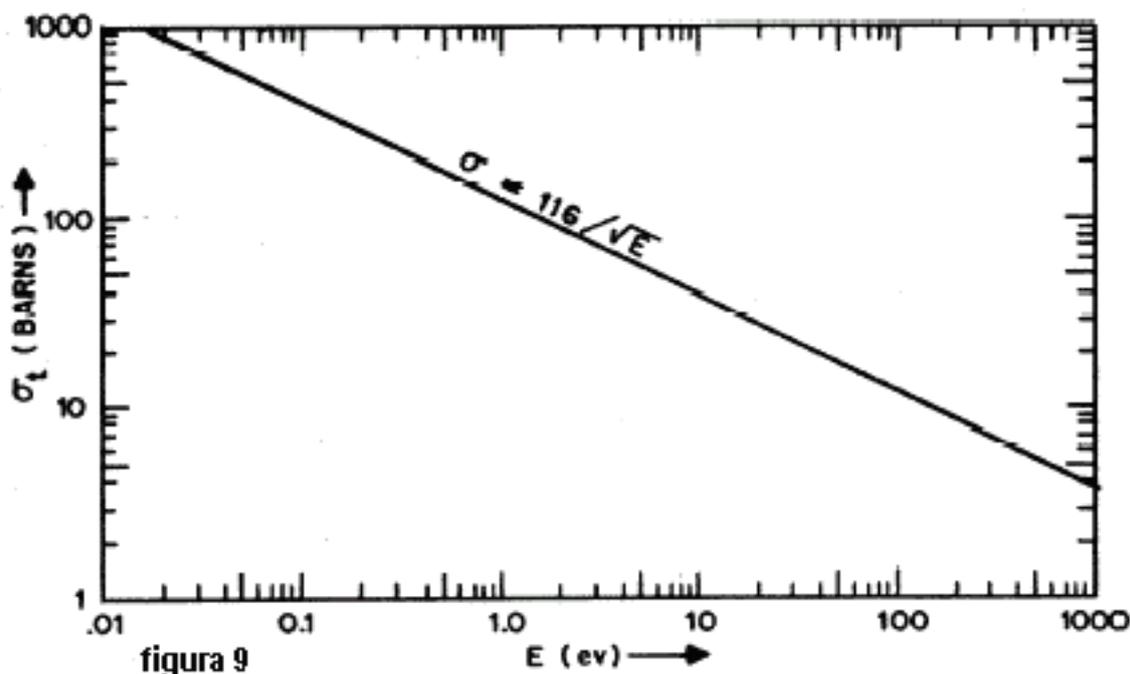


Fig. 9. Boro. Sezione d'urto tale per neutroni in funzione dell'energia.

È utile ricordare che la legge $1/v$ vale per velocità *relative*. Cioè, quando le velocità dei neutroni diventano piccole (confrontabili con le velocità termiche) l'agitazione termica dei nuclei bersagli va considerata nell'applicazione della legge $1/v$. Supponiamo che i neutroni incidano su materiali nei quali σ è proporzionale a $1/v_{rel}$, dove il suffisso indica che è la velocità relativa del neutrone rispetto al nucleo considerato. Supponiamo inoltre che una frazione N_u di tutti gli atomi bersaglio si muovano con una velocità assoluta u relativa ad un dato sistema di riferimento di laboratorio. Poiché σ è proporzionale a $1/v_{rel}$ e il numero degli "urti" al secondo è proporzionale a $N_u \cdot v_{rel}$ allora la probabilità di cattura è $A \cdot N_u$ con A costante. Sommando su tutte le possibili velocità degli atomi bersaglio $\sum_u A \cdot N_u = A \cdot N$ si mostra che la probabilità totale di cattura è costante.

Pertanto, *il numero di catture per unità di tempo è una costante e indipendente dalle velocità relative tra neutrone e atomi bersaglio quando la sezione d'urto è proporzionale a $1/v$* . Questa indipendenza delle velocità relative può anche essere osservata analizzando la 2.3.

Uno dei primi esperimenti fondamentali (*Physical Review* 49:777 (1936)) era basato su questo principio. Nell'esperimento fu misurata la trasmissione di un disco ricoperto con boro e ruotante, sul quale era diretto un fascio di neutroni (asse del fascio inclinato rispetto all'asse del disco in rotazione). La legge $1/v$ fu verificata non osservando alcun cambiamento nella trasmissione con la variazione della velocità di rotazione. La trasmissione da parte delle sostanze che non obbedisce alla legge $1/v$, ad esempio il cadmio, fu trovata variare con la variazione della rotazione.

L'isotopo più leggero del litio reagisce con i neutroni secondo lo schema $Li^6(n, \alpha)H^3$ con $Q = +4.5 \text{ MeV}$. Come in precedenza anticipato, l'assorbimento dei neutroni è in accordo con la legge $1/v$, almeno al di sotto di 0.1 eV . Ciò è mostrato nella figura 10. Si può dire, in generale, che la legge $1/v$ vale alle più alte energie per nuclei leggeri, dove i livelli energetici sono ben separati, piuttosto che per i nuclei pesanti dove i livelli energetici sono molto ravvicinati e il fattore M' varia rapidamente. Ciò sarà discusso con maggior dettaglio nel Cap. IV.

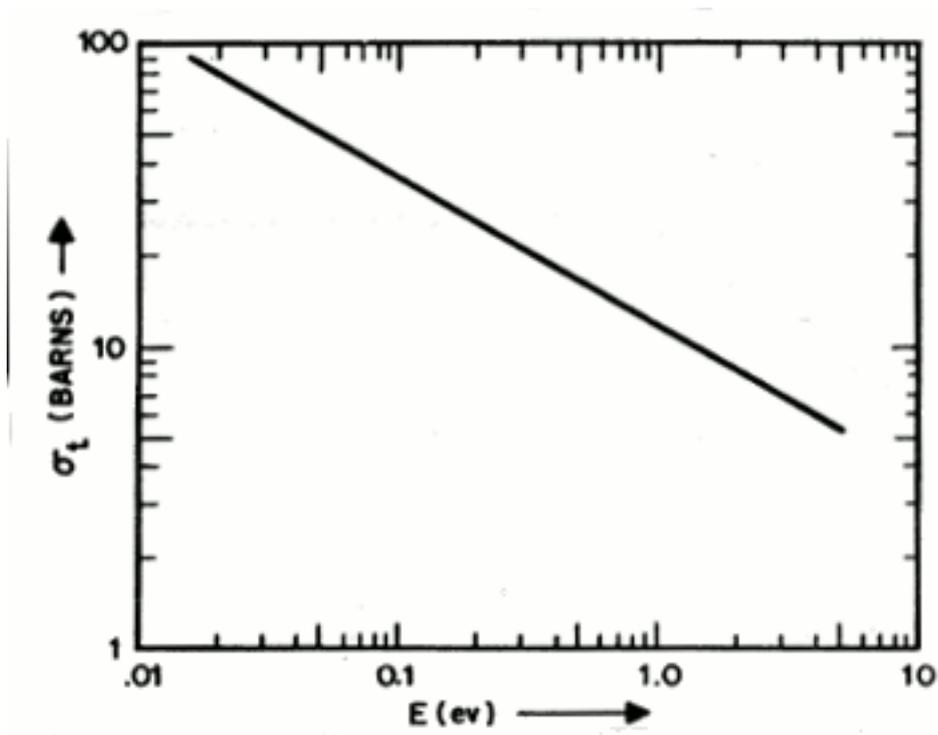


Fig. 10. Litio. Sezione d'urto totale in funzione dell'energia del neutrone.

L'assorbimento di neutroni da parte dell'azoto $N^{14}(n,p)C^{14}$, avviene con Q relativamente basso con valore di 0.6 MeV . Questo è simile al caso discusso al termine della sezione 2.5. La legge $1/v$ non vale, essendo oscurata dall'effetto del fattore di Gamow. Infatti, la sezione d'urto è ridotta a soli pochi barn per neutroni a temperatura ambiente.

Le sezioni d'urto dei neutroni sono state raccolte in un articolo di H. H. Goldsmith, H. W. Ibsen e B. T. Feld in *Review of Modern Physics* 19:259 (1947). Esso rappresenta parte del crescente corpo di dati di "spettroscopio neutronica".

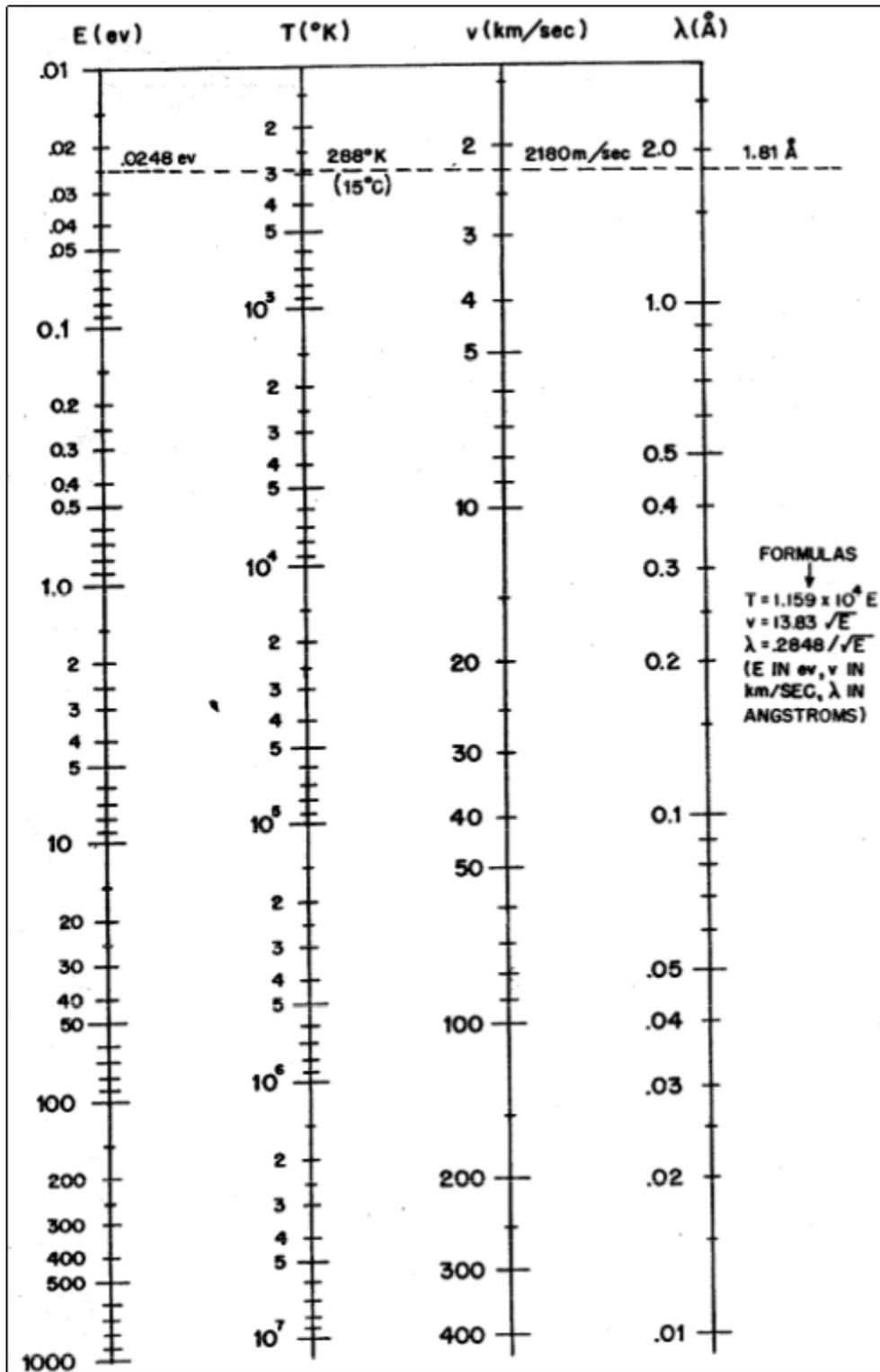


Fig. 11.

PROBLEMI

1. Una piastra di rame dello spessore di 1 cm riduce l'intensità di un fascio collimato di neutroni termici di un fattore 0.36. Qual è σ_i (per neutroni termici) in barns per il rame? Quale spessore di rame ridurrebbe l'intensità di un fattore 0.5?
2. Dalla letteratura trova un esempio di ognuno dei processi $(n, n)_{elastic}$, $(n, n)_{anelastic}$, (n, γ) , (n, α) , (n, p) -Registra la sezione d'urto osservata in ogni esempio.
3. Quale è la riduzione in intensità di un fascio di neutroni di 1 eV passanti attraverso uno strato di boro di $50 \frac{mg}{cm^2}$?

4. La distanza "media" di un neutrone prima di essere assorbito in una sostanza la cui sezione d'urto di assorbimento è σ_a è proprio $\frac{1}{N\sigma_a}$ (N =atomi del bersaglio per cm^3). Su questa base qual è la vita media di un neutrone a "temperatura ambiente" nel litio? (Assumiamo che $\sigma_a = \sigma_{tot}$). Qual è la vita media nel BF_2 in condizioni standard?

Chapter 3

Carta degli isotopi stabili e reazioni che coinvolgono i neutroni

3.1 La carta Isotopica di Segre

Prima di considerare in ulteriore dettaglio la natura delle reazioni dei neutroni sarà opportuno rivedere le caratteristiche essenziali degli isotopi stabili e quali di queste caratteristiche influiscono sulle reazioni nucleari con neutroni.

Un modo conveniente di riassumere i dati sulle varie specie nucleari è quello offerto dalla Carta Isotopica di Segre. In questa carta il numero di neutroni (N) è rappresentata sull'asse verticale, il numero dei protoni (Z) sull'asse orizzontale. Identità e proprietà di isotopi stabili e instabili sono classificati in ogni riquadro corrispondente ai valori osservati di (Z, N) . Poiché la carta risultante avrà la forma generale mostrata in figura 12 e sarebbe sconvenientemente grande (la maggior parte della carta dovrebbe contenere spazi bianchi), essa è di suddivisa in sezioni e le sezioni disposte in uno schema in parte intrecciato. Gli isotopi (Z costante) appaiono nella stessa colonna verticale, le isobare ($Z + N$ costante) sulla stessa diagonale, e gli isotoni (N costante) nella stessa riga orizzontale.

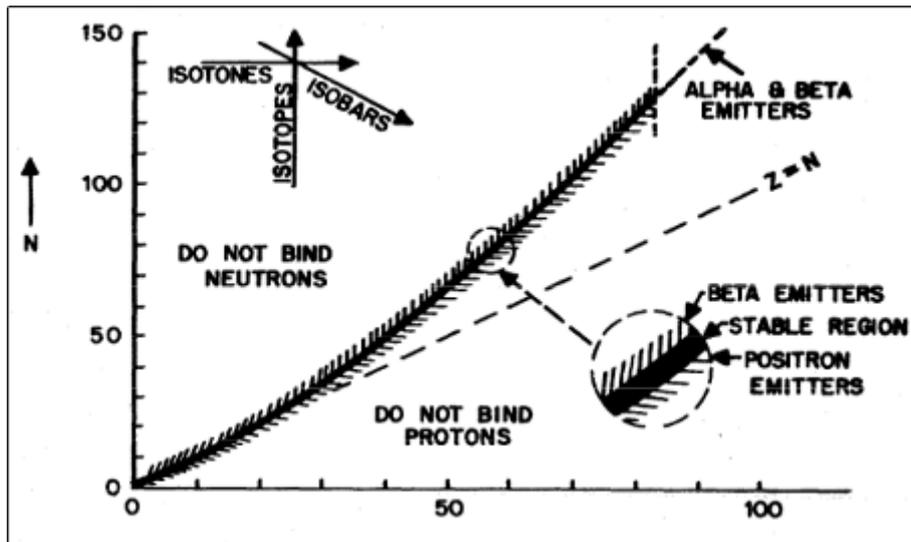


Fig. 12 - Regioni degli Isotopi stabili

Z →	Na 11	Mg 12	Al 13	Si 14	P 15
16			$\Lambda\beta^-$ 6.7M 28.9895 β^- 2.5	Si 30 3.05 29.9832 $\sigma=0.116$	P 31 100 30.9843 $\sigma=0.23$ $\frac{1}{2}$
15		$\Delta \Lambda\beta\gamma$ 10.2M 26.9928 β^- 1.8 γ 1.0	$\bullet \Lambda\beta\gamma$ 2.4M 27.9903 β^- 2.75 γ 1.82	Si 29 4.68 28.9866	$\Lambda\beta^+$ 2.55M 29.9873 β^+ 3
14	$E\beta\gamma$ 58s β^- 3.7 γ 0.035	Mg 26 11.41 25.9898 $\sigma=0.048$	Al 27 100 26.9899 $\sigma=0.21$ $+3.634 \frac{5}{2}$	Si 28 92.27 27.9866	$\Lambda\beta^+$ 4.6s 28.9919 β^+ 3.63
13	$\blacksquare \Lambda\beta\gamma$ 14.84 23.9975 β^- 1.39 σ 1.38, 2.76	Mg 25 10.18 24.9938	$\nabla \Lambda\beta^+$ 7.0s 25.9929 β^+ 2.99	$\Lambda\beta^+$ 4.5s 26.9949 β^+ 3.64	
12	Na 23 100 22.99618 $\sigma=0.63$ $+2.217 \frac{3}{2}$	Mg 24 78.41 23.9924			

Fig. 13 - Carta di Segre vicino a Al^{27}

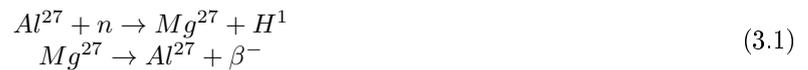
Tipiche reazioni dei neutroni su Al^{27}

- $Al^{27}(n, \gamma) Al^{28}$
- $Al^{27}(n, p) Mg^{27}$
- $Al^{27}(n, \alpha) Na^{24}$
- $Al^{27}(n, 2n) Al^{26}$

Chiave della Carta di Segre (AECD 2111)

	Numero di massa elemento		Classe, tipo di radiazione
	Percentuale abbondanza		Vita media
	Massa		Massa
	Cattura neutroni lenti		Radiazione emessa
	Momento magnetico, spin		Energia in MeV
STABILE		RADIOATTIVO	
Classificazione			
A	Isotopo certo (A e Z certi)	β^-	Particella beta negativa
B	Isotopo probabile, elemento certo	β^+	Particella beta positiva
C	Uno dei pochi isotopi, elemento certo	γ	Raggio gamma
D	Elemento certo	e^-	Conversione elettronica interna
E	Elemento probabile	K	Cattura elettronica
F	Evidenza insufficiente	IT	Transizione isometrica
		σ	Sezione d'urto di cattura neutrone lento in barns

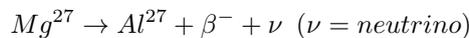
Per illustrare la convenienza di questa rappresentazione e mostrare quali dati si possono ottenere riguardanti le reazioni dei neutroni dalla carta viene riprodotta la parte del diagramma in fig. 13 vicina all'alluminio. Nella figura il singolo isotopo di alluminio Al^{27} , è evidenziato con linee più scure e sono indicati con simboli ausiliari i prodotti delle reazioni (n, γ) , (n, p) , $(n, 2n)$ sull' Al^{27} . Si verifica che tutte queste reazioni portano a prodotti finali instabili. Tranne per il prodotto della reazione $(n, 2n)$ queste sono tutte emettitori beta. Questo è comprensibile, per esempio, nel caso della reazione (n, p) dove quando si ottiene infine la stabilità l'effetto netto nella trasformazione di un neutrone in un protone e un elettrone:



L'effetto netto può essere scritto come $n \rightarrow p + \beta^-$. Al contrario, esistono reazioni (n, n) per le quali il risultato netto è $p \rightarrow n + \beta^+$. Quando la massa del neutrone è maggiore di quella del protone più l'elettrone, la trasformazione di un neutrone è esotermica. La reazione inversa è endotermica.

La reazione $(n, 2n)$, in genere non così come le altre, equivale all'estrazione di un neutrone producendo, in tal modo, un emettitore di positroni e infine uno stabile Mg^{26} . Quest'ultimo illustra il principio che nuclei instabili sopra la curva di massima stabilità sono in genere emettitori beta, quelli sotto emettitori di positroni (o «cattura» K-elettrone). Ognuno di questi processi - emissione beta o positrone o K-cattura - produce un'isobara del nucleo instabile cosicché i processi sono lungo linee isobariche di pendenza = -1 sulla Carta di Segre come indicato in figura 12.

Se l'alluminio è bombardato da neutroni di varie energie, tutti i prodotti possono presentarsi e si dovranno usare alcuni tipi di separazione chimica per separarne le attività. Se l'energia del neutrone bombardante è controllabile, sarà possibile favorire la formazione di un prodotto rispetto agli altri e l'esame dello spettro delle energie delle particelle beta emesse rivelerà che lo spettro è continuo con la forma generale mostrata in figura 14. Questo è un risultato piuttosto inatteso dato che l'emissione gamma (e l'emissione alfa dei nuclei naturalmente radioattivi) produce spettri discreti. La spiegazione accettata di questa anomalia è che l'emissione di una particella beta è sempre accompagnata dall'emissione di un «neutrino». Pertanto il decadimento di Mg^{27} può essere scritto come:



Il bilanciamento energetico è $E_\beta + E_\nu = E_0$, dove E_0 è l'energia del decadimento β^- ed è uguale al massimo dell'energia beta osservata. Per Mg^{27} questa vale $1.8 MeV$. Poiché l'energia E_0 si può dividere tra la particella beta e il neutrino, ne segue che vi sarà uno spettro continuo di energia per le particelle beta.

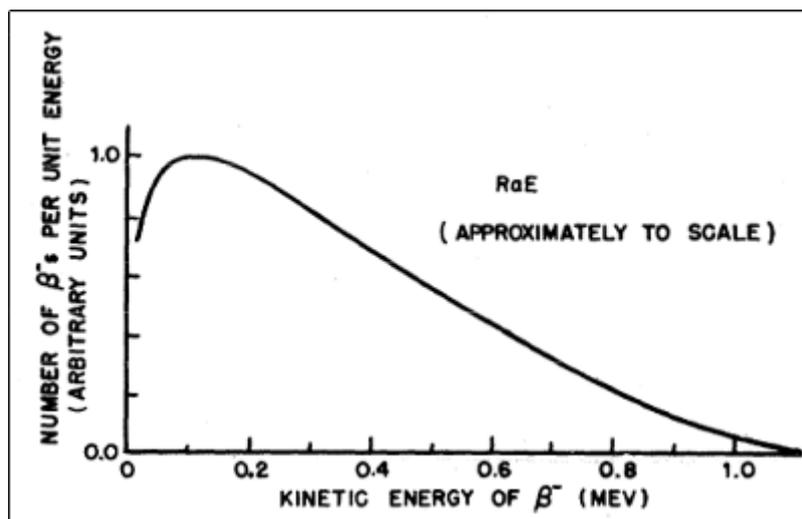
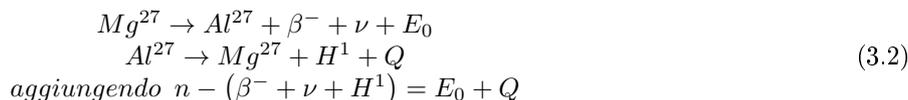


Figura 14. Tipico Spettro Beta

Prima che un tale schema sia accettabile è necessario mostrare che l'energia beta massima (E_0), e non l'energia beta media, è la perdita di energia per nucleo nel decadimento beta. Questo può essere facilmente mostrato in molti casi. Per esempio, consideriamo il decadimento e la produzione di Mg^{27} :



L'equivalenza tra l'energia e la differenza di massa tra neutrone e atomo di idrogeno (protone più elettrone) assumendo come trascurabile la massa del neutrino è 0.75 MeV cosicché $E_0 + Q$ dovrebbe essere 0.75 MeV . Poiché E_0 è 1.8 MeV segue che Q deve essere -1.05 . Ciò è osservato sperimentalmente, la reazione $Al^{27}(n, p)Mg^{27}$ è endotermica con una soglia corrispondente a $Q = -1.05 \text{ MeV}$. Se il valore di Q osservato fosse, ad esempio, -1.2 MeV ne deriverebbe che l'energia sprigionata nel decadimento beta supera il massimo dello spettro beta. In questo caso per soddisfare la conservazione dell'energia la massa del neutrino non dovrebbe più essere trascurabile.

L'emissione di un positrone è del tutto simile. Come con gli emettitori beta, l'energia totale della reazione deve essere uguale all'energia massima della particella emessa. Gli spettri osservati e le energie delle reazioni sono quantitativamente consistenti considerando una particella neutra di massa trascurabile (cioè una massa piccola rispetto alla massa elettronica) che accompagna l'emissione di un positrone.

3.2 Pesi Isotopici e Energia di Legame dei Neutroni

In una reazione (n, γ) un neutrone è catturato da un nucleo e viene emessa l'energia eccedente sotto forma di radiazione gamma. Il bilancio energetico della reazione offre una misura quantitativa dell'energia di legame del neutrone al nucleo bersaglio. Un'idea approssimativa della grandezza di questa energia può essere ottenuta assumendo che l'aggiunta di un neutrone a un nucleo di numero di massa A aumenta il suo numero di massa a $A + 1$ e la sua massa di una unità. Poiché la massa del neutrone è, in valore arrotondato, 1.009 unità di massa, ciò indica un'energia di legame di circa $.009$ unità di massa pari a 8 MeV . In realtà il reale peso atomico differisce significativamente dal numero di massa A in molti casi. Si è trovato, infatti, conveniente definire la deviazione frazionaria come la «frazione di impacchettamento»:

$$f(A) = \frac{(M - A)}{A}
 \tag{3.3}$$

dove M è il peso atomico (una funzione di A) ed A il numero di massa.

La frazione di impacchettamento può essere determinata dai dati spettrometrici della massa, curva continua di figura 15. Si può vedere che essa varia lentamente per tutti i nuclei stabili tranne per quelli molto leggeri.

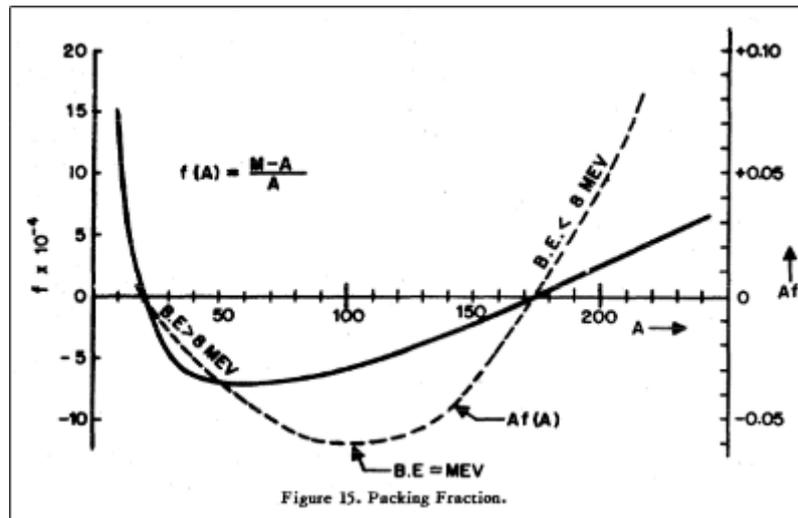


Figure 15. Packing Fraction.

È possibile usare la curva della frazione di impacchettamento osservata per determinare ogni variazione regolare dell'energia di legame con il numero atomico. Risolvendo la 3.3 per $M(A)$ e scrivendo la corrispondente equazione per $M(A+1)$, il peso atomico quando A è aumentato di una unità dà:

$$\begin{aligned} M(A) &= A[1 + f(A)] \\ M(A+1) &= (A+1)[1 + f(A+1)] \\ \Delta M &= M(A+1) - M(A) = 1 + (A+1)f(A+1) - Af(A) \end{aligned} \quad (3.4)$$

ΔM è l'aumento in massa atomica se viene aggiunto un neutrone (o protone). Sottraendo questo dalla massa media del neutrone e protone, 1.0085, si ottiene l'energia di legame della particella aggiunta:

$$\begin{aligned} 1.0085 - \Delta M &= 0.0085 - [(A+1)f(A+1) - Af(A)] \\ &= 0.085 - \frac{d}{dA}[Af(A)] \end{aligned}$$

Scrivendo la differenza come una derivata rende possibile stimare l'energia di legame osservando la pendenza della funzione $Af(A)$. La linea tratteggiata nelle fig. 15 mostra come $Af(A)$ varia con A . Dove $Af(A)$ ha una pendenza nulla l'energia di legame di un neutrone (o protone) è 0.0085, dove positivo è minore di 8 MeV. Il minimo di ha vicino a $A = 100$.

Ciò significa che, fintanto che le reazioni dei neutroni riguardano quelle (n, γ) , verranno coinvolte energie dell'ordine di 8 MeV. I soli isotopi stabili che non legano elettroni sono He^4 e il neutrone stesso. Di conseguenza, ogni isotopo instabile con un eccesso di neutroni non legherà un neutrone. Infatti, riferendoci alla fig. 12, la regione sopra gli emettitori beta si può descrivere come quella «dei nuclei che non legheranno neutroni» e la al di sotto degli emettitori di positroni come quella «dei nuclei che non legheranno protoni». Esempi di nuclei nella regione superiore, cioè, emettitori di neutroni, si trovano tra i nuclei formati come prodotti di fissione.

Si deve evidenziare che questa regola degli 8 MeV per le reazioni (n, γ) è solo una media approssimata e che, in particolare per gli elementi leggeri, il valore può differire da questa media. Per esempio, il processo opposto o reazione (γ, n) avviene nel caso del deuterio (vedi il Capitolo 1) alla soglia di 2.2 MeV e nel caso del berillio a 1.7 MeV, dove si osserva che le energie di legame dei neutroni possono differire in modo significativo da 8 MeV.

