

CALCOLO DEGLI INTEGRALI

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

Parte 1. INTEGRALI DEFINITI

1. CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI

Esercizio 1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Esercizio 2. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3} = \int_{-2}^{-1} x^{-3} dx = -\frac{1}{2x^2} \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$

$$\int_{-x}^x e^t dt = e^x - e^{-x} = 2 \sinh x$$

Esercizio 3. $\int_0^x \cos t dt = \sin t \Big|_0^x = \sin x$

Esercizio 4. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - 4 + 6 - \frac{1}{3} + 1 - 3 = \frac{7}{3}$

Esercizio 5. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int_0^8 (2x)^{\frac{1}{2}} + \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} = \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_0^8 = \frac{2^6}{\frac{3}{2}} + \frac{2^4}{\frac{4}{3}} = \frac{100}{3}$

Esercizio 6. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int_1^4 x^{-2} dx + \int_1^4 x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \Big|_1^4 = -\frac{1}{4} - 1 + 1 + 2 = \frac{7}{4}$

$$\int_2^6 \sqrt{x-2} dx = \int_2^6 (x-2)^{\frac{1}{2}} d(x-2) = \frac{x-2}{\frac{3}{2}} \Big|_2^6 = \frac{2^3}{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{16}{3}$$

Esercizio 7.

$$\begin{aligned} \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} x &= - \int_{-3}^0 (25+3x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{3} \int_{-3}^0 (25+3x)^{-\frac{1}{2}} d(3x+25) = \\ &= -\frac{2}{3} \sqrt{3x+25} \Big|_{-3}^0 = -\frac{10}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 8. $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1} = - \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|_{-3}^{-2} = -\frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$

Esercizio 9. $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}$

Soluzione. Scomponiamo il denominatore e utilizziamo il metodo per le funzioni razionali $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)(x+2)}$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

da cui

$$\begin{aligned} x &= A(x+2) + B(x+1) \\ x &= Ax + 2A + Bx + B = x(A+B) + (2A+B) \end{aligned}$$

confrontando i termini al primo e al secondo membro di pari grado, si ha

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=-2A \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

l'integrale diviene allora

$$-\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + 2 \int_0^1 \frac{dx}{x+2} = -\ln|x+1|_0^1 + 2\ln|x+2|_0^1 = \ln \frac{9}{8}$$

Esercizio 10. $\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2} dx$

Soluzione. Riscriviamo la frazione e scomponiamo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x^5 + 32 - 32}{x+2} dx &= \int_{-1}^1 \frac{(x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)}{x+2} dx - 32 \int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx = \\ &= \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16) dx - 32 \int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx = \\ &= \left. \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} - 4x^2 + 16x - 32 \ln(x+2) \right|_{-1}^1 = \frac{2}{5} + \frac{8}{3} + 32 - 32 \ln 3 = \frac{526}{15} - 32 \ln 3 \end{aligned}$$

Esercizio 11. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

Soluzione. In questo caso il denominatore non è scomponibile, ma è possibile riscriverlo nella forma $x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1$, per cui,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2 + 1}$$

potremmo risolvere subito, ma per rendere più chiaro poniamo $x+2 = z$, $dx = dz$

$$\int_0^1 \frac{dz}{z^2 + 1} = \arctan z|_0^1 = \arctan 3 - \arctan 2 = \arctan \frac{1}{7}$$

Esercizio 12. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx$

Soluzione. risolviamo con il metodo di sostituzione ponendo $x^2 = z$, $2xdx = dz$, $dx = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$

$$\int_0^1 \frac{z\sqrt{z}}{z^4 + 1} \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{z}{z^4 + 1} dz$$

ripetiamo la sostituzione ponendo nuovamente $z^2 = t$, $2zdz = dt$, $dz = \frac{dt}{2\sqrt{z}}$

$$\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t^2 + 1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \arctan t \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{16}$$

Esercizio 13. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4}$

Esercizio 14. $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

Soluzione. riscriviamo il radicando come $9 - 4 + 4x - x^2 = 9 - (x - 2)^2$, per cui

$$= \int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{9 - (x - 2)^2}} = \int_2^{3,5} \frac{d(x - 2)}{\sqrt{9 - (x - 2)^2}} = \arcsin \left(\frac{x - 2}{3} \right) \Big|_2^{3,5} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Esercizio 15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$

