

ESERCIZI DI FISICA

CINEMATICA

Esercizi svolti dal prof. Trivia Gianluigi - scritti con Lyx.

Moto Rettilineo

Velocità media: vettoriale e scalare.

ESERCIZIO 1. Carl Lewis ha corso i $100m$ piani in circa $10s$, e Bill Rodgers ha vinto la maratona (circa $42km$) in circa $2^h 10^m$. (a) Quali furono le loro velocità medie? (b) Se Lewis avesse mantenuto il suo ritmo per un'intera maratona, quale tempo record avrebbe registrato?

Caso 1. (a): $\bar{v}_L = \frac{100m}{10s} = 10m/s$; trasformiamo il tempo in secondi, per cui $2^h 10^m = 2 \cdot 3600 + 10 \cdot 60 = 7800s$; pertanto $\bar{v}_R = \frac{42000m}{7800s} = 5.4m/s$.

Caso (b): dalla formula inversa della velocità media si ha $t = \frac{\text{spazio}}{\text{velocità}} = \frac{42000m}{10\frac{m}{s}} = 4200s = 1^h 10^m$.

ESERCIZIO 2. Per un violento starnuto gli occhi possono chiudersi per la durata di $0.50s$. Se si sta guidando un'auto a $90km/h$, quanta strada si percorre in quel tempo?

SOLUZIONE. la velocità va considerata costante $v = 90km/h = \frac{90}{3.6} = 25m/s$; in tal caso $s = v \cdot t = 25\frac{m}{s} \cdot 0.5s = 12.5m$

ESERCIZIO 3. Un «batter d'occhio» dura circa $100ms$. Per quanto spazio vola un caccia MIG-25, alla velocità di $3400km/h$, durante un battito di ciglio del pilota?

SOLUZIONE. come per l'esercizio precedente $v = 3400km/h = \frac{3400}{3.6} = 944m/s$. Quindi $s = v \cdot t = 944.4\frac{m}{s} \cdot 100 \cdot 10^{-3}s = 94m$

ESERCIZIO 4. Un lanciatore di baseball lancia normalmente la palla a una velocità orizzontale di $160km/h$. Quanto tempo impiega la palla a raggiungere la base distante $18.4m$?

SOLUZIONE. anche qui dobbiamo utilizzare unità di misura omogenee. $v = 160km/h = \frac{160}{3.6} = 44.4m/s$. si usa in questo caso la formula inversa. $t = \frac{s}{v} = \frac{18.4m}{44.4m/s} = 0.414s$.

ESERCIZIO 5. Quando il limite di velocità nello stato di New York fu aumentato da 88.5 a $105km/h$, quanto tempo fu risparmiato da un automobilista che percorreva a quella velocità la distanza di $700km$?

supponendo sempre le due velocità costanti, la differenza nei tempi si può esprimere come $t_1 - t_2 = s \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = 700km \left(\frac{1}{88.5\frac{km}{h}} - \frac{1}{105\frac{km}{h}} \right) = 1.24h = 1^h 14^m$

ESERCIZIO 6. Un'automobile viaggia su un rettilineo per $40km$ a $30km/h$. Prosegue poi nella stessa direzione per altri $40km$ a $60km/h$. (a) Qual è la velocità vettoriale media del veicolo su questo percorso di $80km$? (nel verso positivo delle x) (b) E la velocità scalare media? (c) Tracciare la curva che esprime x in funzione di t indicando come si determina sul grafico la velocità media.

SOLUZIONE. (a): $\vec{v}_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{80 \text{ km}}{2h} = 40 \frac{\text{km}}{h}$

(b): dobbiamo prima calcolare il tempo totale di percorrenza, con moto a velocità costante. $t_1 = \frac{\text{distanza}}{\text{velocità}} = \frac{40 \text{ km}}{30 \text{ km/h}} = (1 + \frac{1}{3})h$; $t_2 = \frac{40 \text{ km}}{60 \text{ km/h}} = \frac{2}{3}h$; sommando i tempi dei due tratti, si ottiene $t = (1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = 2h$. Si può pertanto calcolare la velocità media: $v_m = \frac{\text{distanza totale}}{\Delta t} = \frac{80 \text{ km}}{2h} = 40 \frac{\text{km}}{h}$

ESERCIZIO 7. Calcolare la velocità media di un atleta per questi due casi: (a) marcia per 80m a 1.2m/s e poi corsa per altri 80m a 3m/s su una pista rettilinea e (b) marcia per 1min a 1.2m/s e corsa per 1m a 3m/s, sempre in rettilineo.

Caso 1. (a): la velocità media è espressa dal rapporto tra lo spazio totale percorso e il tempo impiegato. È necessario conoscere i tempi di percorrenza.

$t_{1^\circ \text{ tratto}} = \frac{\text{distanza}}{\text{velocità}} = \frac{80 \text{ m}}{1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 66.6 \text{ s}$; $t_{2^\circ \text{ tratto}} = \frac{80 \text{ m}}{3 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 26.6 \text{ s}$; si ha quindi $t_{\text{totale}} = 66.6 + 26.6 = 93.2 \text{ s}$.

Si può ora calcolare la velocità media, sapendo che $d_{\text{totale}} = 160 \text{ m}$, $v_{\text{media}} = \frac{160 \text{ m}}{93.2 \text{ s}} = 1.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Caso 2. (b): nel secondo caso sono noti i tempi di percorrenza e le velocità; è necessario trovare la distanza totale percorsa.

$s_{1^\circ \text{ tratto}} = v \cdot t = 1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} = 72 \text{ m}$; $s_{2^\circ \text{ tratto}} = v \cdot t = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} = 180 \text{ m}$; si ha quindi $d_{\text{totale}} = 72 + 180 = 252 \text{ m}$. Si può ora calcolare la velocità media, sapendo che il tempo totale è di $2 \text{ min} = 120 \text{ s}$:

$v_{\text{media}} = \frac{252 \text{ m}}{120 \text{ s}} = 2.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

ESERCIZIO 8. Un'auto sale una collina alla velocità costante di 40km/h e ridiscende dalla stessa strada a 60km/h. Calcolare le velocità medie complessive (scalari e vettoriali) per andata e ritorno.

Soluzione velocità media vettoriale: $\vec{v}_{\text{media}} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$ rapporto tra lo spostamento Δx che si effettua in un intervallo Δt e l'intervallo di tempo stesso. In questo caso, poiché l'auto ritorna, percorrendo la stessa strada, al punto di partenza, si ha $x_2 = x_1$ e ciò implica $\Delta x = 0$ e quindi $\vec{v}_{\text{media}} = 0$

velocità scalare media: la distanza totale percorsa è il doppio della strada in salita o in discesa, quindi $s_{\text{totale}} = 2d$. I tempi di percorrenza si possono calcolare in funzione della distanza d : $t_{\text{salita}} = \frac{d \text{ km}}{40 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$, $t_{\text{discesa}} = \frac{d \text{ km}}{60 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$. La velocità media sarà:

$$v_{\text{media}} = \frac{\text{distanza totale}}{\text{tempo}} = \frac{2d \text{ km}}{\left(\frac{d}{40} + \frac{d}{60}\right) \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{2d \text{ km}}{\frac{3d+2d}{120} \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{2d \text{ km}}{\frac{5d}{120} \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{2}{5} \cdot 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

ESERCIZIO 9. Un autobus di linea viaggia da Torino a Mantova, per metà tempo a 56km/h e per il tempo restante a 89km/h. Al ritorno percorre metà della distanza a 56km/h e il resto a 89km/h. Qual è la sua velocità scalare media (a) all'andata, (b) al ritorno e (c) per l'intero percorso? (d) Qual è la velocità vettoriale media complessiva?

Caso 1. (a): il tempo di percorrenza è diviso in due parti uguali $t_{\text{totale}} = t_1 + t_2 = 2t_1$, da ciò segue che $t_1 = \frac{t_{\text{totale}}}{2}$. Possiamo esprimere la distanza totale in funzione del tempo t_1 .

$$s_1 = 56t_1 \quad s_2 = 89t_1 \quad s_{\text{tot}} = s_1 + s_2 = 145t_1$$

la velocità media scalare è sempre $v_{\text{media}} = \frac{\text{distanza totale}}{\text{tempo}}$, per cui

$$v_{\text{media}} = \frac{145t_1}{2t_1} = 72.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Caso 2. (b): al ritorno vi è uguaglianza nelle distanze percorse nei due tratti e non più nei loro tempi di percorrenza, cioè $s_1 = s_2$. Si ha quindi

$$t_1 = \frac{s_1}{56} \quad t_2 = \frac{s_1}{89} \quad t_1 + t_2 = \frac{145s_1}{56 \cdot 89}$$

si ha quindi

$$v_m = \frac{2s_1}{\frac{145s_1}{56 \cdot 89}} = 69 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Caso 3. (c): la velocità media complessiva è data dal rapporto tra la distanza complessiva percorsa e il tempo impiegato a percorrerla. Quest'ultimo è esprimibile come

$$t_{andata} = \frac{s}{72.5} \quad t_{ritorno} = \frac{s}{69} \quad t_{a-r} = t_{ritorno} = \frac{69s + 72.5s}{72.5 \cdot 69} = t_{ritorno} = \frac{141s}{72.5 \cdot 69}$$

da cui :

$$v_m^{totale} = \frac{2s}{\frac{141s}{72.5 \cdot 69}} = 71 \frac{km}{h}$$

Caso 4. (d): essendo ancora il punto di partenza coincidente con quello di arrivo, lo spostamento totale è nullo e nulla sarà pure la velocità vettoriale totale media.

ESERCIZIO 10. La posizione di un oggetto che si muove in linea retta è data dall'espressione $x = 3t - 4t^2 + t^3$, ove x è in metri e t in secondi. (a) Qual è la sua posizione per $t = 1, 2, 3, 4s$? (b) Qual è lo spostamento dell'oggetto nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 4s$? (c) Qual è la velocità media nell'intervallo tra $t = 2s$ e $t = 4s$?

Caso 1. (a): la legge oraria del moto è descritta dalla funzione $x = f(t)$ e quindi per calcolare la posizione nei tempi indicati, sostituisco tali valori alla variabile t e calcolo il valore del polinomio:

$$\begin{aligned} x(1s) &= 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1^2 + 1^3 = 0m & x(2s) &= 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 + 2^3 = -2m \\ x(3s) &= 3 \cdot 3 - 4 \cdot 3^2 + 3^3 = 0m & x(4s) &= 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2 + 4^3 = 12m \end{aligned}$$

Caso 2. (b): per calcolare lo spostamento vettoriale si deve tenere conto delle posizioni iniziale e finale, per cui $\vec{x} = 12m - 0m = 12m$

(c): la velocità media è data da $v_{media} = \frac{12 - (-2)m}{4 - 2s} = 7 \frac{m}{s}$.

ESERCIZIO 11. La posizione di una particella che si muove lungo l'asse x è data in cm dalla relazione $x = 9.75 + 1.50t^3$, ove t è in secondi. Considerando l'intervallo tra $t = 2.00s$ e $t = 3.00s$, calcolare (a) la velocità media, (b) la velocità istantanea per $t = 2.00s$ e (c) per $t = 3.00s$, (d) la velocità istantanea per $t = 2.50s$ ed (e) quando la particella si trova a metà strada tra le sue posizioni per $t = 2.00s$ e per $t = 3.00s$.

Caso 1. (a): calcoliamo la distanza percorsa dopo $2sec$: $x(2) = 9.75 + 1.50 \cdot 2^3 = 21.75m$ e dopo $3sec$: $x(3) = 9.75 + 1.50 \cdot 3^3 = 50.25m$. La velocità media è quindi:

$$v_m = \frac{50.25cm - 21.75cm}{3s - 2s} = 28.5 \frac{cm}{s}$$

Caso 2. (b): per ottenere la velocità istantanea, sostituiamo i valori del tempo nella formula della derivata prima della legge oraria. La derivata prima è $v = 4.50t^2$:

$$v_{ist}(2) = 4.50 \cdot 2^2 = 18 \frac{cm}{s}$$

Caso 3. (c): $v_{ist}(3) = 4.50 \cdot 3^2 = 40.5 \frac{cm}{s}$

Caso 4. (d): $v_{ist}(2.50) = 4.50 \cdot 2.50^2 = 28.1 \frac{cm}{s}$

Caso 5. (e): Quando la particella si trova a metà strada è a $50.25 - 21.75 = 36cm$. Se, quindi, $x = 36cm$, sostituendolo nella legge oraria, si ha:

$$3.6 = 9.75 + 1.50t^3$$

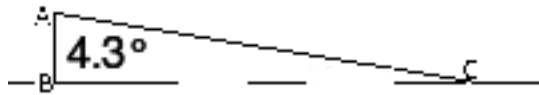
da cui si ottiene il valore di t

$$t = \sqrt[3]{\frac{36 - 9.75}{1.5}} = 2.6s$$

la velocità istantanea a $t = 2.6s$, sarà

$$v_{ist}(2.6) = 4.50 \cdot 2.6^2 = 30.3 \frac{cm}{s}$$

ESERCIZIO 12. Un aereo a reazione di altissime prestazioni, in un esercizio per eludere i radar, è in volo orizzontale a $35m$ dal suolo su un terreno piano. Improvvisamente arriva in un luogo dove il terreno inizia a salire con pendenza di $4,3^\circ$, assai difficilmente riconoscibile a vista, come indicato in figura. Di quanto tempo dispone il pilota per correggere l'assetto dell'aereo per evitare l'impatto col terreno? La sua velocità è di $1300km/h$.



SOLUZIONE. per risolvere questo problema si deve ricorrere alle relazioni trigonometriche; in particolare, schematizzando come in figura, il triangolo ABC rappresenta il rialzo del terreno, il segmento $AB = 35\text{ m}$ la distanza dell'aereo dal suolo; il tratto BC il percorso che l'aereo può compiere prima di urtare il suolo. Si ha quindi

$$BC = \frac{35\text{ m}}{\tan 4.3^\circ} = 465.5\text{ m}$$

il pilota non deve superare questa distanza; il tempo di reazione è legato anche alla velocità

$$t = \frac{465.5\text{ m}}{\frac{1300\text{ m}}{3.6\text{ s}}} = 1.3\text{ s}$$

ESERCIZIO 13. Due treni, che viaggiano alla stessa velocità di 30 km/h , sono diretti uno contro l'altro su uno stesso binario rettilineo. Un uccello che vola a 60 km/h decolla dalla testa di un treno quando si trovano alla distanza di 60 km dirigendosi verso l'altro treno. Appena lo ha raggiunto, inverte la rotta fino a ritornare sul primo treno, e così di seguito. (a) quanti viaggi può fare l'uccello da un treno all'altro prima che i due treni si scontrino frontalmente? (b) qual è la distanza totale percorsa dall'uccello?

Caso 1. (a): calcoliamo via via i vari tratti che l'uccello percorre. Treno e volatile si muovono di moto rettilineo uniforme nello stesso verso e per completare i 60 km si avrà: $60\text{ km} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t + 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$; da ciò si ricava che $t = \frac{2}{3}\text{ h}$. In un tale tempo i due treni percorrono entrambi 20 km . La distanza che li separa, quando l'uccello inverte il proprio volo, sarà $60\text{ km} - 40\text{ km} = 20\text{ km}$. In questo secondo tratto, ripetendo il ragionamento, si avrà $20\text{ km} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$, con $t = \frac{20}{3}\text{ h}$; i due treni si avvicineranno di altri $\frac{40}{3}\text{ km}$. La nuova distanza che li separa è ora di $20\text{ km} - \frac{40}{3} = \frac{20}{3}\text{ km}$. Tale processo di avvicinamento, dal punto di vista matematico, prosegue all'infinito (i numeri coinvolti sono divenuti pure periodici)

Caso 2. (b): la somma di queste distanze successive sarà $\sum_i d_i = 60\text{ km}$

Velocità istantanea: vettoriale e scalare.