PROBLEMI

1. Trovare cinque esempi di ognuno dei processi (n, γ) , (n, p) , (n, α) , $(n, 2n)$. Registrare le vite medie di ogni nucleo radioattivo prodotto.
2. Calcolare l'energia di legame di un neutrone per ognuno dei seguenti nuclei: $H^1, H^2, Li^6, Li^7, Be^9, B^{10}, B^{11}, C^{12}, C^{13}$.
3. Calcolare la frazione di impacchettamento e l'energia di legame media di un neutrone (o protone) nell'intorno del ferro
4. Scrivere l'equazione per la trasformazione di un protone in un neutrone (più altre particelle). Qual è il valore di Q ?

Chapter 4

Modelli di Nuclei e delle Reazioni Nucleari

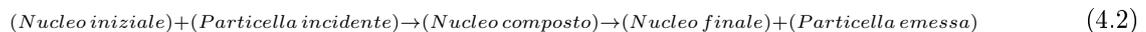
4.1 I Nuclei Composti

Nella sezione 2.4 si è mostrato che per i processi (n, γ) la sezione d'urto per basse energie è:

$$\sigma = M' \left(\frac{h^2 \nu^2}{c^3} \right) \frac{1}{v_i} \quad (4.1)$$

dove ν è la frequenza del gamma emesso, v_i la velocità del neutrone incidente. Per oltre un centinaio di reazioni (n, γ) note vale la legge $1/v$ per la maggior parte solo molto vicino a $v_i = 0$. Ciò è dovuto alla stretta variazione di M' associata con i fenomeni di risonanza.

Una spiegazione della natura di questa risonanza può essere data in termini del cosiddetto modello del «nucleo composto» proposto per la prima volta da Niels Bohr in *Nature*: 137:344(1936). In questo modello una reazione nucleare è rappresentabile con uno schema in tre passi:



Ciò significa che, quando un neutrone colpisce un nucleo non espelle la prima particella che colpisce. Invece distribuisce la propria energia tra i vari componenti del nucleo e per un certo tempo esiste in combinazione con il nucleo originale in un sistema detto nucleo composto¹.

Se una particella viene emessa dal nucleo composto dipende dalla probabilità di concentrare la necessaria energia di fuga su una particella nella interazione a più corpi dentro il nucleo composto. Un processo (n, γ) si può rappresentare come:



Il nucleo composto $(A + n)^*$ è qui lo stato eccitato del nucleo finale, l'asterisco simboleggia l'eccitazione.

Il nucleo composto è relativamente stabile, cioè il nucleo composto esiste per un tempo lungo rispetto al tempo impiegato da una particella nucleare ad attraversare il nucleo. Quest'ultimo tempo è dell'ordine di 10^{-12} diviso per la velocità del neutrone, o nel caso di neutroni lenti di circa $\frac{10^{-12}}{10^7} = 10^{-19}$ s. Il tempo di esistenza può essere dedotto dal principio di indeterminazione che afferma che il prodotto dell'incertezza sull'energia in un sistema (ΔE) e l'incertezza sul tempo (Δt) , in questo caso il tempo durante il quale il sistema può essere detto esistente, è dell'ordine della costante di Planck:

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim h \quad (4.4)$$

È possibile determinare il valore dell'incertezza sull'energia, da cui si può dedurre Δt . A volte Δt è dell'ordine di 10^{-14} s o 10^5 volte il tempo di attraversamento. In termini di immagine fisica ciò significa che la particella incidente colpisce il nucleo, distribuisce la sua energia tra le particelle nucleari, e molto tempo dopo il «tempo di transito» l'energia necessaria è concentrata in una particella costitutiva che può sfuggire dal nucleo.

¹La distribuzione dell'energia tra tutte le particelle nucleari deriva dal fatto che esse interagiscono con forze confrontabili alla forza esercitata su ogni particella nucleare dal neutrone incidente. Ciò è diverso dal caso delle collisioni atomiche quando, cioè, un elettrone colpisce un atomo. In quest'ultimo caso l'interazione tra l'elettrone collidente e l'altro elettrone colpito è grande rispetto all'interazione tra l'elettrone colpito e gli altri elettroni dell'atomo. Detta in altro modo, le collisioni tra neutroni e nuclei deve essere considerata un problema di «molti corpi» mentre le collisioni elettrone-atomo si possono generalmente ridurre a un problema a due corpi (o un corpo in un campo). Per un'eccellente trattazione di queste differenze e per un'introduzione generale ai processi nucleari si veda H. A. Bethe in *Review of Modern Physics* 9:71-74 (1937).

4.2 Risonanze dei neutroni, spazature tra i livelli

La quantità M' nella 4.1 dipende da certi elementi di matrice H come descritto nella sezione 2.4. Questi elementi di matrice dipendono a loro volta dai possibili stati del nucleo composto in un modo tale quando la somma dell'energia cinetica della particella incidente e quella dell'energia di legame è uguale (o quasi uguale) all'energia di qualche stato eccitato del nucleo composto allora il fattore M' diviene grande presentando un picco nella sezione d'urto di assorbimento per questa particolare energia cinetica della particella incidente. Quando l'energia cinetica della particella è tale che l'energia totale disponibile per il nucleo composto è diversa da ogni energia corrispondente ad uno stato eccitato del nucleo composto allora il fattore M' è relativamente costante per variazioni dell'energia della particella incidente.

Traducendo queste osservazioni in linguaggio simbolico il processo nucleare generico può essere scritto:



dove A è il nucleo bersaglio iniziale; P la particella incidente; C il nucleo composto; B il nucleo residuo; R la particella emessa.

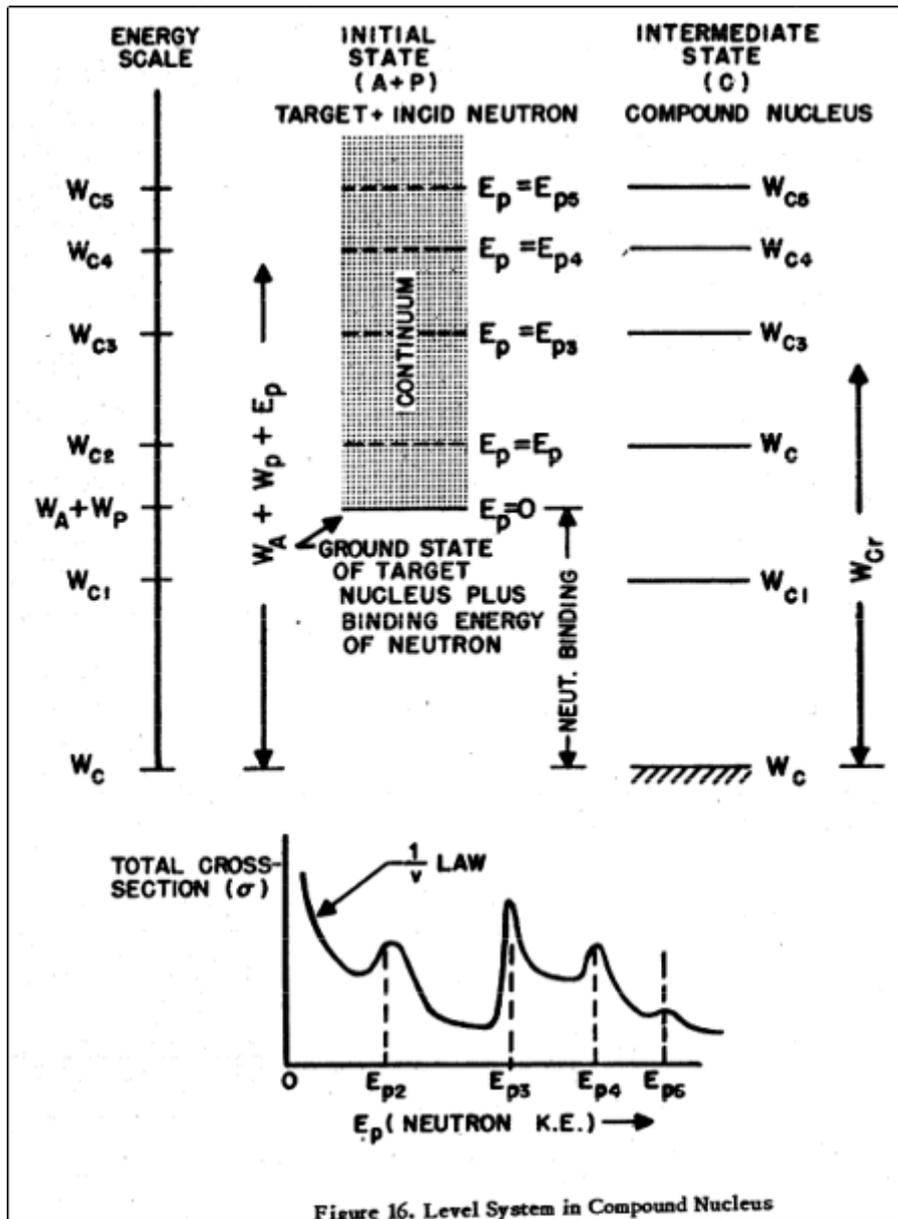
Con l'energia la relazione diviene:

$$\begin{aligned} (\text{Conservazione dell'energia}) \quad W_A + W_P + E_P &= W_B + W_R + E_R \\ (\text{Definizione di } E_{Pr}) \quad W_A + W_P + E_{Pr} &= W_{Cr} \end{aligned} \quad (4.6)$$

dove

W_A	=	energia interna del nucleo iniziale
W_P	=	energia (di legame) interna della particella incidente
E_P	=	energia cinetica della particella incidente
W_B	=	energia interna del nucleo residuo
W_R	=	energia interna (di legame) della particella emessa
E_R	=	energia cinetica della particella emessa
E_{Pr}	=	energia cinetica della particella incidente quando questa energia cinetica è proprio uguale a quella necessaria per portare il nucleo composto a uno stato eccitato caratterizzato dall'energia interna W_{Cr}
W_{Cr}	=	energia interna del nucleo composto C a risonanza r

Forse il modo migliore per riconoscere il significato delle 4.5 e 4.6 è quello di considerare il processo (n, γ) . A è il nucleo bersaglio, P il neutrone, B il nucleo residuo (isotopico ad A ma con un aumento di una unità del numero di massa), e R il fotone gamma emesso. Assumiamo che A sia allo stato fondamentale con corrispondente energia interna W_A . Il sistema dei livelli energetici dello stato iniziale, vedi figura 16, sarà un continuo poiché l'energia cinetica del neutrone incidente (E_P) può variare con continuità. Quando l'energia del neutrone si avvicina ad alcuni valori critici E_{P2}, E_{P3}, \dots l'energia totale dello stato iniziale corrisponde ai livelli energetici del nucleo composto W_{C2}, W_{C3}, \dots , rispettivamente, e la probabilità dell'assorbimento del neutrone cresce come mostrato nel grafico inferiore della figura 16. Ora, poiché il nucleo composto una volta eccitato a uno di questi livelli può liberare la sua energia in eccesso mediante più di un processo, cioè (n, γ) , (n, α) , (n, p) , segue che l'intero picco di risonanza osservato nella sezione d'urto non corrisponde necessariamente a un processo (n, γ) . Per nuclei di peso medio si può essere certi dalle considerazioni sull'energia e l'effetto della barriera potenziale coulombiana che almeno ai primi pochi livelli corrisponde alla reale cattura di un neutrone. Naturalmente, i neutroni con grandi energie cinetiche possono portare il nucleo composto a stati eccitati dove parecchi processi competono nel raggiungimento della stabilità finale.



Se il primo picco di risonanza compare mediamente per nuclei di peso medio a $E_p \sim E$, allora si potrebbe anticipare che la spaziatura dei livelli energetici dei nuclei di medio peso (nella regione di eccitazione corrispondente all'energia di legame della particella incidente) dell'ordine di grandezza di E . Per nuclei di peso medio «le prime risonanze di cattura» si hanno intorno ai 10 eV . Esperimenti con tali nuclei che sono vicini agli stati stazionari (cioè eccitazione da gamma) indicano che la spaziatura tra i livelli energetici è dell'ordine di 10^5 o 10^6 eV a basse energie.

4.3 Due modelli Nucleari

Il fatto la spaziatura tra livelli decresce molto rapidamente con l'energia di eccitazione per medi (o grandi) pesi nucleari necessita di spiegazione. Qualitativamente questo fatto può essere compreso considerando due modelli di nuclei composti: (1) un sistema meccanico con molti gradi di libertà, (2) un gas neutroni-protoni.

Nel primo modello il nucleo è rappresentato da un sistema meccanico con A componenti (A è il numero di massa), dove ogni componente ha tre gradi di libertà. Poiché il numero totale di gradi di libertà è $3A$, il sistema sosterrà vibrazioni con $3A$ frequenze caratteristiche. Ad una frequenza di vibrazione ν è associata un'energia $h\nu$. Se il sistema vibra contemporaneamente con frequenze ν_1 e ν_2 ha un'energia $h\nu_1 + h\nu_2$. In generale si avrà un'energia:

$$a_1 h\nu_1 + a_2 h\nu_2 + a_3 h\nu_3 + \dots + a_{3A} h\nu_{3A}$$

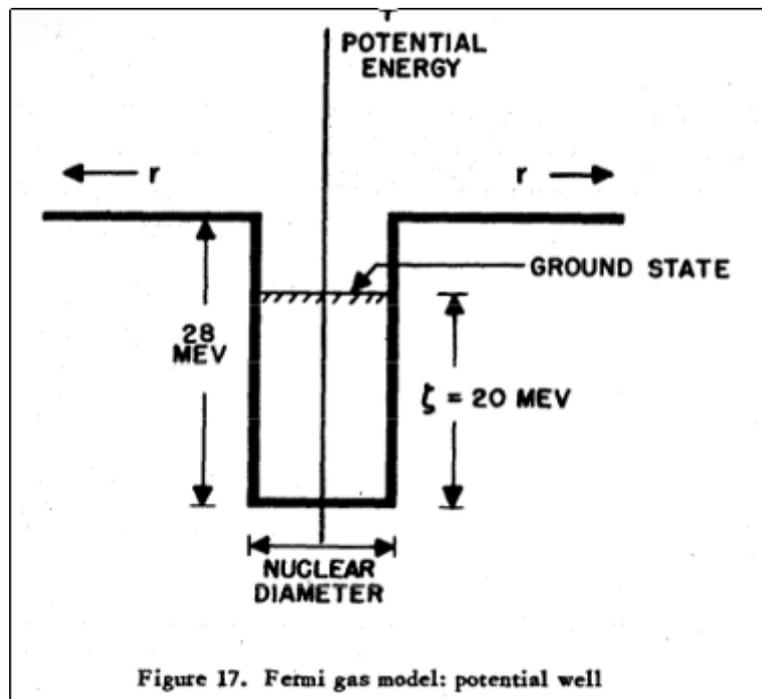
dove i coefficienti a sono interi. Se $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$, ecc., è facile vedere che ad alte energie vi saranno più livelli per unità di energia. Questo è un inesatto argomento qualitativo ma l'idea di base, che un sistema con molti gradi di libertà raggruppa i suoi livelli energetici alle alte energie, è corretta.

Questo tipo di considerazione può essere migliorato descrivendo il nucleo come una goccia liquida (proposta di Bohr e Kalckar: Kgl. Dansk Acad. Vol. 14, No 10, (1937)). La goccia liquida è tenuta assieme dall'attrazione di ogni sua parte con la parte circostante più vicina, cioè mediante forze a corto range (corto rispetto alle dimensioni della goccia). Il volume della goccia è proporzionale alla massa della goccia stessa. Allo stesso modo le forze nucleari sono a breve range con ogni protone attratto da pochi neutroni o protoni vicini e il volume nucleare è proporzionale al numero totale dei neutroni e protoni nel nucleo. Considerando una goccia sferica vi è un certo numero di possibili modi di vibrazione. I modi maggiori saranno caratterizzati da una superficie relativamente «rugosa», cioè con molte linee nodali; le energie corrispondenti a questi modi più alti saranno relativamente più vicine insieme con quelle per i modi inferiori e fondamentali. Questa goccia liquida sarà discussa in seguito nel capitolo sulla fissione.

Il secondo modello nucleare è un gas di Fermi di neutroni e protoni in un dato potenziale. La temperatura del gas è T . Quando $T = 0$, il nucleo si trova nello stato fondamentale con alcune particelle che, tuttavia, si muovono piuttosto velocemente a causa del principio di esclusione di Pauli. Se l'energia è mantenuta nel gas alcune particelle si muovono più velocemente e T aumenta. Si può mostrare che per un gas degenerare del tipo qui considerato l'energia è proporzionale a T^2 invece che a T . Infatti,

$$Energia = U = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{A}{\zeta} \tau^2$$

dove A è il numero di particelle; $\tau = kT$; ζ è l'energia dello stato fondamentale.



Nel potenziale ben scelto per il modello nucleare, Figura 17, $\zeta \sim 20 \text{ MeV}$. Scrivendo U come $a\tau^2$ l'entropia $S = \frac{\partial U}{\partial t}$ è proprio $2a\tau$ o $\pi \sqrt{\frac{aU}{\zeta}}$. L'entropia è normalmente scritta come $\ln P + \text{costante}$, dove P è la probabilità dello stato in questione o statisticamente il numero di stati per intervallo di unità di energia. Allora

$$S = \ln P + \text{costante}$$

$$P = \text{costante} \cdot e^S = (40)$$

dove P_0 è il valore di P a $U = 0$. Applicando questo ai nuclei medi con 8 MeV di eccitazione ($A \sim 100$, $\zeta \sim 20 \text{ MeV}$) si mostra che la densità degli stati è $P_0 e^{20}$ o $P_0 \cdot 10^8$. Questa è la densità degli stati (numero di stati per unità di energia) a 8 MeV è 10^8 volte quella allo stato fondamentale. Questo a volte è troppo alta.

In conclusione, si può notare che la parte precedente indica solo tendenze e non deve essere presa per più del suo valore. L'idea essenziale è che il nucleo è un sistema con molti gradi di libertà. Quasi ogni approccio mostra una variazione logaritmica nei livelli di densità. È un compito quasi impossibile ottenere una consistenza numerica a causa della mancanza di conoscenza di base delle forze nucleari e di strumenti matematici per trattare ciò che è essenzialmente un problema a molti corpi.

Il lettore è rinviato a Bethe: Nuclear Physics, Part B" (Rev. Mod. Phys. 9 (1937)) sezione 53, pagg. da 79 a 90, per un sommario dei diversi approcci al problema della distribuzione dei livelli energetici nucleari.

Problemi

1. Trovare tutte le informazioni possibili nella letteratura sulle risonanze dell'indio e dell'oro per neutroni.
2. Dalla letteratura trovare la prima risonanza per nuclei con numero di massa da $A = 100$ a $A = 150$. Fare una stima della spaziatura dei livelli in questo intervallo.
3. Predisporre una tabella della densità dei livelli per Be ad eccitazioni di 4, 6, 8, 10 MeV usando il modello a gas di protoni-neutroni. Ripetere per Fe , Ag , Au .

Chapter 5

La diffusione dei neutroni

5.1 La formula di Breit-Wigner

Per alcuni casi speciali, gli elementi di matrice presenti nella formula generale per la sezione d'urto, cioè, il fattore M discusso brevemente nella sezione 2.4, si può ridurre ad una formula relativamente semplice. In particolare, se i livelli di risonanza di un nucleo composto sono molto distanti e siamo interessati alla sezione d'urto nelle vicinanze di uno dei livelli di risonanza, l'espressione per la sezione d'urto di un processo (a, b) assume la forma

$$\sigma(a, b) = \pi (\chi_a)^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E_a - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (5.1)$$
$$\chi_a = \frac{\lambda_a}{2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E_a}} \quad \mu = \frac{mM}{m+M}$$

E_a è l'energia cinetica della particella incidente, λ_a la sua lunghezza d'onda di de Broglie, m la massa della particella incidente, M la massa del nucleo bersaglio, E_r è l'energia del livello di risonanza (E_{Pr} nella sezione 4.2) del nucleo composto, e Γ l'ampiezza del picco di risonanza a metà del suo valore massimo. In realtà, la 5.1, nota come formula di Breit-Wigner, dovrebbe essere moltiplicata per un fattore dipendente dagli spin delle particelle iniziali e dei nuclei composti. Per semplicità, consideriamo questi fattori incorporati in Γ_a e Γ_b . Γ_a e Γ_b sono le ampiezze parziali del picco di risonanza e sono associati, rispettivamente, alla probabilità di emissione delle particelle a e b . La loro esatta forma è piuttosto complicata, ma poiché la probabilità di emissione di una particella b di momento P_e (vedi 2.10) è proporzionale a $\frac{P_e^2}{v_e^2}$, e ancora di più è Γ_b . La probabilità relativa che la particella uscente sia una particella a è $\frac{\Gamma_a}{\Gamma}$, probabilità relativa che sia una particella b , $\frac{\Gamma_b}{\Gamma}$, ecc., cosicché la somma di tutte le Γ_i è Γ :

$$\sum \Gamma_i = \Gamma \quad (5.2)$$

con $i = a, b, \dots$

Se τ_i è il tempo medio di emissione di una particella i dopo la formazione del nucleo composto, allora

$$\Gamma_i \tau_i \cong \hbar \quad (5.3)$$

Questa è una ripetizione della relazione di incertezza discussa nella sezione 4.1 e espressa dalla 4.4. La probabilità che non venga emessa alcuna particella i dal nucleo fino al tempo t è $\prod_{i=a,b,\dots} \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) = \exp\left(-t \sum_i \frac{1}{\tau_i}\right) = e^{-\frac{t}{\tau}}$ dove t è la vita media del nucleo composto:

$$\tau = \left[\sum_i \frac{1}{\tau_i} \right]^{-1} \quad (5.4)$$

Se si descrive l'emissione in termini della costante di disintegrazione $\lambda = \frac{1}{\tau}$ la relazione esponenziale diviene la familiare $\exp(-\lambda t)$. La vita media τ soddisfa la relazione di Heisenberg nello stesso modo di τ_i , cioè, $\Gamma \tau \simeq \hbar$.

La formula di Breit-Wigner della 5.1 si può applicare a ogni collisione nucleare riguardante la formazione di un nucleo composto, purché i livelli di risonanza non siano così ravvicinati che distorcerebbero significativamente questa formula a un livello. Si può applicare, per esempio, ai processi (n, γ) . Per la cattura in risonanza nell'indio, si è osservato¹ che $E_r = 1.44 \text{ eV}$, $\sigma(n, \gamma)$ alla risonanza $\simeq 26000 \text{ barn}$, $\Gamma \cong 0.09 \text{ eV}$. Inoltre, le misure sperimentali mostrano che i soli neutroni e i gamma emettono (pertanto $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$), e i gamma sono emessi

¹Physical Review 71:165 (1947)

in numero maggiore dei neutroni ($\Gamma_\gamma > \Gamma_n$). Con questi dati sperimentali, era auspicabile trovare il *numero dei neutroni emessi per ogni emissione gamma*. La soluzione segue dalla 5.1

$$\sigma(n, \gamma) \text{ alla risonanza} = 4\pi\chi_n^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma^2}$$

$$\chi_n^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_r}}$$

dove m è la massa del neutrone.

Sostituendo i valori sperimentali di σ e E_r si ottiene il valore

$$\frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma^2} = 0.015$$

Poiché $\Gamma_n < \Gamma_\gamma$, allora $\Gamma_\gamma \simeq \Gamma = 0.09 \text{ eV}$. Quindi $\frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma^2} \simeq \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = 0.015$, da cui $\Gamma_n = 0.015\Gamma = 0.015 \times 0.09 = 0.013 \text{ eV}$. Pertanto, il rapporto delle ampiezze è $\frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} = 0.015$, o per ogni migliaia di gamma emessi, approssimativamente saranno emessi 15 neutroni.

Lo stesso ragionamento per l'oro e l'argento² mostra che

<i>Au</i> :	$E_r = 4.8 \text{ eV}$	$\sigma_{ris} = 60000 \text{ barn}$	$\Gamma \simeq 0.1 \text{ eV}$	<i>(sperimentale)</i>
	$\Gamma_n \simeq 0.01 \text{ eV}$	$\Gamma_\gamma \simeq 0.1 \text{ eV}$	$\frac{\Gamma_n}{\Gamma} \simeq 0.11$	<i>(calcolato)</i>
<i>Ag</i> :	$E_r = 5.1 \text{ eV}$	$\sigma_{ris} = 7200 \text{ barn}$	$\Gamma \simeq 0.19 \text{ eV}$	<i>(sperimentale)</i>
	$\Gamma_n \simeq 0.0027 \text{ eV}$	$\Gamma \simeq 0.19 \text{ eV}$	$\frac{\Gamma_n}{\Gamma} \simeq 0.014$	<i>(calcolato)</i>

Le reazioni di cattura per indio, oro e argento sono molto utili per la rivelazione dei neutroni lenti³.

5.2 Alcune considerazioni generali sulla diffusione dei neutroni

Per la diffusione elastica di neutroni di bassa energia, la 5.1, in virtù della relazione $a = b = n$ e $E_n \simeq 0$, si riduce a

$$\sigma(n, n) = \pi\chi_n^2 \frac{\Gamma_n^2}{E_r^2} \quad [E_n \simeq 0 \quad \Gamma \ll E_r] \quad (5.5)$$

Data la disuguaglianza e limita l'applicabilità ai neutroni la cui energia è minore dell'energia di prima risonanza e ai casi in cui l'ampiezza del livello energetico della prima risonanza è molto minore dell'energia stessa. Poiché λ_n è proporzionale a $\frac{1}{\mu v_n}$ e Γ_n è proporzionale a $\frac{p_e^2}{v_e}$ o $\mu^2 v_e$ dove p_e e v_e sono momento e velocità del neutrone, e poiché $v_n = v_e$ (collisione elastica), allora segue che $\lambda_n \Gamma_n$ è proporzionale a μ^2 e sarà piuttosto costante per diffusione di neutroni con energie minori del primo livello energetico di risonanza.

La curva per la diffusione nell'idrogeno (paraffina) mostrata in figura. 18 presenta una sezione d'urto piuttosto costante di 21 barn a basse energie del neutrone. Tuttavia, a velocità dei neutroni molto basse, vi è un improvviso aumento di σ_n . Questo è spiegabile in termini della variazione di μ^2 . Per neutroni diffusi dall'idrogeno, μ è metà della massa del neutrone tranne dove la velocità relativa neutrone-protone è troppo piccola per fornire sufficiente energia per liberare l'idrogeno (legato nella paraffina) o eccitare la molecola. In quest'ultimo caso, che si ottiene per neutroni molto lenti, l'idrogeno legato nella grande molecola ha una massa effettiva che è molto grande. Pertanto

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} \text{ per } E_n > \text{energia di legame di H nella paraffina} \\ \mu &= 1 \text{ per } E_n \ll \text{energia di legame di H nella paraffina} \end{aligned}$$

Cosicché la Γ_n starà nel rapporto dei quadrati di μ , o 1 : 4. Questo aumenterà la sezione d'urto di diffusione per neutroni molto lenti. In figura 18, si osserva che le conferme sperimentali che questo aumento è di un fattore 1 a 4 di modo che la sezione d'urto di diffusione (misurata in paraffina ghiacciata⁴) è di circa 80 barn . Questo risultato può essere affermato nel modo seguente. *La sezione d'urto di diffusione per neutroni lenti incidenti su protoni legati è quattro volte quella per elettroni liberi.*

²Phys. Review 70:166 (1946); 71:1656 (1947); 71:707 (1947).

³Per un sommario delle sezioni d'urto di attivazione per neutroni termici, si veda L. Seven, N. N. Friedlander, S. S. Turkel in Phys. Rev. 72:888 (1947)

⁴Misurata pure usando un filtro di grafite, si veda Phys. Rev. 70:815 (1946).

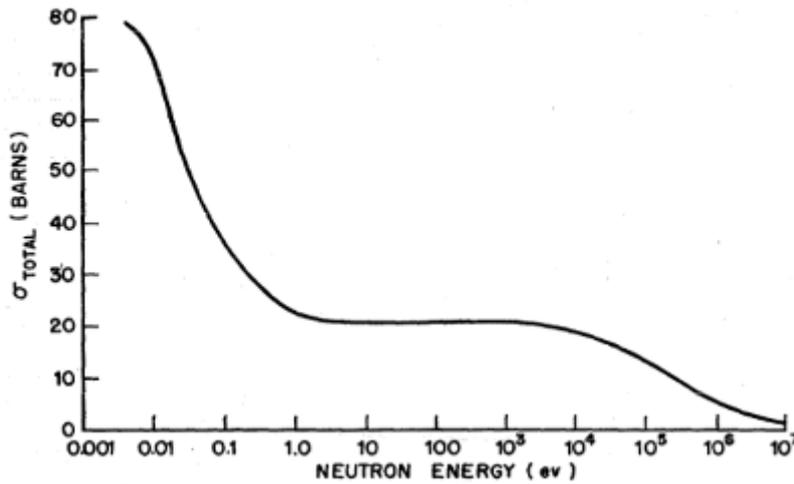
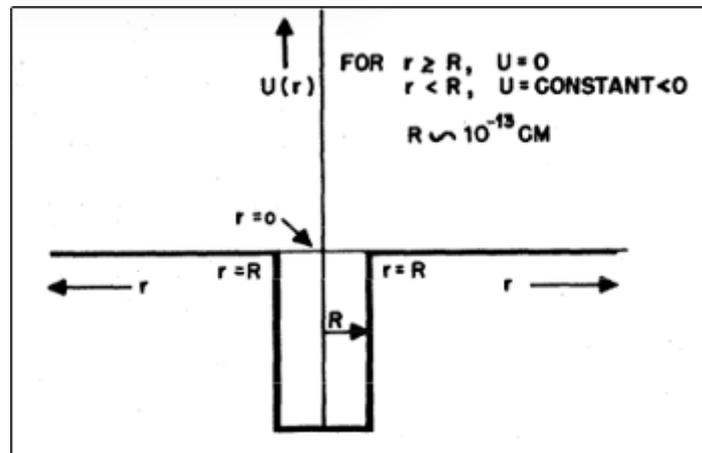


Figura 18. Sezione d'urto dell'Idrogeno [Rev. Moder Phys. 19:260 (1947)]

5.3 Diffusione da parte di un potenziale

Nei casi in cui gli effetti di risonanza sono trascurabili, il problema della diffusione elastica dei neutroni può essere trattato considerando i nuclei bersaglio sostituibili con un potenziale. L'analisi, trattata con i metodi usuali della teoria di Schrödinger, portano ad ottenere risultati validi per neutroni termici diffusi da molti elementi. È possibile stabilire informazioni accurate su σ_n anche se la forma del potenziale non è nota con precisione.