Soluzione. Usiamo le formule goniometriche di bisezione

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi + 2}{8}$$

Esercizio 16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

Soluzione. scomponiamo $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x$ e applichiamo la prima proprietà della goniometria

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) dx = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\cos x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d(\cos x) = \\ &= - \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 17. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

Soluzione. essendo $d(\ln x) = \frac{1}{x}$, possiamo riscrivere

$$= \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esercizio 18. $\int_0^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

Soluzione. essendo ancora $d(\ln x) = \frac{1}{x}$, possiamo riscrivere

$$= \int_0^e \sin(\ln x) d(\ln x) = -\cos(\ln x)|_0^e = 1 - \cos 1$$

Esercizio 19. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

Soluzione. applicando la definizione di tangente, riscriviamo

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x)|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

essendo il numeratore è l'opposto della derivata del denominatore.

Esercizio 20. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

Soluzione. procediamo mediante sostituzione: $e^x = u$, $e^x dx = du$; se $x = 0$ allora $u = 1$ e se $x = 1$ $u = e$

$$= \int_1^e \frac{\cancel{e^x} du}{1+u^2 \cancel{e^x}} = \int_1^e \frac{du}{1+u^2} = \arctan u|_1^e = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 21. $\int_1^3 \sqrt{x+1} dx = \int_1^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1) = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^3 = \frac{2}{3} \sqrt{64} - \frac{2}{3} \sqrt{8} = \frac{4(4-\sqrt{2})}{3}$

Esercizio 22. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x = t^2$, $dx = 2tdt$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = 4$ $t = 16$

$$2 \int_0^{16} \frac{tdt}{1+t} = 2 \int_0^{16} \frac{t+1}{1+t} dt - 2 \int_0^{16} \frac{dt}{1+t} = 2t - 2 \ln(t+1)|_0^{16} = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+1)|_0^4 = 4 - 2 \ln 3$$

Esercizio 23. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $e^x - 1 = t^2$, $e^x dx = 2t dt$ per cui $dx = \frac{2t dt}{t^2 + 1}$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = \ln 2$ $t = 1$

$$2 \int_0^1 \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} dt - 2 \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = 2t - 2 \arctan t \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 24. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$; se $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ allora $t = \frac{\pi}{4}$ e se $x = 1$ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cdot \cos t dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 t} dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \\ &= -\cot t - t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 25. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x^2 - 1 = t^2$, $x dx = t dt$, per cui $dx = \frac{t dt}{\sqrt{t^2+1}}$; se $x = 1$ allora $t = 0$ e se $x = 2$ $t = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{t^2+1} dt - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= t - \arctan t \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 26. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $e^x - 1 = t^2$, $e^x dx = 2t dt$, per cui $dx = \frac{2t dt}{t^2+1}$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = \ln 5$ $t = 2$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{(t^2+1)t}{t^2+4} \cdot \frac{2t}{t^2+1} dt &= 2 \int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4} dt = 2 \int_0^2 \frac{t^2+4}{t^2+4} dt - 8 \int_0^2 \frac{1}{t^2+4} dt = \\ &= 2t - 4 \arctan \frac{t}{2} \Big|_0^2 = 4 - \pi \end{aligned}$$

Esercizio 27. $\int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $3x + 1 = t^2$, $3dx = 2tdt$, per cui $dx = \frac{2tdt}{3}$; se $x = 0$ allora $t = 1$ e se $x = 5$ $t = 4$

$$\int_1^4 \frac{\frac{2t}{3}}{2\left(\frac{t^2-1}{3}\right) + t} dt = \int_1^4 \frac{2t}{2t^2 + 3t - 2} dt =$$

scomponiamo il denominatore in $(2t - 1)(t + 2)$, per cui $\frac{2t}{(2t-1)(t+2)} = \frac{A}{2t-1} + \frac{B}{t+2}$

$$\begin{cases} A + 2B = 2 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5A = 2 \\ B = 2A \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = \frac{4}{5} \end{cases}$$

l'integrale si può riscrivere

$$= \frac{1}{5} \int_1^4 \frac{1}{2t-1} dt + \frac{4}{5} \int_1^4 \frac{1}{t+2} dt = \frac{1}{5} \ln(2t-1) + \frac{4}{5} \ln(t+2) \Big|_1^4 = \frac{1}{5} \ln 7 + \frac{4}{5} \ln 6 - \frac{4}{5} \ln 3 = \frac{1}{5} \ln 112$$