ESERCIZIO 14. (a) se la posizione di una particella è data da $x = 4 - 12t + 3t^2$ (t in secondi e x in metri), qual è la sua velocità per $t = 1\text{ s}$? (b) In quell'istante si sta spostando nel senso delle x crescenti o decrescenti? (c) Qual è la sua velocità istantanea? (d) in momenti successivi la velocità è maggiore o minore? (e) C'è un istante in cui la velocità è nulla? (f) Dopo il tempo $t = 3\text{ s}$ potrà accadere che la particella si muova verso sinistra sull'asse delle x ?

Caso 1. (a): per ottenere la legge delle velocità, si deve derivare la legge oraria:

$$v = \frac{dx}{dt} = -12 + 6t$$

dopo un secondo avremo

$$v(1\text{ s}) = -12 + 6 = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Caso 2. (b): per valutare lo spostamento, calcoliamo la posizione iniziale e dopo 1 s :

$$\begin{aligned} x(0) &= 4\text{ m} \\ x(1\text{ s}) &= 4 - 12 + 3 = -5\text{ m} \end{aligned}$$

lo spostamento è quindi verso le x decrescenti

Caso 3. (c): la velocità istantanea scalare $v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Caso 4. (d): la legge delle velocità è espressa da una relazione lineare; la sua forma grafica è quella di una retta crescente; in particolare dai valori negativi.

Caso 5. (e): la velocità diviene nulla quando $-12 + 6t = 0$ cioè per $t = 2\text{ s}$.

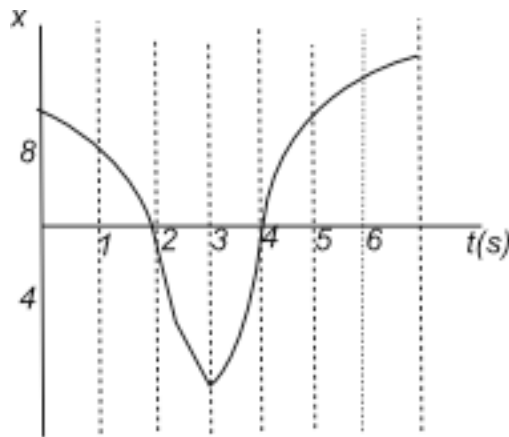
Caso 6. (f): è necessario avere informazioni sulle posizioni e le velocità; in particolare

$$x(3s) = 4 - 36 + 48 = 16m$$

$$v(3s) = -12 + 18 = 6 \frac{m}{s}$$

per $t > 3$ e $v > 3$ i due valori si mantengono positivi e pertanto la particella si sposta verso destra.

ESERCIZIO 15. Il grafico della figura rappresenta un armadillo che si muove a balzi a sinistra e a destra lungo un asse x . (a) Indica in quali intervalli di tempo si troverà (se si troverà) a sinistra dell'origine sull'asse x . Dire anche se e quando la sua velocità sarà (b) negativa, (c) positiva o (d) nulla.



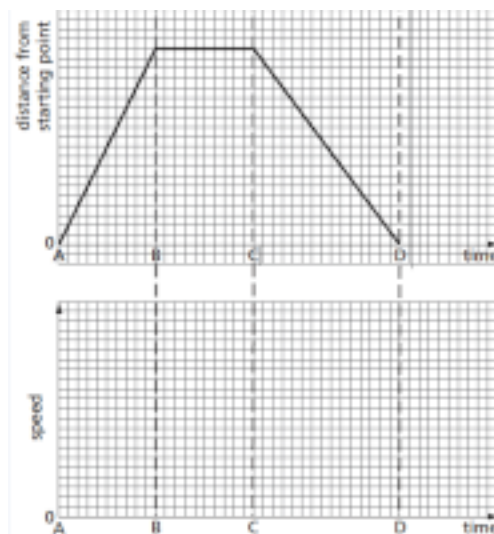
SOLUZIONE. intervallo $0 < t < 2$: il tratto di curva è decrescente con valori dell'ordinata decrescenti al crescere del tempo: si sposta verso sinistra; i coefficienti angolari delle rette tangenti nei vari punti (le derivate prime nel punto e quindi le velocità istantanee) sono negativi: la velocità è negativa.

intervallo $2 < t < 3$: la curva è sempre decrescente e i coefficienti angolari sempre negativi: si sposta verso sinistra con velocità negativa.

intervallo $3 < t < 4$: la curva diviene crescente con coefficienti angolari positivi: lo spostamento è verso destra con velocità positive.

per $t = 3s$ si ha una velocità nulla; nel punto di ascissa 3, infatti, la curva inverte il proprio andamento e in esso la tangente alla curva diviene parallela all'asse orizzontale, quindi con coefficiente angolare nullo e, dal punto di vista fisica, velocità istantanea nulla.

Il grafico in alto mostra la relazione spazio-tempo per il giro in bicicletta di una ragazza e il grafico in basso il corrispondente grafico velocità- tempo.

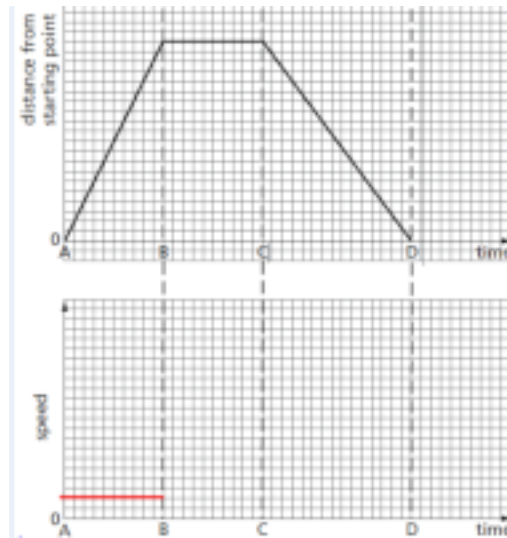


Guarda il grafico spazio-tempo. Rispondi alle seguenti domande relative all'intervallo di tempo AB .

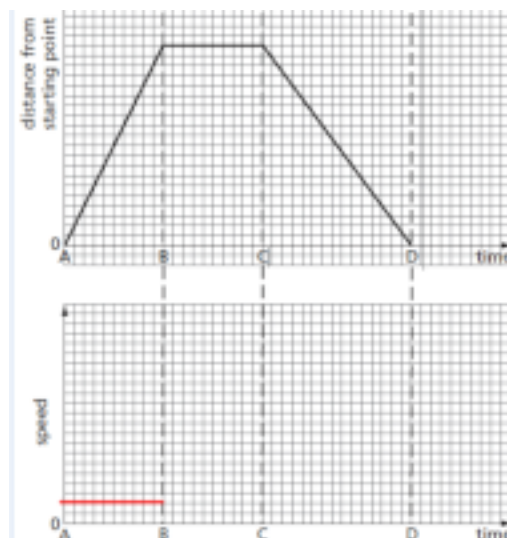
- (1) Cosa succede alla distanza nel punto di partenza?
- (2) Su una copia del grafico $v-t$, traccia una linea spessa che mostri la velocità nell'intervallo di tempo AB .
- (3) Su una copia del grafico $v-t$ tracciare una linea spessa che mostri la velocità nell'intervallo di tempo BC ,
- (4) Tracciare una linea spessa che mostri la velocità nell'intervallo CD .
- (5) Quanto dista la ragazza dal suo punto di partenza quando ha finito la sua corsa?

SOLUZIONE. punto 1. La bicicletta al tempo zero si trova nell'origine dalla quale vengono contate le distanze, cioè si trova nel punto cosiddetto di partenza.

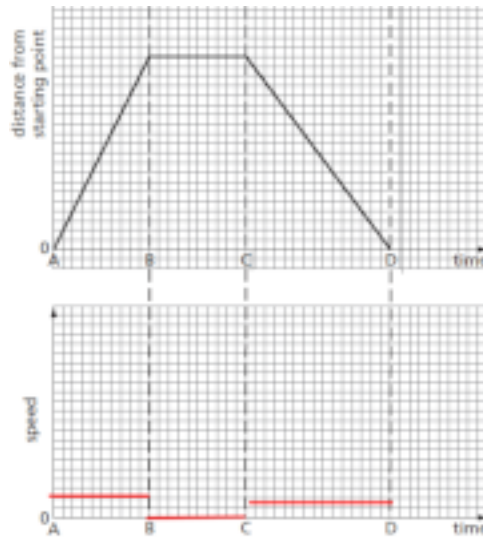
punto 2. se consideriamo una scala: un quadretto, una unità, allora la bicicletta percorre $20u$ in $10u'$ di tempo, la sua velocità è in questo tratto costante (moto rettilineo uniforme) e pari a 2, come nella figura.



punto 3. nel tratto BC la distanza dall'origine rimane invariata per cui la velocità è nulla (la ragazza si è fermata)

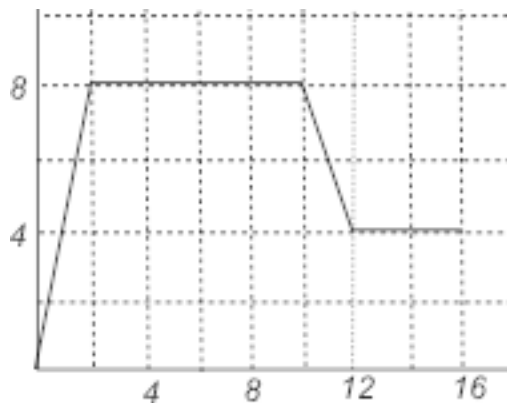


punto 4. nell'intervallo BC , la ragazza torna indietro verso il punto di partenza, ma più lentamente perché percorre la stessa distanza in un tempo pari a $15u$, sempre con velocità costante.



punto 5. Al termine del moto la ragazza si trova ancora al punto di partenza, ma ha percorso in totale $40u$.

ESERCIZIO 16. Che distanza copre in 16 s il velocista di cui la figura mostra il grafico velocità-tempo?



SOLUZIONE. La distanza percorsa può semplicemente essere calcolata, determinando l'area sottesa dalla poligonale che descrive il moto del corpo. In questo caso, ad esempio, l'area (colorata in giallo) può essere calcolata suddividendola in due trapezi e un rettangolo:

$$A_1 = \frac{(10+8)\text{ s} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 72\text{ m} \quad A_2 = \frac{(8+4)\text{ s} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 12\text{ m} \quad A_3 = 4\text{ m} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 16\text{ m}$$

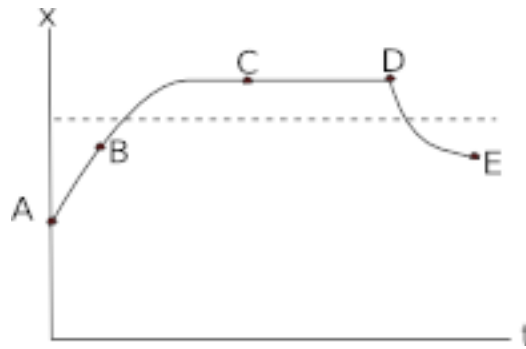
$$A_{\text{tot}} = 72 + 12 + 16 = 100\text{ m}$$

Accelerazione.

ESERCIZIO 17. Una particella passa in 2.4 s dalla velocità di 18 m/s a una velocità di 30 m/s in direzione opposta. Qual è stato il modulo dell'accelerazione media della particella in questo intervallo di 2.4 s ?

SOLUZIONE. applichiamo la definizione di accelerazione media: $a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2.4\text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

ESERCIZIO 18. La figura rappresenta la funzione $x(t)$ di una particella in moto rettilineo. (a) Per ciascun intervallo AB, BC, CD, DE dite se la velocità v e se l'accelerazione a sono positive, negative o nulle. (Trascurate i valori agli estremi degli intervalli). (b) Osservando la curva, potete indicare qualche intervallo in cui è evidente che l'accelerazione non è costante? (c) Se gli assi sono traslati verso l'alto, in modo che l'asse dei tempi coincida con la linea tratteggiata, cambia qualcosa delle risposte?



- Caso 1.* (a): Tratto AB : $v > 0$ (crescente e coefficiente angolare rette tangenti positivo); si può considerare rettilineo per cui $a = 0$
 Tratto BC : come nel caso precedente
 Tratto CD : è parallelo all'asse del tempo per cui $v = 0$ (al passare del tempo non si alcuno spostamento) e a maggior ragione $a = 0$
 Tratto DE : curva decrescente e coefficiente angolare delle rette tangenti negativo, per cui $v < 0$ ma $a > 0$
- Caso 2.* (b): l'accelerazione risulta non costante nel tratto DE dove l'andamento non mostra le caratteristiche delle curve lineari o quadratiche

(c): Traslando l'asse dei tempi fino a farlo coincidere con la linea tratteggiata, si ha la sola variazione della posizione, ottenibile lungo l'asse delle ordinate.

ESERCIZIO 19. Una particella si muove nella direzione dell'asse x secondo l'equazione $x = 50t + 10t^2$, ove x è in metri e t in secondi. Calcolare (a) la velocità vettoriale media della particella durante i primi 3.0 s , (b) la velocità istantanea e (c) l'accelerazione istantanea per $t = 3.0\text{ s}$. (d) Tracciare la curva $x(t)$ indicando come si può ottenere graficamente la risposta al punto (a). (e) Tracciare la curva $v(t)$ indicando come si può ottenere graficamente la risposta al punto (c).

Caso 1. (a): velocità vettoriale media. $x(0) = 0$ e $x(3) = 50 \cdot 3 + 10 \cdot 3^2 = 240\text{ m}$. Si ha quindi

$$\vec{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{240 - 0}{3 - 0} = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Caso 2. (b): velocità istantanea: per calcolare la funzione $v(t)$, dobbiamo derivare la legge oraria:

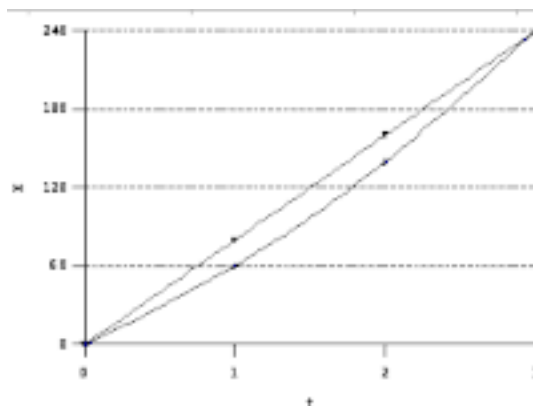
$$v(t) = 50 + 20t \quad v(3) = 50 + 60 = 110 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Caso 3. (c): accelerazione istantanea: per calcolare la funzione $a(t)$, dobbiamo derivare la legge delle velocità:

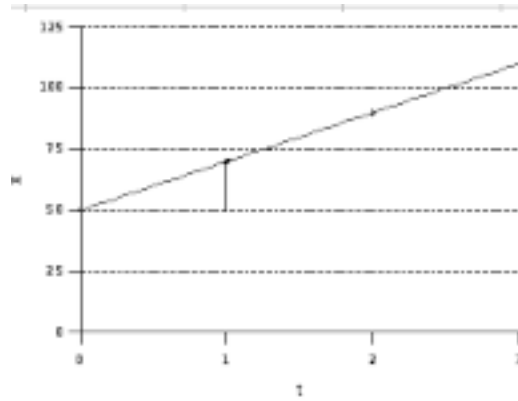
$$a(t) = 20$$

da tale relazione si vede che l'accelerazione rimane costante durante il moto e vale $a(3) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(d): la legge oraria è una funzione quadratica e la sua rappresentazione grafica è una parabola passante per l'origine, non essendoci il termine noto. La linea verde rappresenta la retta per il calcolo della velocità media



Caso (e): la legge delle velocità è una funzione lineare che si rappresenta mediante una retta



ESERCIZIO 20. (a) Se la posizione di una particella è data dalla funzione $x = 20t - 50t^3$, ove x è espresso in metri e t in secondi, dire se, e quando, la velocità è nulla. (b) Quando è nulla l'accelerazione? (c) Quando è negativa, quando positiva? (d) Tracciare le curve $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ della particella.