La figura 19 mostra il grafico del potenziale. La funzione d'onda ψ della particella incidente soddisfa l'equazione di Schrödinger:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)] \psi = 0 \tag{5.6}$$

dove E è l'energia della particella incidente e U l'energia potenziale. Considerando solo una diffusione (momento angolare nullo), l'equazione di Schrödinger si riduce all'equazione radiale:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\psi}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)] \psi = 0 \tag{5.7}$$

o

$$u'' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)] u = 0$$

con $u = r\psi$ e $u'' = \frac{d^2 u}{dr^2}$.

L'ultima forma semplificata è derivata dalla relazione $u'' = (r\psi)'' = (r\psi' + \psi)' = r\psi'' + 2\psi' = \frac{1}{r} (r\psi')'$ dove i primi indicano la differenziazione rispetto a r .

Nel problema della diffusione, la 5.7 deve essere risolta per la forma particolare $U(r)$ scelta per rappresentare il nucleo con le condizioni al contorno $\psi = 0$ a $r = \infty$ e ψ finito da qualche parte. La verifica della 5.7

mostra che ogni volta che $E - U > 0$, la curvatura di u è negativa (curve u in direzione dell'asse x), cioè, $\frac{u''}{u} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)] < 0$. Per $E - U < 0$, la curvatura $\frac{u''}{u} > 0$, e per $E - U = 0$, segue che $\frac{u''}{u} = 0$. Riferendosi alla figura 19, è chiaro che si devono considerare tre casi: (a) $E > 0$, nel qual caso $E - U > 0$ per ogni r , (b) $E = 0$, per cui $E - U > 0$ dentro il nucleo e $E - U = 0$ all'esterno, (c) $E < 0$, nel qual caso $E - U > 0$ all'interno del nucleo e $E - U < 0$ all'esterno. La soluzione per le tre classi di valori di $(E - U)$ si può facilmente determinare come:

$$\begin{aligned} E - U > 0 \quad u &= A \sin \left(\sqrt{\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}} r \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}} r \right) \\ E - U = 0 \quad u &= A'r + B' \\ E - U < 0 \quad u &= A'' \exp \left(\sqrt{\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}} r \right) + B'' \exp \left(-\sqrt{\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}} r \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le condizioni al contorno determinano i valori di $A, B, A', B', ecc.$ Queste condizioni sono che $\frac{u}{r} = \psi$ è finito da ovunque e si annulla all'infinito. Inoltre, la prima derivata deve essere continua.

Con queste condizioni e ricordando le soluzioni della 5.8, si può costruire la figura 20. In tutti i casi, u deve essere uguale a zero a $t = 0$, poiché $\frac{u}{r} = \psi$ deve rimanere finito. La variazione di u rispetto a t è abbastanza chiara per i casi $E > 0$ e $E = 0$. La situazione quando $E < 0$ richiede qualche spiegazione. Vicino all'origine, si osserva la solita oscillazione all'aumentare del periodo al diminuire della funzione $E - U$. A $t = t_0$ (vedi figura 20), l'oscillazione si interrompe, e per i più grandi valori di r , la soluzione esponenziale, l'ultima della 5.8, deve ridursi a un singolo esponenziale negativo, poiché quello positivo non soddisfa la condizione che $\frac{u}{r}$ è finito per $t = \infty$. Che questa riduzione a un singolo esponenziale negativo non è possibile per tutti i valori di E è mostrato nella figura 20 ($E < 0$) dove per $E = E_1$, il coefficiente dell'esponenziale positivo è negativo e per $E = E_2$, il coefficiente è positivo. Tra E_1 e E_2 , vi possono essere alcuni valori di E per i quali il coefficiente scompare. Vi può essere un certo numero di valori di E per i quali $\frac{u}{r}$ è finito a $t = \infty$. Questi sono i valori permessi di E per $E < 0$ corrispondenti allo spettro discreto o agli stati legati del sistema.

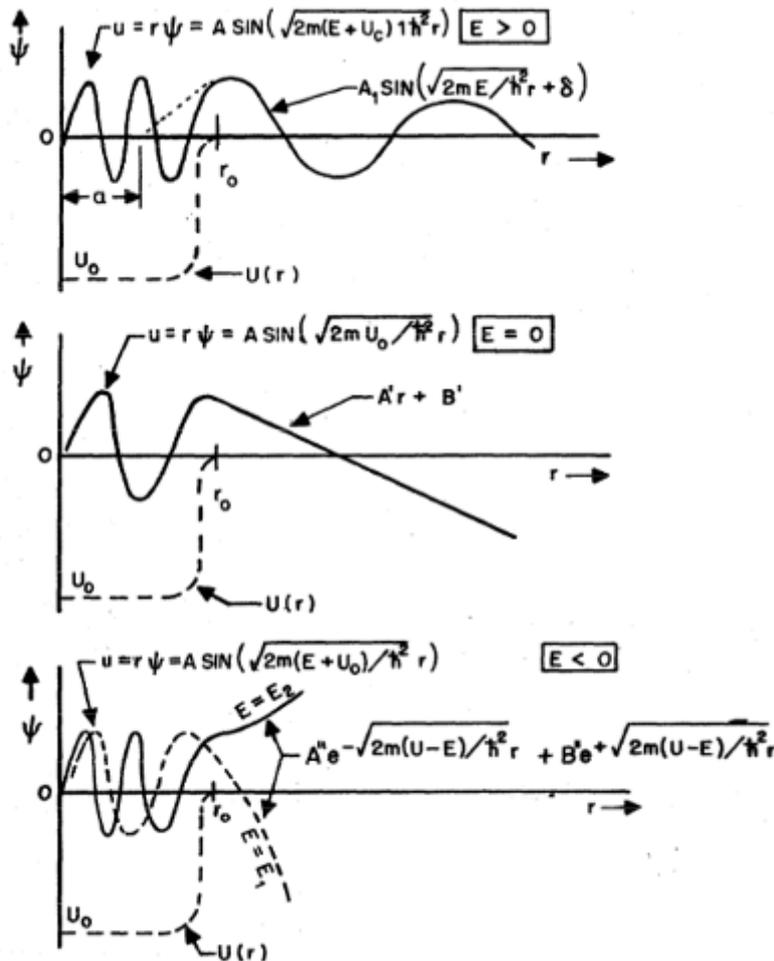


Figure 20. Scattering from a "potential well."

Il caso $E > 0$ corrisponde ad una particella incidente (energia cinetica positiva). Come mostrato in figura 20, la funzione d'onda all'esterno del nucleo è una funzione sinusoidale $A \sin \left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} r + \delta \right)$ dove δ è uno spostamento

di fase dipendente dalla funzione d'onda dentro il nucleo alla quale si deve aggiungere il seno (a $t = R$). La funzione seno, una volta estrolata, non sembra provenire dall'origine (linea tratteggiata in figura) ma appare avere la propria origine a una distanza a da $t = 0$. Questa distanza è correlata a δ dall'equazione $\frac{a}{\lambda} = \frac{\delta}{2\pi}$ con $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}}$ (la lunghezza d'onda di de Broglie della particella incidente).

Si può dimostrare⁵ che la la sezione d'urto di diffusione è direttamente dipendente da questo spostamento di fase δ in un modo tale che quando δ è piccolo (o un intero multiplo di π), la sezione d'urto di diffusione è piccola, e quando δ è $\frac{\pi}{2}$ (o un intero multiplo di $\frac{\pi}{2}$), la sezione d'urto è massima. La relazione tra δ e σ_s è:

$$\sigma_s = \frac{4\pi\hbar^2}{m^2v^2} \cdot \sin^2 \delta \quad (s \text{ solo diffusione}) \quad (5.9)$$

La limitazione alla diffusione significa che la particella incidente ha momento angolare nullo. Su base classica, una particella con velocità v a grandi distanze dal nucleo che si muove in una direzione tale da passare ad una distanza b dal nucleo (se non soggetta alle forze nucleari), figura 21, ha un momento angolare mvb . Secondo i principi della meccanica quantistica, questo deve essere quantizzato, o $mvb = l\hbar$ ($l = 0, 1, 2, \dots$). Pertanto $b = \frac{l\hbar}{mv}$, o $b = l\lambda$ (λ = lunghezza di de Broglie $\times 2\pi$). La regione tra $l = 0$ e $l = 1$ o $b = 0$ è $= \lambda$ la regione di diffusione s . Tra $b = \lambda$ e 2λ è la regione di diffusione p . Se la dimensione nucleare è minore di λ , cioè, $R < \lambda = \frac{h}{mv}$, allora è ovvio che non è possibile alcuno scattering p . Particelle passanti a «distanze p » dal nucleo non «vedrà» il nucleo per il carattere a breve range delle forze nucleari. Ricordando la discussione nella sezione 2.2, è chiaro che vi è una *diffusione s solo se i neutroni sono lenti*.

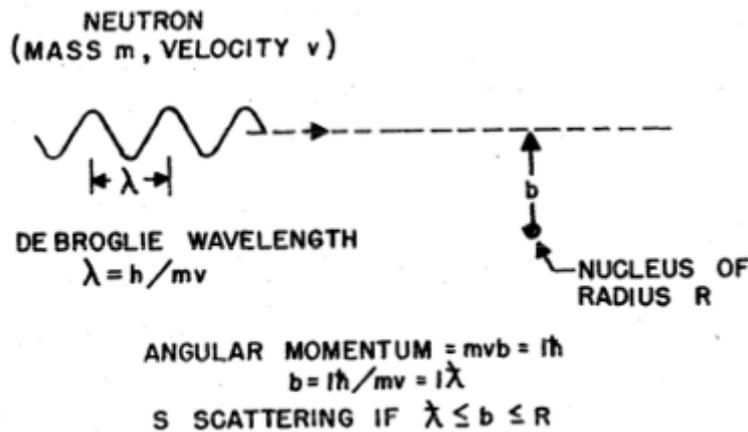


Figure 21. Quantizing the angular momentum.

Per velocità molto basse, la 5.9 può essere semplificata. Ciò è dovuto al fatto che la funzione d'onda dentro il nucleo cambierà molto poco al cambiare di E quando E è molto piccolo. Per questo motivo, « a » non varia. Tuttavia, λ aumenta come $E^{\frac{1}{2}}$ con il risultato netto che $\frac{a}{\lambda}$ diviene molto piccolo. Poiché $\delta = 2\pi\frac{a}{\lambda}$, possiamo sostituire $\sin^2 \delta$ con δ^2 e ottenere

$$\sigma_{dif} = \frac{4\pi\hbar^2}{m^2v^2} \frac{4\pi^2a^2}{\lambda^2} = 4\pi a^2 \quad (E \rightarrow 0) \quad (5.10)$$

La semplificazione segue dalla relazione $\lambda = \frac{h}{mv}$.

Nel caso di stati legati, la formula per la diffusione 5.9 si può ridurre a

$$\sigma_{dif} = \frac{4\pi\hbar^2}{m \left(\epsilon + \frac{E}{2} \right)} \quad (5.11)$$

dove ϵ è l'energia di legame del neutrone quando è legato al nucleo e E è l'energia cinetica del neutrone incidente.

Non è sempre necessario per ϵ essere positivo o «reale». Vi sono casi dove possono esistere stati «virtuali» di un nucleo, essendo questi caratterizzati da un ϵ negativo. In tali casi, la funzione d'onda del neutrone sarà periodica all'interno e all'esterno del nucleo ma avrà una maggiore ampiezza dentro rispetto a fuori per quella particolare energia associata allo stato virtuale. Quando ϵ è negativo, si usa il valore assoluto nella 5.11. Un esempio di ciò si ha nella diffusione di un neutrone da un protone. (I protoni si considerano «liberi» cioè, non chimicamente legati, a seguire). La sezione d'urto per diffusione di neutroni lenti da parte dei protoni dipende

⁵Rasetti, F. «Elements of Nuclear Physics,» 1936. Prentice-Hall, p. 204ff; Motto. N. F. e H. S. W. Massey, «Theory of Atomic Collisions,» Oxford, 1933.

da quali stati sono possibili per il deuterone (combinazione di protone e neutrone). Vi sono due tipi di stati, “singoletto” e “tripletto”, associati con spin totale zero o uno:

$$\begin{aligned} S &= 0 \text{ (stati a un singoletto; spin antiparalleli)} \\ S &= 1 \text{ (stati a tre tripletti; spin paralleli)} \\ \text{Numero di stati} &= 2S + 1 \end{aligned}$$

Si è osservato sperimentalmente che lo stato stabile fondamentale del deuterone è lo $S = 1$, cosicché lo stato di tripletto ha un ϵ positivo. Lo stato $S = 0$ è probabilmente virtuale, sebbene è così piccolo che potrebbe essere di entrambi i segni. Pertanto la sezione d'urto di diffusione per neutroni su protoni liberi è:

$$\sigma_{dif} = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\epsilon_p + \frac{E}{2}} + \frac{1}{4} \frac{1}{|\epsilon_a| + \frac{E}{2}} \right)$$

dove ϵ_p è l'energia dello stato degli spin paralleli del deuterone e ϵ_a l'energia dello stato (virtuale) degli spin antiparalleli e i fattori $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ rappresentano, rispettivamente, i pesi degli stati di tripletto e singoletto.

Un'evidenza diretta sperimentalmente dell'esistenza degli stati di singoletto e tripletto del deuterone si possono ottenere dalle misure della diffusione di neutroni lenti su molecole di idrogeno. La molecola di idrogeno può avere due forme, “orto” e “para”. Nell'ortoidrogeno, i due protoni hanno spin paralleli, mentre nel paraidrogeno, essi sono antiparalleli. Un neutrone lento (lunghezza d'onda di de Broglie maggiore della distanza interatomica) incidente su paraidrogeno sarà diffuso da un protone con spin parallelo allo spin del neutrone incidente e dall'altro con lo spin antiparallelo. L'onda del neutrone risultante sarà composta da uno stato reale più uno virtuale (se lo spin antiparallelo, stato di singoletto, del deuterone è virtuale). Poiché sulla base della teoria della diffusione per gli stati reali questi sono sfasati di 180° rispetto a quelli virtuali, ne consegue che il paraidrogeno dovrebbe risultare sfasato rispetto ai due spin antiparalleli degli atomi di idrogeno, cioè dare una piccola sezione d'urto di diffusione. Analogamente, la diffusione di neutroni lenti sull'ortoidrogeno dovrebbe dare diffusione in fase da due atomi, causando una maggiore sezione d'urto di diffusione. Questo è stato osservato sperimentalmente e conferma l'ipotesi di uno stato di singoletto virtuale.

La diffusione dei neutroni in idrogeno è la base di un metodo importante per la rivelazione di neutroni veloci. Se si espone un sottile strato di paraffina ad un flusso di neutroni, allora ogni neutrone che è diffuso origina un protone di rinculo, che ha un'energia dello stesso ordine di grandezza dell'energia del neutrone. Il protone, carico, può essere rivelato in una camera a ionizzazione, come mostrato a destra nella figura 22. Per misurare le energie dei neutroni si può usare un collimatore (a destra in figura 22) in modo che solo i protoni diffusi nella direzione del flusso di neutroni incidenti possano entrare nella camera a ionizzazione. L'impulso nella camera può essere calibrato sull'energia dei protoni, e in questo modo si possono determinare le energie iniziali dei neutroni. Naturalmente, la paraffina deve essere sufficientemente sottile per rendere trascurabile la diffusione multipla dei neutroni incidenti. (Questa limitazione sarà meglio compresa dopo il Capitolo VI).

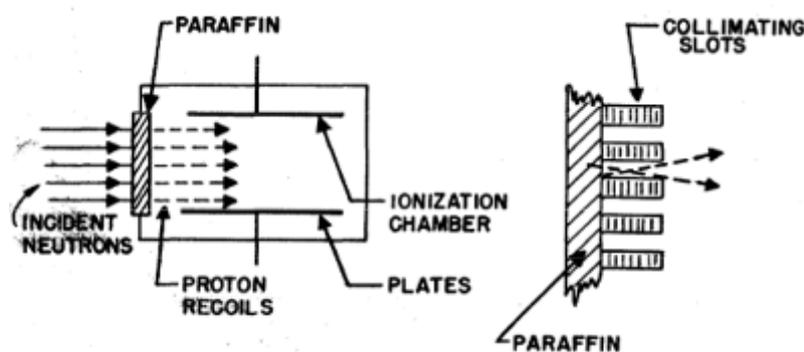


Figure 22. Fast neutron detector and recoil proton collimator.

In generale, la sezione d'urto di diffusione dei neutroni mostra variazioni complesse con l'energia. Queste irregolarità sono correlate ai fenomeni di risonanza non considerati nella semplice teoria di queste sezioni. Le sezioni d'urto in funzione dell'energia dei neutroni per due importanti diffusori, carbonio e ossigeno, sono mostrate in figura 23. Non è sempre possibile misurare direttamente la sezione d'urto di diffusione. In genere, si misura la sezione d'urto totale. Per i neutroni veloci predomina la diffusione, cosicché la sezione d'urto totale è effettivamente equivalente alla sezione d'urto di diffusione. Per energie inferiori (circa 1 MeV) ciò non è generalmente vero, sebbene predomini la diffusione per la grafite e l'ossigeno.

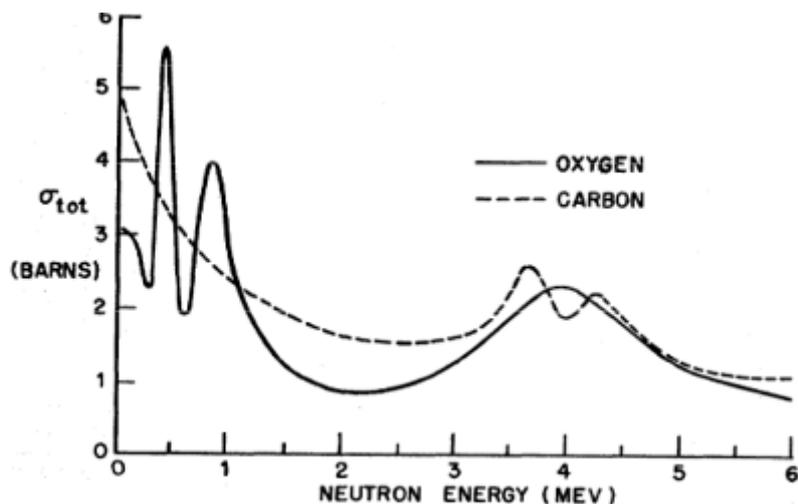
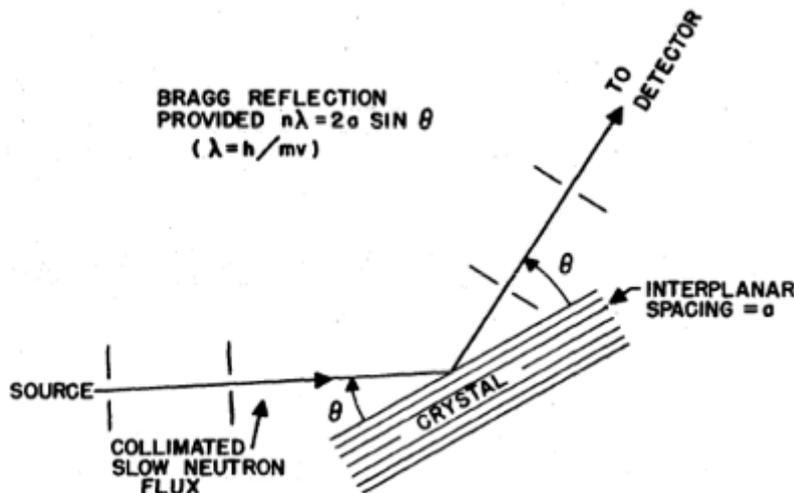


Figure 23. Carbon and oxygen cross sections. [Rev. Mod. Phys. 19:266 (1947).]

5.4 La diffusione dei neutroni

Riferendosi alla figura 11, è chiaro che i neutroni con energie inferiori a 1 eV hanno lunghezze d'onda di de Broglie dell'ordine dell'Angstrom (10^{-8} cm) o maggiori. Poiché le distanze interatomiche sono pure dell'ordine dell'Angstrom, ci si aspetta che i neutroni lenti diffusi dagli atomi presenteranno effetti di interferenza. Questo è in realtà il caso. La diffusione anomala dei neutroni lenti dall'orto e paradirogeno, come abbiamo visto, si può spiegare come un effetto di interferenza.



È possibile studiare questi effetti con esperimenti analoghi a quelli usati nello studio della diffrazione dei raggi X e nella interferenza. Supponiamo un flusso collimato di neutroni lenti, figura 24, incidente su un cristallo. Se si varia l'angolo di incidenza θ (angolo tra fascio incidente e superficie del cristallo) e per ogni valore di θ l'intensità diffusa è misurata con il rivelatore, si trova che i neutroni obbediscono ad una formula del tipo di quella di Bragg:

$$n\lambda = 2a \sin \theta \tag{5.12}$$

dove n è l'ordine di interferenza; a la spaziatura tra i piani; λ la lunghezza d'onda di de Broglie del neutrone ($\frac{h}{mv}$).

Per interferenza del primo ordine, la 5.12 si può risolvere rispetto alla velocità del neutrone v :

$$v = \frac{h}{2ma \sin \theta} \tag{5.13}$$

Questo mostra che se un fascio di neutroni con un intervallo continuo di velocità colpisce un cristallo, quei neutroni di effettiva velocità v per l'angolo θ saranno riflessi in uno stretto fascio ad un angolo uguale all'angolo di incidenza. I neutroni con altre velocità saranno semplicemente diffusi nel materiale nel modo normale.

Si può facilmente verificare il fatto che il fascio riflesso contiene realmente quei neutroni la cui velocità è dalla formula di Bragg prendendo le misure con e senza un assorbitore di boro di fronte al rivelatore per diversi angoli. La sezione d'urto del boro in funzione di v è ben nota (figura 9), così che dalla curva di σ osservata in funzione di θ , è possibile calcolare v in funzione di θ . Quest'ultima si dovrebbe trovare essere la relazione di Bragg, a parte le complicazioni dovute agli ordini di riflessioni maggiori, ecc.

È chiaro che la combinazione di un cristallo e di un rivelatore di neutroni può essere usata⁶ per analizzare un fascio di neutroni per la sua distribuzione di velocità (in un modo analogo all'analisi di un fascio di raggi X per la distribuzione di lunghezze d'onda). Per esempio, i neutroni rallentati emergenti da un contenitore di acqua, contenente la sorgente dei neutroni, possono essere analizzati e trovare una distribuzione Maxwelliana.

Le sostanze microcristalline diffondono i neutroni molto meglio delle sostanze cristalline regolari. Lo si può comprendere tracciando il percorso di un neutrone attraverso un mezzo microcristallino, figura 25.

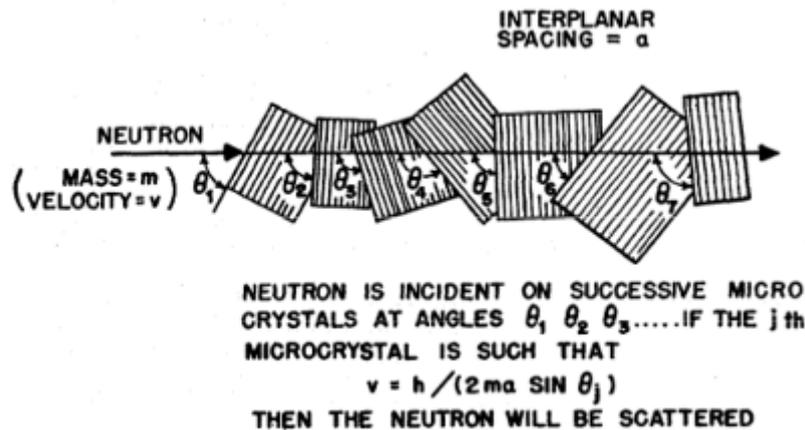


Figure 25. Scattering of neutrons by microcrystals.

Se la condizione di Bragg non è soddisfatta quando il neutrone arriva al primo microcristallo, allora il neutrone vi passerà attraverso. Altrimenti, sarà riflesso. Quando un neutrone arriva la microcristallo successivo, deve nuovamente superare la verifica per la applicabilità della condizione di Bragg se non è diffuso. Se si ha un solo cristallo il neutrone avrà una sola prova da superare. Tuttavia, con molti cristalli orientati casualmente, il neutrone ha una grande possibilità di essere diffuso. Per un singolo grande cristallo, solo quei neutroni la cui velocità soddisfa la condizione di Bragg saranno diffusi. Per la struttura microcristallina, primo o dopo tutte le velocità dei neutroni del fascio originario saranno rimosse quando il fascio passa da un cristallo al successivo⁷.

Vi è una differenza molto importante tra la diffusione dei raggi X e dei neutroni. Se il cristallo è formato da due isotopi, la diffusione X non è particolarmente diversa da quella osservabile per una specie con un singolo isotopo. Poiché le proprietà extranucleari di due isotopi sono molto simili, la diffusione X non risente di tale differenza. D'altro canto, nella diffusione dei neutroni, il nucleo stesso entra nel processo di diffusione. I nuclei sono tali che oltre alla determinazione della grandezza della sezione d'urto di diffusione, le fasi dei neutroni diffusi vengono determinate.

Consideriamo un neutrone diffuso da due isotopi. Se la prima specie ha una sezione d'urto di diffusione σ_1 allora l'ampiezza dell'onda del neutrone diffuso è proporzionale a $\sqrt{\sigma_1}$. Analogamente, la seconda specie diffonde con ampiezza proporzionale a $\sqrt{\sigma_2}$. Supponiamo di scrivere queste ampiezze sotto forma di una somma e differenza:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_1} &= \left(\frac{\sqrt{\sigma_1 + \sqrt{\sigma_2}}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_2}}}{2} \right) \\ \sqrt{\sigma_2} &= \left(\frac{\sqrt{\sigma_1 + \sqrt{\sigma_2}}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_2}}}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Il primo termine è comune ad entrambi, cioè, la diffusione multipla è la stessa per questo termine (la cosiddetta parte "coerente"). Il secondo termine, parte "non coerente", ha segno opposto per le due ampiezze. La parte coerente genera interferenza, mentre la parte non coerente produce diffusione come da un insieme non ordinato di atomi.

A quale profondità penetrerà il fascio di neutroni all'interno di un cristallo se è soddisfatta la condizione di Bragg? Consideriamo un fascio di ν neutroni/cm²/sec incidente su un semplice cristallo cubico, figura 26. Se vi fosse un solo atomo nel cristallo, allora il numero di neutroni diffusi dovrebbe essere $\nu\sigma$ /neutroni/sec. Questo dovrebbe essere isotropo, così che a una distanza r dal cristallo, l'intensità si ridurrà a $\frac{\nu\sigma}{4\pi r^2}$.

⁶La spettroscopia dei neutroni con cristalli è stata resa possibile dall'uso di alti flussi neutronici dalle pile con reazioni a catena, vedi Phys. Rev. 70:557 (1946); 71:752, 757 (1947).

⁷Questo effetto fu osservato nel primo esperimento sul silicio. Phys. Rev. 54:771 (1938). Vedi anche i recenti dati in Phys. Rev. 70:815 (1946); 73:741 (1948).

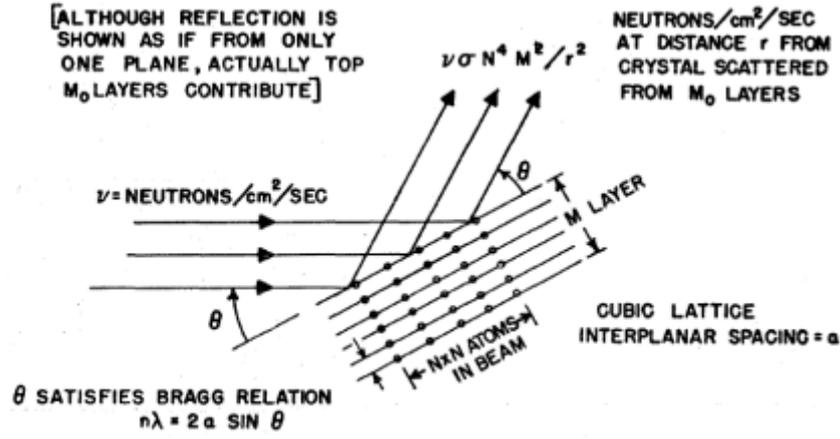


Figure 26. Bragg reflection of neutrons.

L'ampiezza dell'onda del neutrone sarà $\sqrt{\frac{\nu\sigma}{4\pi}}$. Si stimi l'ampiezza dell'onda diffusa nella direzione rinforzata. Questa sarà l'ampiezza del singolo atomo per il numero di atomi che sono coinvolti nella diffusione, cioè

$$N \times N \times M \times \sqrt{\frac{\nu\sigma}{4\pi}}$$

L'intensità in questa direzione sarà allora $N^4 M^2 \frac{\nu\sigma}{4\pi r^2} \frac{\text{neutroni}}{\text{sec}}$.