Esercizio 28. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$; se $x = 1$ allora $t = 1$ e se $x = 3$ $t = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} - \int_1^{\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{5}{t} + 1}} dt &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+5t+t^2}} dt = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{21}{4}\right)}} dt = \\ &= \ln \left[\left(t + \frac{5}{2}\right) + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{21}{4}\right)} \right] \Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \ln \left(\frac{7}{2} + \sqrt{7} \right) - \ln \left(\frac{17}{6} + \frac{10}{6} \right) = \ln \left(\frac{7+2\sqrt{7}}{9} \right) \end{aligned}$$

Esercizio 29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

Soluzione. Procediamo con il metodo di integrazioni per parti, ricordando che

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

per cui se poniamo $u = x$ e $\cos x dx = v'$, avremo

$$= x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Esercizio 30. $\int_1^e \ln x dx$

Soluzione. Procediamo con il metodo di integrazioni per parti, ponendo $u = \ln x$ e $dx = v'$, avremo

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx = e - e + 1 = 1$$

Esercizio 31. $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$

Soluzione. Poniamo $u = x^3$ e $e^{2x} dx = v'$, avremo

$$x^3 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 3x^2 dx =$$

applichiamo nuovamente il metodo di integrazione ponendo $u = x^2$ e $e^{2x} dx = v'$, avremo

$$\frac{1}{2} x^3 e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 2x e^{2x} dx \right) =$$

di nuovo $u = x$, $v' = e^{2x} dx$

$$\frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{3}{8} e^{2x} = \frac{e^2 + 3}{8}$$

Esercizio 32. $\int_{-2}^2 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$

Soluzione. In questo caso si può osservare che la funzione è dispari ed è quindi simmetrica rispetto all'origine del piano cartesiano, quindi, essendo i due estremi opposti e simmetrici rispetto all'origine, l'integrale sarà $= 0$.

2. CALCOLO DELLE AREE DI FIGURE PIANE

Esercizio 33. Calcolare l'area limitata dalla parabola $y = 4x - x^2$ e dell'asse delle ascisse.



Soluzione. la parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

Esercizio 34. Calcolare l'area limitata dalla curva $y = \ln x$, dall'asse Ox e dalla retta $x = e$.



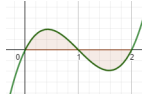
Soluzione. la curva sarà compresa tra i punti di ascissa $x_1 = 1$ e $x_2 = e$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_1^e \ln x dx$$

risolviamo per parti con $u = \ln x$ e $v' = dx$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

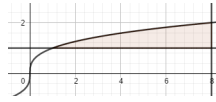
Esercizio 35. Calcolare l'area limitata dalla curva $y = x(x-1)(x-2)$ e dall'asse Ox . La curva interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$, per cui



Soluzione. la curva interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left. \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right|_0^1 - \left. \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right|_1^2 = \frac{1}{2}$$

Esercizio 36. Calcolare l'area limitata dalla curva $y^3 = x$, dalla retta $y = 1$ e dalla verticale $x = 8$. La curva interseca la retta orizzontale nel punto di ascissa $x = 1$, per cui



Soluzione. Calcoliamo l'integrale della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ al quale sottraiamo l'area sotto la retta $y = 1$ (si può calcolare anche geometricamente come l'area del rettangolo)

$$A = \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx - \int_1^8 dx = \left. \frac{3x^{4/3}}{4} - x \right|_1^8 = \frac{17}{4}$$

Esercizio 37. Calcolare l'area limitata da una semionda della sinusoide $y = \sin x$ e dall'asse Ox .