SOLUZIONE. (a): ricavo la legge delle velocità, calcolando la derivata prima della legge oraria.

$$v(t) = 20 - 15t^2 = 0 \quad t = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.2 \text{ s}$$

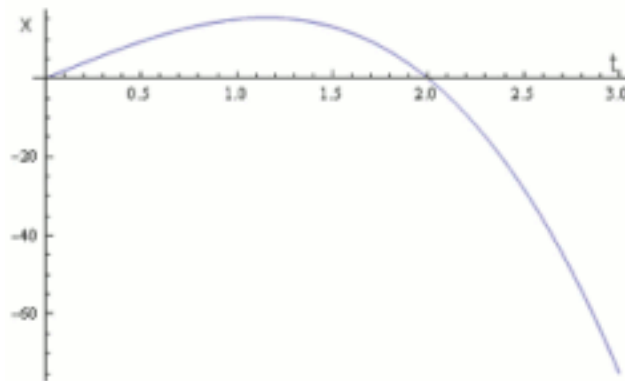
considerando solo la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado.

(b): ricavo l'accelerazione in funzione del tempo, sempre calcolando la derivata prima della legge delle velocità:

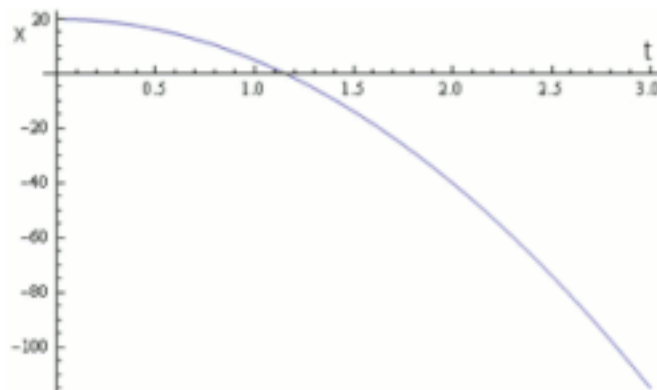
$$a(t) = -30t = 0 \quad t = 0$$

(c): dall'equazione precedente, $a(t) = -30t$, si ottiene $a > 0$ per $t < 0$ e $a < 0$ per $t > 0$

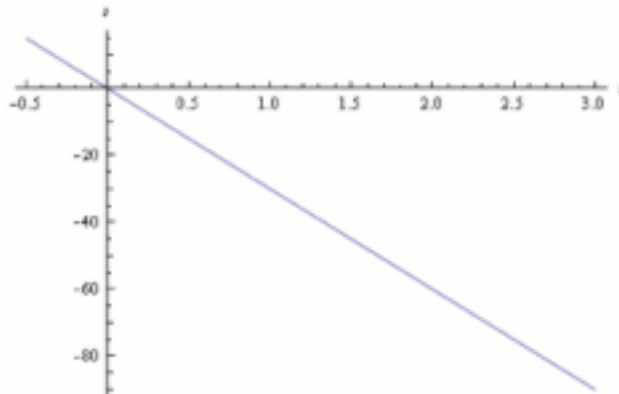
(d): curva $x(t)$: polinomiale di terzo grado



curva $v(t)$: polinomiale di secondo grado, parabola



curva $a(t)$: funzione lineare, retta



ESERCIZIO 21. Una persona sta ferma da $t = 0 \text{ min}$ a $t = 5.00 \text{ min}$; da $t = 5.00 \text{ min}$ a $t = 10.0 \text{ min}$ cammina di buon passo alla velocità costante di 2.20 m/s in linea retta. Qual è la sua velocità media e l'accelerazione media nei seguenti intervalli di tempo: (a) da $t = 2.00 \text{ min}$ a $t = 8.00 \text{ min}$ e (b) da $t = 3.00 \text{ min}$ a $t = 9.00 \text{ min}$?

Caso 1. (a): calcoliamo le distanze percorse nel secondo tratto, per una durata di 3 min :

$$s_1 = vt = 2.20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 180 \text{ s} = 396 \text{ m}$$

per calcolare la velocità media facciamo il rapporto tra lo spazio percorso ed il tempo impiegato, e per l'accelerazione media il rapporto tra la variazione della velocità e del tempo

$$v_m(2-8) = \frac{396 \text{ m}}{6 \cdot 60 \text{ s}} = 1.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_m(2-8) = \frac{2.20 - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{360 \text{ s}} = 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(b): come prima, calcolando ancora lo spazio percorso nel tratto in movimento: $s_2 = 2.20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (9-5) \cdot 60 \text{ s} = 528 \text{ m}$

$$v_m(3-9) = \frac{528 \text{ m}}{6 \cdot 60 \text{ s}} = 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_m(2-8) = \frac{2.20 - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{360 \text{ s}} = 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ESERCIZIO 22. Se la posizione di un oggetto è data dalla funzione $x = 2.0t^3$, dove x è in metri e t in secondi, trovare i valori di (a) velocità media e (b) accelerazione media fra $t = 1.0 \text{ s}$ e $t = 2.0 \text{ s}$. Indi (c) la velocità istantanea e (d) l'accelerazione istantanea per $t = 1.0 \text{ s}$ e per $t = 2.0 \text{ s}$.

Calcoliamo le posizioni dell'oggetto dopo 1 s : $x(1) = 2.0 \text{ m}$ e dopo 2 s : $x(2) = 2.0 \cdot 8 = 16.0 \text{ m}$.

Caso 1. (a): la velocità media è

$$v_m = \frac{16 - 2 \text{ m}}{2 - 1 \text{ s}} = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

calcoliamo ora la velocità nei tempi indicati, per ottenere il valore dell'accelerazione. Calcoliamo la derivata della legge oraria: $v = 6.0t^2$

$$v(1) = 6.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v(2) = 24.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Caso 2. (b): l'accelerazione media è

$$a_m = \frac{24.0 - 6.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 - 1 \text{ s}} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Caso 3. (c): le velocità istantanee sono quelle calcolate in precedenza dalla legge delle velocità

$$v(1) = 6.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v(2) = 24.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(d): per calcolare le accelerazioni istantanee, deriviamo la legge delle velocità

$$a = 12.0t$$

da ciò deriva che

$$a(1) = 12.0 \frac{m}{s^2} \quad a(2) = 24.0 \frac{m}{s^2}$$

ESERCIZIO 23. In un videogioco, un punto si muove attraverso lo schermo secondo la legge $x = 9.00t - 0.750t^3$, ove x è la distanza in cm misurata dal bordo sinistro dello schermo e t è il tempo in secondi. Quando il punto raggiunge un bordo dello schermo, sia per $x = 0$ che per $x = 15.0cm$, t è rimesso a zero e il punto riparte secondo la $x(t)$. (a) quanto tempo dopo la partenza il punto va istantaneamente a riposo? (b) Dove accade? (c) Qual è la sua accelerazione in questo istante? (d) In quale direzione si sta spostando subito prima dell'arresto? (e) E subito dopo? (f) Quando raggiunge la prima volta un bordo dello schermo dopo $t = 0$?

Caso 1. (a): il punto è a riposo quando la sua velocità è nulla. Calcoliamo la legge delle velocità, mediante la derivata prima della legge oraria, e uguagliamola a zero:»

$$\begin{aligned} v(t) &= 9.00 - 2.25t^2 = 0 \\ t^2 &= 4 \\ t &= 2s \end{aligned}$$

Caso 2. (b): calcoliamo la posizione del punto dopo 2s:

$$x(2) = 18.00 - 0.750 \cdot 8 = 12cm$$

Caso 3. (c): calcoliamo prima la legge delle accelerazioni, derivando la legge delle velocità:

$$a(t) = -4.50t$$

da cui

$$a(2) = -9 \frac{m}{s^2}$$

Caso 4. (d): per $t < 2s$ si ha $x > 0$ e $v > 0$, il punto si sposta verso destra

Caso 5. (e): per $t > 2s$ si ha $x > 0$ e $v < 0$; il punto si sposta quindi verso sinistra

(f): calcoliamo, dalla legge oraria, i valori per i quali $x = 0$.

$$\begin{aligned} 9.00t - \frac{3}{4}t^3 &= 0 \\ t(3 - \frac{3}{4}t^2) &= 0 \\ t = 0 \quad t = 2\sqrt{3} &= 3.46s \end{aligned}$$

possiamo analizzare anche il moto del punto risolvendo le disequazioni

$$\begin{aligned} x > 0 \quad t > 2\sqrt{3} \\ x < 0 \quad 0 < t < 2\sqrt{3} \\ v > 0 \quad 0 < t < 2 \\ v < 0 \quad t > 2 \\ a < 0 \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

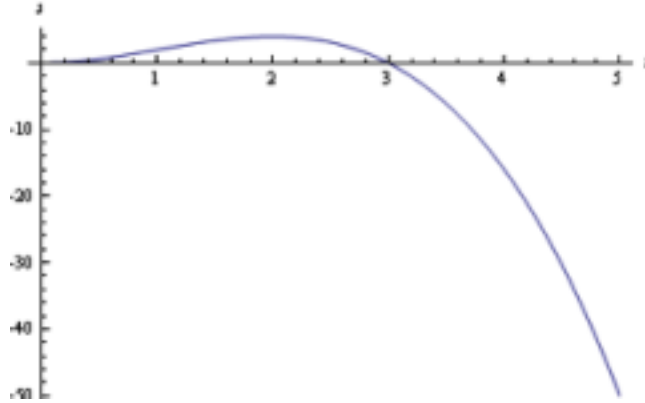
ESERCIZIO 24. La posizione di una particella che si muove lungo l'asse x dipende dal tempo secondo l'equazione $x = et^2 - bt^3$, ove x è dato in metri e t in secondi. (a) Quali dimensioni e unità di misura debbono avere e e b ? D'ora in poi poniamo che i loro valori numerici siano rispettivamente 3.0 e 1.0. (b) Per quale valore di t la x della particella raggiunge il massimo valore positivo? (c) Quale distanza copre nei primi 4.0s? (d) Qual è il suo spostamento nell'intervallo da $t = 0$ a $t = 4.0s$? (e) Qual è la sua velocità per $t = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0s$? (f) Qual è la sua accelerazione negli stessi istanti?

Caso 1. (a): la legge oraria è del tipo $x = f(t)$; la dimensione della posizione x è la lunghezza e l'unità di misura è il m ; da ciò deriva che $[e] = \frac{m}{s^2}$ e $[b] = \frac{m}{s^3}$

Caso 2. (b): introducendo i valori assegnati, la legge oraria diviene $x = 3.0t^2 - 1.0t^3$. Per determinare il valore di t corrispondente a x_{max} , studiamo il segno della derivata prima

$$\begin{aligned} 6t - 3t^2 &> 0 \\ 2t - t^2 &> 0 \\ t(2-t) &> 0 \\ t > 0 \quad t < 2 \end{aligned}$$

si ha x_{max} per $t = 2$ s, poiché per $t > 0$ la funzione è crescente, per divenire poi decrescente per $t < 2$.



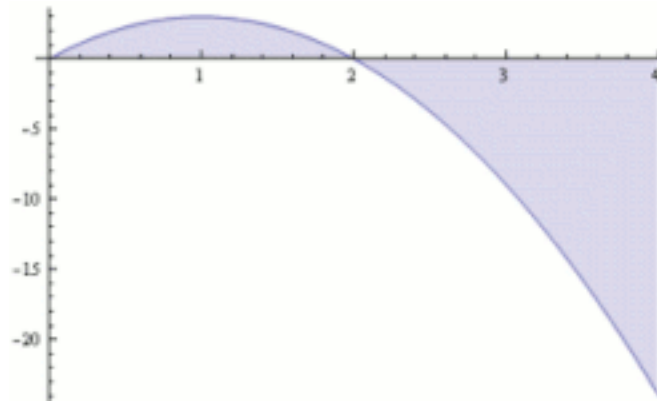
(si veda la figura)

Caso 3. (c): è possibile ottenere la risposta calcolando l'area sottesa dalla curva della legge delle velocità:

$$v = 6t - 3t^2 \quad 0 \leq t \leq 4$$

in questo caso la curva è una parabola di vertice $V(1;3)$ con concavità rivolta verso il basso e intersecante l'asse x per $t = 0$ e $t = 2$

$$A = \int_0^2 (6t - 3t^2) dt + \int_2^4 (3t^2 - 6t) dt = 3t^2 - t^3 \Big|_0^2 - 3t^2 + t^3 \Big|_2^4 = 24 \text{ m}$$



Caso 1. (d): calcoliamo le posizioni nei due tempi:

$$x(0) = 0 \quad x(4) = 46 - 64 = -16 \text{ m} \quad \Delta x = -16 - 0 = -16 \text{ m}$$

Caso 2. (e): per calcolare le velocità istantanee, applichiamo la legge delle velocità $v = 6t - 3t^2$,

$$\begin{aligned} v(1) &= 6 - 3 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} & v(2) &= 12 - 12 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v(3) &= 18 - 27 = -9 \frac{\text{m}}{\text{s}} & v(4) &= 24 - 48 = -24 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Caso 3. (f): per calcolare l'accelerazione istantanea, applichiamo la legge delle accelerazioni $a = 6 - 6t$

$$\begin{aligned} a(1) &= 6 - 6 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} & a(2) &= 6 - 12 = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a(3) &= 6 - 18 = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} & a(4) &= 6 - 24 = -18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Accelerazione costante.

ESERCIZIO 25. La testa di un serpente a sonagli, nel colpire una vittima, può accelerare a 50 m/s^2 . Se un'automobile potesse fare altrettanto, quanto impiegherebbe a raggiungere la velocità di 100 km/h da ferma?

SOLUZIONE. l'accelerazione è costante e la $v_i = 0$, la $v_f = 100 \frac{km}{h} = 100 : 3.6 = 27.8 \frac{m}{s}$; per cui vale la relazione $t = \frac{v}{a} = \frac{27.8 \frac{m}{s}}{50 \frac{m}{s^2}} = 0.556 s$

ESERCIZIO 26. Un oggetto ha accelerazione costante $a = 3.2 m/s^2$. A un certo istante la sua velocità è $v = +9.6 m/s$. Qual è la sua velocità (a) 2.5 s prima e (b) 2.5 s dopo?

Caso 1. (a): essendo i valori della velocità e dell'accelerazione positivi, possiamo supporre che la velocità precedente è inferiore, per cui

$$v = v_0 - at = 9.6 - 3.2 \cdot 2.5 = 1,6 \frac{m}{s}$$

Caso 2. (b): come prima ma con velocità successiva maggiore, per cui

$$v = v_0 + at = 9.6 + 3.2 \cdot 2.5 = 17,6 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 27. Un'auto aumenta uniformemente la sua velocità da 25 a 55 km/h in 0.50 min. Un ciclista accelera uniformemente da fermo a 30 km/h in 0.50 min. Calcolare le rispettive accelerazioni.

