CALCOLO DEGLI INTEGRALI

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

Parte 1. INTEGRALI INDEFINITI

1. Integrazione diretta

1.1. Principali regole di integrazione.

(1) Se $F'(x) = f(x)$, allora $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ dove C è una costante arbitraria.
(2) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ dove A è una costante
(3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$
(4) Se $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ed $u = \phi(x)$, allora $\int f(u)\,du = F(u) + C$

1.2. Tavola degli integrali elementari (immediati).

Ecco un elenco

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, più in generale
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ con $n \neq -1$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x dx + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

1.3. Integrali risolvibili con le regole di integrazione e formule di integrazione.

Esercizio 1. $\int 5a^2x^6dx =$

Soluzione. $= 5a^2\int x^6dx = 5a^2\frac{x^7}{7} + C$

Esercizio 2. $\int \left(6x^2+8x+3\right)dx =$

Soluzione. $= \int 6x^2dx + \int 8xdx + \int 3dx = \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + \frac{3x}{1} + C = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C$

Esercizio 3. $\int [x(x+a)(x+b)]\,dx =$

Soluzione: $= \int \left[x^3 + (a+b)x^2 + abx\right]dx = \int x^3dx + (a+b)\int x^2dx + ab\int xdx = \frac{x^4}{4} + (a+b)\frac{x^3}{3} + ab\frac{x^2}{2} + C$

Esercizio 4. $\int \left(a+bx^3\right)^2 dx =$

Soluzione: $= \int \left(a^2 + 2abx^3 + b^2x^6\right)dx = a^2\int dx + 2ab\int x^3dx + b^2\int x^6dx = a^2x + ab\frac{x^4}{2} + b^2\frac{x^7}{6} + C$

Esercizio 5. $\int \sqrt{2px}dx =$

Soluzione: $= \int (2px)^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}} + C$

Esercizio 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} =$

Soluzione: $= \int x^{-\frac{1}{n}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} + C = n\frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{n-1} + C$

Esercizio 7. $\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right) dx =$

Soluzione: $= \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} + x - x^{\frac{1}{2}} + 1\right) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + x + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C$

Esercizio 8. $\int \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$

Soluzione: $= \int \left(x^4 - x^2 - 2\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}} dx = \int \left(x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = \int x^{\frac{10}{3}} dx - \int x^{\frac{4}{3}} dx - 2\int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}} - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + C$

Esercizio 9. $\int \frac{dx}{x^2+7} dx =$

Soluzione $= \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}} + C$

Esercizio 10. $\int \frac{dx}{x^2-10} =$

Soluzione $= \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + C$

Esercizio 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} =$

Soluzione $= \ln\left|x + \sqrt{4+x^2}\right| + C$

Esercizio 12. $\int \frac{adx}{a-x} =$

Soluzione. $= a\int \frac{dx}{a-x} = -a\int \frac{d\left(a-x\right)}{a-x} = -a\ln|a-x| + a\ln C = a\ln\left|\frac{C}{a-x}\right|$

Esercizio 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} =$

Soluzione $= \arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} + C = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + C$

Esercizio 14. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx =$

Soluzione $= \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx - \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\cdot\sqrt{2+x^2}} dx - \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}\cdot\sqrt{2+x^2}} dx =$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} - \ln\left|\sqrt{2+x^2}\right| + C$$

Esercizio 15. $\int \frac{x^2+1}{x-1} =$

Soluzione. $= \int \frac{(x+1)(x-1)+2}{x-1} dx = \int (x+1)\, dx + 2\int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1|$

:

Esercizio 16. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx =$

Soluzione. Divido il numeratore della frazione per il denominatore mediante la procedura di divisione di due polinomi e ottengo $x^2+5x+7 = (x+3)(x+2)+1$, per cui
$= \int \frac{(x+3)(x+2)+1}{x+3}dx = \int (x+2)\,dx + \int \frac{dx}{x+3} = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+3|$

Esercizio 17. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx =$

Soluzione. Divido il numeratore della frazione per il denominatore mediante la procedura di divisione di due polinomi e ottengo $x^4+x^2+1 = (x-1)\left(x^3+x^2+2x+2\right)+3 = (x-1)(x+1)\left(x^2+2\right)+3$, per cui
$= \int \frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+2\right)+3}{x-1}dx = \int \left(x^3+x^2+2x+2\right)dx + 3\int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3\ln|x-1|$

Esercizio 18. $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{x+1}{(x+1)^2}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{dx}{(x+1)} - \int (x+1)^{-2}\,dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$

Esercizio 19. $\int \frac{bdx}{\sqrt{1-x}} =$

Soluzione. $= b\int (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,d(1-x) = -2b\sqrt{1-x}$

Esercizio 20. $\int \sqrt{a-bx}dx =$

Soluzione. $= -\frac{1}{b}\int (a-bx)^{\frac{1}{2}}\,d(a-bx) = -\frac{2}{3b}(a-b)^{\frac{3}{2}}$

Esercizio 21. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}dx} + \int \ln x d(\ln x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln^2 x$[1]

Esercizio 22. $= \int \frac{dx}{3x^2+5} =$

Soluzione. $= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x$

Esercizio 23. $\int \frac{dx}{7x^2-8} =$

Soluzione. $= \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x^2-\frac{8}{7}} = \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{16}\ln\left|\frac{x-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}{x+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}\right| = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{7}x-2\sqrt{2}}{\sqrt{7}x+2\sqrt{2}}\right|$

Esercizio 24. $\int \frac{x^2}{x^2+2}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{x^2+2-2}{x^2+2}dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+2} = x - \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$

Esercizio 25. $\int \tan^2 x dx =$

[1] $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$

Soluzione. applicando la formula goniometrica, $= \int \left(\frac{1}{\cos^x} - 1\right) dx = \tan x - x + C$

Esercizio 26. $\int 3^x e^x =$

Soluzione. $= \int (3e)^x \, dx = \dfrac{(3e)^x}{\ln 3e} + C = \dfrac{(3e)^x}{1 + \ln 3} + C$

1.4. **Integrazione per introduzione sotto il segno di differenziale.** La regola 4), se$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ e $du = \phi(x)$ allora $\int f(u)\,du = F(u) + C$ estende notevolmente la tavola degli integrali elementari, in quanto essa rimane valida anche nel caso in cui la variabile indipendente sia una funzione derivabile. In particolare

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-\frac{1}{2}}\, d(5x-2) = \frac{1}{5}\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$$

ciò equivale anche ad operare la sostituzione $5x - 2 = u$, da cui, differenziando, $5dx = du$.

Esercizio 27. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x+1} dx =$

Soluzione. riscriviamo il numeratore come $2x + 3 = 2x + 1 + 2$, avremo

$$= \int \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right) dx = \int dx + \int \frac{2dx}{2x+1} = x + \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x + \ln(2x+1) + C$$

Esercizio 28. $\int \dfrac{1-3x}{3+2x} =$

Soluzione. $= \displaystyle\int \frac{1}{2x+3}dx - \int \frac{3x}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| - 3\int \frac{x}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx = \tfrac{1}{2}\ln|2x+3| - \frac{3}{2}\int \frac{x+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx =$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x+3| - \frac{3}{2}\int dx + \frac{9}{4}\int \frac{1}{x+\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\ln\left|x+\frac{3}{2}\right| = \frac{11}{4}\ln|3+2x| - \frac{3}{2}x + C$$

Esercizio 29. $\int \dfrac{x^2+1}{x-1}dx =$

Soluzione. $= \int \dfrac{x^2-1+2}{x-1}dx = \int \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx + 2\displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \int (x+1)\,dx + 2\ln|x-1| = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C$

Esercizio 30. $\int \dfrac{x^2+5x+7}{x+3}dx =$

Soluzione. $= \int \dfrac{x^2+6x+9-x-2}{x+3}dx = \int \dfrac{(x+3)^2}{x+3}dx - \int \dfrac{x+3-1}{x+3}dx = \int (x+3)\,dx - \int dx + \int \dfrac{dx}{x+3} = \dfrac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+3| + C$

Esercizio 31. $\int \dfrac{x}{(x+1)^2}dx =$

Soluzione. $= \int \dfrac{x+1}{(x+1)^2}dx - \displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \ln|x+1| - \int (x+1)^{-2}\,dx = \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$