Ora la distribuzione angolare⁸ del fascio dopo la diffusione è proprio $\lambda/\text{diametro del fascio}$ o $\frac{\lambda}{Na \sin \theta}$. Pertanto l'area del fascio diffuso nella direzione rafforzata è r^2 volte il quadrato dell'ampiezza angolare o $\frac{r^2 \lambda^2}{(Na \sin \theta)^2}$. Moltiplicando questa per l'intensità si ottiene il numero di neutroni diffusi nella direzione potenziata:

$$\left[\frac{N^4 M^2 \nu \sigma}{4\pi r^2} \right] \left[\frac{r^2 \lambda^2}{(Na \sin \theta)^2} \right] = \frac{\nu \sigma N^2 M^2 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2}{4\pi \sin^2 \theta} \frac{\text{neutroni}}{\text{sec}}$$

Si deve notare che nella derivazione precedente, l'attenuazione dell'intensità dei neutroni nel passaggio attraverso gli strati M è stata trascurata. Se semplifichiamo ulteriormente considerando tutte le riflessioni del primo ordine ($n = 1 = 2a \sin \frac{\theta}{\lambda}$), allora il numero reale di neutroni per secondo nella direzione potenziata è:

$$\frac{\text{Neutroni diffusi}}{\text{sec}} = \frac{\nu \sigma N^2 M^2}{\pi} \quad (5.15)$$

Ora, se il cristallo fosse un riflettore perfetto, allora tutti i neutroni incidenti sarebbero rimossi dal fascio, cioè, proprio ν (neutroni/cm²/sec) per $(Na \sin \theta)^2$, cioè, l'area del fascio. Questo numero si può considerare come limite superiore del fascio diffuso. Pertanto

$$\frac{\nu \sigma N^2 M^2}{\pi} < \nu N^2 a^2 \sin^2 \theta$$

o

$$\sigma M^2 < a^2 \left(\frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \quad (5.16)$$

quest'ultima perché $\frac{\sin \theta \lambda}{2a}$ per gli effetti del primo ordine. Se assumiamo $\lambda \simeq a$, la disuguaglianza si può scrivere come una relazione di ordini di grandezza $M < \frac{a}{\sqrt{\sigma}}$.

Qual è il significato di questa disuguaglianza? Essa significa che gli strati al di là di $M_0 = \frac{a}{\sqrt{\sigma}}$ non contribuiscono al fascio diffuso. Messo in altro modo, il fascio non penetra oltre gli strati M_0 . Numericamente, se $a = 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ e σ circa $4 \cdot 10^{-24} \frac{\text{cm}^2}{\text{atomo}}$, allora M_0 è dell'ordine di $\frac{3 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-12}} \simeq 10^4$. Pertanto, circa 10^4 piani svolgono un ruolo importante nella riflessione di Bragg. La profondità di penetrazione sarà $M_0 a$ o $\sim 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 5 \text{ micron}$.

Nella precedente discussione, si è assunto che la sola attenuazione dei neutroni è dovuta alla riflessione del tipo Bragg. Consideriamo un fascio eterogeneo di neutroni incidenti su un grande cristallo perfetto. Quei neutroni che soddisfano la condizione di Bragg saranno diffusi fuori dal fascio penetrando per pochi micron. Tuttavia, quelli che non soddisfano la condizione di Bragg in genere non saranno trasmessi senza perdita di intensità. I motivi per questo sono:

⁸La formula si deve moltiplicare per una costante dipendente dalla forma dell'area del fascio. Si veda qualsiasi testo di ottica fisica standard.

1. La presenza di isotopi determina una irregolarità casuale risultante in una diffusione incoerente per tutte le velocità
2. La variazione casuale della direzione dello spin dei nuclei determina pure una diffusione incoerente
3. Anche se il cristallo fosse regolare, i moti termici degli atomi contribuirebbero a diffusione non Bragg
4. Gli atomi del cristallo avranno in genere una sezione d'urto di assorbimento anche se $\sigma_a \ll \sigma_s$.

È possibile usare i fenomeni di interferenza per ottenere neutroni molto lenti. Riscrivendo la formula di Bragg, 5.12, come $\lambda = 2a \frac{\sin \theta}{n}$ o $\lambda < 2a$, è chiaro che i neutroni con $\lambda > 2a$ non possono avere una riflessione di tipo Bragg. Tutta la diffusione di neutroni con lunghezza d'onda maggiore del doppio della spaziatura tra piani sarà dovuta alla quattro cause elencate. Se si usa la grafite, la presenza di un solo isotopo ($\sim 99\%$) e lo spin uguale a zero (anche i numeri di massa hanno usualmente spin nullo) minimizza la diffusione da irregolarità di spin e isotopiche. Per la grafite, $2a = 6.69 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$, così che la limitazione su λ è 6.69 Angstrom , corrispondente a un'energia del neutrone di $\frac{0.2848^2}{\lambda^2}$ (si veda la figura 11), o 0.0018 eV . Supponiamo (figura 27) una distribuzione maxwelliana di neutroni, con un picco a 0.025 eV per grafite a temperatura ambiente, incidente su un pezzo di grafite policristallina. Allora, a causa dell'interferenza, la grafite (ad una distanza apprezzabile) eliminerà tutti i neutroni con energie al di sopra di 0.0018 eV . Solo quei neutroni molto lenti con $\lambda > 2a$ non saranno diffusi dal fascio per riflessione Bragg. Inoltre, a causa della relativa uniformità isotopica, dello spin zero, e di piccolo assorbimento, questi neutroni "freddi" saranno in grado di passare attraverso la grafite con attenuazione minima. È, pertanto, possibile ottenere un fascio molto "freddo" usando neutroni termici e un filtro di grafite policristallina.

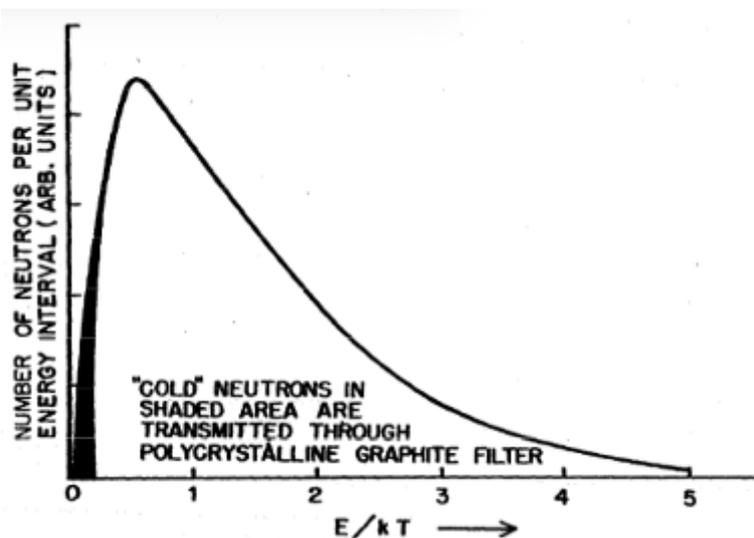


Figure 27. Maxwell distribution and "cold" neutrons.

I neutroni mostrano caratteristiche di riflessione totale in un modo analogo alla radiazione X. Se un fascio di raggi X incide radente su una superficie lucida, il fascio è completamente riflesso. La maggior parte delle sostanze hanno indici di rifrazione per i raggi X leggermente inferiori dell'unità. L'indice di rifrazione è strettamente correlato alle proprietà di diffusione delle sostanze poiché l'interferenza tra X diffusi e X incidenti è responsabile dell'onda risultante trasmessa nelle sostanze. Il cambiamento di fase nell'onda trasmessa può essere descritto più convenientemente in termini di cambiamento di velocità dell'onda o dell'indice di rifrazione. Gli stessi fenomeni avvengono per neutroni incidenti ad angoli radenti su una superficie lucida. L'indice di rifrazione per neutroni è pure molto vicino all'unità. Ciò significa che una lente convergente per neutroni dovrà aumentare di molto lungo l'asse per essere efficace se sarà fatta di sostanze il cui indice di rifrazione è di poco maggiore dell'unità. Per sostanze nelle quali l'indice di rifrazione è minore dell'unità, una lente convergente dovrebbe essere come una lente divergente per l'ottica, cioè, molto stretta vicino all'asse e spessa a distanze lontane dall'asse. Anche se queste lenti sono possibili in linea di principio, il fatto che l'indice di rifrazione sia sempre molto vicino all'unità rende impraticabili le lenti per i neutroni.

PROBLEMI

1. Dato $R = 0.282 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$ (raggio classico dell'elettrone) e una profondità di un potenziale rettangolare di 10.8 MeV (lo stato di singoletto di un deutone) e di 19.7 MeV (stato di tripletto), rispondi alle seguenti domande riguardanti la diffusione di neutroni dai protoni

- (a) Sono stati legati in ognuno di questi casi?
 - (b) Qual è il valore di a ?
 - (c) Qual è la sezione d'urto media per neutroni di bassa velocità nell'idrogeno?
2. Per $NaCl$ [usando solo i piani (001)] fare una tabella di λ riflesse (primo e secondo ordine) ai seguenti diversi valori dell'angolo $\theta = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40^\circ$. Calcolare l'energia dei neutroni in eV per ogni λ . Qual è l'intensità relativa dei fasci del primo e secondo ordine, assumendo una distribuzione di Maxwell ($T = 330 K$) per i neutroni?
3. Mostrare che se una distribuzione continua di neutroni urta su una sostanza microcristallina con $M < M_0$, l'intensità diffusa è dell'ordine di quella attesa da una sostanza non cristallina dello stesso numero di atomi per tutte le energie dei neutroni. Usare il fatto che la risoluzione di un microcristallo che riflette neutroni di lunghezza d'onda λ in accordo con la formula di Bragg è data da $\frac{\delta\lambda}{\lambda} \sim \frac{1}{M}$.

Chapter 6

Il Rallentamento dei Neutroni

6.1 Variazione di direzione ed energia subito dopo la collisione

Quando un neutrone è diffuso elasticamente da un nucleo, inizialmente a riposo, in genere si ha un trasferimento di energia cinetica dal neutrone al nucleo. Se il nucleo colpito è idrogeno, allora il neutrone perderà circa metà della sua energia nella collisione. Collisioni successive continueranno, in media, questo processo, cosicché un neutrone a 1 MeV diviene termico (0.025 eV) dopo circa 24 collisioni.

In questo capitolo, considereremo in dettaglio la natura di questo processo di rallentamento. Si troverà che la teoria classica delle collisioni è applicabile e porta a risultati in accordo con gli esperimenti. Come in un problema classico di urto tra corpi, è conveniente porre due sistemi di riferimento:

- Il sistema del laboratorio (sistema R). In questo sistema, la struttura di riferimento è determinata considerando il corpo bersaglio a riposo prima della collisione
- Il sistema nel centro di gravità (sistema C). In questo la struttura di riferimento è determinata considerando il centro di gravità del bersaglio e proiettile a riposo.

In quest'ultimo, è chiaro che stiamo guardando all'insieme dei corpi collidenti come un unico e considerando il suo centro di gravità come stazionario. È importante notare che tutte le misure sperimentali fatte nelle collisioni nucleari usano il sistema del laboratorio come riferimento. D'altro canto, in pratica tutti i calcoli teorici sono eseguiti nel sistema del centro di gravità. Vedremo che il sistema C permette una visione delle cose che è essenzialmente più semplice di quella del sistema R.

Consideriamo nel sistema R la collisione di un neutrone (massa = 1) di velocità v con un nucleo di massa A , inizialmente a riposo. Poiché la massa totale del sistema delle particelle collidenti è $A + 1$ e il momento iniziale del neutrone è $1 \cdot v$, segue che la velocità del centro di gravità (come visto nel sistema R) è $\frac{v}{A+1}$. Le velocità del nucleo A e quella del neutrone relativa al centro di gravità sono $\frac{v}{A+1}$ e $\frac{vA}{A+1}$, rispettivamente. Queste velocità sono in direzioni opposte, cosicché il momento totale del sistema al centro di gravità è zero. Dopo la collisione, il modulo delle velocità rimane invariato, ma le direzioni del moto sono lungo traiettorie diverse (si veda la figura 28). I moduli devono rimanere invariati, poiché il momento totale rispetto al centro di massa deve rimanere zero. La variazione nella direzione dipenderà dall'esatta natura della collisione. Se θ è l'angolo tra la direzione iniziale e la direzione dopo la diffusione (nel sistema C), allora $\theta = 0$ significa che la collisione era "radente" mentre $\theta = \pi$ significa "frontale".

È chiaro che un osservatore nel sistema C vedrà i due corpi collidenti inizialmente uno di fronte all'altro lungo una sola retta, con il corpo più pesante che si muove più lentamente. Dopo la collisione, l'osservatore nel sistema C vedrà i due corpi allontanarsi in direzioni opposte, con velocità invariate. L'osservatore nel sistema C dirà che il processo di collisione è *isotropo* se tutti gli angoli (θ) tra le direzioni del moto "prima" e "dopo" sono equamente probabili. Siccome il sistema C non ha una direzione di moto preferenziale (centro di gravità a riposo), adottiamo la stessa terminologia e parliamo di *diffusione isotropa quando tutti i valori di θ sono equiprobabili*.

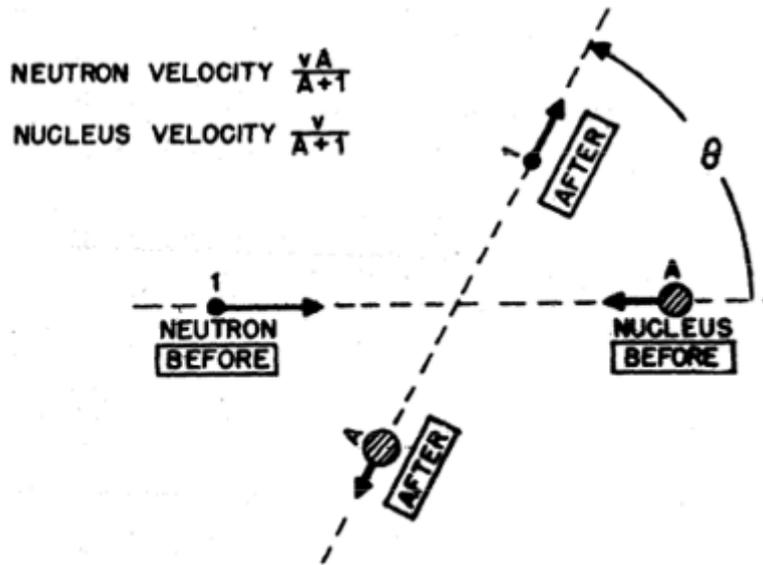


Figure 28. Neutron Scattering: Center of gravity system.

La trasformazione dal sistema C al sistema R è facilmente realizzabile se consideriamo che i sistemi C e R sono in moto relativo uno rispetto all'altro con una velocità uguale alla velocità del centro di massa nel sistema del laboratorio. Questa velocità è la stessa della velocità iniziale del nucleo A nel sistema C, o $\frac{v}{A+1}$. Prendendo questo vettore e sommandolo alla velocità "dopo" del neutrone nel sistema C $[\frac{vA}{A+1}]$ si ottiene la velocità "dopo" ($v'\alpha$) del neutrone nel sistema R (si veda la figura 29). È chiaro che l'angolo di diffusione nel sistema C, cioè, θ , non è lo stesso dell'angolo di diffusione nel sistema R, ϕ . È facilmente dimostrabile (mediante la legge dei seni) che

$$A \sin(\theta - \phi) = \sin \phi$$

o

$$\tan \phi = \frac{A \sin \theta}{1 + A \cos \theta} \quad (6.1)$$

Entrambe le espressioni sono equivalenti. Con entrambe, è possibile convertire angoli di diffusione da un sistema all'altro.

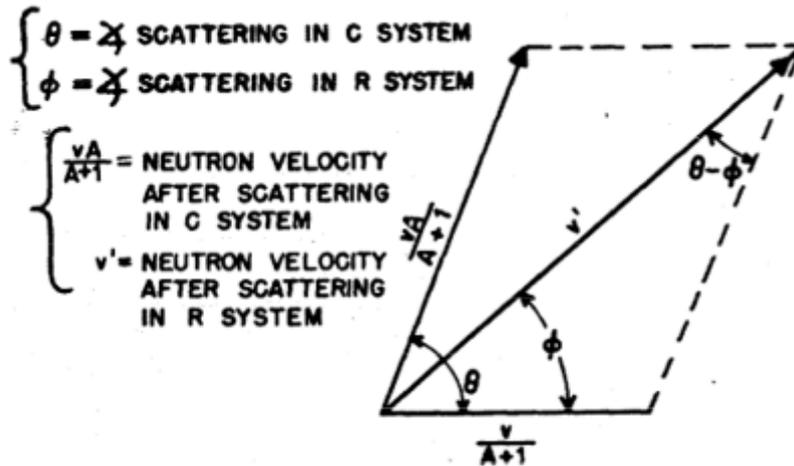


Figure 29. Neutron Scattering in laboratory (R) system.

L'energia del neutrone prima della collisione nel sistema R è $\frac{mv^2}{2}$. Dopo la collisione, è $\frac{mv'^2}{2}$. Pertanto, il rapporto tra le energie del neutrone prima e dopo la collisione come osservato nel sistema R è $\left(\frac{v'}{v}\right)^2$. Questo rapporto si può determinare dalla figura 29 mediante la legge del coseno:

$$v'^2 = \left(\frac{v}{A+1}\right)^2 + \left(\frac{2Av^2}{(A+1)^2}\right) \cos \theta \quad (6.2)$$

$$\frac{K_{prima}}{K_{dopo}} = \frac{E'}{E} = \frac{A^2 + 1 + 2A \cos \theta}{(A+1)^2}$$

Si noterà che, sebbene la 6.2 sia il rapporto delle energie cinetiche osservate nel sistema del laboratorio, ciò nonostante, l'angolo θ è l'angolo di diffusione osservato nel centro di massa del sistema di gravità. Questo potrebbe essere espresso in termini dell'angolo di diffusione ϕ del laboratorio per mezzo della 6.1. Tuttavia, poiché stiamo cercando di mediare su tutti gli angoli, manterremo l'angolo di diffusione del sistema C, poiché mediando nel sistema C è relativamente semplice. Infatti, per diffusione isotope, la media dei coseni di θ è zero:

$$(\cos \theta)_{med} = \frac{\int_0^\pi \cos \theta \, 2\pi \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta} = 0 \quad (6.3)$$

D'altro canto, la media del coseno dell'angolo di diffusione del laboratorio non è uguale a zero ma è un numero positivo, mostrando che le particelle collidenti hanno una tendenza a preservare la loro direzione di moto. Dalla 6.1, segue che:

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \frac{A \cos \theta + 1}{\sqrt{A^2 + 1 + 2A \cos \theta}}$$

Mediando il $\cos \phi$ come prima:

$$(\cos \theta)_{med} = \frac{\int_0^\pi \cos \phi \, 2\pi \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta} = \frac{\int_0^\pi (A \cos \theta + 1) \sin \theta d\theta}{2(A^2 + 1 + 2A \cos \theta)^2} = \frac{2}{3A} \quad (6.4)$$

Come atteso, la media del coseno è maggiore per collisioni tra neutroni e nuclei più leggeri; cioè, la tendenza a mantenersi nella direzione originaria è maggiore quando il nucleo bersaglio ha la massa minima.

Riesaminiamo ora il rapporto tra le energie cinetiche prima e dopo la collisione, $\frac{E'}{E}$ della 6.2. I valori massimo e minimo sono:

$$\frac{E'}{E} = \frac{A^2 + 1 + 2A \cos \theta}{(A + 1)^2} = \begin{cases} 1 & \text{per } \theta = 0 \quad \text{collisione di taglio} \\ \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 & \text{per } \theta = \pi \quad \text{collisione frontale} \end{cases} \quad (6.5)$$

Nelle collisioni con idrogeno, $A = 1$, i limiti sono pertanto zero e l'unità. Per atomi più pesanti, è impossibile mettere il neutrone a riposo. Quando $A \gg 1$, il minimo è $\frac{(A-1)^2}{(A+1)^2} = 1 - \frac{4}{A} + \frac{8}{A^2} \dots$, cosicché per $A = 100$, la perdita massima possibile dell'energia cinetica del neutrone dopo una sola diffusione è del 4%. Per $A = 200$, è del 2%.

Quale è la probabilità relativa di un neutrone avente un'energia E' (tra i limiti prima descritti) dopo la collisione? Assumendo una diffusione isotopa, la probabilità dp che il neutrone sia diffuso nell'angolo solido tra θ e $\theta + d\theta$ è uguale a quell'angolo solido diviso l'angolo solido totale di 4π .

$$dp = \frac{(\text{angolo solido tra } \theta \text{ e } \theta + d\theta)}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} = \frac{\sin \theta d\theta}{2}$$

La relazione tra dp e l'intervallo di energie finali che corrisponde a questo intervallo di angoli si trova differenziando la 6.2

$$dE' = -\frac{2AE \sin \theta d\theta}{(A + 1)^2} = -E \frac{4A}{(A + 1)^2} dp$$

Il segno negativo indica che un θ crescente corrisponde ad una E decrescente. Pertanto

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La probabilità} \\ \text{che l'energia finale sia} \\ \text{tra } E' \text{ e } E' + dE' \end{array} \right\} = dp = \frac{(A + 1)^2}{4A} \frac{dE'}{E} \quad (6.6)$$

dove il segno negativo è stato tolto considerando così dE' positiva. La 6.6 significa che la *probabilità dell'energia finale essendo E' sarà indipendente da E'* . La figura 30 è un grafico della funzione di distribuzione $p(E')$ rispetto a $\frac{E'}{E}$, che si mostra essere costante, $\frac{(A+1)^2}{4A}$, tra $\frac{E'}{E} = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$ e $\frac{E'}{E} = 1$. Da un controllo sulla normalizzazione della 6.6, si può notare che l'area sotto la curva di distribuzione è unitaria:

$$\int p(E') dE' = \int_{\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2}^1 \frac{(A+1)^2}{4A} d\left(\frac{E'}{E}\right) = \frac{(A+1)^2}{4A} \left[1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\right] = 1$$

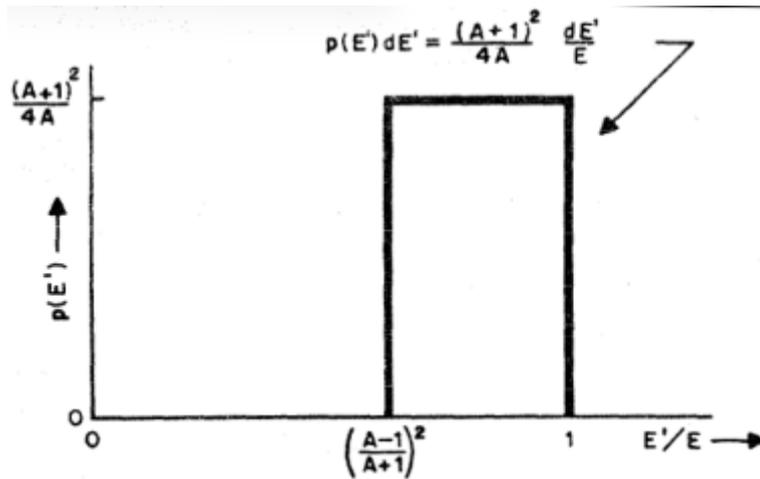


Figure 30. Neutron energy distribution after single elastic scattering.

Usando questa funzione di distribuzione, possiamo ora calcolare la media di $\frac{E'}{E}$. Comunque, è più conveniente considerare la media del logaritmo naturale del rapporto tra le energie, cioè, $\ln\left(\frac{E}{E'}\right)$. Ciò è dovuto al fatto che, poiché la percentuale di perdita in energia è sulla media la stessa, l'energia dei neutroni decresce nelle collisioni successive, come mostrato nella figura 31. In ogni collisione, è il $\ln E$ piuttosto che E che cambia di una quantità fissata. La valutazione della media di $\ln\left(\frac{E}{E'}\right)$ procede nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \zeta &= \left[\ln\left(\frac{E}{E'}\right) \right]_{med} = \int_{Min E'}^{Max E'} \ln\left(\frac{E}{E'}\right) p(E') dE' \\ &= \int_{\frac{E(A-1)^2}{(A+1)^2}}^E \ln\left(\frac{E}{E'}\right) \frac{(A+1)^2}{4A} \frac{dE'}{E} \end{aligned}$$

Dopo alcuni passaggi algebrici, si riduce a:

$$\zeta = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A+1}{A-1}$$

Per $A \gg 1$, questa si può ridurre a $\zeta \simeq \frac{(2A - \frac{4}{3})}{A^2}$ o $\zeta \simeq \frac{2}{A + \frac{2}{3}}$

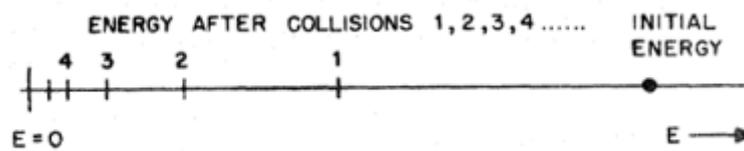


Figure 31. Neutron energy after successive collisions.

La media logaritmica dell'energia diminuisce con le collisioni, ζ , è 0.158 per il carbonio ($A = 12$). Per l'idrogeno, $\zeta = 1 = media \ln \frac{E}{E'}$ così che $\frac{E'}{E}$ è, in media, $\frac{1}{e}$. Per ridurre neutroni da 1 MeV a 0.025 eV (energie termiche) per collisioni con l'idrogeno, si dovranno avere ν collisioni con

$$\nu = \frac{\ln \frac{E}{E'}}{\ln\left(\frac{E}{E'}\right)_{medio}} = \frac{\ln \frac{10^6}{0.025}}{\zeta} = \ln 4 \cdot 10^7 = 17.5 \quad (6.7)$$

Per il carbonio, poiché $\zeta = 0.158$, sono richieste circa $\frac{17.5}{0.158}$ o 110 collisioni.

6.2 Distribuzione dei neutroni dalla sorgente puntiforme - Metodi sperimentali

La conoscenza della natura dei processi di rallentamento dei neutroni mediante collisioni è essenziale nel trattamento della maggior parte dei problemi nei quali i flussi dei neutroni sono introdotti in media. Probabilmente la

domanda più semplice alla quale si deve rispondere è: “Data una sorgente puntiforme di neutroni monoenergetici, quale è la distribuzione spaziale dello stato stazionario in funzione dell’energia?” La risposta sarà fondamentale, poiché ogni sorgente distribuita si può considerare come una sovrapposizione di sorgenti puntiformi.

Supponiamo che vi sia una sorgente di neutroni di radio-berillio in un grande serbatoio di acqua. Per l’idrogeno la sezione d’urto di diffusione è particolarmente grande a basse energie cosicché un neutroni di 1 MeV avrà la maggior parte della suo percorso tra le prime poche collisioni, come qualitativamente mostrato nella figura 32.



Fig. 32: Il libero cammino medio diminuisce con l’energia nei materiali contenenti idrogeno

La distribuzione di neutroni dalla sorgente in acqua può essere analizzata usando rivelatori sensibili alle diverse energie dei neutroni. Materiali come l’indio, il rodio, o lo iodio, ognuno dei quali fa una grande risonanza per una particolare energia dei neutroni, possono essere usati come rivelatori per quell’energia, purché il corrispondente assorbimento al livello di risonanza determini produzione di radioattività. La figura 33 rappresenta la sezione d’urto in funzione della curva di energia per l’indio. Il riferimento dato con la figura contiene ulteriori dettagli e bibliografie sull’attivazione di tale materiale. Quando possibile, i rivelatori hanno la forma di lamine. L’eliminazione degli effetti dei neutroni termici (poiché la maggior parte dei rivelatori, oltre a fornire risposte per particolari energie di risonanza, sono in genere sensibili pure ai neutroni termici) è ottenuta circondando il rivelatore con cadmio. L’effetto del cadmio può essere visto analizzando la sua sezione d’urto in funzione della curva di energia, linea tratteggiata in figura 33.

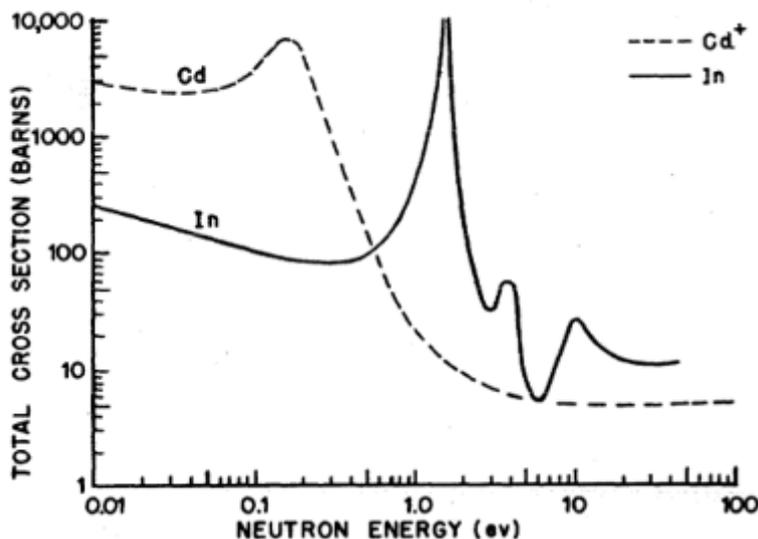


Fig. 33: Sezione d’urto in funzione della curva di energia per l’indio

Ritornando alla sorgente di neutroni nel serbatoio di acqua, è chiaro che l’analisi della distribuzione dei neutroni di 1.44 eV (risonanza per l’indio) può essere fatta¹ mediante una sovrapposizione di lamine di indio tra lamine di cadmio in diverse posizioni nel serbatoio. Il grado di attivazione dell’indio (tenendo conto del suo decadimento radioattivo durante il periodo di esposizione) in diverse posizioni è proporzionale alla densità dei neutroni di 1.44 eV in quelle posizioni. Se le lamine di cadmio venissero rimosse e fosse calcolata la differenza tra l’attivazione dell’indio puro e l’attivazione della sovrapposizione delle lamine ($Cd - In - Cd$), allora le densità relative dei neutroni termici (cadmio) possono essere determinate con un rivelatore allo iodio². Mettendo insieme tutte queste curve si ottiene la distribuzione radiale della densità delle diverse energie dei neutroni nell’acqua, come rappresentato in figura 34.

¹Per i dettagli si veda *Ra - Cl - Be Neutrons in Water* di J. N. Rush in *Phys. Rev.* 73: 271 (1948).

²Per le risonanze dello iodio si veda *Phys. Rev.* 71:174 (1947). Vi sono apparentemente due livelli di risonanza, $a \simeq 32\text{ eV}$ e $a \simeq 42\text{ eV}$.