SOLUZIONE. il moto è uniformemente accelerato e si può esprimere l'accelerazione come $a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$, per cui

$$a_{auto} = \frac{(55-25) \frac{m}{s}}{60 \cdot 0.50 s} = 0.28 \frac{m}{s}$$

$$a_{ciclista} = \frac{(30-0) \frac{m}{s}}{60 \cdot 0.50 s} = 0.28 \frac{m}{s}$$

i due risultati sono uguali, perché la variazione di velocità nell'intervallo di tempo uguale è la stessa.

ESERCIZIO 28. Supponiamo che un'astronave a reazione si muova nello spazio con accelerazione costante di $9.8 m/s^2$, per dare agli astronauti l'illusione di una gravità normale durante il viaggio. (a) Partendo da fermo, quanto tempo impiegherà per arrivare a una velocità uguale a un decimo di quella della luce, che viaggia a $3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$? (b) quanta distanza avrà percorso fino a quell'istante?

Caso 1. (a): dalla definizione di accelerazione, in un moto uniformemente accelerato,

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{3 \cdot 10^7 \frac{m}{s}}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 3.06 \cdot 10^6 s$$

Caso 2. (b): la legge oraria del moto uniformemente accelerato consente di ricavare la distanza:

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (3.06 \cdot 10^6 s)^2 = 4.7 \cdot 10^{13} m$$

ESERCIZIO 29. Un grosso aereo a reazione per decollare deve raggiungere sulla pista la velocità di 360 km/h. Qual è la minima accelerazione costante necessaria per decollare da una pista di 1.80 km?

SOLUZIONE. applichiamo una delle relazioni del moto uniformemente accelerato nella quale non compare la grandezza tempo

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x - x_0)$$

essendo la $v_f = \frac{360}{3.6} = 100 \frac{m}{s}$, la $v_i = 0$, e $\Delta s = 1800 m$, si ha

$$10^4 \frac{m^2}{s^2} = 0 \frac{m^2}{s^2} + 2 \cdot 1800 m$$

da cui

$$a = \frac{10^4 m}{3600 s^2} = 2.8 \frac{m}{s^2}$$

ESERCIZIO 30. Un muone (particella elementare) entra alla velocità di $5.00 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$ in un campo elettrico che lo rallenta con una decelerazione di $1.25 \cdot 10^{14} \frac{m}{s^2}$. Che distanza percorre prima di fermarsi?

SOLUZIONE. possiamo utilizzare la stessa relazione del precedente esercizio; in tal caso l'incognita sarà la distanza:

$$(x - x_0) = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} = \frac{0 - (5.00 \cdot 10^6)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot (-1.25 \cdot 10^{14} \frac{m}{s^2})} = 0.10 m$$

ESERCIZIO 31. Un elettrone entra con una velocità iniziale di $1.50 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$ in una regione della lunghezza di $1 cm$ nella quale è accelerato da un campo elettrico. Ne emerge con una velocità $v = 5.70 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$. Qual era l'accelerazione, supposta come costante?

SOLUZIONE. problema analogo al

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x - x_0)$$

da cui

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x - x_0)} = \frac{(5.70 \cdot 10^6)^2 - (1.5 \cdot 10^5)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 10^{-2} m} = 1.620 \frac{m}{s^2}$$

ESERCIZIO 32. Un'auto può arrestarsi (in condizioni favorevoli) viaggiando alla velocità di $100 km/h$ in $43 m$. (a) Qual è il modulo dell'accelerazione costante in unità SI e in «unità» di g ? (b) qual è il tempo di frenata? Se il tempo di reazione del pilota per azionare i freni è $t = 400 ms$, a quanti «tempi di reazione» corrisponde?

Caso 1. (a): come sopra, dopo aver effettuato la trasformazione: $100 \frac{km}{h} = 27.8 \frac{m}{s}$

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x - x_0)} = \frac{0 - (27.8)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot (-1.25 \cdot 10^{14} \frac{m}{s^2})} = 8.97 \frac{m}{s^2}$$

essendo $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, si ha

$$a = \frac{8.97 \frac{m}{s^2}}{9.81 \frac{m}{s^2 g}} = 0.91 g$$

Caso 2. (b): per calcolare l'intervallo di tempo utilizziamo la definizione di accelerazione costante

$$t_f - t_i = \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{27.8 \frac{m}{s}}{8.97 \frac{m}{s^2}} = 3.1 s \simeq 8 t_{reazione}$$

ESERCIZIO 33. Il colonnello Stapp stabilì un record mondiale di velocità su pista guidando una slitta a reazione alla velocità di $1020 km/h$. La slitta e lui stesso furono rallentati fino all'arresto in $1.4 s$. Quale accelerazione dovette sopportare? esprimere la risposta in unità di g (accelerazione di caduta libera).

SOLUZIONE. la decelerazione è costante e porta la velocità iniziale $v_i = 1020 : 3.6 = 284.4 m/s$ ad una velocità finale $v_f = 0$, per cui

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{(284.4 - 0) \frac{m}{s}}{1.4 s} = 203.2 \frac{m}{s^2} = 20.7 g$$

ESERCIZIO 34. Su una strada asciutta un'auto può frenare senza fatica con una decelerazione di $4.92 m/s^2$ (supposta costante). (a) Quanto tempo impiegherà, da una velocità iniziale di $24.6 m/s$, per arrestarsi completamente? (b) Quanta strada percorrerà in questo tempo?

Caso 1. (a): da $v_i = 24.6 \frac{m}{s}$ a $v_f = 0 \frac{m}{s}$, si avrà

$$\Delta t = \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{(0 - 24.6) \frac{m}{s}}{-4.92 \frac{m}{s^2}} = 5 s$$

Caso 2. (b): applichiamo la legge oraria del moto uniformemente accelerato

$$x - x_0 = v_i t + \frac{1}{2} a t^2 = 24.6 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot (-4.92) \cdot 25 = 61.5 m$$

ESERCIZIO 35. Per studiare gli effetti fisiologici sugli esseri umani delle alte accelerazioni si usa una slitta a reazione su una pista diritta in piano. Un veicolo di questo tipo può raggiungere da fermo una velocità di 1600 km/h in 1.8 s . (a) Esprimere in unità g il valore dell'accelerazione supposta costante. (b) Che distanza è coperta nel tempo indicato?

Caso 1. (a): la $v_i = 0 \frac{m}{s}$ e quella finale è $v_f = \frac{1600}{3.6} = 444.4 \frac{m}{s}$; quindi

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{444.4 \frac{m}{s}}{1.8\text{ s}} = 246.9 \frac{m}{s^2} = 25.2g$$

Caso 2. (b): dalla relazione $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x - x_0)$ si ha $x - x_0 = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} = \frac{(444.4 \frac{m}{s})^2}{2 \cdot 246.9 \frac{m}{s^2}} = 400\text{ m}$

ESERCIZIO 36. I freni di un'auto sono in grado di realizzare una decelerazione di 5.1 m/s^2 . Se si viaggia a 135 km/h e si avvista un posto di controllo della polizia stradale, qual è il tempo minimo entro il quale si può riuscire a portare la velocità al limite di 90 km/h ?

SOLUZIONE. Soluzione trasformare le velocità in unità SI : $v_i = \frac{135}{3.6} = 37.5 \frac{m}{s}$ e $v_f = 25.0 \frac{m}{s}$; si quindi

$$\Delta t = \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{(25.0 - 37.5) \frac{m}{s}}{-5.1 \frac{m}{s^2}} = 2.45\text{ s}$$

ESERCIZIO 37. Una moto viaggia a 30 m/s quando comincia a frenare imprimendo un'accelerazione negativa costante. Durante l'intervallo di 3.0 s dall'inizio della frenata, la velocità scende a 15 m/s . Che distanza ha percorso la moto in questo intervallo?

SOLUZIONE. Soluzione calcolare il valore della decelerazione

$$a = \frac{(15 - 30) \frac{m}{s}}{3.0\text{ s}} = -5 \frac{m}{s^2}$$

da qui si può ottenere la distanza

$$s = v_i t + \frac{1}{2} a t^2 = 30 \frac{m}{s} \cdot 3.0\text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 5 \frac{m}{s^2} \cdot 9.0\text{ s}^2 = 67.5\text{ m}$$

ESERCIZIO 38. Un'auto da competizione può accelerare da zero a 60 km/h in 5.4 s . (a) Qual è, in unità SI , la sua accelerazione media in questo intervallo di tempo? (b) E quale distanza percorre, supponendo l'accelerazione costante? (c) quanto tempo occorrerebbe, mantenendo invariata l'accelerazione, per arrivare a 0.25 km di distanza?

Caso 1. (a): esprimere la velocità nel SI : $v_f = 60 : 3.6 = 16.67 \frac{m}{s}$. si ha quindi

$$a_m = \frac{(16.7 - 0) \frac{m}{s}}{5.4\text{ s}} = 3.1 \frac{m}{s^2}$$

Caso 2. (b): da $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x - x_0)$ si ottiene

$$x - x_0 = \frac{(16.7 - 0) \frac{m}{s}}{2 \cdot 3.1 \frac{m}{s^2}} = 44.8\text{ m}$$

Caso 3. (c): considerando la partenza da zero, si ha $s = \frac{1}{2} a t^2$, da cui

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 250\text{ m}}{3.1 \frac{m}{s^2}}} = 12.7\text{ s}$$

ESERCIZIO 39. Un treno parte da fermo e si muove ad accelerazione costante. A un certo istante sta viaggiando a 30 m/s , e dopo 160 m è passato a 50 m/s . Calcolare (a) l'accelerazione, (b) il tempo impiegato a percorrere quei 160 m , (c) il tempo impiegato per arrivare a 30 m/s e (d) la distanza coperta dalla partenza al momento in cui ha raggiunto la velocità di 30 m/s .

Caso 1. (a): essendo, in un moto uniformemente accelerato, $v_f^2 = v_i^2 + 2a \Delta x$ si ottiene

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2 \Delta x} = \frac{(50^2 - 30^2) \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 160 m} = 5 \frac{m}{s^2}$$

Caso 2. (b): dalla definizione di accelerazione uniforme $a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$ si ha

$$\Delta t = \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{(50 - 30) \frac{m}{s}}{5 \frac{m}{s^2}} = 4 s$$

Caso 3. (c): in questo caso si deve considerare la partenza da fermo e il tempo necessario per raggiungere una velocità di $30 m/s$

$$\Delta t = \frac{(30 - 0) \frac{m}{s}}{5 \frac{m}{s^2}} = 6 s$$

Caso 4. (d): ancora consideriamo la partenza da fermo, per cui

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 a = \frac{m}{s^2} \cdot 6^2 s^2 = 90 m$$

ESERCIZIO 40. Un'auto che viaggia a $56 km/h$ è arrivata a $24.0 m$ da una barriera quando il pilota frena a fondo. Dopo $2.00 s$ urta la barriera. (a) Qual è stata la decelerazione costante prima dell'urto? (b) A che velocità si muove l'auto al momento dell'urto?

Caso 1. (a): l'auto ha a disposizione $24 m$ per decelerare; la sua velocità è di $v = 56 : 3.6 = 15.6 m/s$; dal testo si può osservare che la velocità finale al termine dei $24 m$ non sarà nulla. Calcoliamo la decelerazione dalla $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$,

$$a = \frac{2(x - x_0) - 2v_0 t}{t^2} = \frac{2 \cdot 24 m - 2 \cdot 15.6 \frac{m}{s} \cdot 2.00 s}{4 s^2} = -3.6 \frac{m}{s^2}$$

Caso 2. (b): applichiamo la legge delle velocità $v = v_0 + at$,

$$v = 15.6 \frac{m}{s} - 3.6 \frac{m}{s^2} \cdot 2.00 s = 8.4 \frac{m}{s} = 30.2 \frac{km}{h}$$

ESERCIZIO 41. Un'automobile copre in $6.00 s$, ad accelerazione costante, il tratto compreso fra due punti posti a $60.0 m$ di distanza. La sua velocità, passando il secondo punto, è di $15.0 m/s$. (a) Qual era la velocità al primo punto? (b) Qual è l'accelerazione? (c) A quanti metri dal primo punto si trova la linea di partenza?

Caso 1. (a): essendo l'accelerazione costante, possiamo utilizzare una delle relazioni del moto uniformemente accelerato; in particolare quella che non contiene il valore di a . Da $x - x_0 = \frac{(v_1 + v_2)t}{2}$ si ottiene

$$v_1 = \frac{2(x - x_0)}{t} - v_2 = \frac{2 \cdot 60.0 m}{6.00 s} - 15.0 \frac{m}{s} = 5.0 \frac{m}{s}$$

Caso 2. (b): note le velocità finale e iniziale e l'intervallo di tempo, basta applicare la definizione di accelerazione

$$a = \frac{(15.0 - 5.0) \frac{m}{s}}{6.00 s} = 1.7 \frac{m}{s^2}$$

Caso 3. (c): applichiamo la relazione nella quale non compare il tempo di percorrenza $v_1^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, dalla quale si ottiene, risolvendo rispetto alla distanza

$$x - x_0 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(25.0 - 0) \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 1.7 \frac{m}{s^2}} = 7.3 m$$

ESERCIZIO 42. Due fermate della metropolitana sono distanti $1100 m$. Se un convoglio accelera a $+1.2 m/s^2$ da fermo nella prima metà del tragitto, e quindi decelera a $-1.2 m/s^2$ nella seconda metà, quali sono (a) il tempo impiegato e (b) la velocità massima?

Caso 1. (a): con partenza da fermo, il primo tratto è lungo $550 m$ così come il secondo; dalla $x - x_0 = \frac{1}{2} at^2$ si ottiene $t = \sqrt{\frac{2(x - x_0)}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 550 m}{1.2 \frac{m}{s^2}}} = 30.3 s$. Il tempo totale è pertanto $\Delta t = 2 \cdot 30.3 = 60.6 s$.

Caso 2. (b): calcoliamo la velocità dalla $v_1^2 = v_0^2 + 2a(x_1 - x_0) = 0^2 \frac{m}{s^2} + 2,4 \frac{m}{s^2} \cdot 550m$ da cui

$$v_1 = \sqrt{1320 \frac{m^2}{s^2}} = 36,6 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 43. Un semaforo diviene improvvisamente giallo. La velocità $v_0 = 50 km/h$ e la massima frenata possibile vale $5,0 m/s^2$. Il miglior tempo di reazione per azionare i freni è $T = 0,75 s$. Per evitare di oltrepassare il semaforo con il rosso decidere se fermarsi o proseguire a velocità costante nei due casi: (a) la distanza fino alla linea di arresto è di $40m$ e la durata del giallo è di $2,8s$; (b) queste due quantità sono rispettivamente $32m$ e $1,8s$.

Caso 1. (a): andando a $50 km/h = 13,9 m/s$ per fermarmi impiego $0 = 13,9 \frac{m}{s} - 5t$ da cui

$$t = \frac{13,9 \frac{m}{s}}{5 \frac{m}{s^2}} = 2,78 s$$

per cui il tempo totale, comprensivo del tempo di reazione, è: $t_{tot} = 2,78 + 0,75 = 3,53 s$. Con una accelerazione di $-5 \frac{m}{s^2}$ mi fermo in $19,3m$. Questa scelta è quindi possibile.