Esercizio 32. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx =$

Soluzione. $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+C$

Esercizio 33. $\int \dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx =$

Soluzione. $= \int \dfrac{\sqrt{x}}{x}dx + \displaystyle\int \dfrac{\ln x}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \ln x\,(d\ln x) = 2\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$

Esercizio 34. $\int \dfrac{dx}{3x^2+5} =$

Soluzione. $= \dfrac{1}{3}\int \dfrac{dx}{x^2+\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}x\right)+C$

Esercizio 35. $\int \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx =$

Soluzione. applichiamo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$ e avremo

$= \displaystyle\int \dfrac{x^2+4}{x^2+4}dx + \int \dfrac{2-5x}{x^2+4}dx = x + 2\int \dfrac{dx}{x^2+4} - 5\int \dfrac{x}{x^2+4}dx = x + \arctan\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{2}\int \dfrac{2x}{x^2+4}dx = x + \arctan\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{2}\ln\left|x^2+4\right| + C$

Esercizio 36. $\int \dfrac{x}{\sqrt{7-8x^2}}dx =$

Soluzione. $= \int \dfrac{dx}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{7}{5}-x^2}}dx = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{7}x + C$

Esercizio 37. $\int \dfrac{x}{\sqrt{8x^2+7}}dx =$

Soluzione. $\int \dfrac{dx}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+\frac{7}{8}}}dx = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\dfrac{7}{8}}\right| + C$

Esercizio 38. $\int \dfrac{2x-5}{3x^2-2}dx =$

Soluzione. $= \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \dfrac{2x}{3x^2-2}dx - 5\int \dfrac{dx}{3x^2-2} = \dfrac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right| - \dfrac{5}{3}\int \dfrac{dx}{x^2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right| - \dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right| + C$

Esercizio 39. $\int \dfrac{3-2x}{5x^2+7}dx =$

Soluzione. $= 3\int \dfrac{1}{5x^2+7}dx - \int \dfrac{2x}{5x^2+7}dx = 3\int \dfrac{1}{5x^2+7}dx - \dfrac{1}{5}\int \dfrac{10x}{5x^2+7}dx = \dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{5}{7}}\arctan\sqrt{\dfrac{5}{7}}x - \dfrac{1}{5}\ln\left|5x^2+7\right| + C$

Esercizio 40. $\int \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \sqrt{x^2-4} - 3\ln\left|\frac{x}{2} + \sqrt{x^2-4}\right| + C$

Esercizio 41. $\int \frac{x}{x^2-5}dx =$

Soluzione. $= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-5}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-5\right| + C$

Esercizio 42. $\int \frac{x^2}{x^6+1}dx =$

Soluzione. sapendo che $d\left(x^3\right) = 3x^2dx$, si ha $= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{\left(x^3\right)^2+1} = \frac{1}{3}\arctan x^3 + C$

Esercizio 43. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx =$

Soluzione. sapendo che $d\left(\arcsin x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, si può scrivere

$$= \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \left(\arcsin x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\arcsin x\right) = \frac{2}{3}\left(\arcsin x\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Esercizio 44. $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{x}{1+4x^2}dx - \int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{1+4x^2}dx - \int \left(\arctan 2x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\arctan 2x\right) = \frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right) - \frac{1}{3}\arctan^{\frac{3}{2}} 2x + C$

Esercizio 45. $\int 4^{2-3x}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{d\left(4^{2-3x}\right)}{-3\ln 4} = \frac{4^{2-3x}}{3\ln 4} + C$

Esercizio 46. $\int \left(e^x - e^{-x}\right)dx =$

Soluzione. $= \int e^x dx - \int e^{-x}dx = e^x + e^{-x} + C$

Esercizio 47. $\int e^{-\left(x^2+1\right)}xdx =$

Soluzione. Siccome $d\left(x^2+1\right) = 2xdx$, avremo

$$= \frac{1}{2}\int e^{-\left(x^2+1\right)}d\left(x^2+1\right) = -\frac{1}{2}e^{-\left(x^2+1\right)} + C$$

Esercizio 48. $\int x \cdot 7^{x^2}dx =$

Soluzione. siccome $d\left(x^2\right) = 2xdx$, avremo

$$= \frac{1}{2}\int 2 \cdot 7^{x^2} d\left(x^2\right) = \frac{7^x}{2\ln 7} + C$$

Esercizio 49. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx =$

Soluzione. ancora, poiché $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}dx$, avremo $= -\int e^{-\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C$

Esercizio 50. $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx =$

Soluzione. $= \int \frac{d\left(e^x - 1\right)}{e^x - 1} dx = \ln\left|e^x - 1\right| + C$

Esercizio 51. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} =$

Soluzione. $= \int \frac{d\left(e^x\right)}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = \arcsin e^x + C$

Esercizio 52. $\int \cos \frac{x}{\sqrt{2}} dx =$

Soluzione. $= \sqrt{2} \int \cos \frac{x}{\sqrt{2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + C$

Esercizio 53. $\int \left(\cos x + \sin x\right)^2 dx =$

Soluzione. applicando la proprietà fondamentale della goniometria, si ha

$$= \int \left(1 + 2 \sin 2x\right) dx = \int dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x d\left(2x\right) = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

Esercizio 54. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$

Soluzione. essendo $d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, si ha

$$= 2 \int \cos \sqrt{x} d\left(\sqrt{x}\right) = 2 \sin \sqrt{x} + C$$

Esercizio 55. $\int \frac{\sin\left(\ln x\right)}{x} dx =$

Soluzione. ancora, essendo $d\left(\ln x\right) = \frac{dx}{x}$, si ha $= \int \sin\left(\ln x\right) d\left(\ln x\right) = -\cos\left(\ln x\right) + C$

Esercizio 56. $\int \sin^2 x dx$

Soluzione. ricordando le formule di bisezione, si può riscrivere l'integrale

$$= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos 2x d\left(2x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Esercizio 57. $\int \cos^2 x dx$

Soluzione. sempre per le formule di bisezione

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x d\left(2x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Esercizio 58. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2}} =$

Soluzione. $= 2\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}} = 2\ln \left|\tan \frac{x}{4}\right| + C$

Esercizio 59. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2} =$

Soluzione. ancora, poiché $d\left(x^2\right) = 2xdx$, si ha

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\cos^2 x^2} = \frac{1}{2}\tan x^2 + C$$

Esercizio 60. $\int x \sin\left(1-x^2\right)dx =$

Soluzione. poiché $d\left(1-x^2\right) = -2xdx$, si ha $= -\frac{1}{2}\int \sin\left(1-x^2\right)d\left(1-x^2\right) = \frac{1}{2}\cos\left(1-x^2\right) + C$

Esercizio 61. $\int \tan x dx$

Soluzione. $= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$ (ancora, $-\sin x dx = d\left(\cos x\right)$)

Esercizio 62. $= \int \frac{dx}{\sin x \cos x} =$

Soluzione. ricordando le formule di duplicazione $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ si ha

$$2\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{d\left(2x\right)}{\sin 2x} = \ln\left|\tan x\right| + C$$

Esercizio 63. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x dx =$

Soluzione. essendo $d\left(\cos^2 x\right) = -\sin 2x$, si ha $= -\frac{1}{3}\int \sqrt{1+3\cos^2 x}d\left(1+3\cos^2 x\right) = -\frac{2}{9}\left(1+3\cos^2 x\right)^{\frac{3}{2}} + C$

Esercizio 64. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx =$

Soluzione. poiché $d\left[\tan x\right] = \frac{1}{\cos^2 x}dx$, si ha $= \int \sqrt{\tan x}d\left(\tan x\right) = \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} + C$

Esercizio 65. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$

Soluzione. $= \int \frac{1}{\cos^2 3x}dx + \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(3x\right)}{\cos^2 3x} - \frac{1}{3}\int\left(\cos^{-2} 3x\right)d\left(\cos 3x\right) = \frac{1}{3}\tan 3x + \frac{1}{\cos 3x} + C$

Esercizio 66. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx =$

Soluzione. $=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3-4}{x^4-4x+1}dx=\frac{1}{4}\ln\left|x^4-4x+1\right|+C$, (il numeratore è, infatti, la derivata del denominatore)

Esercizio 67. $\int\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}dx$

Soluzione. operando in $\mathbb{R}$ si può scomporre il numeratore e ottenere

$$=\int\frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}dx=\int dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx=x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