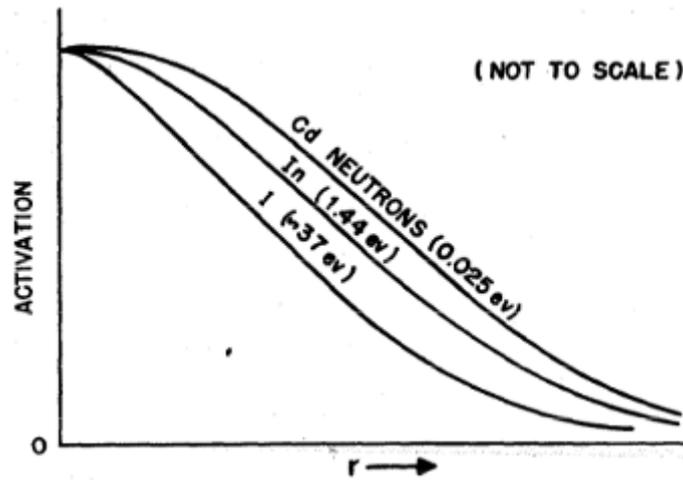


Fig. 34: Sorgente di neutroni in acqua

6.3 Distribuzione dei neutroni dal punto sorgente - Calcolo di r_{medio}^2

Consideriamo una sorgente puntiforme di neutroni di energia E_0 posto in un mezzo infinito e omogeneo. I neutroni sono rallentati dalle collisioni dopo aver lasciato la sorgente. Consideriamo tutti i neutroni aventi un'energia E . Quanto lontani dalla sorgente saranno in media? Quale è la media del quadrato della distanza dalla sorgente r_{medio}^2 ?

Se un neutrone da una sorgente S subisce collisioni in successione (figura 35), con spostamenti successivi $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4, \dots, \vec{l}_n$, allora lo spostamento risultante è:

$$\vec{r} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \dots + \vec{l}_n$$

e il quadrato dello spostamento ($\vec{r} \cdot \vec{r}$) è:

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + \dots + l_n^2 + 2(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 + \dots + \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_n + \dots)$$

Per ottenere la media della espressione precedente, interrompiamo la media dopo tre passi (figura 36). Primo, mediamo sull'angolo azimutale ψ mantenendo costanti ϕ , l'angolo di diffusione nel sistema del laboratorio, e la lunghezza l . Poi mediamo su l e infine su ϕ . La media su ψ è ottenuta dal teorema:

$$[\cos(1, 4)]_{\psi_{medio}} = \cos(1, 2) \cos(2, 3) \cos(3, 4) \tag{6.8}$$

con $\cos(m, n) = \text{coseno dell'angolo tra } \vec{l}_m \text{ e } \vec{l}_n$.

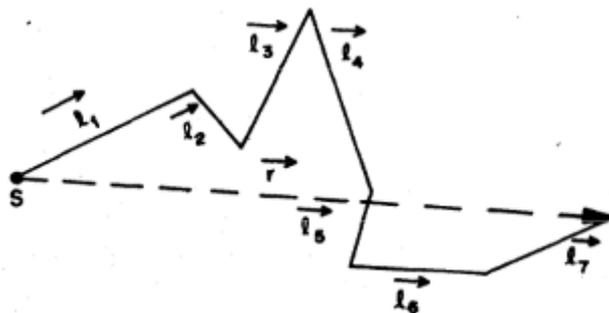


Fig. 35: Tipico percorso di un neutrone

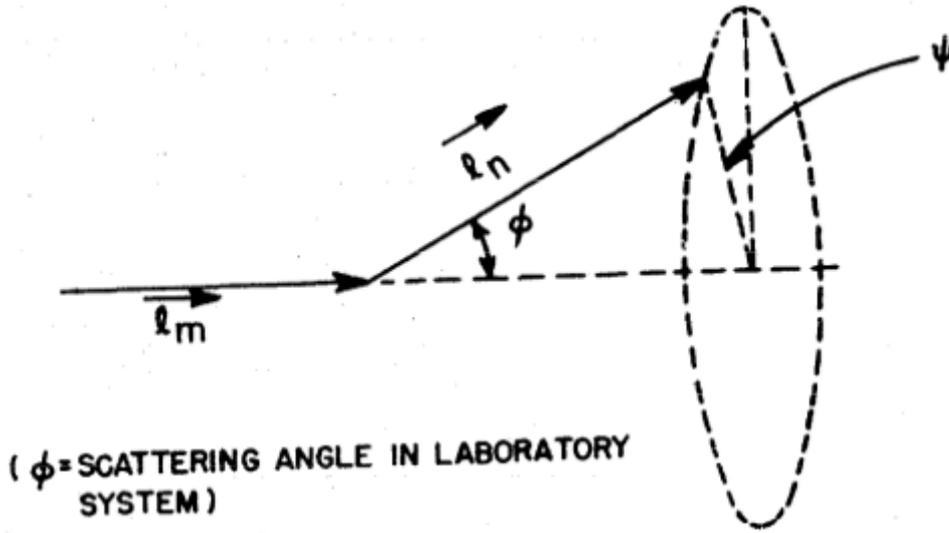


Fig. 36: Vettore spostamento nella diffusione dei neutroni

Questo teorema può essere dimostrato considerando \vec{l}_1 fisso. Allora, fissato \vec{l}_2 , consideriamo il vettore \vec{l}_4 da mediare consentendo allo stesso di ruotare attorno a \vec{l}_3 . La figura 37 mostra i tre vettori \vec{l}_1 , \vec{l}_2 e \vec{l}_4 disposti a formare i lati di un tetraedro. La base piana è stata costruita tracciando un piano perpendicolare a \vec{l}_3 e intersecando \vec{l}_1 ad una lunghezza unitaria. La figura deve essere usata nel procedimento di media dove \vec{l}_4 può ruotare attorno a \vec{l}_3 , così che l'angolo ψ indicato in figura può variare da 0 a 2π nel procedimento di media. Considerando i triangoli APB e BPC della figura 37 è chiaro dalla trigonometria elementare che

$$AP = 1 \quad AB = \sin(1,3) \quad PB = \cos(1,3) \quad BC = PB \cdot \tan(3,4) = \cos(1,3) \tan(3,4)$$

$$PC = \frac{PB}{\cos(3,4)} = \frac{\cos(1,3)}{\cos(3,4)}$$

La quantità $(AC)^2$ può essere trovata con la legge del coseno sul triangolo APC e nel triangolo ABC . Eguagliando questi due valori si ha:

$$(AC)^2 = (AP)^2 + (PC)^2 - 2(AP \times PC) \cos(1,4) = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC) \cos \psi$$

Risolviendo questa equazione rispetto a $\cos(1,4)$ e sostituendo le formule trigonometriche per i vari lati (AP, PC, AB, BC) si ottiene la seguente:

$$\cos(1,4) = \cos(1,3) \cos(3,4) + \sin(1,3) \sin(3,4) \cos \psi$$

Quando \vec{l}_4 ruota attorno a \vec{l}_3 il $\cos \psi$ è in media zero. Essendo l'angolo tra questi due vettori $(3,4)$ costante durante questo procedimento di media implica che la media del $\cos(1,4)$ diviene:

$$[\cos(1,4)]_{media} = [\cos(1,3)]_{media} \cdot \cos(3,4) \tag{6.9}$$

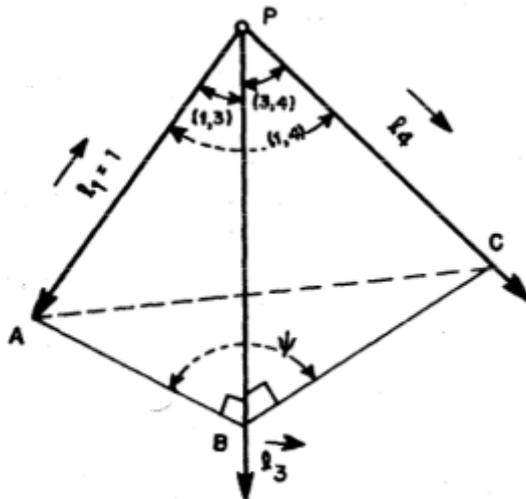


Fig. 37: Calcolo della media sull'angolo azimutale ψ

In precedenza, il vettore \vec{l}_2 era mantenuto fisso e il vettore \vec{l}_4 veniva mediato. Se \vec{l}_4 è mantenuto fisso e a \vec{l}_2 si permette di ruotare troviamo, in maniera simile a quella usata nella derivazione della 6.9, che:

$$[\cos(1,3)]_{media} = [\cos(1,2)]_{media} \cdot \cos(2,3) \quad (6.10)$$

Tuttavia, poiché i vettori \vec{l}_1 e \vec{l}_2 sono vettori consecutivi la media del $\cos(1,2)$ è una costante; cioè, quando \vec{l}_2 ruota attorno a \vec{l}_1 , l'angolo $(1,2)$ rimane costante. La sostituzione della 6.10 nella 6.9 dimostra il teorema enunciato nella 6.8. Il teorema può essere generalizzato per applicare ad ogni successione di tali vettori mediati sull'angolo ψ (come mostrato in fig. 36):

$$\begin{aligned} [\cos(a,z)]_{\psi_{med}} &= \cos(a,b) \cdot \cos(b,c) \cdot \cos(b,c) \dots \cos(y,z) \\ &\left(\vec{l}_a, \vec{l}_b, \vec{l}_c, \dots, \vec{l}_z \text{ sono vettori consecutivi} \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Consideriamo ora la media su l . Se λ_n è il libero cammino medio, allora la probabilità che l_n si trovi tra l_n e $l_n + dl_n$ è $\exp\left(-\frac{l_n}{\lambda_n}\right)$. La media di l_n e l_n^2 si può determinare facilmente:

$$\begin{aligned} (l)_{med} &= \frac{\int_0^\infty l \exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) dl}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) dl} = \lambda \\ (l^2)_{med} &= \frac{\int_0^\infty l^2 \exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) dl}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) dl} = 2\lambda^2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

(Il pedice "n" è stato omissso per semplificazione della notazione). La prima relazione della 6.12 è in un certo senso una definizione, poiché la media di l è proprio il libero cammino medio.

Ritornando all'equazione iniziale per r^2 , possiamo ora scrivere l'equazione per r^2 mediata sia su ψ che su l :

$$\begin{aligned} r_{l,\psi_{med}}^2 &= 2\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2 + \dots + 2\lambda_n^2 + 2[\lambda_1\lambda_2 \cos(1,2) \\ &+ \lambda_1\lambda_2 \cos(1,2) \cos(2,3) + \dots + \lambda_2\lambda_3 \cos(2,3) + \dots] \end{aligned} \quad (6.13)$$

Nel caso dell'idrogeno, questo calcolo può essere completato in modo molto preciso. In genere è conveniente assumere alcune approssimazioni. Si assuma che serva un grande numero di collisioni per produrre una piccola variazione nell'energia. Questo sarà valido per collisioni di neutroni con atomi pesanti ($A \gg 1$). I diversi angoli della 6.13, $(1,2)$, $(2,3)$, ecc.. possono assumere tutti i valori da 0 a π . Dobbiamo mediare sui vari angoli possibili, ricordando che questi angoli sono gli angoli successivi di diffusione misurati nel sistema del laboratorio, angolo ϕ della figura 29. Come abbiamo dimostrato nella 6.4, la media dei coseni di questi angoli per diffusioni isotrope è $\frac{2}{3A}$, un numero che diminuisce al crescere di A . Questo fatto può essere vantaggioso se osserviamo il coefficiente di λ_1 nella 6.13:

$$2[\lambda_1 + \lambda_1 \cos(1,2) + \lambda_2 \cos(1,2) \cos(2,3) + \dots]$$

Poiché i termini successivi se mediati sugli angoli di diffusione, avranno un incremento di potenza di $\frac{2}{3A}$, essi diminuiranno rapidamente nell'approssimazione considerata, così che i vari λ_s che si trovano nei termini successivi si potranno sostituire con lo stesso λ_1 . Questo è valido se i λ cambiano molto poco tra collisioni successive. In questo modo, il coefficiente λ_1 è approssimativamente dato da:

$$2[\lambda_1 + \lambda_1 C + \lambda_1 C^2 + \dots] = \frac{2\lambda_1}{1-C} \text{ con } C = \frac{2}{3A}$$

Consistente con la nostra approssimazione, le serie finite sono state considerate come infinite. Si può facilmente mostrare che l'errore diventa trascurabile per $A \gg 1$ (e i processi di assorbimento sono molto inferiori rispetto a quelli di diffusione). Sostituendo questa approssimazione nella 6.13 si ottiene

$$(r^2)_{med} = \frac{2\lambda_1^2}{1-C} + \frac{2\lambda_2^2}{1-C} + \frac{2\lambda_3^2}{1-C} + \dots + \frac{2\lambda_n^2}{1-C} = \frac{2}{1-C} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

dove $C = \frac{2}{3A}$ come prima. La sommatoria può essere scritta sotto forma di integrale se la variazione in energia è piccola per ogni collisione:

$$N^{\circ} \text{ collisioni tra } E + \Delta E \text{ e } E = \frac{\ln(E + \Delta E) - \ln E}{\xi} = \frac{\Delta E}{\xi E}$$

Pertanto

$$r_{med}^2 = \frac{2}{1 - \frac{2}{3A}} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \frac{2}{\xi \left(1 - \frac{2}{3A}\right)} \int_E^{E_0} \frac{\lambda^2(E') dE'}{E'} \quad (6.14)$$

La variabile di integrazione è primata per distinguerla dai suoi limiti.

Nella 6.14 ξ è la diminuzione media del logaritmo naturale dell'energia per collisione, definita nella 6.7. La dipendenza del libero cammino medio dall'energia è stata sottolineata scrivendo $\lambda^2(E)$. E_0 è l'energia iniziale del neutrone alla sorgente, ed E è l'energia del neutrone alla posizione particolare \vec{r} . La 6.14 dello spostamento quadratico medio per neutroni di energia E quando la diffusione è dovuta a nuclei pesanti.

È spesso conveniente usare variabili logaritmiche, nel qual caso la media dello spostamento quadratico è:

$$r_{med}^2 = \frac{2}{\xi \left(1 - \frac{2}{3A}\right)} \int_{\ln E}^{\ln E_0} \lambda^2(\epsilon') d\epsilon' \quad (6.15)$$

con $\epsilon' = \ln E'$ e ($A \gg 1$).

Come ricordato in precedenza, la formula per $(r^2)_{med}$ si può derivare esattamente. Il risultato [Ricerca Sci. 7:13(1936)] è:

$$r_{med}^2 = 2\lambda^2(0) + 2\lambda^2(a) + 2 \int_0^a \lambda^2(x) dx + 2 \int_0^a \lambda^2(x) e^{-\frac{x}{2}} dx + 2\lambda(0)\lambda(a) e^{-\frac{a}{2}} + 2\lambda(a) \int_0^a \lambda(x) e^{-\frac{a-x}{2}} dx + 2\lambda \int_0^a \lambda(u) du \int_0^{a-u} \lambda(u+x) e^{-\frac{x}{2}} dx \quad (6.16)$$

dove $x = \ln \frac{E_0}{E'}$ e $a = \ln \frac{E_0}{E}$.

Nelle 6.15 e 6.14, l'energia dei neutroni alla sorgente è E_0 e la formula stabilisce la media dello spostamento quadratico per i neutroni di energia E . E' è la variabile di integrazione e scompare dopo la sostituzione dei limiti di integrazione.

Riferendoci alla figura 18, notiamo che la sezione d'urto per i neutroni nell'idrogeno è pressoché costante ($\sim 21 \text{ barn}$) su un ampio intervallo di energie, da circa 1 eV (dove l'effetto delle forze di legame chimico diviene trascurabile) a circa 10 keV. A causa del rallentamento in questa regione, λ è costante, e la 6.16 si può ridurre alla forma:

$$r_{med}^2 = f(E_0) - 6\lambda^2 \ln E \quad (6.17)$$

Usando il $Ra - Be$ con una sorgente di neutroni in un contenitore di acqua, troviamo i seguenti dati sperimentali:

$$\text{Rallentamento alla risonanza per } I \text{ (37 eV)} : r_{med}^2 = 262.2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Rallentamento alla risonanza per } Rh \text{ (1.28 eV)} : r_{med}^2 = 276.6 \text{ cm}^2$$

Segue allora dalla 6.17, che è valida in questo intervallo di energie, che:

$$[(r^2)_{med} \text{ per } Rh] - [(r^2)_{med} \text{ per } I] = 6\lambda^2 \ln \left(\frac{37}{1.28} \right) = 14.4 \text{ cm}^2$$

da cui $\lambda^2 = \frac{14.4}{20.2} \text{ cm}^2$ o $\lambda = 0.84 \text{ cm}$. Questo è un libero cammino medio, da confrontare con opportune medie di diversi dati. Dati recenti sui neutroni dal $Ra - Be$ in acqua [Phys. Rev. 73:271(1948)] indicano che r_{med}^2 per l'indio (1.44 eV) è 272 cm^2 .

6.4 Distribuzione dei neutroni dalla sorgente puntiforme - Equazione d'età

Nell'ultima sezione, abbiamo discusso una descrizione della distribuzione spaziale dei neutroni da una sorgente puntiforme in un mezzo infinito e omogeneo. In questa sezione, deriveremo un'espressione per l'"età" del neutrone piuttosto che la media dello spostamento quadratico. Questa "età" è pure una distanza al quadrato. (La nomenclatura piuttosto fuorviante deriva dall'analogia tra il presente problema e il flusso di calore).

Come prima, neutroni con energie E_0 sono assorbiti nel mezzo di diffusione. Il nostro interesse è nella distribuzione spaziale dei neutroni di diverse energie. Di conseguenza, definiamo una funzione di densità di neutroni allo stato stazionario $n(x, y, z, \epsilon)$ tale che $n(x, y, z, \epsilon) dx dy dz d\epsilon$ è il numero di neutroni nell'elemento di volume $dx dy dz$, con il logaritmo della loro energia tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$ (dove, come prima, $\epsilon = \ln E$). Consideriamo l'elemento di volume e il neutrone in esso in un dato intervallo di energie. Per unità di tempo, questo elemento di volume riceverà neutroni in questo intervallo di energia da due sorgenti: (1) dalla diffusione di neutroni di questa energia dall'esterno dell'elemento di volume e (2) da neutroni delle maggiori energie nell'elemento di volume che hanno la loro energia degradata nel dato intervallo di energie.

Dalla prima sorgente, la diffusione, il contributo alla popolazione di neutroni nell'elemento di volume può essere calcolata usando i metodi dell'energia cinetica. Il coefficiente di diffusione è

$$D = \frac{\lambda_t v}{3} = \frac{\lambda_v}{3(1 - \cos \phi_{med})} \quad (6.18)$$

dove λ è il libero cammino medio per la diffusione, $(\cos \phi)$ la media dei coseni dell'angolo di diffusione nel sistema del laboratorio, e v la velocità dei neutroni. λ_t è detta "libero cammino medio di spostamento". È la distanza che un neutrone può percorrere in media nella direzione del suo moto iniziale dopo un infinito numero di collisioni, ognuna delle quali produce una deflessione media data da $(\cos \phi)_{med}$ e dove ogni collisione è seguita da un moto di libero cammino medio λ . Come mostrato nella 6.18, λ_t e λ sono legati dall'equazione

$$\lambda_t = \frac{\lambda}{1 - (\cos \phi)_{med}} \quad (6.19)$$

Per diffusioni isotrope, la 6.4, poiché $(\cos \phi)_{med} = \frac{2}{3A}$, la relazione tra spostamento per libero cammino medio e il libero cammino medio è:

$$\lambda_t = \frac{\lambda}{1 - \frac{2}{3A}}$$

Quando $A \gg 1$, $\lambda_t \simeq (1 + \frac{2}{3A}) \lambda \simeq \lambda$. Come nella teoria cinetica, la densità di corrente dei neutroni S è correlata al coefficiente di diffusione da:

$$S = -Dn \quad (\text{neutroni/cm}^2/\text{sec}) \quad (6.20)$$

Questa è un'equazione vettoriale, con S nella direzione del gradiente. La notazione è standard:

$$n = \text{grad } n = i_x \frac{\partial n}{\partial x} + i_y \frac{\partial n}{\partial y} + i_z \frac{\partial n}{\partial z}$$

con i_x, i_y, i_z i versori nelle direzioni x, y, z . Consideriamo la faccia $dydz$ dell'elemento di volume in (x, y, z) . La corrente dei neutroni all'esterno di questa faccia (nella direzione x negativa) è $D \frac{\partial n}{\partial x}$ così che il numero di neutroni per unità di tempo nell'intervallo di energia tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$ uscente dalla faccia $dydz$ in (x, y, z) è $D \frac{\partial n}{\partial x} dydz d\epsilon$. Sulla faccia opposta a $(x + dx, y, z)$ il numero di neutroni per unità di tempo nell'intervallo di energia $d\epsilon$ entrante nell'elemento di voluto (direzione negativa di x) è:

$$D \left(\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} dx \right) dydz d\epsilon$$

Il guadagno netto di neutroni per unità di tempo nell'elemento di volume è allora $D \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right) dx dy dz d\epsilon$.

Prendendo altre coppie di facce a aggiungendole, otteniamo:

$$\text{Neutroni nell'intervallo di energie tra } \epsilon \text{ e } \epsilon + d\epsilon \text{ che si diffondono nel volume } dx dy dz \text{ per unità di tempo} = D \nabla^2 n dx dy dz$$

con ∇^2 il Laplaciano = $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Consideriamo ora l'altra sorgente di neutroni, quelli nell'elemento di volume che sono rallentati all'appropriato intervallo di energia (tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$). Il numero di collisioni di un neutrone nell'unità di tempo + $\frac{v}{\lambda}$. Se questo è moltiplicato per la variazione media in ϵ per collisione, cioè per ξ , il risultato $\frac{\xi v}{\lambda}$ è la perdita di ϵ per unità di tempo. Rappresentando i valori di ϵ come punti su una retta, figura 38, un neutrone può essere visualizzato come in moto lungo la linea ϵ con una velocità $\frac{\xi v}{\lambda}$ (perdita media di velocità di ϵ per unità di tempo).

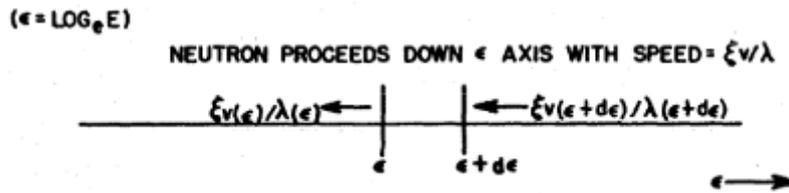


Figure 38. Slowing down of neutrons: appearance on ξ axis.

Nel punto ϵ il numero di neutroni nell'elemento di volume $dx dy dz$ che si allontana dall'intervallo di energie (tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$) per unità di tempo è:

$$\left[\frac{\xi v(\epsilon)}{\lambda(\epsilon)} \right] \cdot n(x, y, z, \epsilon) dx dy dz$$

dove si è indicata la dipendenza funzionale di v e λ da ϵ . Il numero per unità di tempo che passa oltre la parte alta dell'intervallo di energia a $\epsilon + d\epsilon$ è:

$$\left[\frac{\xi v(\epsilon + d\epsilon)}{\lambda(\epsilon + d\epsilon)} \right] \cdot n(x, y, z, \epsilon + d\epsilon) dx dy dz \\ \left\{ \xi \frac{v(\epsilon)n}{\lambda(\epsilon)} + \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\xi \frac{v(\epsilon)n}{\lambda(\epsilon)} \right] d\epsilon \right\} dx dy dz$$

L'aumento netto per unità di tempo dei neutroni nell'intervallo $d\epsilon$ e nell'elemento di volume $dx dy dz$ è ottenuto sottraendo gli uscenti dagli entranti:

$$Aumento\ netto = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\xi \frac{v(\epsilon)}{\lambda(\epsilon)} n(x, y, z, \epsilon) \right] \cdot dx dy dz d\epsilon \quad (6.21)$$

Combinando la 6.21 con la 6.4 si ottiene l'equazione differenziale del rallentamento. Poiché abbiamo trattato la densità dei neutroni in condizioni stazionarie (indipendenti dal tempo), la somma delle equazioni 6.21 e 6.4 deve essere zero:

$$D \nabla^2 n + \frac{\partial}{\partial \epsilon} K \left(\xi \frac{vn}{\lambda} \right) = 0 \quad (6.22)$$

con

$$D = \frac{\lambda_v}{3[1 - (\cos \phi)_{med}]} = \frac{\lambda_t v}{3}$$

$$\lambda = \lambda(\epsilon) \quad v = v(\epsilon) \quad n(x, y, z, \epsilon) = \ln E$$

La 6.22 si può trasformare in una forma uguale alla classica equazione di conduzione del calore introducendo nuove variabili dipendenti e indipendenti. La variabile dipendente è la cosiddetta "densità di rallentamento" definita come

$$q = \frac{\xi vn}{\lambda} \quad (6.23)$$

Il nome è la sua descrizione. Come sottolineato in precedenza, la perdita di ϵ per unità di tempo per neutrone è $\frac{\xi v}{\lambda}$ (figura 38). Moltiplicata per la densità dei neutroni n , questa è allora la perdita totale in ϵ per unità di tempo per unità di volume per unità di intervallo di energia o, detta in modo diversa, il numero di neutroni per unità di volume per unità di tempo che assumono ogni valore di ϵ sull'asse ϵ . Nello stato stazionario, se q è integrato su tutto lo spazio, il numero di neutroni per ogni valore ϵ per unità di tempo è certamente il numero di neutroni assorbiti nel sistema per unità di tempo, cioè una costante. Pertanto $\int q(x, y, z, \epsilon) dx dy dz = costante$ per ogni ϵ . Se q è sostituito nella 6.22, il risultato è:

$$\left\{ \frac{\lambda^2(\epsilon)}{3\xi[1 - (\cos \phi)_{med}]} \right\} \nabla^2 q + \frac{\partial q}{\partial \epsilon} = 0 \quad (6.24)$$

Questa è la forma più semplice per la 6.22 poiché gli operatori differenziali possono operare solo su q . La variabile indipendente può essere ulteriormente cambiata per semplificarne la forma. Si introduca la variabile indipendente τ , l'"età" (spesso detta "età di Fermi"):

$$\tau = \frac{1}{3\xi(1 - \cos \phi)_{med}} \int_{\xi}^0 \lambda^2(\epsilon') d\epsilon' \quad (6.25)$$

È chiaro che τ ha la dimensione di una lunghezza³. Differenziando q rispetto a ϵ :

$$\frac{\partial q}{\partial \epsilon} = \frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} = - \frac{\partial q}{\partial \tau} \left\{ \frac{\lambda^2(\epsilon)}{3\xi[1 - (\cos \phi)_{med}]} \right\}$$

Sostituire nella 6.24 e cancellare il fattore comune. Il risultato è l'"Equazione d'Età":

$$\nabla^2 q = \frac{\partial q}{\partial \tau} \quad (6.26)$$

con q e τ definiti dalle 6.23 e 6.25.

Un vantaggio considerevole è assicurato da questa trasformazione nella 6.26 che è identica nella forma all'equazione di conduzione del calore:

$$\nabla^2 T = \frac{c\rho}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

³Sebbene ϵ è opportunamente riferito all'energia del neutrone, si deve ricordare che $\ln \epsilon$ è l'energia del neutrone.

Pertanto q è analogo alla temperatura e τ al tempo. Proprio come la temperatura diminuisce al crescere del tempo (nessuna sorgente di calore) così il neutrone “nascerà” con energia ϵ_0 e perderà la energia ϵ al crescere dell’età” τ . Ciò si può vedere dall’analisi della 6.25, dove $\tau \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$, e τ aumenta con il diminuire di ϵ (o τ aumenta al crescere del “tempo dalla nascita”).

Applichiamo l’equazione dell’età al problema della sorgente puntiforme. Data una sorgente puntiforme di neutroni con energia E_0 in un mezzo infinito, qual è la densità e la posizione dei neutroni in funzione di E ? Risolviamo prima l’equazione dell’età per q , prendendo in prestito la corrispondente soluzione dell’equazione del calore:

$$q = \frac{Q}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}} \tag{6.27}$$

L’identificazione di Q con il numero di neutroni con energia E_0 . Introdotta nel sistema in unità di tempo, segue dall’integrazione di q su tutto lo spazio usando coordinate polari sferiche:

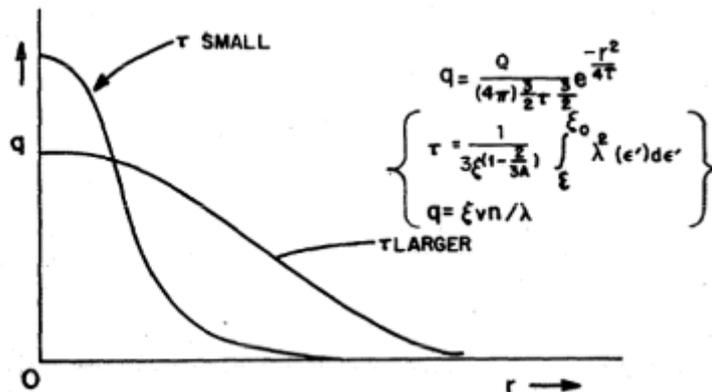
$$\int_0^\infty q \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \frac{Q}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\tau}} r^2 dr = Q$$

poiché

$$\int_0^\infty \exp(-\sigma x^2) x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{(4\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

Esaminiamo la forma delle soluzioni della 6.27. In figura 39, una rappresentazione di q in funzione di r per grandi e piccoli valori di τ mostra che quando E diminuisce da E_0 (cioè. quando τ aumenta), la distribuzione spaziale per l’energia E si allarga sempre di più. Questo è quanto ci si aspetta. I neutroni veloci sono distribuiti vicino alla sorgente, e quelli lenti sono sparpagliati. (Si noti che l’area sotto le curve tra r e $r + dr$ nella figura non dà il numero dei neutroni per unità di tempo che arrivano nell’intervallo. Si deve introdurre un fattore $4\pi r^2$. Infatti, $4\pi r^2 q dr$ è il numero di neutroni per unità di tempo in arrivo nell’intervallo di spazio tra r e $r + dr$).