Se mantengo la velocità costante di $13,9 \frac{m}{s}$ percorro $40m$ in $t = \frac{40m}{13,9 \frac{m}{s}} = 2,87$. Posso quindi anche proseguire.

Caso 2. (b): ripetendo gli stessi calcoli con i valori di questo secondo caso si ottiene una impossibilità per entrambe le scelte.

ESERCIZIO 44. Quando una vettura si arresta con la frenata più brusca possibile, lo spazio di arresto si può considerare somma di una «spazio di reazione», uguale alla velocità iniziale moltiplicata per il tempo di reazione del pilota, e di uno «spazio di frenata», che è la distanza percorsa durante la frenata. La tabella seguente fornisce alcuni valori tipici:

velocità iniziale ($\frac{m}{s}$)	spazio di reazione (m)	spazio di frenata (m)	spazio di arresto (m)
10	7,5	5,0	12,5
20	15	20	35
30	22,5	45	67,5

(a) Qual è il tempo di reazione assunto per il pilota? (b) Quale sarebbe la distanza di arresto della vettura per una velocità iniziale di $25 \frac{m}{s}$?

Caso 1. (a): traduciamo le indicazioni del testo: $(x - x_0)_{arresto} = v_0 \cdot T_{reaz} + (x - x_0)_{frenata}$. Osservando la tabella (prima riga), si può ricavare $v_0 \cdot T_{reaz} = spazio_{reazione}$ da cui

$$T_{reaz} = \frac{7,5m}{10 \frac{m}{s}} = 0,75 s$$

Caso 2. (b): ricaviamo l'accelerazione da $v_1^2 = v_0^2 - 2a(x - x_0)$ utilizzando i dati ad esempio della seconda riga, con $v_1 = 0$

$$a = \frac{v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{100 \frac{m^2}{s^2}}{10m} = 10 \frac{m}{s^2}$$

se la $v_1 = 25 \frac{m}{s}$ allora la distanza che si percorre è

$$25^2 \frac{m^2}{s^2} = 2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (x - x_0)$$

da cui

$$(x - x_0) = \frac{625 \frac{m^2}{s^2}}{20 \frac{m}{s^2}} = 31,25 m$$

Si può ora calcolare la distanza di arresto, secondo la relazione introdotta nel caso 1:

$$x_{arresto} = 31,25 + 25 \cdot 0,75 = 50 m$$

ESERCIZIO 45. Se si stabilisce che la massima accelerazione tollerabile dai passeggeri della metropolitana è $1.34 m/s^2$, e le stazioni si trovano a $806 m$ di distanza l'una dall'altra, (a) qual è la massima velocità che un treno può raggiungere tra due stazioni? (b) qual è il tempo di percorrenza? (c) se il treno sosta per $20 s$ in ogni stazione, qual è la massima velocità media di un treno della metropolitana?

Caso 1. (a): per determinare la velocità massima, supponiamo che nella prima metà del percorso vi sia la fase di accelerazione e nella seconda metà quella di rallentamento, in modo da poter considerare massima la velocità centrale.

per ottenere tale velocità, non avendo informazioni sul tempo, usiamo la relazione $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, da cui

$$v_{max} = \sqrt{2 \cdot 1.34 \frac{m}{s^2} \cdot 403 m} = 32,9 \frac{m}{s} \cong 118 \frac{km}{h}$$

Caso 2. (b): per calcolare il tempo, come detto sopra, supponiamo che la prima metà percorso sia di moto accelerato con partenza da fermo, per cui

$$t_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 403 m}{1.34 \frac{m}{s^2}}} = 24.5 s \quad \text{da cui} \quad t_{tot} = 49 s$$

Caso 3. (c): considerando il tempo di sosta indicato si ha

$$t_{tot} + t_{sosta} = 49 + 20 = 69 s$$

la velocità media è pertanto

$$v_m = \frac{806 m}{69 s} = 11.7 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 46. La cabina di un ascensore ha una corsa totale di $190 m$. La sua velocità massima è di $300 m/min$. Sia l'accelerazione sia la decelerazione hanno un valore assoluto di $1.20 m/s^2$. (a) Quanti metri percorre l'ascensore durante l'accelerazione da fermo alla velocità massima? (b) quanto tempo impiega per una corsa completa senza fermate intermedie, dalla partenza da fermo all'arresto completo?

Caso 1. (a): anche qui, mancando informazioni relative al tempo, possiamo usare la relazione del moto uniformemente accelerato $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ dove l'incognita è rappresentata dalla distanza

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{25 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 1.20 \frac{m}{s^2}} = 10.5 m$$

Caso 2. (b): essendo fino al raggiungimento della velocità massima, un caso di moto uniformemente accelerato con partenza da fermo si ha

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{21 m}{1.20 \frac{m}{s^2}}} = 4.2 s$$

Caso 3. (c): la lunghezza complessiva è di $190 m$, il tratto iniziale di moto accelerato e quello finale di moto decelerato ammonta a $21 m$; il tratto di moto rettilineo uniforme intermedio è quindi di $190 - 21 = 169 m$. il tempo per percorrerlo va calcolato tramite appunto le leggi del moto rettilineo uniforme e cioè

$$t = \frac{s}{v} = \frac{169 m}{5 \frac{m}{s}} = 33.8 s$$

il tempo complessivo di percorrenza (tratto accelerato, rettilineo uniforme e decelerato) sarà pertanto

$$t_{tot} = 33.8 + 2 \cdot 4.2 = 42.2 s$$

ESERCIZIO 47. Nel momento in cui il semaforo volge al verde, un'auto parte con accelerazione costante $a = 2.2 \frac{m}{s^2}$. Nello stesso istante un autocarro che sopravviene alla velocità costante di $9.5 m/s$ sorpassa l'auto. (a) a quale distanza oltre il semaforo l'auto sorpasserà il camion? (b) che velocità avrà in quel momento?

Caso 1. (a): possiamo affrontare questo problema attraverso le equazioni delle leggi orarie che descrivono il moto dei due veicoli. L'automobile si muoverà di moto uniformemente accelerato con partenza da fermo e la sua legge oraria sarà: $s = \frac{1}{2}at^2$; il camion si muove di moto rettilineo uniforme la cui legge oraria si può scrivere come $s = vt$.

Quando si incontrano sarà $t_{auto} = t_{camion}$ e $s_{auto} = s_{camion}$ avendo entrambi come riferimento il semaforo. Posso risolvere ottenendo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} s_{auto} = \frac{1}{2}at_{auto}^2 \\ s_{camion} = vt_{camion} \end{cases}$$

per quanto sopra detto, si può applicare il metodo del confronto, risolvendo rispetto a t e ottenendo

$$as^2 - 2sv^2 = 0$$

da cui si ottiene $s = 0$, punto di partenza corrispondente al semaforo, e

$$s = \frac{2v^2}{a} = \frac{2 \cdot \left(9.5 \frac{m}{s}\right)^2}{2.2 \frac{m}{s^2}} = 82m$$

Caso 2. (b): calcoliamo la velocità dell'auto sempre con le relazioni del moto accelerato

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad v = \sqrt{2 \cdot 2.2 \frac{m}{s^2} \cdot 82m} = 19 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 48. All'uscita da una curva, il macchinista di un treno che sta viaggiando a $100 km/h = 27.8 m/s$ si accorge che una locomotiva è entrata erroneamente nel binario da una diramazione posta $0.42 km$ più avanti, come in figura. La locomotiva viaggia a $18 km/h$. Il macchinista aziona immediatamente la frenatura rapida. (a) Quale deve essere il valore assoluto minimo dell'accelerazione costante impressa dal freno per evitare una collisione?

SOLUZIONE. la legge oraria della locomotiva che si è inserita erroneamente è $s_{loc} = s_0^{loc} + v_{loc}t$, essendo identificabile come un moto rettilineo uniforme, dove s_0 indica la distanza tra la locomotiva e il treno, nel sistema di riferimento del treno; la legge oraria del treno in frenata sarà $s_{treno} = v_0^{treno}t - \frac{1}{2}at^2$. Sostituendo i valori numerici si ha

$$\begin{cases} s_{loc} = 5t + 420 \\ s_{treno} = 27.8t - \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

affinché il treno non urti la locomotiva deve essere $s_{loc} \geq s_{treno}$, quindi

$$5t + 420 \geq 27.8t - \frac{1}{2}at^2$$

risolvendo

$$\begin{aligned} 10t + 840 &\geq 55.6t - at^2 & at^2 - 45.6t + 840 &\geq 0 \\ \Delta = 45.6^2 - 4a \cdot 840 &\geq 0 & a &\leq 0.62 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 49. Due treni, che viaggiano uno a $72 km/h = 20 m/s$ e l'altro a $144 km/h = 40 m/s$, sono diretti l'uno contro l'altro su un binario rettilineo in piano. Quando si trovano a $950 m$ di distanza, ciascun macchinista vede l'altro treno e si affretta a frenare. Verificare se avviene lo scontro qualora entrambi i treni rallentino con accelerazione, in modulo, di $1.0 m/s^2$.

SOLUZIONE. calcoliamo le distanze che percorrono i due treni prima di arrestarsi, attraverso le leggi orarie

$$\begin{aligned} s_1 &= 20t - \frac{1}{2}at^2 \\ s_2 &= 40t - \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

sappiamo che per evitare l'urto $s_1 + s_2 \leq 950$, quindi

$$20t - 0.5t^2 + 40t - 0.5t^2 \leq 950$$

svolvendo si ha

$$t^2 - 60t + 950 \geq 0$$

calcoliamo il discriminante

$$\Delta = 3600 - 3800 < 0$$

ciò indica che non esistono tempi che soddisfano tale condizione e quindi i due treni si urtano.

Accelerazione nel moto di caduta libera.

ESERCIZIO 50. In un cantiere una chiave inglese, lasciata cadere inavvertitamente, arriva al suolo alla velocità di 24m/s . (a) Da che altezza è caduta? (b) quanto tempo impiegato a cadere?

Caso 1. (a): supponendo che la chiave inglese fosse appoggiata e quindi avesse velocità nulla, possiamo applicare la relazione $v_f^2 = 2gh$, dove h è la distanza dal suolo. Si ha quindi

$$h = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{24^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 29.4\text{m}$$

Caso 2. (b): per determinare il tempo di caduta, essendo un moto uniformemente accelerato, si può applicare la relazione $v_f - v_i = a \Delta t$, da cui

$$\Delta t = \frac{24 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2.45\text{s}$$

ESERCIZIO 51. (a) Con quale velocità deve essere lanciata verticalmente una palla per arrivare ad un'altezza massima di 50m ? (b) Per quanto tempo rimarrà in aria? (c) Tracciare le curve indicative $y(t)$, $v(t)$, $a(t)$.

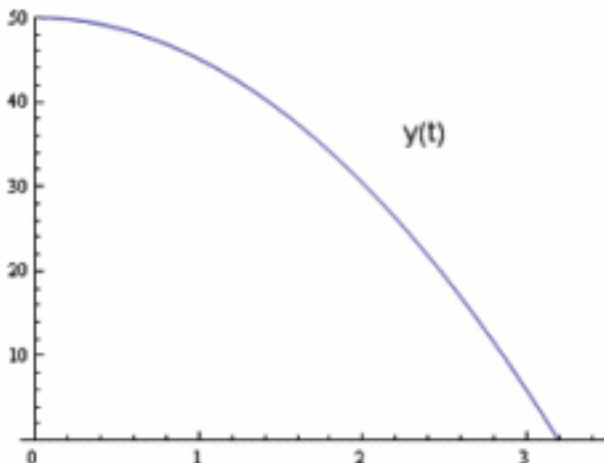
Caso 1. (a): Possiamo utilizzare la relazione $v_f^2 = v_0^2 - 2gh$, dove il segno negativo indica il verso del moto opposto all'accelerazione di gravità; in tale caso la $v_f = 0$, perché salendo la palla rallenta fino a raggiungere l'altezza massima dove la velocità si annulla. Risolvendo rispetto a v_0 si ha

$$v_0^2 = 2gh \quad \text{da cui} \quad v_0 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50\text{m}} = 31.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

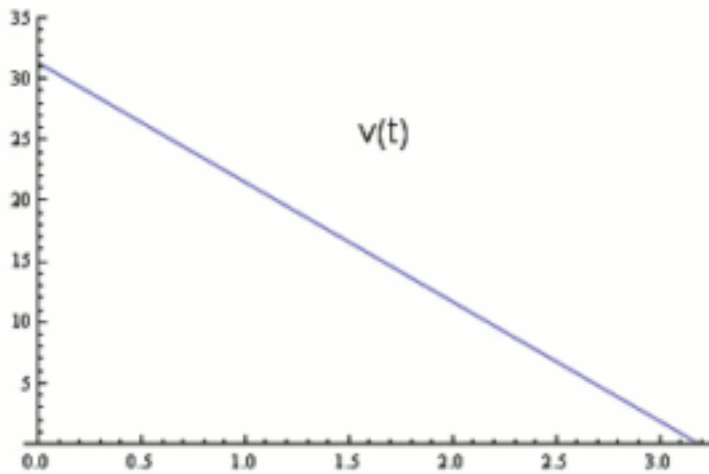
Caso 2. (b): il tempo di volo può essere calcolato supponendo che una volta giunta all'altezza massima, la palla ridiscenda riacquistando la velocità che aveva all'inizio.

$$\Delta t_{\text{salita}} = \frac{31.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3.2\text{s} \quad \text{per cui} \quad t_{\text{volo}} = 2 \cdot 3.2\text{s} = 6.4\text{s}$$

Caso 3. (c): il grafico $y(t)$ è un grafico spazio tempo di un moto uniformemente decelerato:



il grafico $v(t)$ esprime la variazione lineare della velocità al passare del tempo



il grafico $a(t)$ è invece una retta parallela all'asse delle ascisse.

ESERCIZIO 52. Da una nuvola a 1700m sopra la superficie terrestre cadono gocce di pioggia. Se non fossero rallentate dalla resistenza dell'aria, a che velocità arriverebbero al suolo?

SOLUZIONE. Soluzione i dati assegnati si riferiscono alla velocità iniziale, che supponiamo nulla, alla distanza da percorrere; non si hanno informazioni sul tempo di percorrenza. Risulta quindi naturale fare riferimento alla relazione $v_f^2 = v_i^2 - 2gh$, da cui sostituendo

$$v_f = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1700\text{m}} = 182.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

come si può notare è una velocità estremamente elevata, pari a oltre 600km/h .

ESERCIZIO 53. In un cantiere si rompe l'unico cavo che sostiene un montacarichi vuoto fermo in cima a un edificio alto 120m . (a) A che velocità ca a sbattere al suolo? (b) per quanto tempo è caduto? (c) al passaggio a metà altezza qual era la sua velocità, e (d) da quanto tempo stava cadendo?

Caso 1. (a): il problema è identico a quello precedente, per cui

$$v_f = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 120\text{m}} = 48.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Caso 2. (b): per calcolare il tempo, utilizziamo la legge delle velocità del moto uniformemente accelerato, per cui

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{g} = \frac{48.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4.95\text{s}$$

Caso 3. (c): il calcolo della velocità a metà percorso è identico a quello per il percorso intero, essendo un moto di tipo uniformemente accelerato

$$v_{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 60\text{m}} = 34.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Caso 4. (d): lo stesso vale anche per il tempo impiegato

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{g} = \frac{34.3 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3.5\text{s}$$

ESERCIZIO 54. Una pietra viene scagliata in basso alla velocità di 12.0m/s dal tetto di un edificio posto a 30.0m dal suolo. (a) Quanto tempo impiega ad arrivare al suolo? (b) Qual è la sua velocità all'impatto col terreno?