Esercizio 68. $\int xe^{-x^2}dx=$

Soluzione. $=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d\left(-x^2\right)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

Esercizio 69. $\int\frac{x^3-1}{x+1}dx=$

Soluzione. $=\int\frac{x^3+1-2}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x+1}dx-2\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|+C$

Esercizio 70. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x}}=$

Soluzione. $=2\int e^{-\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=-2e^{-\frac{x}{2}}+C$

Esercizio 71. $\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx=$

Soluzione. poiché $d(x+\cos x)=1-\sin x$, avremo che il numeratore è la derivata del denominatore, per cui $=\ln|x+\cos x|+C$

Esercizio 72. $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}=$

Soluzione. essendo $d(\ln x)=\frac{dx}{x}$, avremo

$$=\int\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}+C$$

Esercizio 73. $\int\frac{dx}{e^x+1}=$

Soluzione. $=\int\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx=\int dx-\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=x-\ln|e^x+1|+C$

Esercizio 74. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx=$

Soluzione. poiché $d\left(\sin^2 x\right) = \sin x \cos x dx$, si può riscrivere

$$= \int \frac{d\left(\sin^2 x\right)}{\sqrt{2 - \left(\sin^2 x\right)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) + C$$

Esercizio 75. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} =$

Soluzione. $= \int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2+\tan^2 x} dx = \int \frac{d(\tan x)}{2+\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\tan \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

2. Integrali risolti con il metodo della sostituzione di variabile

Molti degli integrali precedenti si potevano anche risolvere con tale metodo, così come gli integrali che seguiranno potranno essere risolti anche con altri metodi.

Esercizio 76. $\int x(2x+5)^{10} dx =$

Soluzione. introduciamo la sostituzione $t = 2x+5$ o $x = \frac{t-5}{2}$, da cui $dx = \frac{dt}{2}$; l'integrale diviene

$$= \int \frac{t-5}{4} \cdot t^{10} dt = \frac{1}{4} \int t^{11} dt - \frac{5}{4} \int t^{10} dt = \frac{1}{48} t^{12} - \frac{5}{44} t^{11} = \frac{1}{48}(2x+5)^{12} - \frac{5}{44}(2x+5)^{11} + C$$

Esercizio 77. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} =$

Soluzione. introduciamo la sostituzione $2x+1 = \frac{1}{t^2}$ o $2x = \frac{1}{t^2} - 1$, da cui $2dx = -\frac{2}{t^3} dt$, cioè $dx = -\frac{1}{t^3} dt$ e otteniamo

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^3}}{\frac{1-t^2}{2t^2} \cdot \frac{1}{t}} dt = \int -\frac{1}{t^3} \cdot \frac{2t^3}{1-t^2} dt = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C$$

Esercizio 78. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} =$

Soluzione. sostituisco $\sqrt{e^x-1} = t$, cioè $e^x = t^2+1$ da cui $e^x dx = 2t dt$ e quindi $dx = \frac{2t}{t^2+1} dt$. Avremo

$$= \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t} dt = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan t = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) + C$$

Esercizio 79. $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx =$

Soluzione. $= \int \frac{\ln 2 + \ln x}{2\ln 2 + \ln x} \frac{dx}{x}$, sostituiamo $\ln x = t$ e $\frac{1}{x} dx = dt$ e avremo

$$= \int \frac{\ln 2 + t}{2\ln 2 + t} dt = \int \frac{2\ln 2 + t}{2\ln 2 + t} dt - \int \frac{\ln 2}{2\ln 2 + t} dt = t - \ln|2(2\ln 2 + t)| = \ln x - \ln|2\ln 4x| + C$$

Esercizio 80. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

Soluzione. sostituiamo $\sqrt{e^x+1}=t$, cioè $e^x=t^2-1$ e $e^xdx=2tdt$ e avremo

$$=\int\frac{\left(t^2-1\right)2t}{t}dt=2\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{3}t^3-2t=2t\left(\frac{t^2}{3}-1\right)=2\sqrt{e^2+1}\left[\frac{(e^x+1)}{3}-1\right]+C$$

Esercizio 81. $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=$

Soluzione. sostituendo $\sqrt{\cos x}=t$, $\cos^2 x=t^4$, $\sin^2 x=1-t^4$, da cui $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx=dt$, avremo

$$=2\int\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\cdot\sin^2 xdx=-2\int\left(1-t^4\right)dt=-2t+\frac{2}{5}t^5=-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}\left(\cos x\right)^{\frac{5}{2}}dx+C$$

Esercizio 82. $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

Soluzione. sostituzione con funzione goniometrica: $x=\sin t$, da cui $dx=\cos tdt$, si ha

$$=\int\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos tdt=\int\sin^2 tdt=\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$$

Esercizio 83. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$

Osservazione 84. poniamo $x=\sec t$, $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\tan t$ e $dx=\sec t\cdot\tan tdt$, pertanto

$$=\int\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=t=\arccos x+C$$

Esercizio 85. $\int\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx=$

Soluzione. poniamo $x=\frac{1}{t}$ da cui $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ e avremo

$$=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{4t^2-1}{t^2}}}=-\int\frac{t}{\sqrt{4t^2-1}}dt=-\frac{1}{8}\int\frac{d\left(4t^2-1\right)}{\sqrt{4t^2-1}}=-\frac{1}{4}\sqrt{4t^2-1}=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$$

Esercizio 86. $\int\sqrt{1-x^2}dx=$

Soluzione. introduciamo la sostituzione $x=\sin t$, $x^2=1-\cos^2 t$ e $dx=\cos tdt$ e l'integrale diviene

$$=\int\cos^2 tdt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\int\cos 2td\left(2t\right)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$$

3. Integrazione per parti

Dalla formula della derivata del prodotto di due funzioni $D[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ si ottiene, integrando entrambi i membri $f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x) + \int f(x)\cdot g'(x)$ da cui $\int f'(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)$, dove $f'(x)$ è riconosciuta come la derivata di una funzione nota $f(x)$.

Esercizio 87. $\int \ln x dx =$

Soluzione. Poniamo $f = \ln x$ e $1dx = dg$ con $g = x$; avremo

$$x\ln x - \int \frac{x}{x}dx = x\ln x - x + C$$

Esercizio 88. $\int x\sin x dx =$

Soluzione. Poniamo $x = f$ e $dg = \sin x\mathrm{dx}$ e avremo

$$= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Esercizio 89. $\int \frac{x}{e^x}dx =$

Soluzione. Poniamo $f = x$ e $dg = e^{-x}dx$ e avremo

$$= -\frac{x}{e^x} + \int \frac{1}{e^x}dx = -\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = -\frac{1+x}{e^x} + C$$

Esercizio 90. $\int x^2 e^{3x}dx =$

Soluzione. Poniamo $f = x^2$e $dg = e^{3x}dx$ e otterremo

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{1}{3}\int 2xe^{3x}dx =$$

iteriamo il procedimento $f = 2x$ e $dg = e^{3x}dx$ e avremo

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right] = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$$

Esercizio 91. $\int x\sin x\cos x dx =$

Soluzione. applichiamo le formule goniometriche $= \frac{1}{2}\int x\sin 2x dx$ e poniamo $x = f$ e $\sin 2x dx = dg$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$$

Esercizio 92. $\int x^2\ln x dx =$

Soluzione. ponendo $f = \ln x$ e $x^2dx = dg$ avremo

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

Esercizio 93. $\int \ln^2 x dx =$

Soluzione. ponendo $f=\ln^2 x$ e $dx=dg$ avremo

$$=x\ln^2 x-\int 2x\cdot\frac{\ln x}{x}dx=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$$

Esercizio 94. $\int\frac{\ln x}{x^3}dx=$

Soluzione. ponendo $f=\ln x$ e $dg=\frac{dx}{x^3}$ si ha

$$=-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{4x^2}+C$$

Esercizio 95. $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=$

Soluzione. ponendo $f=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ e $dg=dx$ si ha

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{x^2+1}+C$$

Esercizio 96. $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx=$

Soluzione. ponendo $f=x$ e $dg=\dfrac{dx}{\sin^2 x}$ si ottiene

$$=-x\cot x+\int\cot x dx=-x\cot x-\ln|\sin x|+C$$

Esercizio 97. $\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx=$

Soluzione. ponendo $f=x$ e $dg=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ si ottiene

$$=-\frac{x}{\sin x}+\int\frac{1}{2\sin x}dx=-\frac{x}{\sin x}+\frac{1}{2}\ln|\tan x|+C$$