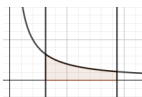
Soluzione. $A = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$

Esercizio 38. Calcolare l'area compresa tra la curva $y = \tan x$, l'asse Ox e la retta $x = \frac{\pi}{3}$.



Soluzione. $A = \int_0^{\pi/3} \tan x dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln(\cos x) \Big|_0^{\pi/3} = \ln 2$

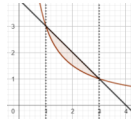
Esercizio 39. Calcolare l'area compresa tra l'iperbole $xy = m^2$, le verticali $x = a$ e $x = 3a$ ($a > 0$) e l'asse Ox .



Soluzione. $A = \int_a^{3a} \frac{m^2}{x} dx = m^2 \ln(x) \Big|_a^{3a} = m^2 (\ln 3a - \ln a) = m^2 \ln 3$

Esercizio 40. Determinare l'area del dominio così definito:

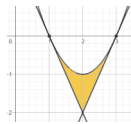
$$\begin{cases} xy \geq 3 \\ x + y - 4 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Soluzione. L'area delimitata è quella rappresentata in figura, intersezione delle tre condizioni. si tratta pertanto di calcolare l'area sottesa dalla retta nell'intervallo $1 \leq x \leq 3$ dalla quale sottrarre l'area sottesa dal ramo di iperbole equilatera sempre nello stesso intervallo. L'area sottesa dalla retta equivale a quella del trapezio rettangolo, che vale $A_{tr} = \frac{(3+1) \cdot 2}{2} = 4$

$$A = 4 - \int_1^3 \frac{3}{x} dx = 4 - 3 \ln(x) \Big|_1^3 = 4 - \ln 27$$

Esercizio 41. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, determinare l'area della regione piana limitata dalle tangenti nei punti di intersezione con l'asse x e dalla curva.



Soluzione. La parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $x = 1$ e $x = 3$. Le tangenti in questi due punti saranno simmetriche rispetto all'asse della parabola e si incontreranno quindi nel punto di ascissa $x = 2$ e avranno, quindi, coefficienti angolari opposti uguali rispettivamente a $m_1 = -2$ e $m_2 = 2$ e le loro equazioni saranno $r_1 : 2x + y - 2 = 0$ e $r_2 : 2x - y - 6 = 0$. Il loro punto di intersezione sarà $(2; -2)$. [Le tangenti si possono pure determinare ricordando il significato geometrico di derivata di una funzione]. L'area richiesta, indicata in figura, è la differenza tra l'area del triangolo isoscele e quella del segmento di parabola. Il triangolo ha area $A_{tr} = 2$. L'area richiesta sarà

$$A = 2 - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx = 4 - \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right|_1^3 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 42. Calcolare l'area compresa tra la versiera di Agnesi $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ e il semiasse positivo delle ascisse.



Soluzione. $A = a^3 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{a^3}{a} \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} a^2$

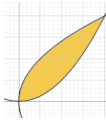
Esercizio 43. Calcolare l'area della figura limitata dalla curva $y = x^3$, dalla retta $y = 8$ e dall'asse OY .



Soluzione. L'area richiesta è la differenza tra l'area sottesa dalla retta e quella sottesa dalla curva nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$. Pertanto

$$A = 16 - \int_0^2 x^3 dx = 16 - \frac{x^4}{4} \operatorname{arctan} x \Big|_0^2 = 16 - 4 = 12$$

Esercizio 44. Calcolare l'area delimitata dalle parabole $y^2 = 2px$ e $x^2 = 2py$.



Soluzione. L'area richiesta è la differenza tra le parti di piano sottese dalle due curve nell'intervallo $[0; 2p]$

$$A = \int_0^{2p} \sqrt{2px} dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p} dx = \frac{2x\sqrt{2px}}{3} - \frac{x^3}{6p} \Big|_0^{2p} = \frac{8p^2}{3} - \frac{4p^2}{3} = \frac{4}{3}p^2$$

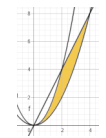
Esercizio 45. Calcolare l'area delimitata dalla parabola $y = -x^2 + 2x$ e dalla retta $y = -x$.