Nel problema 5 alla fine di questo capitolo, la media di r^2 è calcolata da q . Il risultato, 6τ , è simile a quello ottenuto nella sezione 6.3.



PROBLEMI

1. Si consideri la collisione di neutroni con berillio. Qual è l’angolo medio di diffusione osservato nel sistema di riferimento del laboratorio? Nel centro di gravità del sistema?
2. Calcolare ξ per H^2 , He^4 , Be^9 , O^{16} , U^{238} . In ogni caso quante collisioni saranno necessarie per ridurre l’energia di un neutrone da $1 MeV$ a $1 eV$?
3. Si supponga che una sorgente puntiforme di neutroni veloci sia posta in un grande contenitore di acqua. A varie distanze dalla sorgente, sono esposti fogli di indio (sandwich tra fogli di cadmio) al flusso di neutroni e in tal modo attivati. Il tempo di esposizione e l’area dei fogli sono costanti. I dati seguenti sono ottenuti (dopo la correzione per l’attività di decadimento, ecc):

r (cm)	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
A (In)	890	550	302	180	101	61	40	26	18	11.5	8.7	5.7	4.0

r è la distanza dalla sorgente al rivelatore di indio, e A è l’attività in conteggio per minuto del rivelatore di indio (attività dovuta a neutroni di $1.44 eV$). Da questi dati, calcolare $(r^2)_{med}$. (N.B. L’attività A non è proporzionale al numero di neutroni nell’intervallo tra r e $r + dr$). Valori di A per r più grandi si possono determinare dall’extrapolazione semilogaritmica.

4. Si consideri una sostanza in cui λ è costante. In questo caso, qual è la relazione tra l'età τ e l'effettivo "tempo dalla nascita"?
5. Usando la soluzione per la sorgente puntiforme per q , trovare $(r^2)_{med}$ in termini di τ . Applicare questo risultato al problema dell'idrogeno discusso nelle sezioni prima e dopo la 6.17. Mostrare che gli stessi valori sono ottenuti usando la teoria dell'età come nel processo di media vettoriale.

Chapter 7

La distribuzione di neutroni lenti in un mezzo

7.1 L'equazione differenziale per neutroni lenti

Il calcolo della distribuzione dei neutroni di diverse energie in un mezzo coinvolge due problemi distinti. Primo, vi è il problema del rallentamento trattato nel precedente capitolo. I neutroni non sono rallentati indefinitamente, perché i nuclei con cui collidono non sono a riposo ma hanno energie vibrazionali dipendenti dalla loro temperatura. Alla fine i neutroni raggiungono l'equilibrio termico con questi nuclei e mostrano una distribuzione Maxwelliana¹ corrispondente alla temperatura del mezzo. Chiaramente il problema della distribuzione spaziale di questi neutroni rallentati o termici è del tutto distinto da quella della distribuzione dei neutroni che sono stati rallentati e possono essere gestiti con diversi metodi.

Avvicinandoci al secondo problema, chiediamo, "Data una sorgente di neutroni termici, cosa si può dire sulla loro distribuzione di stato stazionario in un mezzo?" Cerchiamo una equazione differenziale in base alla nostra descrizione. Sia $n(x, y, z)$ la densità dei neutroni termici in x, y, z . Come nella derivazione dell'equazione dell'età, consideriamo un volume unitario. Vi sono tre meccanismi per i quali il numero di neutroni in questo elemento di volume varia con il tempo: (1) diffusione entro o fuori dell'elemento di volume, (2) assorbimento² o cattura di neutroni nell'elemento di volume, e (3) generazione di neutroni termici nell'elemento di volume per il rallentamento di neutroni veloci alle energie termiche. Il primo meccanismo produrrà $D\nabla^2 n$ neutroni per unità di tempo e di volume, come dalla derivazione della 6.4 del Capitolo VI. Il secondo meccanismo diminuisce la densità dei neutroni per unità di tempo di $-\frac{n}{\theta}$, dove θ è il tempo medio per l'assorbimento o la cattura. Il terzo è proprio la densità di rallentamento q valutata per energie termiche, poiché $q(\epsilon)$ è il numero di neutroni per unità di volume per unità di tempo che arrivano a un particolare logaritmo dell'energia ϵ . Per rimarcare che q deve essere valutato per energie termiche, scriviamo q_T . Sommando i tre contributi insieme si ottiene l'equazione differenziale per il ritmo temporale di variazione della densità dei neutroni:

$$D\nabla^2 n - \frac{n}{\theta} + q_T = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (7.1)$$

dove $n(x, y, z, t) dx dy dz$ è il numero di neutroni termici nell'elemento di volume $dx dy dz$ al tempo t , $\frac{n}{\theta} dx dy dz$ è il numero di neutroni termici assorbiti per secondo nell'elemento di volume $dx dy dz$ al tempo t , e $q_T dx dy dz$ è il numero di neutroni termici creati (dal rallentamento) per unità di tempo in $dx dy dz$. Va ricordato che q_T è una funzione di x, y, z che si può determinare dall'equazione dell'età con le relative condizioni al contorno. Poiché $D = \lambda_t \frac{v}{3}$, la 7.1 si può riscrivere per lo stato stazionario:

$$\nabla^2 n - \frac{3}{\lambda_t v \theta} n + \frac{3q_T}{\lambda_t v} = 0$$

Definendo:

$$\begin{aligned} \Lambda = v\theta &= \text{"percorso medio di cattura"} \\ L = \sqrt{\frac{\Lambda\lambda_t}{3}} &= \text{"lunghezza di diffusione"} \end{aligned} \quad (7.2)$$

l'equazione di stato stazionario diviene:

$$\nabla^2 n - \frac{n}{L^2} + \frac{3q_T}{\lambda_t v} = 0 \quad (7.3)$$

¹Il numero di neutroni con velocità tra v e $v + dv$ è proporzionale a $v^2 \exp(-av^2/2kT) dv$.

²Questo meccanismo avrebbe dovuto forse essere considerato nel processo di rallentamento. Ma considerato che gli ordini di grandezza sono tali che nel rallentamento la considerazione dell'assorbimento è di solito un affinamento, qui invece risulta essere una necessità.

Per una sorgente puntiforme di neutroni lenti ($q_T = 0$ tranne a $t = 0$ dove q_t è una funzione delta), l'equazione si riduce a:

$$\nabla^2 n - \frac{n}{L^2} = 0 \tag{7.4}$$

La soluzione è a simmetria sferica, così la 7.4 si riduce all'equazione radiale:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dn}{dr} \right) - \frac{n}{L^2} = 0 \tag{7.5}$$

Sia $u = nr$. L'equazione diviene $u'' - \frac{u}{L^2} = 0$ dove $u'' = \frac{d^2 u}{dr^2}$. Le soluzioni sono $u = \exp(\pm \frac{r}{L})$. Le condizioni a contorno per cui per $n \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ eliminano l'esponenziale positivo, così che la soluzione è:

$$n = A \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r}$$

La costante A può essere determinata considerando una piccola sfera che racchiude la sorgente all'origine. La corrente di neutroni, 6.20 del Capitolo VI, è $-D\nabla n = -D \frac{dn}{dr} = -DA e^{-\frac{r}{L}} [-\frac{1}{Lr} - \frac{1}{r^2}]$. Moltiplicando questa per l'area della sfera $4\pi r^2$ e ponendo $r \rightarrow 0$ si ha $4\pi DA$. Questa è la potenza della sorgente Q . Allora A è $\frac{Q}{4\pi D}$ o $\frac{3Q}{4\pi\lambda_t v}$. La soluzione completa per la 7.3 per una sorgente puntiforme di neutroni lenti Q per unità di tempo è:

$$n = \frac{3Q}{4\pi\lambda_t v} \left(\frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r} \right) \tag{7.6}$$

La soluzione si può testare sostituendola nella 7.5.

La soluzione per la sorgente puntiforme è particolarmente importante poiché ogni sorgente può essere rappresentata come un insieme di sorgente puntiformi, e la soluzione corrispondente è la sovrapposizione di queste soluzioni di sorgenti puntiformi.

Per risolvere questa equazione per una sorgente puntiforme di neutroni veloci costruiamo un integrale su una distribuzione di sorgenti puntiformi di neutroni termici su tutto lo spazio che si manifesta dal rallentamento dei neutroni veloci (si veda la figura 40). Possiamo trovare la densità dei neutroni lenti ad una distanza r dalla sorgente puntiforme di neutroni veloci nel modo seguente. In ogni elemento di volume dV , a una distanza $\vec{\rho}$ dalla sorgente puntiforme di neutroni veloci, vi sono $q_T dV$ neutroni termici per secondo prodotti dal processo di rallentamento dove q_T [si veda la 6.27] è:

$$q_T = \frac{Q}{(4\pi r)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\rho^2}{4\tau}}$$

con τ uguale all'età per i neutroni termici e Q il numero di neutroni veloci per secondo emessi dalla sorgente.

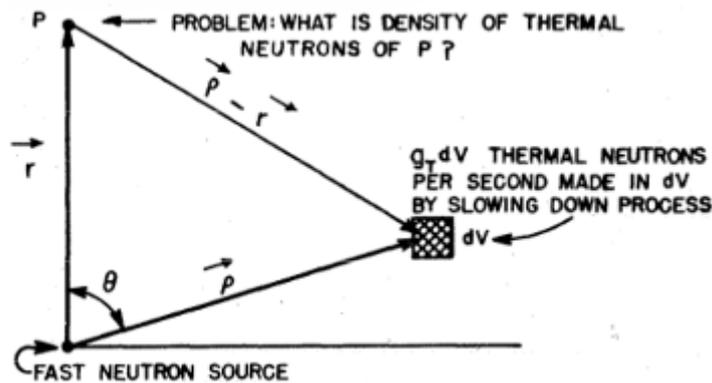


Figura 40. Sorgente puntiforme di neutroni veloci

L'elemento di volume dV è espresso in coordinate sferiche, $dV = \rho^2 d\rho \sin\theta d\theta d\phi$, e l'asse polare ($\theta = 0$) è assunto passare per il punto in cui si è trovata la densità di neutroni termici (si veda il punto P nella figura 40). Il punto P è a una distanza $|\vec{\rho} - \vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\theta}$ dalla sorgente $q_T dV$. Come conseguenza, la densità dei neutroni termici osservata in P da questa sorgente è data dalla 7.6 sostituendo l'appropriata intensità della sorgente e la distanza radiale:

$$\left(\begin{array}{c} \text{neutroni termici in P} \\ \text{dalla sorgente a dV} \end{array} \right) = \left(\frac{3q_T dV}{4\pi\lambda_t v} \right) \frac{e^{-\frac{|\vec{\rho} - \vec{r}|}{L}}}{|\vec{\rho} - \vec{r}|}$$

Sommare i contributi da tutte le sorgenti significa integrare su dV . Sostituendo per q_T , $|\vec{\rho} - \vec{r}'|$, integriamo sull'angolo azimutale ϕ e con il cambiamento di variabile $\mu = \cos \theta$ si ha infine la densità termica dei neutroni alla distanza r dalla sorgente di neutroni veloci di intensità Q

$$n(r) = \frac{3Q}{2\lambda_t v (4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\mu=-1}^{\mu=+1} e^{-\frac{\rho^2}{4\tau}} \frac{e^{-\sqrt{\rho^2+r^2-\frac{2\rho r\mu}{L}}}}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\mu}} \quad (7.7)$$

Nella 7.7 λ_t, v, τ e L sono libero cammino medio di spostamento, velocità, età e lunghezza di diffusione dei neutroni termici.

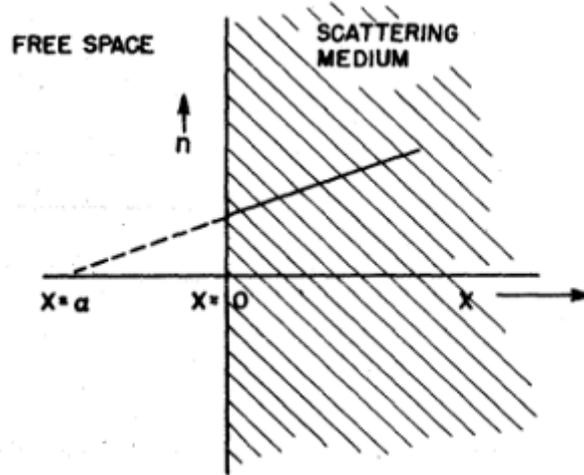


Figura 41. Comportamento della densità dei neutroni alla superficie di contorno

7.2 Condizioni a contorno per l'equazione differenziale dei neutroni lenti

Per risolvere l'equazione differenziale per neutroni lenti, si deve conoscere l'andamento di n o più funzioni di n ai limiti spaziali. Consideriamo un medio finito convesso (cioè, non rientrante) contenente una sorgente di neutroni e spazio libero ovunque attorno ad esso. Che cosa si può dire di q o n alla superficie limite? In prima approssimazione, q o n possono essere presi uguali a zero. Questo è a volte plausibile per il fatto che lo spazio libero agisce come un perfetto assorbitore; cioè assorbe tutti i neutroni e non ne restituisce alcuno. Esso, pertanto, agisce come un forte drenante della densità di neutroni ai bordi dove non vi può essere alcuna densità.

In realtà, si può mostrare che una più appropriata condizione a contorno è quella che n o q si annullano ad una superficie $\frac{2}{3}\lambda_t$ lontana dalla superficie di contorno³, dove λ_t è il libero cammino medio di spostamento nel mezzo. Consideriamo una superficie piana limitante, figura 41. La densità neutronica nelle vicinanze del bordo limite si può approssimare con una funzione lineare della distanza: $n = p(\alpha + x)$. Si può mostrare che tale scelta soddisfa la 7.4 per una situazione unidimensionale. Il flusso alla superficie limite è proprio $D\nabla n$ (vedere la 6.20) nel verso negativo delle x . Poiché il gradiente di n è proprio $\frac{dn}{dx}$, il flusso è $D \left(\frac{dn}{dx}\right) = D \cdot p = \left(\frac{\lambda_t v}{3}\right) p$. Il flusso si può calcolare in un altro modo. In figura 42, è chiaro che la probabilità che un neutrone proveniente dall'unità di volume ΔV raggiunga la superficie nel punto P è $\exp\left(-\frac{x}{\lambda_t \cos \theta}\right)$. Inoltre, la frazione dell'angolo solido totale compreso tra θ e $\theta + d\theta$ è $\sin \theta \frac{d\theta}{2}$ [si veda la 6.5]. Poiché il volume ΔV è la sorgente di $\frac{n\Delta V}{\lambda_t}$ neutroni per unità di tempo (un uguale numero di neutroni ritorna al volume per unità di tempo in condizioni stazionarie), allora il numero totale di neutroni che attraversano la superficie di confine per unità di tempo e provenienti dal volume ΔV è:

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_t \cos \theta}\right) \left(\sin \theta \frac{d\theta}{2}\right) \left(\frac{n v \Delta V}{\lambda_t}\right)$$

Sostituendo $n [= p(\alpha + x)]$ e eseguendo i calcoli, questa equazione diviene:

$$\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} p(\alpha + x) \left(\frac{v}{\lambda_t}\right) e^{-\frac{x}{\lambda_t \cos \theta}} \sin \theta d\theta dV$$

Consideriamo che il volume abbia un'area unitaria perpendicolare all'asse x e profondità dx . Allora, integrando l'espressione precedente su x si dovrebbe avere il numero totale dei neutroni per ogni secondo che

³Una derivazione più precisa dà $0.71\lambda_t$.

giungono dalla superficie da una colonna infinita di area unitarie che tagliano la sezione perpendicolarmente alla superficie. Ma questo si è visto essere il flusso o il numero di neutroni che attraversano l'area unitaria della superficie ogni secondo, purché, naturalmente, ogni cosa possa essere assunta uniforme e perpendicolare alla direzione x . Pertanto il flusso è:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\alpha + x) \left(\frac{v}{\lambda_t} \right) e^{-\frac{x}{\lambda_t \cos \theta}} \sin \theta d\theta dx$$

Cambiando la variabile $\mu = \cos \theta$ e integrando prima su x , e poi su μ . Il risultato è $\frac{vp}{2\lambda_t} \left[\frac{\alpha\lambda_t}{2} + \frac{\lambda_t}{3} \right]$. Eguagliando questa e il precedente risultato per il flusso, $\frac{v\lambda_t v}{3}$ e risolvendo rispetto ad α , si ottiene $\alpha = \frac{2}{3}\lambda_t$. Ma α è l'intercetta x del flusso di neutroni. Pertanto, abbiamo mostrato che n si annulla ad una distanza $\frac{2}{3}\lambda_t$ fuori dalla superficie limite.

Si deve notare che questa condizione al contorno in realtà descrive n sul confine, non oltre esso. In particolare, la condizione al contorno non significa che n si annulla a $x = -\frac{2}{3}\lambda_t$ ed è negativa oltre tale punto. Ciò che è stato provato è semplicemente che la densità ad una superficie limitante si comporta come se n fosse una funzione lineare di x , annullandosi per $x = -\frac{2}{3}\lambda_t$.

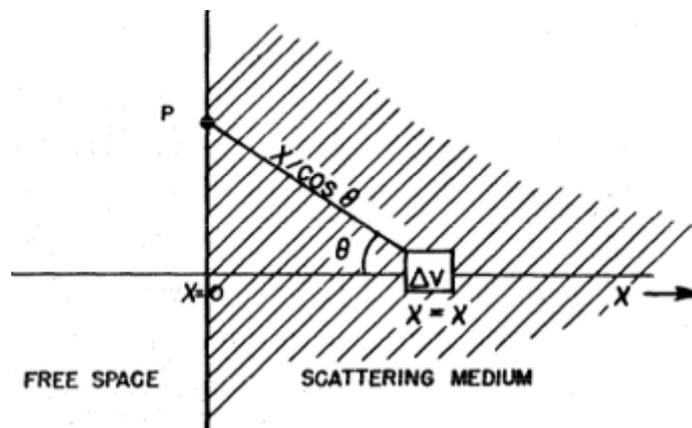


Figura 42. Calcolo del flusso di neutroni al confine

7.3 Lunghezza di diffusione in acqua e grafite

Per essere in grado di usare l'equazione di diffusione di neutroni lenti, 7.3, è necessario conoscere il valore di L , la lunghezza di diffusione. Misure di L per l'acqua si possono compiere ponendo un contenitore di acqua su una pila (o sopra la colonna termica di una pila), come in figura 43. Purché diametro e altezza dell'acqua siano molto più grandi della stessa lunghezza di diffusione, il problema può essere considerato come ad una dimensione. La superficie inferiore è una sorgente piana di neutroni termici. La 7.3 diviene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{n}{L^2} &= 0 \\ n &= n_0 e^{-\frac{x}{L}} \end{aligned} \tag{7.8}$$

dove x è la distanza dal fondo del contenitore d'acqua. Sono state eseguite misure con e senza cadmio separante pila e contenitore d'acqua per determinare (per sottrazione) n per neutroni termici in funzione di x . Si misura la diminuzione esponenziale di n con x come previsto nella 7.8 e si determina L per l'acqua. Il valore è $L_{acqua} = 2.8 \text{ cm}$. Se si usa un blocco di paraffina, il risultato è lo stesso, e mostra che il meccanismo di assorbimento nel caso dell'acqua e della paraffina è lo stesso; cioè la cattura dell'idrogeno. L'effetto dell'assorbimento di carbonio o ossigeno è trascurabile rispetto a quello dell'idrogeno.

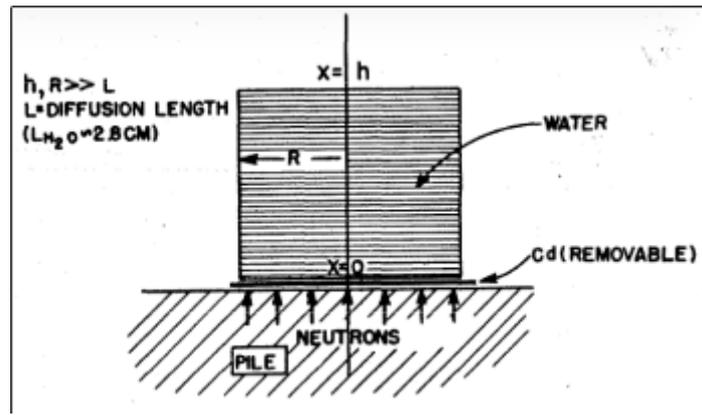


Figura 43. Misure della lunghezza di diffusione in acqua

Vi sono altri modi per misurare L e le connesse costanti per l'acqua. Alcuni sono descritti in un articolo di Fermi e Amaldi, Phys. Rev. 49:899 (1936). La lunghezza di diffusione è dipendente dalla temperatura. Per l'acqua, la relazione è:

$$L = 2.64 + 0.061T \tag{7.9}$$

dove L è in cm e T in $^{\circ}C$.

Come mostrato nella 7.2, la lunghezza di diffusione è correlata al libero cammino medio per l'assorbimento (Λ) e il libero cammino medio di trasporto (λ_t). Conoscendo L e λ_t si può calcolare Λ , o viceversa.

Per una sostanza come la grafite, la lunghezza di diffusione è talmente grande che il metodo descritto risulta impraticabile per la determinazione di L . L'approssimazione unidimensionale non sarà valida quando L è dell'ordine delle dimensioni del mezzo. Di conseguenza, il problema va risolto in tre dimensioni.

Il dispositivo fisico è mostrato in figura 44. Una sorgente di neutroni veloci è posta nel punto $P(u, u, 0)$ sulla superficie inferiore di una pila di grafite. L'altezza della pila è molto maggiore della lunghezza di diffusione, mentre la dimensione a è dello stesso ordine di grandezza di L . L'equazione di rallentamento, $\nabla^2 q - \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0$, si può risolvere per questo dispositivo usando un'analisi di Fourier (metodi analoghi sono usati nella soluzione dei problemi di conduzione del calore). Il risultato è:

$$q = \frac{4}{a^2} \frac{Q}{\sqrt{4\pi r}} e^{-\frac{z^2}{4\tau}} \sum_{r,s=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 \tau (\tau^2 + s^2)}{u}} \sin \frac{\pi r x}{a} \sin \frac{\pi r y}{a} \tag{7.10}$$

dove Q è l'intensità della sorgente, $\frac{\text{neutroni veloci}}{\text{sec}}$.

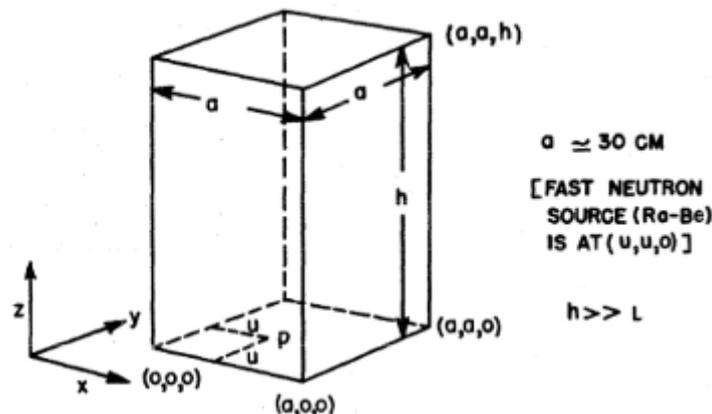


Figura 44. Misure di lunghezza di diffusione in grafite

La valutazione sperimentale di τ usando una sorgente $Ra - Be$ mostra che la sorgente ha tre ben definite energie di neutroni, fornendo tre distribuzioni sovrapposte. La tabella seguente fornisce l'età media per tre componenti in grafite a diverse energie e la percentuale di ogni componente presente.

TABELLA 2 - NEUTRONI da $Ra - Be$ in GRAFITE

Per cento	τ (risonanza Indio) cm^2	τ (risonanza Iodio) cm^2
15.0	130	54
69.3	340	268
15.7	815	736

Questi dati sono a volte presentati in termine del range r_0 , che è uguale a $2\sqrt{\tau}$.

Dai dati della tabella 2, è chiaro che a circa 30 cm dalla sorgente, q sarà molto piccolo. In questo caso, il termine “sorgente” nell’equazione differenziale per la diffusione di neutroni lenti, 7.3, sarà piccolo. La densità di neutroni lenti n sarà una soluzione della 7.4, cioè:

$$\nabla^2 n - \frac{1}{L^2} n = 0$$

a questa distanza dalla sorgente. A causa delle condizioni al contorno (i neutroni lenti sono prodotti dal rallentamento dalla sorgente $Ra - Be$), la soluzione è assunta avere la forma:

$$n = \sum_{r,s=1}^{\infty} n_{rs}(z) \sin \frac{\pi r x}{a} \sin \frac{\pi s y}{a}$$

Sostituendo questa nell’equazione differenziale si ha un’equazione per $n_{rs}(z)$:

$$\frac{d^2 n_{rs}}{dz^2} - \left[\frac{\pi^2}{a^2} (r^2 + s^2) + \frac{1}{L^2} \right] n_{rs} = 0$$

Questa equazione ha una semplice soluzione esponenziale, $\exp\left(-\frac{z}{b_{rs}}\right)$, con b_{rs} uguale al reciproco della radice quadrata dell’espressione in parentesi. Pertanto, la soluzione per n è:

$$n = \sum_{r,s=1}^{\infty} e^{-\frac{z}{b_{rs}}} \sin \frac{\pi r x}{a} \sin \frac{\pi s y}{a} \tag{7.11}$$

con $\frac{1}{b_{11}} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{a^2} + \frac{1}{L^2}}$

Per un tipico campione di grafite, le costanti sono: densità = $1.551 \frac{g}{cm^3}$; $b_{11} = 28.38 \text{ cm}$; $a = 150.49 \text{ cm}$. Poiché la densità dei neutroni non si annulla esattamente allo spigolo, dobbiamo aggiungere $2 \times \frac{2}{3} \lambda_t$ ai 150.49 cm, rendendo $a = 153.29 \text{ cm}$ ($\lambda_t = 2.1 \text{ cm}$). Siccome L dipende dalla densità, è conveniente ridurre tutti i valori di L al valore che L assumerebbe se la densità fosse $1.60 \frac{g}{cm^3}$. Ciò rende possibile confrontare direttamente diversi set di grafite testati in questo modo.

Nella tabella seguente, sono elencati alcuni dei risultati ottenuti in questo modo per quattro sostanze comuni.

TABELLA 3 - LUNGHEZZA DI DIFFUSIONE E COSTANTI CORRELATE PER H_2O , D_2O , Be , C

	densità g/cm^3	Atomi $/cm^3$	$L \text{ cm}$	$L^2/\Lambda \text{ cm}$
H_2O	1.0	$0.0334 \cdot 10^{24}$	2.85	0.142
D_2O	1.1	$0.0331 \cdot 10^{24}$	100	0.80
Be	1.8	$0.1235 \cdot 10^{24}$	31	0.87
C	1.62	$0.0871 \cdot 10^{24}$	50.2	0.903

Le costanti microscopiche nei problemi come quelli descritti sono di solito due: σ_s , la sezione d’urto di diffusione, e σ_a , la sezione d’urto di assorbimento. Queste sono collegate a L , e λ_t nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \frac{\lambda}{1 - (\cos \phi)_{av}} & \lambda &= \frac{1}{n\sigma_a} \\ v\theta &= \Lambda = \frac{1}{n\sigma_a} & N &= \frac{\sigma_s}{\sigma_a} = \frac{\Lambda}{\lambda} \\ L^2 &= \frac{\lambda_t \Lambda}{3} \end{aligned} \tag{7.12}$$

Le definizioni dei diversi simboli sono:

- n = atomi/cm³
- v = velocità dei neutroni
- θ = tempo di vita medio per assorbimento
- $(\cos \phi)_{av}$ = media del coseno dell’angolo di diffusione nel sistema del laboratorio = $\frac{2}{3A}$ per diffusioni isotrope (A numero di massa)
- λ_t = libero cammino medio di trasporto
- λ = libero cammino medio per diffusione
- λ_a = libero cammino medio per assorbimento
- L = lunghezza di diffusione
- N = numero medio di collisioni di diffusione per avere l’assorbimento

7.4 L'albedo è la riflettività di superfici di confine per neutroni

Finora in questo capitolo, abbiamo sottolineato i metodi per ottenere distribuzioni di neutroni in media dovuti alle sorgenti dentro di essi. Tuttavia, i neutroni sono spesso introdotti in un mezzo dall'esterno. È conveniente definire una riflettività, o, come è detta, albedo, per una superficie. È semplicemente la frazione dei neutroni incidenti che possono tornare indietro o essere "riflessi" dalla superficie. Un albedo unitario implica una riflessione perfetta; un albedo zero implica un perfetto assorbimento (corpo nero)⁴.

Vogliamo risolvere un problema tipico. Calcolare l'albedo di una superficie piana infinita per neutroni lenti. Sarà necessario risolvere prima il seguente problema: "Dato un mezzo con limite inferiore $x = 0$ e occupante tutto lo spazio alla destra di questo piano, qual è la probabilità che un neutrone lento partente da un punto distante d unità da $x = 0$ di sfuggire dal mezzo, cioè, raggiungerà $x = 0$ "?

Possiamo affrontare questo problema in due modi diversi. Primo, usare l'equazione di diffusione dei neutroni lenti e assumere che il problema è unidimensionale, cioè, che i neutroni si muovono solo nella direzione x . Il secondo metodo richiederà la risoluzione di un'equazione integrale.