Esercizio 98. $\int e^x\sin x dx=$

Soluzione. ponendo $f=\sin x$ e $dg=e^x dx$ si ottiene $=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx=$ iteriamo ora la procedura ponendo nuovamente $f=\cos x$ e $dg=e^x dx$ si ottiene

$$\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-\left(-e^x\cos x+\int e^x\sin x dx\right)=e^x\sin x+e^x\cos x-\int e^x\sin x dx$$

sommando ora i due integrali e dividendo a metà entrambi i membri, si ottiene

$$2\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}\left(e^x\sin x+e^x\cos x\right)+C$$

Esercizio 99. $\int\sin(\ln x)\,dx=$

Soluzione. ponendo $f = \sin(\ln x)$ e $dg = dx$ si ottiene $= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx =$, ponendo ora nuovamente $f = \cos(\ln x)$ e $dg = dx$ si ha $x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$; avremo pertanto

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$$

risolvendo rispetto a $\int \sin(\ln x)\,dx$ si ottiene

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right)}{2} + C$$

4. Integrali di funzioni razionali fratte e irrazionali

Esercizio 100. $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+5} =$

Soluzione. il polinomio al denominatore può essere riscritto come $(x+1)^2+4$, da cui

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$$

Esercizio 101. $\int \dfrac{dx}{3x^2-3x+1} =$

Soluzione. riscriviamo il denominatore

$$= \int \frac{dx}{3\left(x^2 - 2\cdot\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{36}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{11}}\arctan\frac{6\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$$

Esercizio 102. $\int \dfrac{x\,dx}{x^2-7x+13} =$

Soluzione. poniamo $2x-7=t$ e $dx = \dfrac{dt}{2}$ e avremo

$$= \int \frac{\frac{t+7}{2}}{\left(\frac{t+7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{t+7}{2}\right) + 13}\cdot\frac{dt}{2} = \int \frac{t+7}{t^2+3}dt = \int \frac{t}{t^2+3}dt + 7\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+3\right)}{t^2+3} + \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-7}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|4x^2-28x+52\right| + \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-7}{\sqrt{3}} + C$$

Esercizio 103. $\int \dfrac{3x-2}{x^2-4x+5}dx =$

Soluzione. poniamo $2x-4=t$ e $dx = \frac{dt}{2}$ e otteniamo

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(t+4)-2}{\frac{(t+4)^2}{4} - 4\frac{t+4}{2} + 5}\cdot\frac{t}{2}dt = \int \frac{3t+4}{2}\cdot\frac{4}{t^2+4}\frac{dt}{2} = \int \frac{3t}{t^2+4}dt + 4\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+4\right)}{t^2+4} + 4\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+4\right| + 2\arctan\frac{t}{2} = \frac{3}{2}\ln\left|4x^2-16x+20\right| + 2\arctan(x-2) + C$$

Esercizio 104. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} =$

Soluzione. riscriviamo il polinomio al denominatore in modo da ottenere la differenza di due quadrati

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+\frac{9}{16}\right) - \left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right) + C$$

Esercizio 105. $\int \dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx =$

Soluzione. $= 3\int \dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}}dx = 3\int \dfrac{d\,(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \ln\left|(x-2)+\sqrt{x^2-4x+5}\right| + C$

Esercizio 106. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Soluzione. poniamo $x = \frac{1}{t}$ e $dx = -\frac{1}{t^2}$ e avremo

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| = -\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\right| = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C$$

Esercizio 107. $\int \sqrt{x-x^2}dx =$

Soluzione. riscriviamo completando il quadrato $= \int \sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}dx$ = poniamo ora $x-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin t$ da cui $\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cos t$ e $dx = \frac{1}{2}\cos t dt$. Avremo

$$\frac{1}{4}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}\sin 2t = \frac{1}{8}\arcsin(2x-1) + \frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{1-(2x-1)^2} + C$$

Esercizio 108. $\int \dfrac{xdx}{x^4-4x^2+3} =$

Soluzione. $= \int \dfrac{xdx}{(x^2-2)^2-1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{d\left(x^2-2\right)}{(x^2-2)^2-1} = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x^2-3}{x^2-1}\right| + C$

Esercizio 109. $\int \dfrac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} =$

Soluzione. $= \int \dfrac{e^x dx}{\sqrt{\left(e^x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \displaystyle\int \dfrac{d\left(e^x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(e^x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \ln\left|e^x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right| + C$

Esercizio 110. $\int \dfrac{\ln x dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}} =$

Soluzione. $= \int \dfrac{\ln x+2}{\sqrt{5-(\ln x+2)^2}}d(\ln x+2) - \displaystyle\int \dfrac{2}{\sqrt{5-(\ln x+2)^2}}d(\ln x+2)$ Introduciamo la sostituzione $\ln x + 2 = t$ con $x = e^{t-2}$ e $dx = e^{t-2}dt$ e avremo

$$= \int \frac{t}{\sqrt{5-t^2}}dt - 2\int \frac{1}{\sqrt{5-t^2}}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(5-t^2\right)}{\sqrt{5-t^2}} - 2\int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2}} = -\sqrt{5-t^2} - 2\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}} = -\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x} - 2\arcsin\frac{2+}{}$$

Esercizio 111. $\int \dfrac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx =$

Soluzione. Applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati. Data una frazione algebrica razionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, se $Q(x) = (x-a)^{\alpha} \ldots (x-l)^{\lambda}$ dove $a, \ldots l$ sono le radici reali differenti del polinomio e $\alpha, \ldots, \lambda$ numeri naturali che indicano la molteplicità delle radici, allora è ammissibile la decomposizione della frazione nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}$$

I coefficienti indeterminati al numeratore si calcolano riducendo allo stesso denominatore i due membri dell'identità sopra eguagliando i coefficienti dei termini di uguale grado.

$$= \int \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6} dx + \int \frac{3}{(x-2)(x-3)} dx =$$

risolviamo il secondo integrale con il metodo indicato riscrivendo

$$\frac{3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

da cui

$$3 = A(x-3) + B(x-2) = x(A+B) - (3A+2B)$$

avremo, pertanto, eguagliando i coefficienti di pari grado

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-3 \\ B=3 \end{cases}$$

l'integrale diverrà

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{x-3} = x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

Esercizio 112. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x-3)(x-4)} dx$

Soluzione. applichiamo il metodo sopra indicato riscrivendo la frazione

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-4}$$

da cui $2x^2+41x-91 = A\left(x^2-7x+12\right) + B\left(x^2-5x+4\right) + C\left(x^2-4x+3\right)$ svolgendo e ordinando il polinomio si ha

$$2x^2+41x-91 = x^2(A+B+C) + x(-7A-5B-4C) + (12A+4B+3C)$$

avremo quindi il sistema

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ -7A-5B-4C=41 \\ 12A+4B+3C=-91 \end{cases} \quad 1^a+3^a+2^a \quad \begin{cases} A+B+C=2 \\ 6A=-48 \\ 12A+4B+3C=-91 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-8 \\ B=10-C \\ -96+40-C=-91 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-8 \\ B=-25 \\ C=35 \end{cases}$$

l'integrale diviene

$$= -8\int \frac{dx}{x-1} - 25\int \frac{dx}{x-3} + 35\int \frac{dx}{x-4} = \ln\left|\frac{x-4}{(x^2-4x+3)}\right| + C$$

Esercizio 113. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2} =$

Soluzione. riscriviamo la frazione come $\frac{dx}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ ed eguagliando i numeratori avremo

$$1=A\left(x^2+2x+1\right)+B\left(x^2+x\right)+Cx \qquad 1=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$

otterremo le costanti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$$

l'integrale diviene

$$=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

Esercizio 114. $\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx=$

Soluzione. riscriviamo il numeratore come $x^4-6x^3+12x^2-8x+6+8x=x(x-2)^3+6+8x$ e osserviamo che il denominatore è lo sviluppo del cubo di un binomio; otterremo

$$=\int\frac{x(x-2)^3}{(x-2)^3}dx+\int\frac{8x+6}{(x-2)^3}dx=\int xdx+\int\frac{8x+6}{(x-2)^3}dx=$$

risolviamo il secondo integrale riscrivendo la frazione come $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}=\frac{8x+6}{(x-2)^3}$ ed eguagliando i numeratori si ha

$$8x+6=A\left(x^2-4x+4\right)+B(x-2)+C \qquad 8x+6=Ax^2+x(-4A+B)+(4A-2B+C)$$

otterremo le costanti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A=0 \\ -4A+B=8 \\ 4A-2B+C=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=0 \\ B=8 \\ C=22 \end{cases}$$

l'integrale diviene pertanto

$$=\frac{x^2}{2}+8\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2}+22\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^3}=\frac{x^2}{2}-\frac{8}{x-2}-\frac{11}{(x-2)^2}=\frac{x^4-4x^3+4x^2-16x+10}{2(x-2)^2}+C$$