Soluzione. La retta e la parabola si intersecano nei punti $(0; 0)$ e $(3; 0)$. L'area richiesta è data da

$$A = \int_0^3 (-x^2 + 2x - (-x)) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2}$$

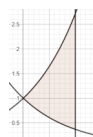
Esercizio 46. Calcolare l'area compresa tra le parabole $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{2}$ e dalla retta $y = 2x$.



Soluzione. Le due parabole e la retta si intersecano nell'origine. La retta interseca la parabola $y = x^2$ nel punto di ascissa $x = 4$ e incontra l'altra parabola nel punto di ascissa $x = 2$.

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) dx - \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = -\frac{x^3}{6} + x^2 \Big|_0^4 - x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 4$$

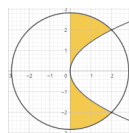
Esercizio 47. Calcola l'area limitata dalle curve $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ e dalla retta $x = 1$.



Soluzione. Le due curve esponenziali si intersecano nel punto di ascissa $x = 0$ e intersecano la retta verticale nel punto di ascissa $x = 1$.

$$A = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e^x + e^{-x} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e}$$

Esercizio 48. Calcolare l'area delle due parti del cerchio $x^2 + y^2 = 8$ delimitata dalla parabola $y^2 = 2x$



Soluzione. Le due parti di cerchio hanno, per simmetria, la stessa area e questo consente di calcolare il solo integrale della parte di piano nel quadrante positivo. La parabola interseca la circonferenza nel punto di ascissa $x = 2$. L'area sarà pertanto la differenza tra la parte sottesa dalla circonferenza e quella sottesa dalla parabola nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$.

$$\frac{A}{2} = \int_0^2 \sqrt{8 - x^2} dx - \int_0^2 \sqrt{2x} dx =$$

calcoliamo il primo integrale sostituendo $x = 2\sqrt{2} \cos t$, $dx = -2\sqrt{2} \sin t dt$; se $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$; se $x = 2$, $t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{A}{2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8 \sin^2 t} \cdot (-2\sqrt{2} \sin t) dt - \int_0^2 \sqrt{2x} dx = 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \sqrt{2} \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \right) =$$

ma $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$, per cui

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt - \sqrt{2} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{2} = 4t - 2 \sin 2t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3} = \pi + 2 - \frac{8}{3} = \pi - \frac{2}{3}$$

l'area totale sarà quindi

$$A = 2\pi - \frac{4}{3}$$

Esercizio 49. Dopo aver determinato le parabole γ e γ' appartenenti al fascio $y = -x^2 + ax + c$ passanti per $A(0; 3)$ e tangenti alla retta $r : 4x + 4y - 21 = 0$, detti M e N i rispettivi punti di tangenza (M appartenente al primo quadrante), determinare la retta parallela a r che interseca gli archi \widehat{AM} e \widehat{AN} di γ e γ' , nei punti R e T in modo che sia massima l'area del triangolo MTR ; calcolare poi l'area del triangolo mistilineo AMN .

Soluzione. Le parabole passano per A e quindi $c = 3$ e l'equazione si riduce a $y = -x^2 + ax + 3$. Essendo tangenti alla retta r avremo

$$\begin{cases} y = -x^2 + ax + 3 \\ y = -x + \frac{21}{4} \end{cases} \quad x^2 - x(a-1) + \frac{9}{4} = 0 \quad a_1 = -4 \quad a_2 = 2$$

le parabole saranno $\gamma : -x^2 - 4x + 3$ e $\gamma_1 : -x^2 + 2x + 3$. Ora, ricordando il significato geometrico di derivata, possiamo trovare i due punti di tangenza:

$$-1 = -2x_N + a \quad a = -4 \quad N \left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{4} \right)$$

$$-1 = -2x_M + a \quad a = 2 \quad M\left(\frac{3}{2}; \frac{15}{4}\right)$$

Calcoliamo ora le intersezioni T, R in funzione della distanza tra le due rette con R nel primo quadrante e T nel secondo ($3 \leq q \leq \frac{21}{4}$)