Caso 1. (a): conosciamo la velocità iniziale, la distanza da percorrere e l'accelerazione alla quale il corpo è soggetto e che va ad aumentare la velocità durante la discesa; rimane come incognita il tempo, per cui $s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$, sostituendo i valori si ha

$$30 m = 12.0 \frac{m}{s} \cdot t + 4.9 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

risolvendo l'equazione di secondo grado in t , trascurando la radice negativa, si ha

$$t_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 120 \cdot 4.9}}{9.8} = 1.53 s$$

Caso 2. (b): come per i casi precedenti la relazione che le grandezze assegnate nel testo è $v_f^2 = v_0^2 + 2gh$; (sono possibili altri metodi, come per esempio quello basato sull'uso della definizione di accelerazione $a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$) in questo caso basta sostituire i valori assegnati per ottenere

$$v_f^2 = (12.0)^2 \frac{m^2}{s^2} + 2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 30 m = 27 \frac{m^2}{s^2}$$

ESERCIZIO 55. Da una torre alta $145 m$ si lascia cadere nel vuoto una sfera del diametro di $1 m$. (a) Per quanto tempo la sfera rimane in caduta libera? (b) qual è la sua velocità quando tocca il fondo della torre? (c) quando colpisce il fondo, mentre la sua velocità si annulla la sfera subisce una decelerazione media pari a $25g$. (d) Di quale distanza si sposta il baricentro durante la decelerazione?

Caso 1. (a): la sfera parte con velocità nulla per cui è possibile usare la relazione contenente la distanza da percorrere, l'accelerazione e con il tempo come incognita $h = \frac{1}{2} g t^2$; risolvendo rispetto a t si ha

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 145 m}{9.8 \frac{m}{s^2}}} = 5.44 s$$

Caso 2. (b): essendo la velocità iniziale nulla, la velocità finale può essere ottenuta da $v_f = \sqrt{2gh}$

$$v_f = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 145 m} = 53.3 \frac{m}{s}$$

Caso 3. (c): nel caso di una sfera la cui massa è distribuita in modo uniforme, il baricentro è posto nel centro. Avendo la sfera raggio $0.5 m$ essa toccherà terra quando il suo baricentro disterà ancora $0.5 m$ dal suolo. Consideriamo pertanto il moto di un punto, il baricentro, soggetto ad una decelerazione di $25g$, la cui velocità iniziale è pari a $53.3 \frac{m}{s}$ e quella finale a $0 \frac{m}{s}$. Avremo

$$0^2 \frac{m^2}{s^2} = 53.3^2 \frac{m^2}{s^2} - 2 \cdot 25 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot h$$

da cui

$$h = \frac{53.3^2}{50 \cdot 9.8} = 5.8 m$$

ESERCIZIO 56. Si lascia cadere una pietra da un dirupo alto $100 m$. Quanto tempo impiega per cadere (a) per i primi $50 m$ e (b) per i restanti $50 m$?

Caso 1. (a): consideriamo nulla la velocità iniziale della pietra. Quindi $h = \frac{1}{2} g t^2$ da cui

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 m}{9.8 \frac{m}{s^2}}} = 3.2 s$$

Caso 2. (b): la relazione precedente non può più essere utilizzata nello stessa forma, perché dopo aver percorso $50 m$, la pietra non ha più una velocità nulla, ma pari a $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 50 m} = 31.3 \frac{m}{s}$. Al termine della caduta la velocità sarà, ancora per la stessa relazione, $v = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 100 m} = 44.3 \frac{m}{s}$. Avendo calcolato la velocità a metà strada e quella finale, possiamo ottenere il tempo degli ultimi $50 m$ con la relazione $h = \frac{v_{\frac{1}{2}} + v_f}{2} t$

$$t = \frac{2h}{v_{\frac{1}{2}} + v_f} = \frac{2 \cdot 50 m}{(44.3 + 31.3) \frac{m}{s}} = 1,3 s$$

come si può notare il tempo dei secondi $50m$ e più breve, perché essendo un moto uniformemente accelerato, la velocità cresce linearmente con il tempo durante la caduta.

ESERCIZIO 57. Un animale fa un salto verso l'alto elevandosi in modo da passare all'altezza di $0.544m$ dopo $0.200s$. (a) Qual era la sua velocità iniziale? (b) Qual è la sua velocità a quella altezza dal suolo? (c) Quanto più in alto può arrivare?

Caso 1. (a): anche se non viene esplicitato, dobbiamo supporre che il salto avvenga lungo la verticale al suolo; in questo caso l'incognita è la velocità iniziale, noti distanza e tempo e ovviamente accelerazione; si ha dunque $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (il segno negativo sta ad indicare che la velocità iniziale tende a diminuire sotto l'azione della gravità), per cui

$$v_0 = \frac{h - \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{0.544m - 4.9 \frac{m}{s^2} \cdot (0.200s)^2}{0.200s} = 3.7 \frac{m}{s}$$

Caso 2. (b): per calcolare la sua velocità utilizziamo la relazione che lega le velocità iniziale e finale con la distanza percorsa $v_f^2 = v_0^2 - 2gh$

$$v_f = \sqrt{3.7 \frac{m}{s} - 4.9 \frac{m}{s^2} \cdot 0.544m} = 1.74 \frac{m}{s}$$

Caso 3. (c): la domanda fa supporre che lo slancio dell'animale consenta un salto più alto e che $0.544m$ sia una posizione intermedia; in questo calcoliamo osservando che, al raggiungimento della posizione massima, la velocità finale posseduta dall'animale sarà nulla; per cui applicando la stessa relazione del caso precedente, con incognita l'altezza h , si ha

$$h = \frac{v_0^2 - v_f^2}{2 \cdot g} = \frac{(3.7 \frac{m}{s})^2 - 0^2}{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2}} = 0.698m$$

(dove si calcola $v_0^2 - v_f^2$ per tenere conto del segno negativo davanti all'incognita h). Il valore di $0.698m$ rappresenta l'altezza massima raggiungibile, per cui, rispetto alla posizione precedente a $0.544m$ dal suolo, l'animale potrà percorrere nel salto ancora una distanza pari a

$$\Delta h = 0.698m - 0.544m = 0.154m$$

ESERCIZIO 58. Un oggetto cade in acqua da un'altezza di $45m$. Cade direttamente in una barchetta in moto uniforme rettilineo che si trova a $12m$ dal punto di impatto al momento in cui l'oggetto viene lasciato cadere. Qual era la velocità della barca?

SOLUZIONE. se i due oggetti vengono ad impattare, significa che il corpo in caduta (moto uniformemente accelerato) percorrerà in verticale i $45m$ nello stesso intervallo di tempo impiegato dalla barca a percorrere $12m$ orizzontalmente con moto rettilineo uniforme. Calcolo pertanto il tempo di caduta e lo utilizzo per calcolare la velocità costante con cui la barca percorre i $12m$.

Tempo per percorrere $45m$ con partenza da fermo: da $h = \frac{1}{2}gt^2$ si ha, sostituendo i valori numerici e risolvendo rispetto a t , $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 45m}{9.8 \frac{m}{s^2}}} = 3.03s$.

Velocità della barca: se percorre $12m$ in $3.03s$, la sua velocità sarà, $v = \frac{12m}{3.03s} = 4 \frac{m}{s}$

ESERCIZIO 59. Un razzo viene lanciato verticalmente e sale per $6.00s$ con accelerazione costante di $4.00 \frac{m}{s^2}$. Dopo questo tempo finisce il carburante e prosegue come un corpo in caduta libera. (a) Qual è la massima altezza raggiunta? (b) Quanto tempo impiega dal decollo all'atterraggio?

Caso 1. (a): calcoliamo prima la distanza che il razzo percorre durante la fase di accelerazione; da (sempre con $v_0 = 0$) $h = \frac{1}{2}at^2$, si ha

$$h_1 = \frac{1}{2} 4.00 \frac{m}{s^2} \cdot \left(6.00 \frac{m}{s}\right)^2 = 72.00m$$

dopo tale intervallo di tempo in cui il moto era accelerato, ha raggiunto la velocità

$$v = at = 4.00 \frac{m}{s^2} \cdot 6.00 \frac{m}{s} = 24.00 \frac{m}{s}$$

il razzo ha poi proseguito la sua corsa con moto decelerato, sotto l'effetto dell'accelerazione g , che ha ridotto la velocità di $24 \frac{m}{s}$ fino a zero. La distanza percorsa in questo intervallo può essere così ottenuta, $v_f^2 = v_i^2 - 2gh$, da cui

$$h_2 = \frac{\left(24 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2}} = 29.4 m$$

il tratto percorso in verticale sarà quindi

$$h_{tot} = 72.00 m + 29.4 m = 101.4 m$$

Caso 2. (b): il tempo per percorrere i primi $72 m$ è assegnato pari a $t_1 = 6.00 s$; calcoliamo il tempo impiegato a percorrere i $29.4 m$ in moto decelerato, utilizzando la relazione $h = \frac{1}{2}(v + v_0)t_2$:

$$t_2 = \frac{2 \cdot 29.4 m}{(24 + 0) \frac{m}{s}} = 2.45 s$$

calcoliamo infine il tempo di ricaduta da un'altezza complessiva di $101.4 m$ mediante la consueta relazione $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$,

$$t_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 101.4 m}{9.8 \frac{m}{s^2}}} = 4.55 s$$

Da tutto ciò risulta che il tempo complessivo è la somma dei tre tempi relativi ai diversi comportamenti del razzo

$$t_{tot} = (6.00 + 2.45 + 4.55) s = 13.00 s$$

Il moto complessivo è scomponibile, come visto, in tre moti: un primo tratto di moto accelerato verso l'alto, fino all'esaurimento del carburante; un secondo tratto, sempre di salita, con moto però decelerato, e un terzo tratto di caduta con moto accelerato verso il basso.

ESERCIZIO 60. Un giocatore di basket, fermo vicino al canestro, salta verticalmente fino ad un'altezza di $76.0 cm$. (a) Per quanto tempo il giocatore si trova nei $15 cm$ superiori del salto (tra $61.0 cm$ e $76.0 cm$) e (b) per quanto tempo invece nei $15 cm$ inferiori?

Caso 1. (a): è utile calcolare prima la velocità iniziale, quella cioè con cui viene spiccato il salto, sapendo che la velocità finale sarà nulla (infatti il cestista dopo aver raggiunto l'altezza massima, ricade). Tramite la solita relazione $v_f^2 = v_0^2 - 2gh$ si ha

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 0.76 m} = 3.86 \frac{m}{s}$$

allo stesso modo possiamo calcolare la velocità all'altezza di $0.61 m$:

$$v_{0.61 m} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 0.61 m} = 1.72 \frac{m}{s}$$

calcoliamo ora il tempo impiegato a percorrere in salto (verticale) i primi $0.61 m$ e ad arrivare fino a $0.76 m$:

$$t_{0.61} = \frac{v - v_0}{g} = \frac{(3.86 - 1.72) \frac{m}{s}}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 0.218 s$$

$$t_{0.76} = \frac{(3.86) \frac{m}{s}}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 0.394 s$$

l'intervallo di tempo sarà pertanto

$$\Delta t = 0.394 - 0.218 = 0.176 s$$

considerando che il cestista si trova tra queste due distanze sia in fase di salita che di ricaduta, si avrà

$$t_{volo} = 2 \cdot 0.176 s = 0.352 s$$

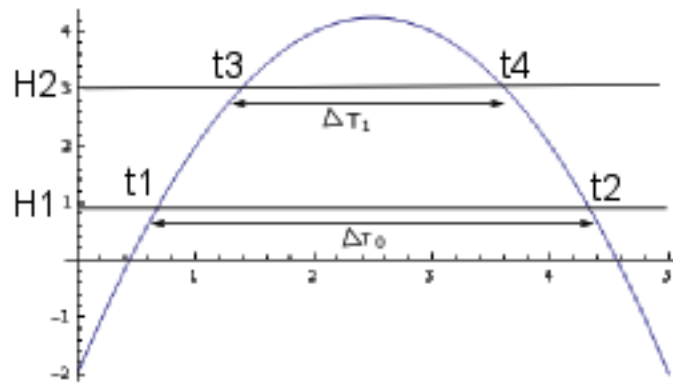
Caso 2. (b): possiamo velocizzare il calcolo, considerando le caratteristiche del moto uniformemente accelerato. Calcoliamo ancora la velocità dopo $15 cm$, sapendo che la velocità iniziale è quella ottenuta in precedenza, cioè $3.86 \frac{m}{s}$

$$v_{0.15} = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{\left(3.86 \frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 0.15 m} = 3.46 \frac{m}{s}$$

il tempo complessivo di salita e simmetrica ricaduta è

$$2 \Delta t = \frac{(3.86 - 3.46) \frac{m}{s}}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 0.082 s$$

ESERCIZIO 61. È possibile eseguire una misurazione di g lanciando verticalmente verso l'alto una sfera di vetro nel vuoto all'interno di una torre e lasciandola poi ricadere. Se ΔT_0 è l'intervallo di tempo tra i due passaggi della sfera a un livello inferiore e ΔT_1 quello fra due passaggi a un livello superiore, e posta H la distanza tra i due livelli, dimostrare la seguente relazione che lega tali grandezze a g (fare riferimento alla figura)



$$g = \frac{8H}{\Delta T_0^2 - \Delta T_1^2}$$

SOLUZIONE. la relazione spazio-tempo, mostrata in figura, che caratterizza il moto è tipico di un moto uniformemente accelerato (forma parabolica) con velocità prima decrescente e poi crescente; di conseguenza, essendo la curva continua, si avrà un valore del tempo per il quale la velocità si annulla: tale valore è individuabile nel vertice della parabola. [Ricordiamo che la velocità istantanea può essere vista come il coefficiente angolare (pendenza) della retta tangente alla curva in quel punto e quindi nella prima metà tale valore è positivo e decrescente, nella seconda tale valore è negativo e crescente]. La legge oraria del moto assume in generale la forma $s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$; l'equazione generale di una parabola è $h = c + b t + a t^2$, ne risulta che il coefficiente di t^2 vale $-\frac{1}{2} g$.