Esercizio 115. $\int\frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}=$

Soluzione. scomponiamo e riscriviamo i denominatori $=\int\frac{dx}{(x-1)(x-3)\left[(x-2)^2+1\right]}=$ poniamo ora $x=t+2$ e $dx=dt$

$$=\int\frac{dt}{(t+1)(t-1)(t^2+1)}=\int\frac{dt}{t^4-1}=\int\frac{dt}{(t^2+1)^2-2(t^2+1)}$$

poniamo ora $t=\tan z$ da cui $t^2+1=\frac{1}{\cos^2 z}$ e $dt=\frac{1}{\cos^2 z}dz$ e otterremo

$$=-\int\frac{\frac{1}{\cos^2 z}dz}{\frac{1}{\cos^4 z}-\frac{z}{\cos^2 z}}=\int\frac{\cos^2 z}{\cos 2z}dz=-\int\frac{1+\cos 2z}{2\cos 2z}dz=-\frac{1}{4}\int\frac{d(2z)}{\cos 2z}-\frac{1}{2}z=$$

$$-\frac{1}{4}\ln|\tan 2z+\sec z|-\frac{1}{2}z+C==-\frac{1}{4}\ln|\tan 2z+\sec z|-\frac{1}{2}z$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t}{1-t^2}+\sqrt{t^2+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan t=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-4}{1-(x-2)^2}+\sqrt{x^2+4x+5}\right|-\frac{1}{2}\arctan(x-2)+C$$

Esercizio 116. $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx=$

Soluzione. in questo caso applichiamo la sostituzione $x = t^2 + 1$ da cui $dx = 2tdt$ e otteniamo

$$= \int \frac{(t^2+1)}{t} 2tdt = 2\left(\int t^6 dt + 3\int t^4 dt + 3\int t^2 dt + \int dt\right) = \frac{2}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 + 2t =$$

$$\frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + 2(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

5. Integrali di funzioni goniometriche

Esercizio 117. $\int \cos^3 x dx =$

Soluzione. $= \int \cos^2 x d(\sin x) = \int \left(1 - \sin^2 x\right) d(\sin x) = \int d(\sin x) - \int \sin^2 x d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Esercizio 118. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} =$

Soluzione. $= \frac{1}{2}\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \sin^2 \frac{x}{2}\left(1 + \sin^4 \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\int \sin^2 \frac{x}{2} d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int \sin^6 \frac{x}{2} d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) - \int \frac{1}{2}\int \sin^4 \frac{x}{2} d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\sin^4 \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin^8 \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\sin^6 \frac{x}{2} + C$$

Esercizio 119. $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x} dx =$

Soluzione. applichiamo le formule parametriche della goniometria per le quali $\cos x = \frac{1-t^2}{1-t^2}$ e $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ dove $t = \tan \frac{x}{2}$. Avremo quindi $x = 2\arctan t$ e $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. L'integrale diviene

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3 + 5\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2\int \frac{dt}{8 - 2t^2} = \int \frac{dt}{4 - t^2} = \int \frac{dt}{(2-t)(2+t)} =$$

riscriviamo la frazione $\frac{1}{(2-t)(2+t)} = \frac{A}{2-t} + \frac{B}{2+t}$ e confrontando i numeratori $1 = t(A-B) + 2(A+B)$. A, B si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

e l'integrale diviene

$$= \int \frac{dt}{(2-t)(2+t)} = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dt}{2-t} + \int \frac{dt}{2+t}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

Esercizio 120. $\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x} dx =$

Soluzione. utilizziamo la definizione di tangente come rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo

$$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} dx = -\ln|\cos x - \sin x| + C$$

Esercizio 121. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx =$

Soluzione. poiché $d\left(\sin^2 x\right) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$, si ha $\int \frac{d\left(\sin^2 x\right)}{1 + \sin^2 x} = \ln\left|1 + \sin^2 x\right| + C$

Esercizio 122. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx =$

Soluzione. riscriviamo, completando il quadrato, $= \int \sqrt{-(x+1)^2+4}dx$; operiamo ora la sostituzione $x = 2\sin t - 1$ e $dx = 2\cos tdt$, avremo

$$= \int \sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)} \cdot 2\cos tdt = 4\int \cos^2 dt = 2\int (1+\cos 2t)\,dt = 2\int dt + 2\int \cos 2tdt = 2t + \sin 2t =$$

$$= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C$$

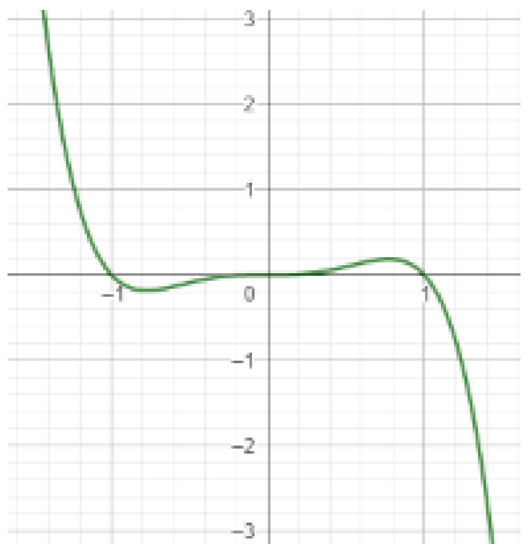
6. Problemi sugli integrali

Esercizio 123. Determinare la funzione $f(x)$ avente derivata $f'(x) = 3x^2 - 5x^4$ e il cui grafico γ passa per l'origine. Tracciare γ.

Soluzione. Si tratta di trovare la funzione primitiva, per cui

$$f(x) = \int \left(3x^2 - 5x^4\right) dx = x^3 - x^5 + C$$

passando per l'origine, tra le infinite funzioni soluzioni che si differenziano per una costante dovremo avere $C = 0$ e la funzione richiesta sarà $f(x) = x^3 - x^5$



Esercizio 124. Dopo aver tracciato il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{3x-1}{2-x}$$

determinare la primitiva $F(x)$ il cui grafico passa per i punti $(3; -8)$ e $(1; 0)$.

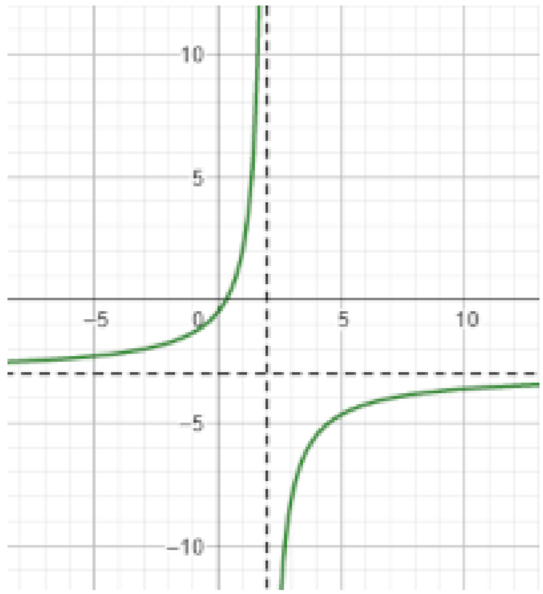
Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R} - \{2\}$ con un asintoto verticale di equazione $x = 2$ e un asintoto orizzontale $y = -3$. La funzione è positiva per $\frac{1}{3} < x < 2$.