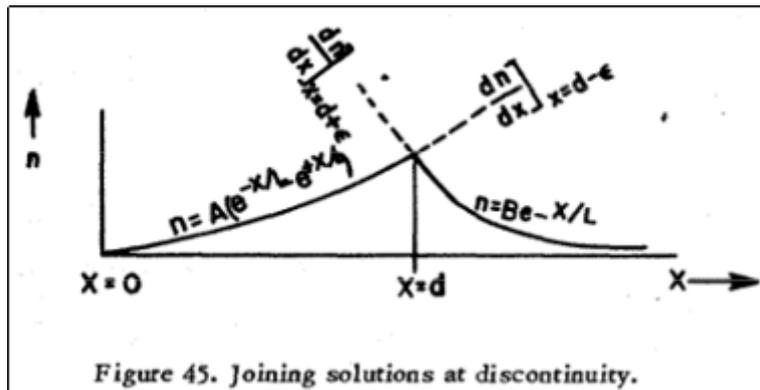
Assumiamo una sorgente puntiforme di neutroni in $x = 0$ sull'asse x . Possiamo calcolare il flusso all'origine per intensità di sorgente unitaria. Questa è precisamente la probabilità di fuga, poiché il confine del mezzo è nell'origine. L'equazione di diffusione di neutroni lenti è in questo caso:

$$\nabla^2 n - \frac{n}{L^2} = 0$$

(dovunque ma a $x = d$), e poiché questo è un problema unidimensionale, la soluzione è

$$n = Ae^{-\frac{x}{L}} - Ae^{+\frac{x}{L}}$$

per $0 \leq x < d$, assumendo la condizione al contorno $n(x = 0) = 0$. Per $x > d$, $n = Be^{-\frac{x}{L}}$.
densità della sorgente, $\frac{\text{neutroni veloci}}{\text{sec}}$.



Queste due soluzioni devono essere uguali per $x = d$ (vedi figura 45) cosicché n è continua e il gradiente $\frac{dn}{dx}$ ha una discontinuità finita. Per trovare il valore di questa discontinuità, integriamo l'equazione completa di diffusione, 7.3, su un piccolo "volume" circondante la sorgente:

$$\int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} \left[\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{n}{L^2} \right] dx = - \int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} \frac{q}{D} dx$$

Il primo termine è $\left[\frac{dn}{dx} \right]_{d-\epsilon}^{d+\epsilon}$, la discontinuità in $\frac{dn}{dx}$. Il secondo termine si annulla quando $\epsilon \rightarrow 0$, e, per ragioni fisiche, n sarà una funzione continua di x . L'ultimo termine è semplicemente $-\frac{Q}{D}$ dove Q è l'intensità della sorgente a $x = d$ e D è il coefficiente di diffusione $\frac{\lambda_1 v}{3}$. Pertanto, le condizioni su n e $\frac{dn}{dx}$ in d sono:

$$\begin{aligned} & \text{(Continuità in } n) && Ae^{-\frac{d}{L}} - Ae^{+\frac{d}{L}} = Be^{-\frac{d}{L}} \\ & \text{(Discontinuità di } -\frac{Q}{D} \text{ in } \frac{dn}{dx}) && -\frac{A}{L}e^{-\frac{d}{L}} - \frac{A}{L}e^{+\frac{d}{L}} = -\frac{B}{L}e^{-\frac{d}{L}} + \frac{Q}{D} \end{aligned}$$

Pertanto $A = -\frac{LQe^{-\frac{d}{L}}}{2D}$ e $B = LQ \left(1 - e^{-\frac{2d}{L}} \right)$.

Il flusso a $x = 0$ è allora $D \left(\frac{dn}{dx} \right)_{x=0} = Qe^{-\frac{d}{L}}$ e per una sorgente di intensità unitaria è semplicemente $e^{-\frac{d}{L}}$. Questo dà la probabilità, $p(d)$, che un neutrone lento ad una distanza d dalla superficie di contorno sfugga eventualmente dal mezzo.

⁴Vedi l'articolo di Fermi sul moto dei neutroni in sostanze idrogenate in Ricerca Sci. 7:12 (1936).

Prima di usare questo risultato per trovare l'albedo di un tale mezzo unidimensionale per neutroni incidenti sul confine dall'esterno, affrontiamo il problema in un altro modo. Oltre ai metodi di diffusione, vi è un modo più rigoroso ed esatto per affrontare il problema discusso. Per trovare la densità neutronica in un particolare volume V al tempo t , si deve conoscere la densità di neutroni che si muovono verso V e sono nell'altro volume a vari tempi precedenti t' così che (considerando le loro velocità e distanze da V) essi saranno in V al tempo t . La densità di neutroni in V al tempo t sarà espressa come una specie di somma o integrale di queste altre densità di neutroni. Ciò dovrebbe portare ad una equazione integrale nella densità di neutroni n .

Pertanto, oltre al metodo dell'equazione differenziale per risolvere il problema della diffusione, vi è un metodo con una equazione integrale. Ci si deve fermare un momento e confrontare i relativi vantaggi dei due metodi. Ponendo l'equazione differenziale, si sono assunte le quantità n , $\frac{dn}{dx}$, ecc. come variabili lentamente rispetto al libero cammino medio delle particelle diffondenti. Inoltre, si era assunto che le densità delle particelle forse sufficientemente grandi così che parlando di quantità come $\frac{dn}{dx}$, avessero senso. In particolare, non ci dovremmo aspettare che la soluzione di un problema come il seguente con i metodi di diffusione desse risultati fisicamente validi: "Trovare $n(r, \theta, \phi)$, la densità di neutroni lenti in una sfera di raggio $\frac{\lambda}{2}$, se vi è una sorgente puntiforme di neutroni lenti al centro della sfera e λ è il libero cammino medio dei neutroni lenti nel mezzo della sfera". Non vi sono, tuttavia, restrizioni sull'uso del metodo dell'equazione integrale. Non sono necessarie assunzioni sulla variazione di $\frac{dn}{dx}$ con la distanza, ecc. I metodi dell'equazione integrale sono più generali e di solito più difficili. Si usa spesso un espediente per i problemi di diffusione tramite equazioni differenziali e relative condizioni al contorno per dare almeno un'idea approssimativa sulla funzione in questione. Questa è la procedura che qui seguiremo. Abbiamo ottenuto $p(d)$, la probabilità che un neutrone posto a d unità dal limite di un mezzo unidimensionale possa sfuggirgli, per mezzo dell'equazione differenziale. Si applichi ora il metodo dell'equazione integrale.

Consideriamo un neutrone in d . Quando lascia d , può avvenire una delle due cose. Può andare a sinistra (verso il limite), o a destra, ognuna con il 50% di possibilità. Se va a sinistra, sfugge prima di subire una collisione, o può avere una collisione. La probabilità che un neutrone in d sfugga senza una collisione è, pertanto, il prodotto $\frac{1}{2} \times e^{-\frac{d}{\lambda}}$, dove λ è il libero cammino medio tra collisioni (libero cammino medio per diffusione quando $\sigma_s \gg \sigma_a$). Pertanto, un neutrone può sfuggire anche se subisce una collisione. Supponiamo che il neutrone abbia la sua prima collisione in x e che $\pi(x)$ sia la probabilità che un neutrone da d subisca la sua prima collisione a x (a destra o a sinistra di d). Ora $p(x)$ è la probabilità che un neutrone a x possa sfuggire. La probabilità $p(d)$ che un neutrone a d possa sfuggire è formata da due termini, il primo dei quali è la probabilità di sfuggire senza collidere, e il secondo è la somma di tutti i possibili prodotti di $\pi(x)p(x)$, cioè. la probabilità che il neutrone sia diffuso in x per la probabilità di sfuggire da x :

$$p(d) = \frac{1}{2}e^{-\frac{d}{\lambda}} + \sum_{tutti\ x} \pi(x)p(x)$$

Nell'equazione si assume che vi sia una diffusione isotropa nel sistema del laboratorio, cioè, che $p(x)$ dipenda solo da x e non dalla parte dalla quale il neutrone arriva in x . In dettaglio, la somma si dovrebbe scrivere:

$$\frac{1}{2} \int_0^d e^{-\frac{(x-d)}{\lambda}} \frac{dx}{\lambda} p(x) \frac{N-1}{N} + \frac{1}{2} \int_d^\infty e^{-\frac{(x-d)}{\lambda}} \frac{dx}{\lambda} p(x) \frac{N-1}{N} \quad (7.13)$$

dove il primo integrale dà la probabilità che un neutrone che parte da d arrivi da sinistra, subisca una collisione in x , ma possa alla fine sfuggire, e il secondo integrale dà la probabilità per la stessa cosa con moto iniziale da destra. N nella 7.13 è il rapporto $\frac{\sigma_s}{\sigma_s + \sigma_a}$ dato nella 7.12, il numero medio di collisioni di diffusione con assorbimento. La probabilità che la collisione in x sia una diffusione è $\frac{\sigma_s}{\sigma_s + \sigma_a}$ o $\frac{N}{N-1} \simeq \frac{N-1}{N}$ per $N \gg 1$. Semplificando la 7.13 combinando gli integrali e sommando la probabilità di sfuggire senza alcuna collisione si ha:

$$p(d) = \frac{1}{2}e^{-\frac{d}{\lambda}} + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-lx - \frac{dx}{\lambda}} \frac{dx}{\lambda} p(x) \frac{N-1}{N} \quad (7.14)$$

Poiché la soluzione dell'equazione differenziale $p(d) = e^{-\frac{d}{L}}$, troviamo tuttavia $p(d) = Ae^{-\alpha d}$ come la soluzione di questa equazione integrale. Dato questo, troviamo che:

$$p(d) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N+1}} e^{-\frac{d}{\lambda\sqrt{x}}} \quad (7.15)$$

Dalla 7.12 notiamo che $N = \frac{\lambda}{\lambda_t} = \frac{3L^2}{\lambda_t \lambda}$. Esprimendo l'esponentiale della 7.15 in termini di L si ha $\exp\left(-\frac{d\sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{3L}}\right)$, che si può confrontare all'esponentiale $\exp\left(-\frac{d}{L}\right)$ derivato dal metodo dell'equazione differenziale.

Siamo ora pronti ad affrontare il problema iniziale di trovare l'albedo. Dico che un fascio di neutroni lenti si muove lungo l'asse x da sinistra (x negativa) e urta il piano $x=0$. La probabilità che un neutrone del fascio

faccia la sua prima collisione in dx a x è $e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{dx}{\lambda}$. La probabilità che non venga assorbito e che sfugga è $p(x) \frac{N-1}{N}$. pertanto l'albedo è:

$$\beta = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{dx}{\lambda} p(x) \frac{N-1}{N} = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N+1}} \quad (7.16)$$

Un mezzo non assorbente ($N \rightarrow \infty$) dovrebbe restituire tutti i neutroni e avere un albedo uguale a 1.

Se vogliamo conoscere β per un angolo di incidenza θ siamo obbligati a lasciar cadere l'approccio unidimensionale e il problema diviene più difficile. Il risultato è:

$$\beta(\theta) = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N} + \sqrt{3 \cos \theta}} \quad (7.17)$$

Questo è inconsistente con il primo risultato per $\theta = 0$, solo perché questa soluzione permette un percorso maggiore e quindi maggiori possibilità di assorbimento. β diviene quindi un poco inferiore.

Supponiamo di voler misurare l'albedo per neutroni lenti nella paraffina. Una misura diretta appare difficile, anche se un fascio collimato di neutroni lenti può essere fatto incidere su una parte di paraffina, i neutroni dovrebbero uscire a tutti gli angoli dalla superficie superiore della paraffina, e la loro rivelazione non sarebbe facile. Un modo più semplice per trovare l'albedo è il seguente. Si pone un rivelatore a lamina sottile⁵ di neutroni lenti (figura. 46) in qualche posto nel mezzo di una massa di paraffina i cui contorni sono sufficientemente lontani dalla lamina di modo che la paraffina può essere considerata di estensione infinita. Per mezza di una sorgente di neutroni, induciamo un'attività nella lamina.

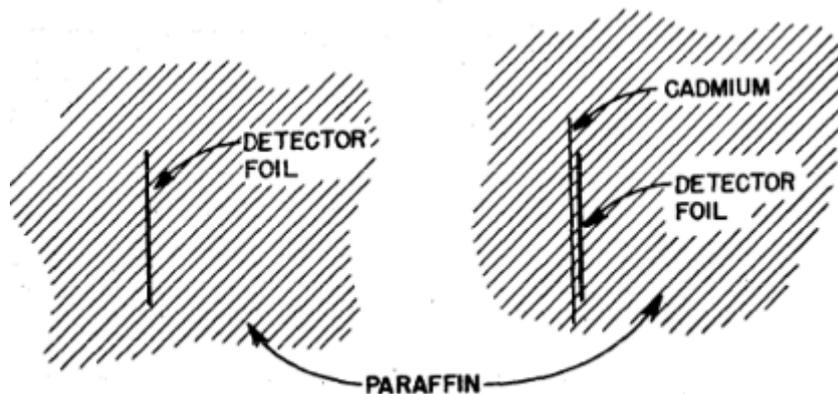


Figure 46. Measurement of albedo.

Chiamiamo questa attività A . Sul lato posteriore della lamina mettiamo del cadmio in grado di assorbire tutti i neutroni lenti che lo colpiscono ma non sufficiente a distorcere il flusso di neutroni in modo significativo. Si misuri la nuova attività nel rivelatore a lamina. Chiamiamo questa attività B . Il rapporto $\frac{A}{B}$ produce una semplice relazione all'albedo. Per capire questo, si consideri il numero di neutroni ν che colpisce la lamina ogni secondo nella situazione B . È chiaro che per una distribuzione uniforme di neutroni lenti, la lamina nel caso A sarà colpita da ν neutroni al secondo da ogni lato e subirà l'urto di almeno 2ν neutroni lenti al secondo. In realtà, più di 2ν neutroni lenti colpiranno la lamina nel caso A , perché alcuni dei neutroni passano attraverso la lamina e possono ritornare e ripassare un'altra volta, e non vi sarà il cadmio che possa prevenire tale caso (vedi figura 47). Infatti, possiamo calcolare il numero medio di volte in cui un neutrone sul punto di colpire la lamina passerà attraverso di essa prima di essere infine assorbito nella paraffina. Certamente la probabilità che questo neutrone ritorni attraverso la lamina è β , l'albedo della paraffina per neutroni lenti.

⁵Con lamina sottile si intende un rivelatore dove vi è una piccola modifica della distribuzione dei neutroni dovuta alla presenza della lamina, cioè, uno per il quale $\sigma_{tot}n\delta \ll 1$, dove σ_{tot} è la sezione d'urto totale, n il numero di atomi per cm^3 , e δ lo spessore della lamina.

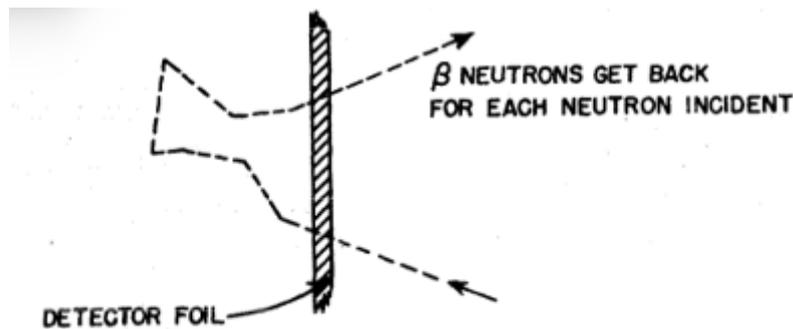


Figure 47. Multiple transmission in albedo experiment.

La probabilità che faccia almeno due viaggi è $\beta \times \beta$ o β^2 , e così via. Allora il numero totale di passaggi attraverso la lamina per un neutrone è in media:

$$1 + \beta + \beta^2 + \dots = \frac{1}{1 - \beta}$$

Pertanto, vi dovrebbero essere $\frac{2\nu}{1-\beta}$ neutroni lenti che colpiscono la lamina ogni secondo, piuttosto che semplicemente 2ν . Da ciò segue che:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{2\nu}{1-\beta}}{\nu} = \frac{2}{1-\beta} \quad \beta = 1 - 2\frac{B}{A} \quad (7.18)$$

In questo modo una misura delle due attività A e B basta a determinare l'albedo. Per la paraffina, $\frac{A}{B}$ è 11. Dalla 7.18, segue che l'albedo per la paraffina è $\beta = 0.82$. Questo tipo di misura non sarà fattibile con uno scarso assorbitore di neutroni, perché abbiamo assunto che la lunghezza di diffusione nel mezzo sia piccola rispetto alle dimensioni della lamina, cioè, che la maggior parte delle "riflessioni" avvenga vicino alla lamina. Inoltre, se il rivelatore non è sottile, agisce come il cadmio, e si deve effettuare una correzione per l'assorbimento nella lamina.

PROBLEMI

1. La lunghezza di diffusione per neutroni termici in acqua è 2.8 cm . Ora la distribuzione è Maxwelliana, così che la velocità media è $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$. Per calcolare il libero cammino medio per assorbimento (Λ), dobbiamo usare σ_a per neutroni con velocità \bar{v} piuttosto che v . Data $\sigma_a = 0.31 \text{ barn}$ per neutroni a temperatura ambiente ($v = 2200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; si veda la figura 11) calcolare Λ per neutroni \bar{v} . Qual è il libero cammino medio di trasporto per neutroni termici (distribuzione Maxwelliana) in acqua?
2. Se ξ è la frazione media (mediata sugli angoli di incidenza) dei neutroni incidenti assorbiti nella lamina, trovare la relazione tra $\frac{A}{B}$ e l'albedo.

Chapter 8

FISSIONE NUCLEARE

8.1 Le energie di legame dei nuclei

Prima di procedere ad affrontare il tema della fissione, è necessaria conoscere la natura generale delle forze che tengono uniti i nuclei. Per tale scopo, dobbiamo trovare un'espressione per l'energia di legame nucleare. Come abbiamo visto nel Capitolo III la massa nucleare è correlata all'energia di legame. La relazione è semplice:

$$M = (A - Z) M_n + Z M_p - \left(\frac{\text{Energia di legame}}{c^2} \right) \quad (8.1)$$

con M la massa nucleare, M_n la massa del neutrone, M_p la massa del protone, e A, Z la massa e il numero atomico, rispettivamente. Questa relazione mostra che possiamo verificare ogni conclusione sulle energie di legame nucleare confrontandole con le masse nucleari.

In assenza di una esatta conoscenza delle forze nucleari, il problema di trovare la dipendenza dell'energia di legame da Z e A è difficile. Possiamo interrogare la nostra conoscenza empirica sui nuclei per le implicazioni riguardanti le forze nucleari o l'energia di legame. La nostra conoscenza empirica include:

- Dimensione del nucleo e costanza della densità della materia nucleare
- Tendenza di Z ad essere uguale a $\frac{A}{2}$
- Efficacia delle forze coulombiane nel rendere Z minore di $\frac{A}{2}$
- Rarità di nuclei con A pari e Z dispari

Ognuno di questi fattori verrà considerato separatamente nei suoi effetti sull'energia di legame nucleare.

Consideriamo per prima la dimensione del nucleo. Dalla diffusione e altri esperimenti con nuclei pesanti si è trovato che i raggi nucleari sono proporzionali a $A^{\frac{1}{3}}$. Infatti,

$$R = 1.48 \times A^{\frac{1}{3}} \text{ cm} \quad (8.2)$$

in buon accordo con i dati conosciuti, sebbene questa formula non ha molto senso se applicata a nuclei molto leggeri. Per il nostro scopo, la formula implica che la densità media delle particelle costituenti è circa la stessa in tutti i nuclei. È del tutto probabile che la densità entro un singolo nucleo non varia molto da una regione interna al nucleo all'altra. Se una certa energia di legame derivante dalle forze nucleari è associata con due particelle nucleari interne al nucleo poste a una data distanza, è chiaro che da quanto detto che questa energia di legame per unità di volume del nucleo è costante, nella misura in cui le distanze medie tra particelle costituenti sono ovunque le stesse. Concludiamo, pertanto, che l'energia di legame dei nuclei è essenzialmente proporzionale al loro volume o ad A . In termini dell'energia dei nuclei (la negativa dell'energia di legame), abbiamo allora $E_1 \sim -a_1 A$, dove a_1 è il coefficiente positivo che queste considerazioni non bastano a determinare. Ciò non è del tutto accurato, poiché non abbiamo considerato il fatto che i componenti del nucleo alla sua superficie non sono così strettamente legati come quelli interni. Il numero di tali particelle è proporzionale all'area della superficie così che dobbiamo sottrarre un numero proporzionale a $A^{\frac{2}{3}}$ (o R^2) dalla nostra precedente stima di E_1 . Pertanto:

$$E_1 = -a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} \quad (8.3)$$

La seconda considerazione richiede di tenere in conto della tendenza di Z ad essere uguale a $\frac{A}{2}$. Poiché A è il numero totale delle particelle nucleari (neutroni più protoni), questa tendenza significa che vi è una preferenza affinché il numero di protoni sia lo stesso di quello dei neutroni. (Mentre è vero che per nuclei pesanti vi sono molti meno protoni, assumeremo che questo è dovuto alla repulsione elettrostatica tra protoni, che sarà

considerata in seguito. In altre parole, stiamo assumendo che se non agissero forze coulombiane tra i protoni, nei nuclei ci sarebbe uno stesso numero di protoni e neutroni). Vi sono almeno tre tipi di forze nucleari dentro un nucleo: neutrone-protone, protone-protone, e neutrone-neutrone. Alla luce dell'uguaglianza tra il numero dei protoni e dei neutroni nei nuclei, gli ultimi due tipi di forze devono essere dello stesso ordine di grandezza. Se le forze protone-protone fossero più intense, i nuclei con più protoni che neutroni dovrebbero i nuclei con più protoni tenderebbero ad essere più legati, e quindi, più stabili di quelli con ugual numero di ognuno. Se l'energia delle isobare (stesso A , diverso Z) fossero disegnate in funzione di Z , si dovrebbe ottenere una curva simmetrica rispetto a $Z - \frac{A}{2}$, mentre i nuclei con Z protoni e $A - Z$ neutroni dovrebbero avere la stessa energia di quelli con Z neutroni e $(A - Z)$ protoni, assumendo l'uguaglianza delle forze neutrone-neutrone e protone-protone. La curva isobara in figura 48 mostra un minimo a $Z = \frac{A}{2}$ poiché nuclei per i quali $Z = \frac{A}{2}$ sono i più stabili.

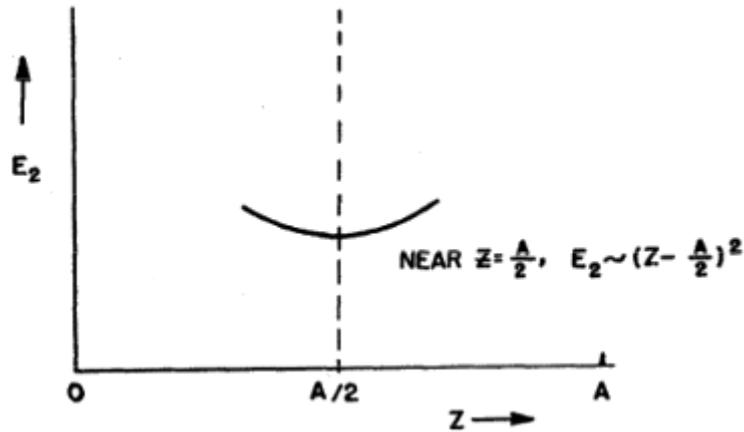


Figure 48. Quadratic shape of energy surface.

Pertanto E_2 , l'energia associata con la deviazione dall'uguaglianza nel numero di protoni e neutroni, deve essere proporzionale ad una certa potenza pari di $Z - \frac{A}{2}$. Per semplicità, consideriamo che nell'intorno di $Z = \frac{A}{2}$, l'energia E_2 è proporzionale al quadrato di $Z - \frac{A}{2}$. Per vedere quali "dimensioni" del coefficiente ci sarebbero, si dovrebbero considerare due nuclei con lo stesso valore di $\frac{Z}{A}$, uno avente un A doppio dell'altro, così che entrambi i nuclei avrebbero lo stesso eccesso percentuale di neutroni sui protoni, ma uno ha il doppio di particelle. Il nucleo più grande avrà E_2 doppia se associamo con ogni particella extra o disaccoppiata una certa energia fissata. Segue allora che E_2 dovrà essere proporzionale ad A , o:

$$E_2 = a_3 A \left(\frac{Z}{A} - \frac{1}{2} \right)^2 = a_3 \frac{\left(\frac{A}{2} - Z \right)^2}{A} \quad (8.4)$$

Si può tener conto dell'effetto delle forze di Coulomb tra protoni valutando l'energia E_3 associata con i Z protoni distribuiti in una sfera di raggio R . Questo è un semplice problema di elettrostatica se consideriamo la carica uniformemente distribuita nella sfera. In questo caso, l'energia potenziale di una carica Ze uniformemente distribuita in una sfera di raggio R è proprio $\frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}$ in erg. Sostituendo R nella 8.1 e "e" per poi convertire gli erg in massa unitaria, l'energia coulombiana diviene:

$$E_3 = 0.000627 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \quad (8.5)$$

La nostra ultima considerazione riguarda la dipendenza dell'energia di legame dal numero pari o dispari di protoni e neutroni. Si è trovato empiricamente che vi sono pochi nuclei stabili con peso atomico A pari e numero atomico Z dispari. Infatti, si può dire che il nuclei più stabili tendono ad avere Z e $A - Z$ pari. Minori stabilità si hanno nei casi Z dispari, $A - Z$ pari, $A - Z$ dispari. Chiaramente le forze tra componenti nucleari devono, tuttavia, mostrare una dipendenza sia per numero pari che dispari di neutroni e protoni e così pure per l'energia di legame. Una spiegazione è stata proposta ed è basata sull'idea che i componenti tendono a riempire i livelli nucleari inferiori e che esistono forze forti tra le coppie di neutroni o protoni che possono riempire lo stesso livello. Si è determinato empiricamente che $E_4 = \delta$ può essere assegnato come un termine di correzione alle nostre espressioni per l'energia di legame sulle seguenti basi (δ in unità di massa):

$$\begin{aligned} \delta &= 0 && \text{per } A \text{ dispari} \\ \delta &= -\frac{0.036}{A^{\frac{3}{4}}} && \text{per } A \text{ pari, } Z \text{ pari} \\ \delta &= +\frac{0.036}{A^{\frac{3}{4}}} && \text{per } A \text{ pari, } Z \text{ dispari} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Combinando i vari termini nelle equazioni dalla 8.3 alla 8.6 e sostituendo nella 8.1, la massa nucleare (in unità di massa):

$$M = 1.00893 A - 0.00081 Z - a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{A} + 0.000627 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \delta$$

Dobbiamo ora valutare i coefficienti a_1, a_2, a_3 . Per primo, a_3 è determinato ponendo $\frac{dM}{dZ} = 0$. L'equazione risultante tra Z e A ,

$$Z_A = \frac{0.00081 + a_3}{2a_3 + 0.001254 A^{\frac{2}{3}}} \cdot A \quad (8.7)$$

è quella per cui M è un minimo e, pertanto, dà i valori più stabili di Z per ogni A . Adattando questa equazione agli isotopi stabili ben noti si ha il miglior valore per a_3 di 0.083 in unità di massa. Le altre costanti, a_1 e a_2 , sono determinate adattando l'equazione per M ai dati conosciuti delle masse nucleari con i valori risultanti $a_1 = 0.00504$ e $a_2 = 0.014$. Pertanto l'espressione completa per la massa nucleare in funzione di A e Z è:

$$M(A, Z) = 0.99389 A - 0.00081 Z + 0.014 A^{\frac{2}{3}} + 0.083 \frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{A} + 0.000627 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \delta \quad (8.8)$$

Questa formula può essere usata per il calcolo delle energie di legame di neutroni negli isotopi dell'uranio. Questa informazione sarà molto strettamente connessa con la capacità dei neutroni lenti di fissionare questi vari isotopi, come vedremo. Calcoliamo l'energia di legame di un neutrone nell' U^{235} .

$U^{235} : M$	=	235.11240 <i>dalla 8.8</i>
<i>Neutrone</i> : M	=	1.00893
<i>Somma</i>	=	236.12133
$U^{236} : -M$	=	-236.11401 [<i>sempre per 8.8</i>]
<i>Energia di legame</i>	=	0.00732 <i>unità di massa o 6.81 MeV</i>

Analogamente le energie nucleari dei neutroni $U^{236}, U^{237}, U^{238}$ dovrebbero essere rispettivamente 5.51, 6.56, 5.31 MeV. L'alternanza delle grandezze delle energie di legame deriva dal fattore δ . Questa alternanza è sovrapposta alla regolare variazione di $M(A, Z)$ con A e Z dati dagli altri cinque termini della 8.8.

Esempi ulteriori di questo tipo sono presentati nei problemi alla fine di questo capitolo.

8.2 Il processo di fissione - Considerazioni sull'Energia

La curva della frazione di impacchettamento (si veda la sezione 3.2 e la figura 15) mostra che nella regione dell'uranio, la frazione di impacchettamento è dell'ordine di 0.0006, mentre per i nuclei di medio peso è dell'ordine di -0.0007. Questo implica che i nuclei pesanti non sono energeticamente stabili e tendono a spezzarsi in due nuclei di medie dimensioni. Esaminando ciò più da vicino, vediamo che l'energia che dovrebbe essere rilasciata in una tale divisione è $M(A, Z) - 2M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right)$. Se questo è positivo, la divisione è energeticamente possibile. Questa differenza può essere scritta in termini della frazione di impacchettamento:

$$A \left[\frac{M(A, Z) - A}{A} - \frac{M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) - \frac{A}{2}}{\frac{A}{2}} \right] \quad (8.9)$$

o A volte la differenza nella frazione di impacchettamento. Pertanto, quando la differenza tra la frazione di impacchettamento è positiva, allora la fissione è energeticamente possibile. Si deve osservare che la differenza nella frazione di impacchettamento non restituisce l'energia rilasciata in un processo di fissione. La figura 49 mostra la curva di N in funzione di Z (vedi anche la figura 12). La transizione da P a Q sul diagramma produce una emissione di energia proporzionale alla differenza nella frazione di impacchettamento. In realtà nella fissione lo stato finale è sulla curva degli isotopi stabili nel punto R della figura 49. Per esempio, se $A = 240$, allora $\frac{A}{2} = 120$; $Z_A = 93.74$, 8.7, se $A = 20$ allora $\frac{Z_A}{2} = 46.87$. Usando $\frac{A}{2} = 120$ e la formula per Z_A si ottiene lo stabile $Z_{120} = 51.15$, o circa 4 unità da $\frac{Z_A}{2}$. (Cioè $\frac{Z_A}{2} < Z_{\frac{A}{2}}$). Ciò significa che circa quattro particelle beta saranno emesse come frammenti dopo la fissione.