Ricavo gli altri coefficienti dell'equazione della parabola esprimendoli in funzione dei dati assegnati. Impongo il passaggio della parabola per i punti $(t_1; H_1)$, $(t_3; H_2)$ e so che l'ascissa del vertice vale $t_v = \frac{t_2 + t_1}{2} = \frac{t_4 + t_3}{2}$ essendo il punto medio dei segmenti ΔT_0 e ΔT_1 .

$$\begin{cases} H_1 = at_1^2 + bt_1 + c \\ H_2 = at_3^2 + bt_3 + c \\ -\frac{b}{2a} = \frac{t_2 + t_1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} H_1 = at_1^2 - a(t_2 + t_1)t_1 + c \\ H_2 = at_3^2 - a(t_2 + t_1)t_3 + c \\ b = -a(t_2 + t_1) \end{cases}$$

sottraggo la prima equazione dalla seconda e ricavo a

$$H_2 - H_1 = a(t_3^2 - t_1^2) - a(t_2 + t_1)(t_3 - t_1) = a(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)$$

ne segue che

$$a = \frac{H_2 - H_1}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

ora, sostituendo $H_2 - H_1 = H$, $t_3 - t_1 = \frac{\Delta T_0 - \Delta T_1}{2}$ e $t_2 - t_3 = \Delta T_0 - \frac{\Delta T_0 - \Delta T_1}{2} = \frac{\Delta T_0 + \Delta T_1}{2}$ (dalla geometria della figura), possiamo uguagliare il valore trovato di a con $-\frac{1}{2} g$, da cui

$$g = \frac{2H}{\frac{\Delta T_0 - \Delta T_1}{2} \cdot \frac{\Delta T_0 + \Delta T_1}{2}} = \frac{8H}{\Delta T_0^2 - \Delta T_1^2}$$

ESERCIZIO 62. Una palla cade a terra da un'altezza di $15.0 m$. Rimane in contatto col suolo per $20.0 ms$ prima di arrestarsi. Qual è l'accelerazione media della palla mentre è in contatto col terreno? (trattare la palla come puntiforme)

SOLUZIONE. Soluzione la velocità con cui giunge al suolo è ottenibile dalla consueta relazione $v = \sqrt{2hg}$, per cui

$$v = \sqrt{2 \cdot 15.0 \text{ m} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 17.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

calcoliamo ora l'accelerazione, tramite la sua definizione, nel caso del moto uniformemente accelerato, $a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$ per cui

$$a = \frac{(17.1 - 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20.0 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 857 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ESERCIZIO 63. Una palla viene scagliata verticalmente verso il basso con velocità iniziale v_0 da un'altezza h . (a) quale sarà la sua velocità subito prima di toccare il suolo? (b) quanto tempo impiegherà a raggiungere il suolo? (c) quali sarebbero le risposte ai punti precedenti se la palla fosse stata lanciata verticalmente verso l'alto dalla stessa altezza e con la stessa velocità iniziale?

Caso 1. (a): nella maggior parte degli esercizi precedenti, si considerava la velocità iniziale nulla e quella finale era data da $v_f = \sqrt{2hg}$; in questo caso il corpo cade con una velocità diversa da zero e pari a v_0 ; questa velocità si sommerà quindi a quella che verrà acquisita in caduta, cioè, da $v_f^2 = v_0^2 + 2gh$, si ottiene

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Caso 2. (b): il calcolo del tempo può essere fatto calcolando il rapporto tra la variazione della velocità e l'accelerazione che l'ha determinata, $\Delta t = \frac{v_f - v_0}{g}$; per cui

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{g}$$

Caso 3. (c): la velocità finale rimane la stessa anche se il corpo viene scagliato verso l'alto. Infatti salendo il moto è decelerato e il corpo sale finché la sua velocità non si annulla, dopo di che cade e passando nel punto da cui è stato lanciato, avrà ancora la stessa velocità v_0 , ovviamente trascurando ogni aspetto dissipativo.

Il tempo sarà invece maggiore, dovendo percorrere una distanza maggiore.

ESERCIZIO 64. Un giocoliere lancia in aria delle palle a una certa altezza in verticale. A quale maggiore altezza dovrà lanciarle affinché rimangano in aria per un tempo doppio?

SOLUZIONE. Soluzione supponiamo che la velocità con cui le palle vengono lanciate sia la stessa. Il tempo di volo è dato dalla fase di salita e dalla simmetrica fase di discesa. Nel punto di massima altezza tutte le palle avranno pertanto velocità nulla. Useremo quindi la relazione $h_{max} = v_f t + \frac{1}{2} g t^2$, con $v_f = 0$.

Si avrà quindi

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2} g t_1^2 \\ h_2 &= \frac{1}{2} g t_2^2 \end{aligned}$$

se ora poniamo $t_2 = 2t_1$ e sostituiamo, si ha $h_2 = 2gt_1^2$; calcoliamo il rapporto tra le due altezze e i rispettivi tempi di volo

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{2gt_1^2}{\frac{1}{2}gt_1^2} = 4$$

ESERCIZIO 65. Si lancia verticalmente una pietra verso l'alto. Passa il punto A alla velocità v , e il punto B , 3.00m più in alto, alla velocità $v/2$. Calcolare (a) la velocità v (b) la massima altezza raggiunta oltre il punto B .

Caso 1. (a): La distanza $\overline{AB} = 3.00\text{m}$. Ciò ci consente di utilizzare la relazione che descrive il legame tra le velocità è la distanza percorsa, cioè $v_B^2 = v_A^2 - 2gh$, da cui, essendo $v_B = \frac{1}{2}v_A = \frac{v}{2}$

$$\frac{v^2}{4} = v^2 - 2g \cdot 3 \quad \frac{3}{4}v^2 = 6g \quad v^2 = 8g$$

da cui

$$v = \sqrt{8 \cdot 9.8} = 8.85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Caso 2. (b): nel punto di massima altezza, la velocità si annulla, per cui se $v_f^2 = v_0^2 - 2gh$ con $v_f = 0 \frac{m}{s}$ e $v_0 = 8.85 \frac{m}{s}$, si ha

$$h = \frac{(8.85 \frac{m}{s})^2}{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2}} = 4.00 m$$

da cui si ricava che la massima altezza si trova a

$$4.00 m - 3.00 m = 1.00 m$$

dal punto *B*.

ESERCIZIO 66. Per provare una palla da tennis la si lascia cadere da un'altezza di $4.00 m$. Essa rimbalza fino all'altezza di $3.00 m$. Se è stata a contatto con il suolo per $10 ms$, qual è stata la sua accelerazione media durante il contatto?

SOLUZIONE. Soluzione Assumo come positivo il verso della velocità in risalita.

La palla scende da $4 m$ e arriva al suolo con una velocità di $v_{suolo}^{arrivo} = \sqrt{2hg} = -8.85 \frac{m}{s}$. La palla rimbalza poi solo fino a $3 m$; ciò implica una riduzione della velocità iniziale verso l'alto, dovuta probabilmente allo schiacciamento della palla; la palla ripartirà con una velocità pari a $v_{suolo}^{uscita} = \sqrt{2hg} = +7.67 \frac{m}{s}$. La variazione di velocità è avvenuta in $10 ms$ e quindi

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{[7.67 - (-8.85)] \frac{m}{s}}{10^{-2} s} = 1652 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 67. Dall'ugello di una doccia sgocciola l'acqua cadendo sul fondo posto $2.00 m$ più in basso. Le gocce cadono a intervallo regolare: la quarta goccia si stacca nell'istante in cui la prima arriva al suolo. Trovare le posizioni della seconda e della terza in quello stesso istante.

SOLUZIONE. osservando la situazione descritta, si può sicuramente pensare che durante il tempo di caduta della goccia 1, sgoccioleranno con regolarità altre due gocce, mentre la quarta, che si presenta quando la prima ha finito la sua caduta, rappresenta l'inizio di un nuovo ciclo. Ciò ci consente di dire che il periodo di caduta delle gocce è pari a un terzo del tempo di caduta della prima goccia. Calcoliamo questo tempo, sapendo che la $v_0 = 0$. Da $s = \frac{1}{2}gt^2$, si ottiene la formula inversa

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 m}{9.8 \frac{m}{s^2}}} = 0.639 s$$

[la scelta di tre cifre decimali è funzionale alla divisibilità del numero per 3]. Dividendo per 3, troviamo il periodo di sgocciolamento: $T = 0.639 : 3 = 0.213 s$. Pertanto, quando la prima goccia è arrivata in fondo, la seconda ha percorso un tratto corrispondente a $t_2 = 0.426 s$, mentre la terza goccia è comparsa da $t_3 = 0.213 s$. Calcoliamo ora, con la stessa formula indicata sopra, la distanza percorsa da queste due gocce.

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{1}{2} \cdot 9.8 \frac{m}{s} \cdot (0.426 s)^2 = 0.89 m \\ s_2 &= \frac{1}{2} \cdot 9.8 \frac{m}{s} \cdot (0.213 s)^2 = 0.22 m \end{aligned}$$

(N.B: Lo stesso esercizio può essere svolto sfruttando la proporzionalità tra le distanze percorse e i quadrati dei tempi impiegati:

$$2 : s_2 = 0.639^2 : 0.213^2$$

ottenendo $s_2 = 0.22 m$. Questo esercizio ricorda, per coloro che l'hanno visto, il famoso piano inclinato galileiano, dove per mostrare la proporzionalità quadratica si mettono dei campanellini alle corrette distanze per sentire un suono ad intervalli di tempo regolari).

ESERCIZIO 68. Si lascia cadere una palla di piombo in un lago da un trampolino posto a $5.20 m$ dalla superficie dell'acqua. Arriva in acqua ad una certa velocità e va a fondo mantenendo costante la stessa velocità. Raggiunge il fondo dopo $4.80 s$ dal rilascio. (a) quanto è profondo il lago? (b) qual è la velocità media della palla? (c) se il lago venisse prosciugato e la palla lanciata allo stesso modo raggiungesse il fondo ancora in $4.80 s$, quale sarà la velocità iniziale della palla?

- Caso 1.* (a): il moto della palla può essere diviso in due parti: la prima, caduta in aria senza attrito, di moto uniformemente accelerato con partenza da fermo, la seconda, in acqua, di moto rettilineo uniforme (lo si riconosce dal testo quando specifica che in acqua la velocità rimane costante). Calcoliamo pertanto la velocità con cui giunge sulla superficie dell'acqua,

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 5.20 m} = 10.1 \frac{m}{s}$$

calcoliamo pure il tempo impiegato a percorrere questo tratto, da $s = \frac{1}{2}gt^2$, si ottiene

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5.20 m}{9.8 \frac{m}{s^2}}} = 1.03 s$$

ne segue che il tempo di caduta in acqua corrisponde alla differenza tra il tempo complessivo e il tempo di volo in aria

$$t_{acqua} = 4.80 s - 1.03 s = 3.77 s$$

Di conseguenza, essendo, come detto sopra, il moto in acqua di tipo rettilineo uniforme, si ha

$$profondità\ lago = vt = 10.1 \frac{m}{s} \cdot 3.77 s = 38.1 m$$

- Caso 2.* (b): la velocità media è il rapporto tra la distanza complessivamente percorsa ed il relativo tempo impiegato, cioè

$$v_{media} = \frac{(38.1 + 5.20) m}{4.80 s} = 9.02 \frac{m}{s}$$

- Caso 3.* (c): se mancasse l'acqua, la palla si muoverebbe sempre di moto accelerato e, per percorrere la stessa distanza, impiegherebbe un tempo minore. Nel nostro caso, il tempo deve rimanere lo stesso. Ne segue che la palla deve percorrere una distanza maggiore, cioè deve essere prima lanciata verso l'alto in modo da dover percorrere una distanza maggiore. Vediamo come questa osservazione intuitiva è espressa dal calcolo.

Applichiamo la legge oraria del moto accelerato uniformemente, $s = v_0t - \frac{1}{2}at^2$, dove $a = -g$, da cui

$$43.3 m = v_0 \cdot 4.80 s + \frac{1}{2} \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot (4.80 s)^2$$

e risolvendo rispetto a v_0 si ottiene

$$v_0 = \frac{(43.3 - 112.9) \frac{m}{s}}{4.80 s} = -14.5 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 69. Se un oggetto copre la metà del percorso totale di caduta nell'ultimo secondo della sua caduta da fermo, trovate (a) il tempo totale e (b) l'altezza della sua caduta.

- Caso 1.* (a): dal testo si desume che la seconda metà del percorso viene coperta in 1 *secondo*. Se quindi indichiamo con t il tempo totale, la prima metà verrà percorsa in $(t-1)$ *sec*. Traduciamo in equazioni, usando le leggi del moto uniformemente accelerato, e indicando con x la distanza complessiva: seconda metà del tratto: $\frac{x}{2} = v_{\frac{1}{2}}t - \frac{1}{2}gt^2$, ma essendo $t = 1$ e sostituendo, si ha:

$$(0.0.1) \quad \frac{x}{2} = v_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}g$$

prima metà del tratto:

$$(0.0.2) \quad \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}g(t-1)^2$$

Possiamo confrontare le due distanze uguali se riusciamo a trovare una relazione per $v_{\frac{1}{2}}$, cioè la velocità che l'oggetto ha a metà percorso. Quindi da $v_{\frac{1}{2}} = v_0 - gt$, ed essendo $v_0 = 0$ e $t = t-1$, si ha $v_{\frac{1}{2}} = -g(t-1)$. Sostituendo tale relazione nella 0.0.1 si ottiene

$$(0.0.3) \quad \frac{x}{2} = -gt + g - \frac{1}{2}g = -gt + \frac{1}{2}g$$

Eguagliamo ora le due distanze, espresse dalla 0.0.3 e 0.0.2, applicando la proprietà transitiva dell'uguaglianza, troveremo

$$-gt + \frac{1}{2}g = -\frac{1}{2}g(t-1)^2$$

svolvendo il quadrato e moltiplicando tutto per 2, si ottiene

$$gt^2 - 4gt + 2g = 0$$

da cui, dividendo per g , che è quindi ininfluenza sul risultato,

$$t^2 - 4t + 2 = 0$$

che ha come soluzioni algebriche

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 + \sqrt{2} = 3.41 \text{ s} \\ t_2 &= 2 - \sqrt{2} = 0.59 \text{ s} \end{aligned}$$

la soluzione t_2 non ha però significato fisico, in quanto il tempo complessivo risulta minore di quello necessario a percorrere il secondo tratto, che è pari a 1 secondo. L'unica soluzione accettabile sarà pertanto

$$t = 3.41 \text{ s}$$

Caso 2. (b): troviamo ora la distanza percorsa. Se il tempo complessivo è quello sopra indicato, si trova facilmente da, ricordando che $v_0 = 0$,

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot (3.41 \text{ s})^2 = 57.0 \text{ m}$$

ESERCIZIO 70. Un oggetto cadendo dal tetto di un edificio alto 43.2 m , finendo su una tettoia in lamiera, la deforma per una profondità di 45.7 cm . Quale accelerazione (supposta uniforme) ha subito durante l'urto? Esprimere la risposta in unità di g .

SOLUZIONE. per rispondere a tale quesito è necessario conoscere prima la velocità con la quale il nostro oggetto giunge al suolo

$$v_{suolo}^2 = 2gh = 2g \cdot 43.2 \text{ m} = 86.4g \cdot m$$

Ora, siccome l'oggetto non rimbalza, ma schiaccia la lamiera su cui cade, tale velocità si annulla dopo altri 45.7 cm . Quindi

$$v_f^2 = v_{suolo}^2 - 2ah$$

da cui, essendo $v_f = 0$ si ha

$$0 = 86.4g \cdot m - 2a \cdot 0.457 \text{ m}$$

da cui, risolvendo rispetto ad a , si ottiene

$$a = \frac{86.4g \cdot m}{2 \cdot 0.457 \text{ m}} = 95g$$

ESERCIZIO 71. Da un ponte alto 45 m sul livello del fiume si lascia cadere una pietra. Dopo 1 s un'altra pietra viene scagliata verso il basso. Le due pietre toccano l'acqua contemporaneamente. (a) qual era la velocità iniziale della seconda pietra?

SOLUZIONE 72. dal testo si può desumere che la seconda pietra percorre la stessa distanza in caduta in un secondo in meno della prima, cioè $t_2 = t_1 - 1 \text{ s}$. Calcoliamo quindi il tempo che la prima pietra impiega per giungere al suolo, partendo da ferma

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \text{ m}}{9.8 \frac{m}{s^2}}} = 3.03 \text{ s}$$

di conseguenza $t_2 = 2.03 \text{ s}$. Calcoliamo ora la velocità iniziale della seconda pietra, utilizzando sempre la legge oraria $s = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ e sostituendo i valori noti

$$45 \text{ m} = v_0 \cdot 2.03 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot (2.03 \text{ s})^2$$

risolviamo rispetto a v_0 , ottenendo

$$v_0 = \frac{45 \text{ m} - 4.9 \frac{m}{s^2} \cdot (2.03 \text{ s})^2}{2.03} = 12.2 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 73. Un paracadutista si butta in caduta libera per 50 m . Poi il paracadute si apre, e da quel momento decelera con valore assoluto costante di 2.0 m/s^2 . Tocca il suolo alla velocità di 3.0 m/s . (A) Per quanto tempo è rimasto in aria? (b) da che altezza è iniziata la caduta?