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \tfrac{3x-1}{2-x} = \mp\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{3x-1}{2-x} = -3$$

la derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{5}{(2-x)^2}$$

la funzione è quindi sempre crescente nel dominio e non ammette punti stazionari.(anche la derivata seconda non si annulla mai). Una tale funzione può ovviamente essere rapidamente rappresentata osservando che appartiene alla famiglia delle funzioni omografiche, cioè iperbole traslate; in questo caso la traslazione è effettuata dal vettore $\overrightarrow{v}(2; -3)$ Il grafico è il seguente



Troviamo la primitiva; dividendo il numeratore per il denominatore abbiamo $(3x-1) = -3(2-x)+5$

$$F(x) = \int \frac{3x-1}{2-x}dx = \int \frac{-3(2-x)+5}{2-x}dx = -3\int dx + 5\int \frac{dx}{2-x} = -3x + 5\ln(|2-x|) + C$$

Se la funzione $F(x)$ passa per il punto $(3;-8)$ nell'intervallo $x>2$ avremo $-8 = -9 + C$, e per $x<2$, passa per il punto $(1;0)$ per cui $0 = -3 + C$

$$\begin{array}{ll} F_1(x) = -3x + 5\ln(2-x) + 1 & x>2 \\ F_2(x) = -3x + 5\ln(x-2) + 3 & x<2 \end{array}$$

Esercizio 125. Determinare la funzione $F(x)$ sapendo che il coefficiente angolare della retta tangente varia secondo la legge $f(x) = xe^{2-x}$ e che il grafico passa per il punto $(2;-3)$. Tracciare sullo stesso riferimento i grafici delle due funzioni.

Soluzione. Ricordando il significato geometrico di derivata, possiamo vedere che $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$. Pertanto calcoliamo l'integrale mediante l'integrazione per parti

$$F(x) = \int xe^{2-x}dx = -e^{2-x} + \int e^{2-x}dx = -e^{2-x}(x+1) + C$$

se il grafico della funzione $F(x)$ passa per il punto $(2;-3)$ allora $3 = 3 + C$, cioè $C = 0$, quindi

$$f(x) = xe^{2-x} \quad F(x) = -e^{2-x}(x+1)$$

ed entrambe le funzioni sono definite sull'intero insieme dei numeri reali.

Vediamo di studiare le funzioni singolarmente iniziando con $f(x)$: dominio: $\mathbb{R}$; è positiva per $x>0$; calcoliamo i limiti

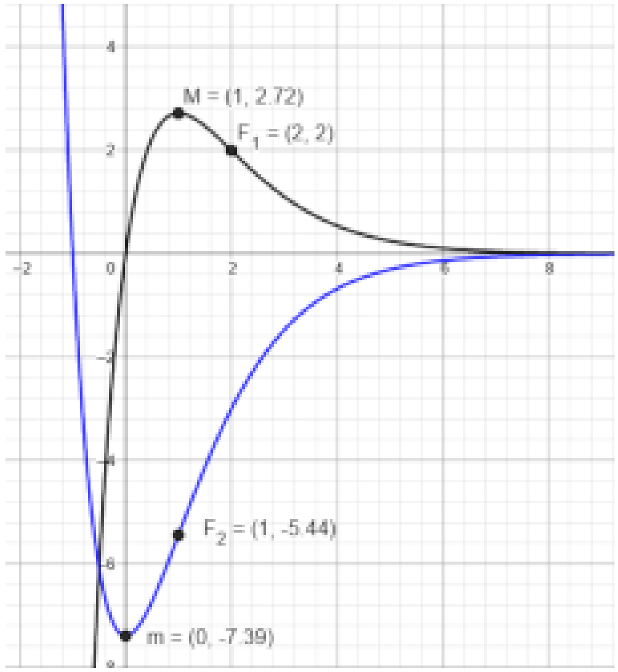
$$\lim_{x\to+\infty} xe^{2-x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{xe^2}{e^x} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^2}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^{2-x} = -\infty$$

abbiamo un asintoto orizzontale destro di equazione $y=0$; la funzione cresce per $x<1$ e decresce per $x>1$ e ammette un massimo per $x=1$ nel punto $(1;e)$; ha un flesso per $x=2$ nel punto $(2;2)$.

Grafico di $F(x) = -e^{2-x}(x+1)$: dominio $\mathbb{R}$; la funzione è positiva per $x<-1$; verifichiamo eventuali asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} -(x+1)e^{2-x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{-(x+1)e^2}{e^x} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{-e^2}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} -(x+1)e^{2-x} = +\infty$$

abbiamo ancora un asintoto orizzontale destro di eq: $y=0$; essendo la derivata è $f(x)$, la funzione cresce per $x>0$ e ammette un minimo nel punto $\left(0;-e^2\right)$; presenta un flesso nel punto $(1;-2e)$



Esercizio 126. La velocità massima (in ms^{-1}) di un punto mobile su una retta varia secondo la legge:

$$v(t) = 6\cos 2t \cdot \sin t \quad per \quad t \geq 0$$

(a) Determinare l'accelerazione $a(t)$; (b) determinare l'equazione oraria $s(t)$ sapendo che dopo t secondi dall'istante iniziale l'ascissa del punto è $-2\,m$.

Soluzione. l'accelerazione può essere considerata come la variazione della velocità nell'intervallo di tempo; se tale intervallo tende a zero, la funzione che descrive come varia l'accelerazione rispetto al tempo è la derivata della funzione $v(t)$

$$a(t) = -12\sin 2t \sin t + 6\cos 2t \cos t = 6\cos t\left(6\cos^2 t - 5\right)$$

la legge oraria è

$$\int s(t)\,dt = 6\int \cos 2t \cdot \sin t dt = 6\int \left(2\cos^2 t - 1\right)\sin t dt = 6\int \left(1 - 2\cos^2 t\right) d(\cos t) =$$

$$= 6\int d(\cos t) - 12\int \cos^2 t d(\cos t) = 6\cos t - 4\cos^3 t + C$$

a $t = 0$ corrisponde $s(\pi\, sec) = -2$, per cui $-2 = -6 + 4 + C$, da cui $C = 0$ e la legge oraria sarà

$$s(t) = 6\cos t - 4\cos^3 t$$

Parte 2. Integrali definiti

7. Calcolo degli integrali definiti con l'aiuto di quelli indefiniti

7.1. **Integrale definito con limite superiore variabile:** Se la funzione $f(t)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$, allora la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva della funzione $f(x)$, cioè

$$F'(x) = f(x) \quad per \quad a \leq x \leq b$$

7.2. **Formula di Newton-Leibnitz.** Se $F'(x) = f(x)$, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

La primitiva $F(x)$ si determina calcolando l'integrale indefinito

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

8. Esercizi

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Esercizio 127. $F(x) = \int_1^x \ln t dt \quad (x > 0)$

Soluzione. $F'(x) = \ln x$

Esercizio 128. $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4}dt$

Soluzione. Riscriviamo $F(x) = -\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt$, avremo $F'(x) = -\sqrt{1+x^4}$

Esercizio 129. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$

Soluzione. $F'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$

Esercizio 130. $I = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos\left(t^2\right) dt \quad (x > 0)$

Soluzione. $\dfrac{dI}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Esercizio 131. Trovare i punti estremanti della funzione $y = \int_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$

Soluzione. $y' = \dfrac{\sin x}{x}$ per cui $\sin x = 0$ quando $x = k\pi$.

9. Calcolo degli integrali definiti

Esercizio 132. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Esercizio 133. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-2}^{-1} x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$

$\int\limits_{-x}^{x} e^t dt = e^x - e^{-x} = 2\sinh x$

Esercizio 134. $\int\limits_0^x \cos t dt = \sin t|_0^x = \sin x$

Esercizio 135. $\int\limits_1^2 \left(x^2 - 2x + 3\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - 4 + 6 - \frac{1}{3} + 1 - 3 = \frac{7}{3}$

Esercizio 136. $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \int\limits_0^8 (2x)^{\frac{1}{2}} + \int\limits_0^8 x^{\frac{1}{3}} = \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^8 = \frac{2^6}{\frac{3}{2}} + \frac{2^4}{\frac{4}{3}} = \frac{100}{3}$

Esercizio 137. $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int\limits_1^4 x^{-2}dx + \int\limits_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\Bigg|_1^4 = -\frac{1}{4} - 1 + 1 + 2 = \frac{7}{4}$

$\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}dx = \int\limits_2^6 (x-2)^{\frac{1}{2}}\, d(x-2) = \frac{x-2}{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^6 = \frac{2^3}{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{16}{3}$

Esercizio 138.