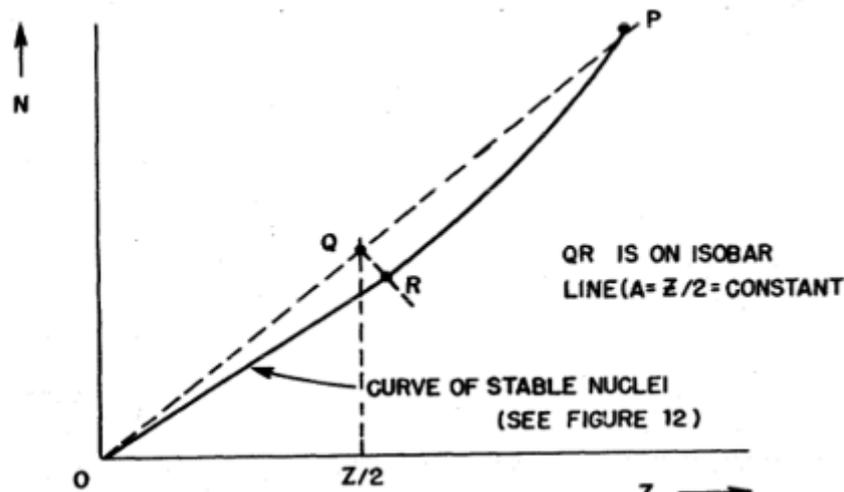


Figure 49. Energy release on fission.

Dalle curve della frazione di impacchettamento, appare che la fissione è esoenetica per tutti i nuclei con A maggiore di 100. Perché, allora, la fissione è un processo raro? Consideriamo un nucleo che si divide in due frammenti di fissione. Rappresentiamo l'energia del nucleo, cioè, i frammenti come una funzione della distanza tra le due parti. Per una separazione infinita, l'energia è posta uguale a 0. Quando i frammenti sono collegati ($r = 0$), sappiamo dalle misure che l'energia è di circa 200 MeV o superiore. Cosa si può dire dei punti tra $r = 0$ e infinito? Fino alla distanza dell'ordine del diametro dei frammenti, è soltanto l'energia coulombiana tra le particelle che contribuisce all'energia tra di esse, poiché è la sola forza che agisce tra i frammenti. Questa energia è $\frac{(\frac{Ze}{2})^2}{r}$. Quando r è minore del diametro del frammento, l'energia deve cambiare in modo tale da divenire l'energia di fissione (200 MeV) a $r = 0$. Se $\frac{(\frac{Ze}{2})^2}{r}$ è più piccolo, uguale o maggiore dell'energia di fissione per r uguale al diametro dei frammenti, allora vi sono tre corrispondenti curve di transizione, figura 50, che si possono tracciare per collegare la curva di potenziale coulombiano all'energia nota a $r = 0$. Presumibilmente nuclei stabili con $A > 100$ sono rappresentati dalle curve di tipo I, con altezza delle barriere dell'ordine di 50 MeV , poiché il potenziale coulombiano per r uguale al diametro del nucleo è maggiore dell'energia di fissione. Presumibilmente l'uranio dovrebbe essere rappresentato da una curva come quella di tipo II, dove la barriera è di circa 6 MeV . Sostanza la cui curva di energia è data dalla III non dovrebbero esistere a lungo. Quest'ultima curva presumibilmente rappresenta transuranici non esistenti¹.

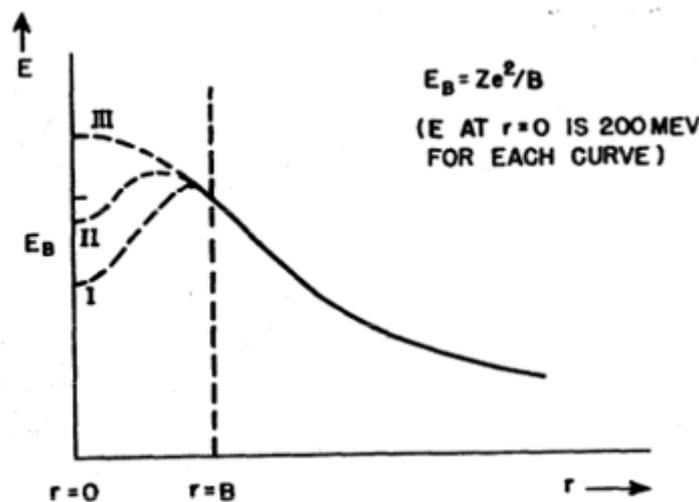


Figure 50. Transition curves for fission fragments.

Si consideri $r = B$ dell'ordine del diametro di un frammento di fissione. Allora dalla 8.2, $B = 2 \times 1.48 \cdot 10^{-13} (\frac{A}{2})^{\frac{1}{3}}$. Usando questo valore di B , possiamo rappresentare E_B (il potenziale coulombiano a $r = B$) in funzione del numero di massa A , figura 51. In modo analogo possiamo tracciare la curva E_A , l'eccesso di massa di un nucleo genitore di numero di massa A rispetto a quella dei suoi frammenti (cioè, l'energia di fissione).

¹Per una più dettagliata trattazione delle curve di transizione, si veda l'articolo di Bohr, Wheeler, Phys. Rev. 56:426(1939).

Quest'ultima curva diviene negativa sotto $A = 85$ e interseca la curva di E_B a circa $A = 250$. Da un tale grafico, si può ricavare $E_B - E_A$ per ogni A . La quantità $E_B - E_A$ è una misura dell'altezza della barriera energetica contro la fissione.

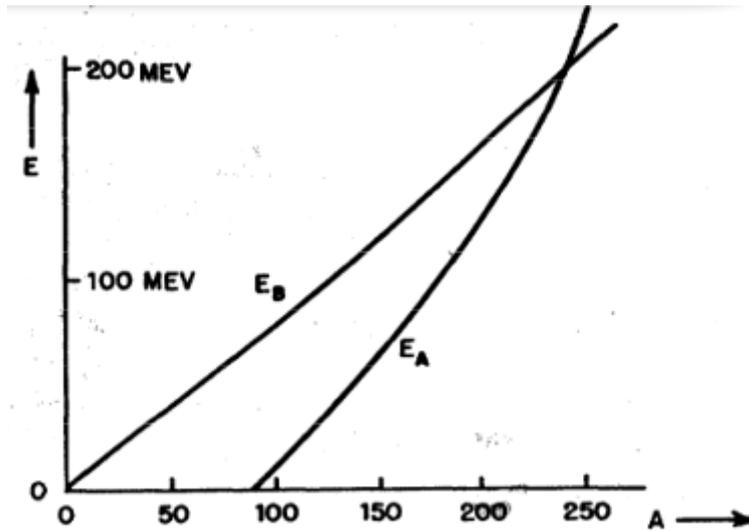


Figure 51. Energy barrier against fission.

È possibile, naturalmente, investigare con maggiore precisione la forma dell'energia contro la curva di separazione vicino a $r = 0$ se si assume un modello specifico. Considerando il modello a goccia liquida di Bohr, assumiamo che il nucleo originario sia una sfera e calcoliamo poi la variazione in energia per una piccola deformazione. Assumiamo, inoltre, che la sfera all'inizio della separazione, si deformi in un modo semplice, cioè, si allunghi leggermente in una direzione e si appiattisca nella direzione ad essa perpendicolare, divenendo, quindi, un ellissoide. Se assumiamo che il volume della sfera non cambi divenendo un ellissoide, e ciò è ragionevole alla luce del fatto che tutti i nuclei tendono a mantenere la stessa densità delle particelle nucleari, la variazione in energia del nucleo subito dopo la deformazione sarà dovuta soltanto a due dei cinque fattori discussi nella precedente sezione. Primo, l'energia superficiale tenderà ad aumentare con la deformazione poiché sarà esposta una superficie maggiore. Secondo, l'energia elettrostatica diminuirà poiché le cariche che si respingono saranno separate di una certa quantità. Pertanto, avremo almeno due variazioni in energia in senso opposto con la deformazione del nucleo sferico. La superficie o energia capillare è proporzionale all'area della superficie o $A^{2/3}$, e l'energia elettrostatica è proporzionale a $Z^2 A^{1/3}$, che è $\sim A^{2/3}$. L'ultima energia diviene più importante per nuclei pesanti così che per questi è più probabile che l'energia di un nucleo tenda a diminuire con la deformazione, rendendo il nucleo sferico instabile. L'opposto è vero per i nuclei leggeri. Da questo quadro, è nei nuclei pesanti che dobbiamo attenderci la fissione.

Analizziamo in modo più dettagliato la variazione dell'energia di un nucleo sferico appena dopo la distorsione. L'energia superficiale è proporzionale all'area della superficie, che per un ellissoide è:

$$2\pi b^2 + 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a}$$

dove a e b sono rispettivamente il semiasse maggiore e minore. (Notiamo che per $b = a$ questa si riduce a $4\pi b^2$, poiché $\arccos \frac{b}{a} \cong \arctan \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \cong \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$). L'energia elettrostatica di una carica distribuita sul volume di un ellissoide si può mostrare essere:

$$\frac{3}{10} \frac{Z^2 e^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

(Questa si riduce a $\frac{3}{5} \frac{Z^2}{r}$ per $b = a = r$). Consideriamo ora una sfera di raggio iniziale R . Se è allungata in una direzione, allora $a = R(1 + \varepsilon)$. L'asse minore b varia così da mantenere il volume della sfera costante, cioè, $\frac{4\pi}{3} ab^2 = \frac{4\pi}{3} R^3$, da cui $b = \frac{R}{\sqrt{1 + \varepsilon}}$. Sostituendo per a e b nelle due espressioni dell'energia e sviluppando il risultato in potenze di ε , troviamo che l'energia elettrostatica è:

$$\frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R} \left[1 - \frac{1}{5} \varepsilon^2 + \dots \right]$$

e l'energia superficiale è:

$$4\pi R^2 \left[1 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 + \dots \right]$$

Si noti che i primi termini in ognuna di queste equazioni sono rispettivamente l'energia elettrostatica e l'area della superficie della sfera non distorta, mentre i secondi termini sono le correzioni per la distorsione. Il termine correttivo per l'energia elettrostatica è negativo, indicando una sua diminuzione con la distorsione; quella per l'area della superficie è positivo, corrispondente ad un aumento dell'area. Usando opportuni coefficienti per queste energie dalla formula per $M(A, Z)$, la 8.8, l'eccesso di energia dell'ellissoide rispetto alla sfera è:

$$\varepsilon^2 \frac{2}{5} \left[\left(0.014 A^{\frac{2}{3}} \right) - \frac{1}{5} (0.000627) \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \right]$$

La condizione per la stabilità contro la deformazione è che la parentesi sia positiva, cioè:

$$\frac{Z^2}{A} < 44.7 \quad (8.10)$$

Per l'uranio $\frac{Z^2}{A} = 36$, mentre per elementi inferiori il suo valore è ancora minore, indicando che la condizione precedente per l'instabilità è troppo stringente.

In realtà, l'instabilità si manifesterà per valori di $\frac{Z^2}{A}$ più piccoli del valore limite dato dalla 8.10. Per curve di potenziale della forma mostrata in figura 52, la barriera è piuttosto trasparente, e ci si potrebbero aspettare delle fissioni spontanee. La probabilità di fuga attraverso la barriera sarà finita, così che la costante di decadimento rispetto alla fissione non sarà nulla. Anche per U^{238} , vi sono ~ 20 fissioni spontanee per grammo per ora (corrispondenti a "una vita media di fissione" di circa 10^{25} anni), così che per gli atomi più pesanti questo può divenire un fenomeno notevole.

Il nostro principale interesse non riguarda le fissioni spontanee ma le fissioni prodotte dai neutroni. I neutroni possono causare fissioni contribuendo all'energia cinetica e di legame del nucleo. Questa energia è almeno di 5 o 6 MeV (l'energia di legame del neutrone) e può far crescere l'energia dei nuclei per produrre una fissione prima che l'energia eccedente sia persa sotto forma di radiazione gamma. Poiché l'energia di legame dei neutroni nei nuclei con un numero dispari di neutroni è maggiore di quella con un numero di neutroni pari (si veda la 8.6) è ragionevole attendersi che le fissioni con neutroni termici siano prevalenti rispetto a quei nuclei con un numero di neutroni dispari. Ciò è confermato dagli esperimenti. L' U^{238} non è fissionato dai neutroni termici mentre lo è l' U^{235} . Inoltre gli altri materiali "fissionabili", U^{233} e Pu^{239} , hanno ciascuno un numero di neutroni dispari. Da questi fatti e dalle soglie di fotofissione, si può stimare che per l'uranio l'altezza della barriera di fissione è dell'ordine dei 5 MeV .

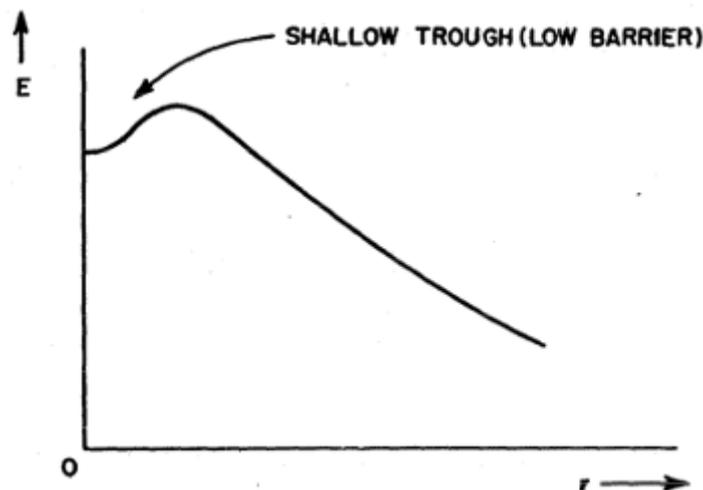


Figure 52. Possible potential barrier in spontaneous fission.

Si deve ricordare nella considerazione della competizione tra la fissione e altri processi, non è sufficiente considerare solo le energie, come abbiamo fatto. Per la fissione, si deve non solo avere un aumento dell'energia verso il massimo della barriera, ma è pure necessario che questa energia sia concentrata in modi opportuni di moto per la fissione. Ciò può essere fatto qualche volta, così che i processi che competono possono avvenire a spese della fissione. Poiché il numero di modi, e quindi di modi inutili non di fissione, aumenta con l'energia di eccitazione, può, tuttavia essere molto plausibile che la spiegazione fotofissione con raggi gamma di $\sim 100 MeV$ su nuclei più leggeri non sia stata osservata è perché l'energia non era concentrata nel modo opportuno prima di essere persa per altri processi diversi dalla fissione.

8.3 Processi di fissione - Particelle derivanti

Quando un nucleo subisce una fissione viene osservato, oltre ai due frammenti, un numero di altre particelle. Esse sono neutroni, particelle beta, raggi gamma, e spesso veloci particelle alfa. Alcune di queste sono osservate accompagnare i processi di fissione, e altre sono emesse in diversi tempi successivi alla fissione stessa.

Gli stessi frammenti di fissione sono stati studiati con grande precisione². La distribuzione dei frammenti di fissione per l' U^{235} in funzione della massa, mostrata in figura 53, consiste di due picchi identici ravvicinati con massimi ai numeri di massa 96 e 140.

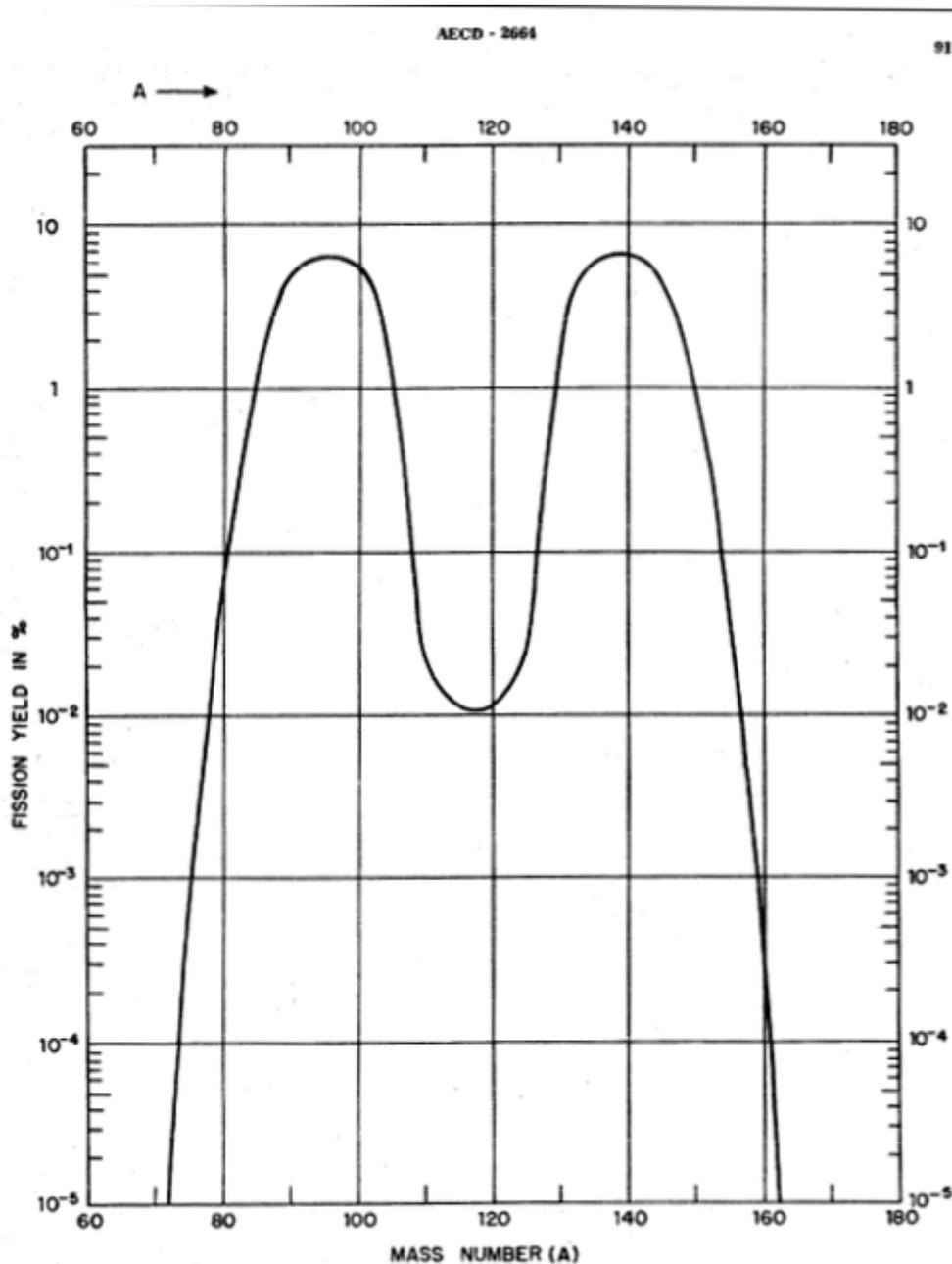
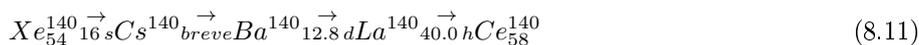


Figure 53. Fission product yield for U 235.

Se l' U^{235} è fissionato da un neutrone e durante il processo di fissione vengono emessi due neutroni, allora il numero di massa corrispondente ad una uguale *suddivisione* sarebbe $A = 117$. Prodotti con uguale suddivisione sono osservati solo con lo 0.01%, mentre quelli massimi (con $A = 96$ e $a = 140$) appaiono circa con il 6.5%. In ogni caso, il frammento di fissione formato è instabile (vedi figura 49) a causa dell'eccesso di neutroni. Per esempio, il nucleo con numero di massa 140, con il 6.3%, diviene stabile con Ce^{140} dopo una sequenza di

²Si veda "Nuclei Formed in Fission: Decay Characteristics, Fission Yields and Chain Relationship" edito da Plutonium Project in J. Am. Chem. Soc. 68: 2411 (1946) e Rev. Mod. Phys. 18:513 (1946).

decadimenti beta:



È stato identificato un grande numero di “prodotti della catena di fissione”.

Si deve notare che la distribuzione di masse dà pure la distribuzione delle relative energie cinetiche dei frammenti di fissione. Ciò è conseguenza della conservazione del momento. Se E_1 e E_2 sono le energie cinetiche dei frammenti di fissione M_1 e M_2 , allora la conservazione del momento richiede che $M_1 V_1 = M_2 V_2$ o $\sqrt{2M_1 E_1} = \sqrt{2M_2 E_2}$. Pertanto, $\frac{M_1}{M_2} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}$, così che il più pesante della coppia dei frammenti di fissione ha la più piccola energia cinetica. Il valore assoluto dell'energia E_1 corrispondente alla massa M_1 segue dal fatto che l'energia totale $E_1 + E_2$ è una costante ($\sim 160 \text{ MeV}$) e la massa totale $M_1 + M_2$ è una costante ($\sim 234 \text{ u.m.}$).

I neutroni emessi nella fissione sono classificati o come “immediati” o come “ritardati”. Il termine “immediati” significa che i neutroni lasciano i frammenti di fissione dopo la loro formazione in tempi inferiori a quelli misurabili. Si può stimare un tempo dell'ordine di 10^{-15} s considerando il prodotto di fissione come la separazione di una goccia. I frammenti finali non hanno forma sferica (figura 54), così essi sono associati a considerevoli energie vibrazionali con oscillazioni attorno alla forma (sferica) di equilibrio del frammento. Questa energia di eccitazione può essere sufficiente ad evaporare un neutrone, specialmente poiché le energie di legame dei neutroni nei frammenti di fissione sono piccole a causa dell'eccesso di neutroni. Per esempio, assumiamo che l' U^{236} venga fissionato da un neutrone e dia luogo a due frammenti con $A = 118$ e $Z = 46$. Usando la formula per $M(A, Z)$, 8.8, si possono calcolare le energie di legame per vari nuclei con peso $A = 118$: (dove $Z = 50$ è il valore stabile per Z se $A = 118$). Pertanto, i neutroni possono essere debolmente legati per i frammenti di fissione. Ogni volta che l'emissione di un neutrone è energeticamente possibile, l'emissione è probabile, a causa dell'assenza di una barriera per neutroni. Si può concludere dalle osservazioni che una considerevole energia di eccitazione deve essere presente nei frammenti, poiché uno o tre neutroni sono emessi per fissione nel caso di U^{235} .

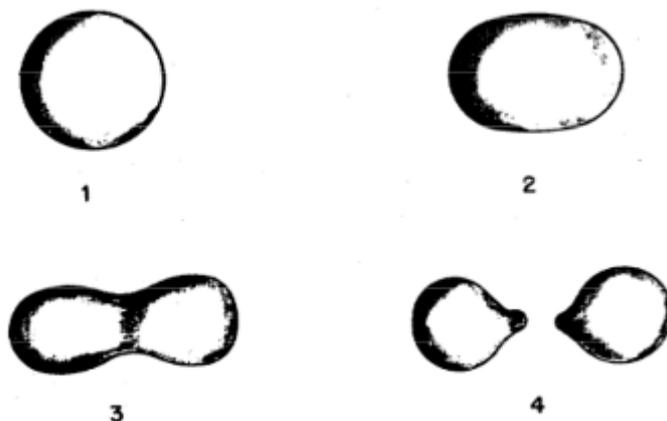


Figure 54. Fission of a liquid drop.

L'energia dei neutroni che escono dalla fissione sono date nella curva di distribuzione in figura 55. Nel sistema del centro di gravità del neutrone e dei frammenti di fissione, la distribuzione di energia del neutrone dovrebbe essere approssimativamente Maxwelliana, con una “temperatura” corrispondente all'eccitazione del frammento. Per avere la curva teorica per la distribuzione nel sistema di laboratorio, si dovrà tener conto del moto del frammento di fissione e della dipendenza della probabilità di emissione dall'energia del neutrone.

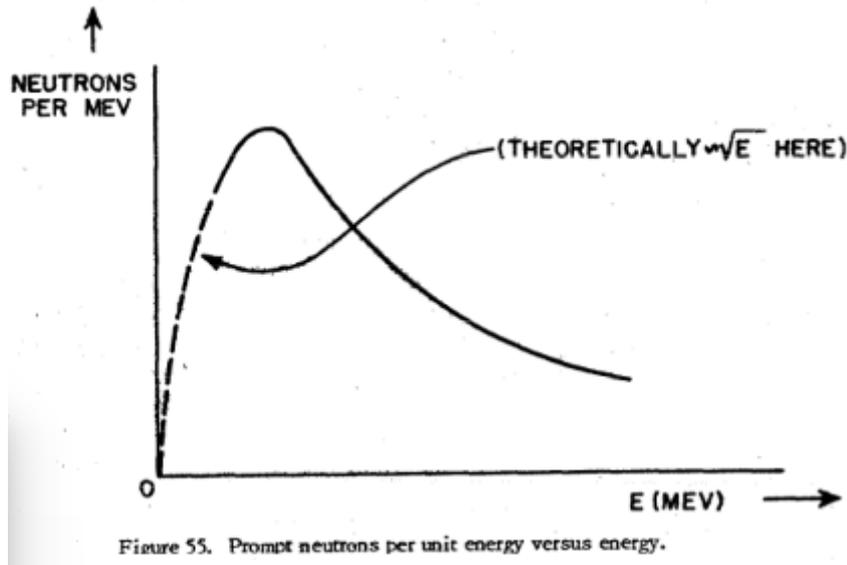


Figure 55. Prompt neutrons per unit energy versus energy.

Oltre a questi neutroni immediati, vi è circa l'1% di quelli ritardati. Per spiegare l'emissione dei neutroni ritardati, si consideri (figura 56) un frammento *A*, che subisce una disintegrazione β divenendo un nucleo *B*. Di solito, questa disintegrazione porterà allo stato stazionario di *B*, ma occasionalmente il nucleo *B* finirà per trovarsi in uno stato eccitato con energia di eccitazione maggiore di quella di legame di un neutrone. In un tale caso, l'emissione di un neutrone diviene del piuttosto probabile. Tali neutroni usciranno molto rapidamente dopo il decadimento β e dovranno, pertanto, mostrare periodi di decadimento che corrispondono ai periodi della disintegrazione di *A* allo stato eccitato di *B*.

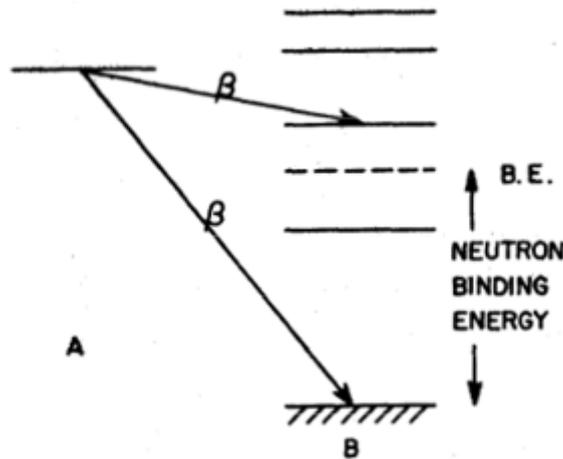


Figure 56. Mechanism of delayed neutron emission.

I periodi dei neutroni ritardati che sono stati osservati e i loro valori sono elencati nella tabella 4. I primi due periodi sono piuttosto ben definiti e sono stati identificati come emessi rispettivamente dal Kr^{97} e Xe^{137} . Il periodo più breve non è per ora definitivamente confermato⁴.

Tabella 4 -Neutroni ritardati dall' U^{235} [Phys. Rev. 74:1330(1948)⁵

Vita Media (s)	Intensità relativa	Rapporto neutroni ritardati e immediati
55.3 ± 0.7	0.054	0.025
22.4 ± 0.4	0.294	0.166
5.5 ± 0.3	0.297	0.213
1.7 ± 0.2	0.279	0.241
0.36 ± 0.07	0.076	0.085
$(0.0044 \pm 0.0007?)$	(~ 0.02)	

³Phys. Rev. T2:545 (147)

⁴Phys. Rev. T4:1330 (1948)

8.4 Il Processo di Fissione - Carattere generale della sezione d'urto

Le sezioni d'urto per la cattura e la fissione per gli isotopi dell'uranio e del plutonio che sono state finora investigate mostrano una dipendenza piuttosto complessa dall'energia. Per alcuni isotopi, la sezione d'urto (n, f) diminuisce con l'energia del neutrone, mentre per altri aumenta. Alcuni isotopi mostrano una soglia per (n, f) , mentre alcuni hanno una sezione d'urto (n, f) che segue la legge $\frac{1}{v}$ a basse energie. Risonanze pronunciate per la cattura appaiono per neutroni a basse energie in isotopi come l' U^{238} . Le risonanze divengono meno significative ad alte energie, dove tendono a divenire più allargate.

PROBLEMI

1. Sostituendo il corretto valore per a_3 nella 8.7 si ottiene una relazione tra Z_A e A . Confrontare i punti previsti da questa equazione con i valori corrispondenti per circa dieci isotopi stabili noti. Fare un confronto grafico.
2. Dempster, in *Physical Review* 53:870 (1938), dà una curva di frazione di impacchettamento in funzione del numero di massa. Usando la 8.8, rappresentare le frazioni attese "teoricamente" a fianco della curva sperimentale di Dempster e osservare il grado di accordo.
3. Calcolare le energie di legame di neutroni del Th^{232} , Au^{197} , Sm^{149} , In^{115} , Mn^{55} . Usare la formula per $M(A, Z)$, come presentato alla fine della sezione 8.1. Dati sperimentali sufficientemente accurati per le masse nucleari (per un'applicazione come questa) esistono solo per i nuclei più leggeri.
4. A quale numero atomico è raggiunta l'instabilità in accordo con la diseuguaglianza della 8.10? Usare l'espressione per Z_A , il valore corretto di Z per un nucleo di peso A , che è stato sviluppato nella 8.7.
5. Derivare una curva di distribuzione dell'energia per neutrone di fissione, assumendo una velocità per il frammento di fissione e una distribuzione Maxwelliana di energie nel sistema del centro di gravità. Assumere poi che la probabilità di fuga di un neutrone sia proporzionale alla sua velocità.