Caso 1. (a): supponiamo che il paracadutista si lanci da un dirupo con velocità iniziale nulla; se si lanciasse da un aereo, infatti, il suo moto non potrebbe essere quello descritto dall'esercizio. Anche in questo caso il moto può essere diviso in due parti, entrambe di moto accelerato, ma con accelerazione diversa.

Primo tratto: caduta libera con $v_0 = 0$, per cui

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50m}{9.8 \frac{m}{s^2}}} = 3.2s$$

dopo questi 50m di caduta libera, prima che si apra il paracadute, avrà una velocità di

$$v_{f_1} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 50m \cdot 9.8 \frac{m}{s^2}} = 31.3 \frac{m}{s}$$

possiamo quindi calcolare il tempo di caduta nel secondo tratto, dalla legge delle velocità, $v_{f_2} = v_{f_1} - at$, da cui, risolvendo rispetto a t

$$t_2 = \frac{v_{f_1} - v_{f_2}}{a} = \frac{(31.3 - 3.0) \frac{m}{s}}{2 \frac{m}{s^2}} = 14.1s$$

il tempo complessivo sarà allora

$$t_{1+2} = 3.2s + 14.1s = 17.3s$$

Caso 2. (b): il primo tratto è noto ed è pari a $h_1 = 50m$; il secondo tratto può essere ricavato dalla conoscenza delle velocità iniziale e finale e dal valore assoluto dell'accelerazione, mediante la relazione $v_{f_2}^2 = v_{f_1}^2 - 2ah_2$; sostituendo i valori da noi trovati, si ha

$$\left(3.0 \frac{m}{s}\right)^2 = \left(31.3 \frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 2 \frac{m}{s^2} h_2 \quad \text{da cui} \quad h_2 = \frac{(31.3^2 - 3.0^2) \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 2 \frac{m}{s^2}} = 243m$$

Pertanto la distanza complessiva è di

$$h = h_1 + h_2 = 50m + 243m = 293m$$

ESERCIZIO 74. Due oggetti iniziano la caduta libera da fermi e dalla stessa altezza, a un intervallo di 1s l'uno dall'altro. Quanto tempo dopo la partenza del primo verranno a trovarsi a 10m di distanza?

SOLUZIONE. i due moti si possono considerare sfasati di 1sec. Scriviamo quindi le due leggi orarie che esprimono la distanza percorsa in funzione del tempo (anche qui la velocità iniziale è nulla, cioè $v_0 = 0$), assumendo come tempo zero quello in cui cade il primo oggetto:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{2}gt^2 \\ s_2 &= -\frac{1}{2}g(t-1)^2 \end{aligned}$$

se la loro distanza deve essere di 10m allora $s_2 - s_1 = 10$. Sottraiamo la prima alla seconda e uguagliamo a 10.

$$s_2 - s_1 = -\frac{1}{2}g(t^2 - 2t + 1) + \frac{1}{2}gt^2 = 10$$

risolvendo si ha

$$gt - \frac{1}{2}g = 10 \quad t = \frac{10 + \frac{1}{2}g}{g} = 1.5s$$

ESERCIZIO 75. Un aerostato sta salendo alla velocità di 12m/s, e quando si trova a una quota di 80m lascia cadere un pacchetto. (a) Quanto impiega il pacchetto ad arrivare al suolo? (b) A che velocità urta il terreno?

Caso 1. (a) nel momento in cui il pacchetto viene lasciato cadere, esso ha una velocità di 12m/s diretta verso l'alto. Una volta abbandonato, il pacchetto diminuisce prima la propria velocità di salita, fino ad annullarsi per poi crescere, ma nel verso opposto. Useremo la relazione $s = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$, da cui

$$80m = -12t + 4.9t^2$$

e risolvendo rispetto a t (usando la formula ridotta), si ha

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 392}}{4.9}$$

considerando la soluzione positiva, si ottiene $t = 5.4 \text{ s}$.

Caso 2. (b): anche in questo caso va tenuto conto della velocità iniziale diretta nel verso opposto al moto di caduta, per cui

$$v_f^2 = v_i^2 + 2gh = 144 \frac{m^2}{s^2} + 2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 80m$$

da cui

$$v_f = \sqrt{144 + 1568} = 41.3 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 76. La cabina scoperta di un ascensore sale alla velocità costante di 10 m/s . Una persona nella cabina lancia una palla direttamente verso l'alto da un'altezza di 2.0 m sopra il pavimento della cabina, che si trova esattamente a 28 m dal suolo. La velocità iniziale della palla rispetto all'ascensore è 20 m/s . (a) Quale altezza massima raggiunge la palla? (b) Quanto tempo impiega la palla per ritornare alla cabina dell'ascensore?

Caso 1. (a): nell'istante in cui la palla viene lanciata si trova a 30 m dal suolo e ha una velocità di 30 m/s , che si ottiene sommando il contributo della velocità dell'ascensore e di quella ottenuta con il lancio; entrambe le velocità hanno stessa direzione e verso. Pertanto, per trovare l'altezza applichiamo la relazione in cui non compare il tempo,

$$v_f^2 = v_0^2 - 2gh$$

ed essendo la $v_f = 0$ in corrispondenza dell'altezza massima, si ha

$$0 = 900 \frac{m^2}{s^2} - 2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot h$$

da cui

$$h = \frac{900 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2}} = 46 \text{ m}$$

e sommando tale altezza a quella in cui si trova inizialmente la palla, si ha

$$h = 30 \text{ m} + 46 \text{ m} = 74 \text{ m}$$

Caso 2. (b): mentre la palla sale, anche l'ascensore si sposta verso l'alto a velocità costante (moto rettilineo uniforme). Basterà pertanto confrontare le due leggi orarie, imponendo che, per incontrarsi nuovamente, ascensore e palla debbano trovarsi nello stesso posto allo stesso tempo:

$$\begin{cases} s = 10t \\ s = 30t - 9.8t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} s = 10t \\ 40t = 9.8t^2 \end{cases}$$

e risolvendo l'equazione di secondo grado in t dove la soluzione $t = 0$ rappresenta la posizione comune iniziale dei due corpi, si ha

$$t(9.8t - 40) = 0$$

da cui

$$t = \frac{40}{9.8} = 4.1 \text{ s}$$

ESERCIZIO 77. Una sfera d'acciaio, lasciata cadere dal tetto di un edificio, passa davanti a una finestra, impiegando 0.125 s a percorrerne «la luce verticale», che è di 1.20 m . Quindi cade sul marciapiede e rimbalza «perfettamente» fino a passare davanti alla finestra, impiegando ancora, dal bordo inferiore al superiore, 0.125 s . (Il volo verso l'alto è l'opposto di una caduta). Il tempo totale passato al disotto del davanzale della finestra è 2.00 s . Quanto è alto l'edificio?

Consideriamo prima le informazioni relative al passaggio davanti alla finestra. La sfera cade con $v_i = 0$ e accelera, le velocità all'inizio e alla fine della finestra sono esprimibili tramite la grandezza della finestra

$$v_2^2 - v_1^2 = 2gh = 23.52 \frac{m^2}{s^2}$$

D'altra parte le stesse velocità sono pure collegate tra di loro tramite il tempo di percorrenza

$$h = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) t$$

da cui

$$v_1 + v_2 = \frac{2.40 \text{ m}}{0.125 \text{ s}} = 19.2 \frac{m}{s}$$

Collegando le due relazioni si ha

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 19.2 \\ v_2^2 - v_1^2 = 23.52 \end{cases}$$

svolvendo il prodotto notevole, si ha

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 19.2 \\ (v_2 - v_1)(v_1 + v_2) = 23.52 \end{cases}$$

e sostituendo

$$\begin{cases} v_2 + v_1 = 19.2 \\ v_2 - v_1 = \frac{23.52}{19.2} = 1.23 \end{cases}$$

risolvendo, si ha

$$\begin{cases} v_1 = 8.98 \\ v_2 = 10.21 \end{cases}$$

Pertanto $v_1 = 8.98$ è la velocità con la quale la sfera arriva alla parte superiore della finestra, partendo da ferma. Ciò ci consente di calcolare in quanti metri è avvenuto questo incremento di velocità, da

$$v_1^2 = 2gh$$

si ricava

$$h = \frac{80.64}{19.6} = 4.1 \text{ m}$$

Il tratto di edificio fino al suolo viene percorso in 1 s (essendo il moto «perfettamente» simmetrico), da cui

$$s = v_2 t + \frac{1}{2} g t^2 = 10.21 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} + 4.9 \cdot 1 \text{ s}^2 = 15.1 \text{ m}$$

Sommando le varie distanze, si ottiene

$$h_{tot} = 4.1 + 1.2 + 15.1 = 20.4 \text{ m}$$

ESERCIZIO 78. Un mesone arriva con una velocità di $5,00 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in una regione dove un campo elettrico produce un'accelerazione sul mesone di $1,25 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ in direzione opposta alla velocità iniziale del mesone. Quale spazio percorre il mesone prima di fermarsi? Per quanto tempo rimane fermo?

SOLUZIONE. Conosciamo la velocità iniziale e quella finale ($v_f = 0$) e pure la decelerazione che la forza imprime sulla particella, per cui da

$$v_f^2 = v_0^2 + 2as$$

avremo

$$s = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - 2,50 \cdot 10^{13}}{-2,50 \cdot 10^{12}} = 0,10 \text{ m}$$

La particella avrà solo una velocità istantanea nulla ma non si potrà mai considerare come ferma in quanto l'accelerazione del campo continuerà a spingerla nel verso contrario a quello iniziale.

ESERCIZIO 79. Un razzo si muove nello spazio con accelerazione costante di $9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Se parte da fermo, quanto tempo impiega ad acquistare una velocità pari a $1/10$ di quella della luce? Quanto spazio percorre in tale tempo?

SOLUZIONE. Ricordiamo che la velocità della luce si può indicare con buona approssimazione con $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, per cui $\frac{c}{10} = 3,0 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Se $v_0 = 0$, allora

$$t = \frac{a}{\Delta v} = \frac{3,0 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3,1 \cdot 10^6 \text{ s} = 850 \text{ h}$$

e lo spazio percorso in questo intervallo di tempo sarà

$$s = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2s} = \frac{9,0 \cdot 10^{14}}{19,6} = 4,6 \cdot 10^{13} \text{ m}$$

ESERCIZIO 80. Il macchinista di un treno che sta viaggiando con velocità v_1 vede a una distanza d sul suo stesso binario un altro treno che si sta muovendo nella sua stessa direzione con una velocità inferiore v_2 . Egli frena immediatamente e dà al suo treno una decelerazione costante a . Dimostrare che non ci sarà scontro se $d > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$ e ci sarà scontro se $d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$.

SOLUZIONE. Abbiamo $v_1 > v_2$ e $a = \text{cost}$ e d è la distanza che separa i due treni. Consideriamo la velocità relativa $v_r = v_1 - v_2$; quindi è come se il secondo treno rimanesse fermo, mentre il primo possiede una velocità iniziale v_r . Per percorrere la distanza d , abbiamo che $v_f^2 = v_0^2 + 2ad$; nel nostro caso

$$0 = v_r^2 - 2ad$$

cioè

$$d = \frac{v_r^2}{2a} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$$

pertanto se vale la relazione $d > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$ non avremo impatto tra i due treni; viceversa nell'altro caso.

ESERCIZIO 81. Le gocce d'acqua cadono dallo spruzzatore di una doccia sul pavimento sottostante distante $2m$. Le gocce cadono a intervalli regolari di tempo e la prima goccia tocca terra nell'istante in cui la quarta goccia si stacca dalla doccia. Trovare la posizione delle singole gocce quando una goccia tocca terra.

SOLUZIONE. Se consideriamo la sola accelerazione di gravità come quella che determina questo moto, ogni goccia, supposte tutte identiche, impiega un tempo t per percorrere la distanza che la separa dal suolo, per cui

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

ma essendo $v_0 = 0$, abbiamo

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{4}{9,8}} = 0,64 s$$

Se la prima goccia tocca terra quando si stacca la quarta goccia, avremo che l'intervallo di tempo che separa ogni goccia è dato da

$$\frac{t}{3} = \frac{0,64}{3} = 0,21 s$$

in questo intervallo di tempo ogni goccia percorre

$$s = 4,9 \times 0,21^2 = 0,22 m = 22 cm$$

ESERCIZIO 82. Una pallone aerostatico sta salendo alla velocità di $12 \frac{m}{s}$ e quando si trova a un'altezza di $80m$ lascia cadere giù la zavorra. Quanto tempo impiegherà il peso a raggiungere la terra?

SOLUZIONE. Il pallone aerostatico sale con una velocità costante e percorre la distanza in

$$t = \frac{s}{v} = \frac{80m}{12 \frac{m}{s}} = 6,7 s$$

la zavorra cade sotto l'azione del proprio peso e ha una velocità iniziale di $12 \frac{m}{s}$ diretta verso l'alto. Calcoliamo il tempo impiegato a cadere

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

per cui

$$4,9t^2 - 12t - 80 = 0$$

risolvendo, si ha, considerando la sola soluzione positiva

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 80 \times 4,9}}{9,8} = 5,5 s$$

ESERCIZIO 83. La posizione di una particella che si muove lungo l'asse x dipende dal tempo secondo l'equazione $x = at^2 - bt^3$, dove x è in metri e t in secondi. Determinare le dimensioni dei parametri a e b . Supponendo che $a = 3$ e $b = 1$ trovare: l'istante in cui la particella raggiunge la massima ascissa.

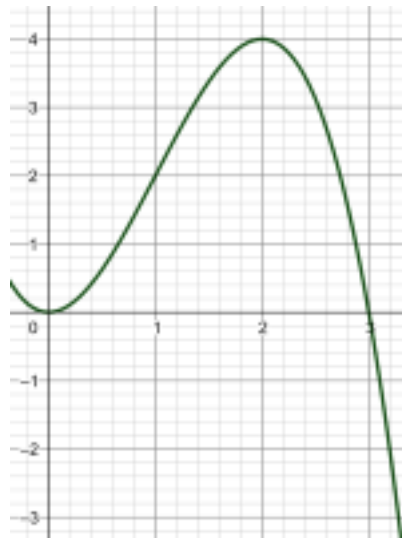
SOLUZIONE. scriviamo l'equazione dimensionale per individuare le dimensioni dei due parametri

$$[L] = a [T^2] - b [T^3]$$

la dimensione del secondo membro dovrà essere pure una lunghezza misurata in metri, per cui

$$[L] = [LT^{-2}] [T^2] - [LT^{-3}] [T^3]$$

Possiamo rispondere graficamente rappresentando la funzione nell'intervallo $0 - 4 s$ in un grafico spazio-tempo



da cui risulta che la distanza massima corrisponde al tempo $t = 2\text{ s}$; è possibile altresì ottenere lo stesso risultato analiticamente, calcolando la derivata della funzione

$$x' = 6t - 3t^2$$

e studiando il valore per cui si annulla, cioè $6t - 3t^2 = 0$; cioè ancora $t = 2\text{ s}$.