$$\int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}x = -\int\limits_{-3}^{0} (25+3x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = -\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{0} (25+3x)^{-\frac{1}{2}}\, d(3x+25) =$$
$$= -\frac{2}{3}\sqrt{3x+25}\Big|_{-3}^{0} = -\frac{10}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$$

Esercizio 139. $\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1} = -\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|_{-3}^{-2} = -\frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$

Esercizio 140. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

Soluzione. Scomponiamo il denominatore e utilizziamo il metodo per le funzioni razionali $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(x+2)}$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

da cui

$$x = A(x+2) + B(x+1)$$
$$x = Ax + 2A + Bx + B = x(A+B) + (2A+B)$$

confrontando i termini al primo e al secondo membro di pari grado, si ha

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=-2A \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

l'integrale diviene allora

$$-\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + 2\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = -\ln|x+1||_0^1 + 2\ln|x+2||_0^1 = \ln\frac{9}{8}$$

Esercizio 141. $\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}dx$

Soluzione. Riscriviamo la frazione e scomponiamo

$$\int_{-1}^1 \frac{x^5+32-32}{x+2}dx = \int_{-1}^1 \frac{\cancel{(x+2)}\left(x^4-2x^3+4x^2-8x+16\right)}{\cancel{x+2}}dx - 32\int_{-1}^1 \frac{1}{x+2}dx =$$

$$\int_{-1}^1 \left(x^4-2x^3+4x^2-8x+16\right)dx - 32\int_{-1}^1 \frac{1}{x+2}dx =$$

$$\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} - 4x^2 + 16x - 32\ln(x+2)\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5} + \frac{8}{3} + 32 - 32\ln 3 = \frac{526}{15} - 32\ln 3$$

Esercizio 142. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

Soluzione. In questo caso il denominatore non è scomponibile, ma è possibile riscriverlo nella forma $x^2+4x+4+1 = (x+2)^2+1$, per cui,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

potremmo risolvere subito, ma per rendere più chiaro poniamo $x+2=z$, $dx=dz$

$$\int_0^1 \frac{dz}{z^2+1} = \arctan z|_0^1 = \arctan 3 - \arctan 2 = \arctan\frac{1}{7}$$

Esercizio 143. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$

Soluzione. risolviamo con il metodo di sostituzione ponendo $x^2 = z$, $2xdx = dz$, $dx = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$

$$\int_0^1 \frac{z\cancel{\sqrt{z}}}{z^4+1}\frac{dz}{2\cancel{\sqrt{z}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z}{z^4+1}dz$$

ripetiamo la sostituzione ponendo nuovamente $z^2 = t$, $2zdz = dt$, $dz = \frac{dt}{2\sqrt{z}}$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\cancel{\sqrt{t}}}{t^2+1}\frac{dt}{\cancel{\sqrt{t}}} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\arctan t|_0^1 = \frac{1}{4}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{16}$$

Esercizio 144. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4}$

Esercizio 145. $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

Soluzione. riscriviamo il radicando come $9-4+4x-x^2 = 9-(x-2)^2$, per cui

$$= \int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \int_2^{3,5} \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)\Big|_2^{3,5} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Esercizio 146. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 xdx$

Soluzione. Usiamo le formule goniometriche di bisezione

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xd(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi+2}{8}$$

Esercizio 147. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$

Soluzione. scomponiamo $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x$ e applichiamo la prima proprietà della goniometria

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 xdx == -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \left(1-\cos^2 x\right)dx =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)d(\cos x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\cos x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xd(\cos x) =$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 148. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

Soluzione. essendo $d(\ln x) = \frac{1}{x}$, possiamo riscrivere

$$=\int_{e}^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esercizio 149. $\int\limits_0^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

Soluzione. essendo ancora $d(\ln x) = \frac{1}{x}$, possiamo riscrivere

$$=\int_0^e \sin(\ln x)\, d(\ln x) = -\cos(\ln x)|_0^e = 1 - \cos 1$$

Esercizio 150. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

Soluzione. applicando la definizione di tangente, riscriviamo

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x)|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

essendo il numeratore è l'opposto della derivata del denominatore.

Esercizio 151. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

Soluzione. procediamo mediante sostituzione: $e^x = u$, $e^x dx = du$; se $x = 0$ allora $u = 1$ e se $x = 1$ $u = e$

$$=\int_1^e \frac{\cancel{u}}{1+u^2}\frac{du}{\cancel{u}} = \int_1^e \frac{du}{1+u^2} = \arctan u|_1^e = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 152. $\int\limits_1^3 \sqrt{x+1} dx = \int\limits_1^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\, d(x+1) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{2}{3}\sqrt{64} - \frac{2}{3}\sqrt{8} = \frac{4\left(4-\sqrt{2}\right)}{3}$

Esercizio 153. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x = t^2$, $dx = 2tdt$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = 4$ $t = 16$

$$2\int_0^{16} \frac{tdt}{1+t} = 2\int_0^{16} \frac{t+1}{1+t} dt - 2\int_0^{16} \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln(t+1)|_0^{16} = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\Big|_0^4 = 4 - 2\ln 3$$

Esercizio 154. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $e^x - 1 = t^2$, $e^x dx = 2tdt$ per cui $dx = \dfrac{2tdt}{t^2+1}$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = \ln 2$ $t = 1$

$$2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = 2t - 2\arctan t|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 155. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$; se $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ allora $t = \frac{\pi}{4}$ e se $x =1$ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 t}dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt =$$

$$= -\cot t - t|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 156. $\int_1^2 \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x^2 - 1 = t^2$, $xdx = tdt$, per cui $dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}$; se $x = 1$ allora $t = 0$ e se $x = 2$ $t = \sqrt{3}$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - \arctan t|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Esercizio 157. $\int_0^{\ln 5} \dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $e^x - 1 = t^2$, $e^x dx = 2tdt$, per cui $dx = \frac{2tdt}{t^2+1}$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = \ln 5$ $t = 2$

$$\int_0^2 \frac{\cancel{(t^2+1)}t}{t^2+4} \cdot \frac{2t}{\cancel{t^2+1}}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2+4}{t^2+4}dt - 8\int_0^2 \frac{1}{t^2+4}dt =$$

$$= 2t - 4\arctan \frac{t}{2}\Big|_0^2 = 4 - \pi$$

Esercizio 158. $\int_0^5 \dfrac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $3x+1=t^2$, $3dx=2tdt$, per cui $dx=\frac{2tdt}{3}$; se $x=0$ allora $t=1$ e se $x=5$ $t=4$

$$\int_1^4 \frac{\frac{2t}{3}}{2\left(\frac{t^2-1}{3}\right)+t}dt=\int_1^4 \frac{2t}{2t^2+3t-2}dt=$$

scomponiamo il denominatore in $(2t-1)(t+2)$, per cui $\frac{2t}{(2t-1)(t+2)}=\frac{A}{2t-1}+\frac{B}{t+2}$

$$\begin{cases} A+2B=2 \\ 2A-B=0 \end{cases} \begin{cases} 5A=2 \\ B=2A \end{cases} \begin{cases} A=\frac{2}{5} \\ B=\frac{4}{5} \end{cases}$$

l'integrale si può riscrivere

$$=\frac{1}{5}\int_1^4 \frac{1}{2t-1}dt+\frac{4}{5}\int_1^4 \frac{1}{t+2}dt=\frac{1}{5}\ln(2t-1)+\frac{4}{5}\ln(t+2)\Big|_1^4=\frac{1}{5}\ln 7+\frac{4}{5}\ln 6-\frac{4}{5}\ln 3=\frac{1}{5}\ln 112$$

Esercizio 159. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$; se $x=1$ allora $t=1$ e se $x=3$ $t=\frac{1}{3}$

$$-\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}}dt=\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+5t+t^2}}dt=\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{21}{4}\right)}}dt=$$

$$=\ln\left[\left(t+\frac{5}{2}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{21}{4}\right)}\right]\Bigg|_{\frac{1}{3}}^3=\ln\left(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right)-\ln\left(\frac{17}{6}+\frac{10}{6}\right)=\ln\left(\frac{7+2\sqrt{7}}{9}\right)$$

Esercizio 160. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

Soluzione. Procediamo con il metodo di integrazioni per parti, ricordando che

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=\left.u(x)\,v(x)\right|_a^b-\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

per cui se poniamo $u=x$ e $\cos x dx=v'$, avremo

$$=\left.x\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{2}+\left.\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

Esercizio 161. $\int_1^e \ln x dx$

Soluzione. Procediamo con il metodo di integrazioni per parti, ponendo $u=\ln x$ e $dx=v'$, avremo

$$=\left.x\ln x\right|_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot x dx=e-e+1=1$$

Esercizio 162. $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$

Soluzione. Poniamo $u = x^3$ e $e^{2x}dx = v'$, avremo

$$x^3 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 3x^2 dx =$$

applichiamo nuovamente il metodo di integrazione ponendo $u = x^2$ e $e^{2x}dx = v'$, avremo

$$\frac{1}{2}x^3e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}xe^{2x}dx\right) =$$

di nuovo $u = x$, $v' = e^{2x}dx$

$$\frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{8}e^{2x} = \frac{e^2+3}{8}$$

Esercizio 163. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^3}{x^2+1}dx$

Soluzione. In questo caso si può osservare che la funzione è dispari ed è quindi simmetrica rispetto all'origine del piano cartesiano, quindi, essendo i due estremi opposti e simmetrici rispetto all'origine, l'integrale sarà $= 0$.

Esercizio 164. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{e^x + e^x \ln\tan e^x}{\cos^2 e^x}dx$$

con $\cos e^x \neq 0$ e $\tan e^x > 0$.

Soluzione. Risolviamo applicando il metodo della sostituzione della variabile, ponendo cioè

$$e^x = t \qquad dx = \frac{dt}{t}$$

sostituendo, si ha

$$\int \frac{t\left(1+\ln\tan t\right)}{\cos^2 t} \cdot \frac{dt}{t}$$

ma, $(\tan t)^{'} = \frac{1}{\cos^2 t}$, per cui $d(\tan t) = \frac{dt}{\cos^2 t}$ e sostituendo ancora

$$\tan t = u \qquad du = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

e l'integrale diviene

$$\int \frac{1+\ln u}{\cos^2 t} \cdot \cos^2 t du =$$
$$= \int du + \int \ln u du$$

risolviamo il secondo integrale per parti

$$\int du + u\ln u - \int u \cdot \frac{1}{u}du = u\ln u$$

sostituendo a ritroso, si ha

$$\tan e^x \ln\tan e^x + C$$

Esercizio 165. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4} + x\sqrt[6]{x} + x}dx$$

Soluzione. sostituisco $x = t^6$, e $dx = 6t^5 dt$, ottenendo

$$\int \frac{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}}{\sqrt[3]{t^{24}} + t^6 \sqrt[6]{t^6} + t^6} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^3 + t^2}{t^8 + t^7 + t^6}$$

raccogliendo

$$6 \int \frac{t^2 (t+1)}{t^6 (t^2 + t + 1)} \cdot t^5 dt = 6 \int \frac{t^2 + t}{t^2 + t + 1} dt$$

aggiungendo e togliendo 1al numeratore, si ha

$$6 \int \frac{t^2 + t + 1 - 1}{t^2 + t + 1} dt = 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{t^2 + t + 1}$$

il secondo integrale si può risolvere, riscrivendo

$$6t - 6 \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

ma $\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, per cui, moltiplicando Num. e Den. per $\frac{4}{3}$

$$6t - 6 \times \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = 6t - 8 \int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

moltiplicando per $\sqrt{\frac{3}{2}}$ e ricordando gli integrali delle funzioni elementari, si ha

$$6t - 8 \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dt}{1 + \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6t - 4\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$$

risolvendo ora in x, si ha

$$6\sqrt[6]{x} - 4\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Esercizio 166. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} \left[\ln^2(x+1) \cdot \arctan\left(\ln^2(x+1)\right) + \frac{1}{1 + \ln^4(x+1)}\right] dx$$

nelle condizioni $x > -1$ e $x \neq 0$.

Soluzione. Applichiamo la sostituzione di variabile $t = \ln^2(x+1)$, per cui $dt = \frac{2\ln(x+1)}{x+1} dx$. L'integrale diviene

$$\frac{1}{2} \int \left(t \arctan t + \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

la funzione integranda è una somma di termini e per i teoremi noti, si ha

$$\tfrac{1}{2} \int \arctan t dt + \tfrac{1}{2} \int \tfrac{1}{1+t^2} dt =$$

risolviamo il primo integrale per parti

$$\frac{1}{4} t^2 \arctan t - \frac{1}{4} \int \frac{t^2}{1+t^2} dt + \frac{1}{2} \arctan t = \frac{t^2}{4} \arctan t + \frac{1}{2} \arctan t - \frac{1}{4} \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt =$$

$$= \frac{t^2}{4} \arctan t + \frac{1}{2} \arctan t - \frac{1}{4} \int dt + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{t^2}{4} \arctan t + \frac{1}{2} \arctan t - \frac{1}{4} t + \frac{1}{4} \arctan t =$$

$$\frac{t^2}{4} \arctan t + \frac{3}{4} \arctan t - \frac{1}{4} t + C$$

La soluzione rispetto alla variabile x sarà

$$\frac{1}{4} \left(\ln^4(x+1) \cdot \arctan\left(\ln^2(x+1)\right) + 3 \arctan\left(\ln^2(x+1)\right) - \left(\ln^2(x+1)\right)\right) + C$$

Applicazioni alla fisica

Esercizio 167. Un punto materiale si muove su una linea retta con un'accelerazione che all'istante t è data da $a(t) = (2t-6)\ \frac{m}{s^2}$. Sapendo che la velocità all'istante $t=0$ è $v_0 = 8\,\frac{m}{s}$, determinare 1) gli istanti t in cui il punto si ferma nelle posizioni A e B; 2) la distanza tra A e B.

Soluzione. Calcoliamo come varia la velocità nel tempo

$$v(t) = \int (2t-6)\,dt = t^2 - 6t + C$$

allora $v(0) = 8 = C$ e la legge delle velocità sarà $v(t) = t^2 - 6t + 8$. Se il punto si ferma, allora $v=0$, per cui

$$t^2 - 6t + 8 = 0 \quad t_1 = 2 \quad t_2 = 4$$

calcoliamo la distanza tra i due punti

$$AB = s(4) - s(2) = \int_2^4 \left|t^2 - 6t + 8\right| dt = \left[\left|\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t\right|\right]_2^4 = \frac{4}{3}\,m$$

Esercizio 168. L'accelerazione di un corpo mobile su una retta, in funzione del tempo, è data dalla legge $a(t) = a_0 e^{-kt}$ con $a_0 = -2\frac{m}{s^2}$ e $k = 6,12\,s^{-1}$. Sapendo che $v_0 = v(0) = 0,5\,\frac{m}{s}$, $s(0) = 0$, determinare a) la legge con cui varia la velocità in funzione del tempo; b) l'equazione oraria del moto e lo spazio percorso in $0,3\,s$.

Soluzione. a) Sapendo che $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, possiamo ottenere

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 e^{-kt} dt = v_0 + \left[-\frac{a_0}{k} e^{-kt}\right]_0^t = v_0 + \left(-\frac{a_0}{k} e^{-kt} + \frac{a_0}{k}\right)$$

per cui

$$v(t) = v_0 + \frac{a_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) = \frac{1}{2} + 0,33\left(1 - e^{-6,12t}\right)$$

b) ancora, poiché $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, si può scrivere

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \left[v_0 + \frac{a_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\right] dt = \left(v_0 + \frac{a_0}{k}\right) t + \frac{a_0}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right)$$

la distanza percorsa in $0,3\,s$ sarà

$$s = (0,5 - 0,33)\,0,3 - 0,33\left(e^{-6,12\times 0,3} - 1\right) = 9,6\,cm$$

Esercizio 169. Un conduttore è attraversato da una corrente di intensità $i(t) = k\sin\omega t$, essendo $k = 10\,A$ e $\omega = 2\,\frac{rad}{s}$. Calcolare la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore tra l'istante $t_1 = 0$ e l'istante $t_2 = 0,5\,s$.

Soluzione. Sapendo che l'intensità di carica per definizione è data da $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, dove q è la quantità di carica che fluisce nel tempo, avremo

$$q(t) = \int_0^{0,5} k\sin\omega t dt = \left[-\frac{k}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{0,5} = \left[-5\cos 2t\right]_0^{\frac{1}{2}} = -5\left(\cos 1_{rad} - 1\right) = 2,3\,C$$