$$R \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -x + q \end{cases} \quad 0 < x < \frac{3}{2}; \quad x^2 - 3x + q - 3 = 0 \quad R\left(\frac{3 - \sqrt{21 - 4q}}{2}; \frac{2q - 3 + \sqrt{21 - 4q}}{2}\right)$$

$$T \begin{cases} y = -x^2 - 4x + 3 \\ y = -x + q \end{cases} \quad -\frac{3}{2} < x < 0 \quad x^2 - 3x + q - 3 = 0 \quad T\left(\frac{-3 + \sqrt{21 - 4q}}{2}; \frac{2q + 3 - \sqrt{21 - 4q}}{2}\right)$$

troviamo il segmento RT (poniamo per comodità di scrittura $\sqrt{21 - 4q} = t$)

$$RT = \sqrt{(3 - t^2) + (t - 3)^2} = |t - 3|\sqrt{2} = (\sqrt{21 - 4q} - 3)\sqrt{2}$$

l'altezza del triangolo è la distanza tra le due rette parallele

$$h = \frac{|\frac{3}{2} + \frac{15}{4} - q|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{21}{4} - q|}{\sqrt{2}}$$

l'area sarà quindi

$$A = \left[(\sqrt{21 - 4q} - 3)\sqrt{2} \right] \cdot \frac{|\frac{21}{4} - q|}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{21 - 4q} - 3)(\frac{21}{4} - q)}{2}$$

troviamo la condizione di massimo

$$A' = \frac{\frac{-2}{\sqrt{21 - 4q}} \left(\frac{21 - 4q}{4}\right) - (\sqrt{21 - 4q} - 3)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{21 - 4q} = 0$$

$$2 = \sqrt{21 - 4q} \quad q = \frac{17}{4}$$

la retta parallela sarà $4x + 4y - 17 = 0$.



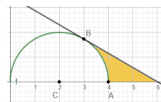
Calcoliamo l'area del triangolo mistilineo colorato in figura.

$$A = \left(\frac{27}{4} + \frac{15}{4}\right) \times \frac{3}{2} - \int_{-\frac{3}{2}}^0 (-x^2 - 4x + 3) dx - \int_0^{\frac{3}{2}} (-x^2 + 2x + 3) dx =$$

$$= \frac{63}{4} - \left| -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right|_{-\frac{3}{2}}^0 - \left| -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{63}{4} - \frac{63}{8} - \frac{45}{8} = \frac{9}{4}$$

Esercizio 50. Dati i punti $A(4;0)$ e $C(2;0)$, determinare l'equazione della semicirconferenza giacente nel semipiano $y \geq 0$, passante per A e con centro in C . Calcolare l'area della parte di piano limitata dall'asse x , dalla semicirconferenza e dalla retta a essa tangente nel suo punto di ascisse $x = 3$.

Soluzione. La semicirconferenza ha centro in C e passa per A e, per simmetria, per $O(0,0)$ e quindi ha raggio $r = 2$. L'equazione della circonferenza è: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e la semicirconferenza richiesta avrà equazione $y = \sqrt{4x - x^2}$. Il punto di tangenza avrà coordinate $B(3; \sqrt{3})$



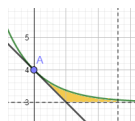
Calcoliamo l'area colorata in figura

$$\begin{aligned} A &= \frac{3 \times \sqrt{3}}{2} (A_{\text{triangolo}}) - \int_3^4 \sqrt{4x - x^2} dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_3^4 \sqrt{4x - x^2} dx = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_3^4 \sqrt{4x - x^2 - 4 + 4} dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_3^4 \sqrt{4 - (x-2)^2} dx = \end{aligned}$$

se poniamo $x - 2 = t$, con $dx = dt$ e $x = 3$, allora $t = 1$, $x = 4$, $t = 2$, avremo

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \left| \frac{t}{2} \sqrt{4 - t^2} + 2 \arcsin \frac{t}{2} \right|_1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

Esercizio 51. Tracciare la curva γ di equazione $y = 3 + e^{-x}$ e, scritta l'equazione della tangente t a γ nel suo punto di intersezione con l'asse y , determinare l'area $A(k)$ della regione piana limitata dalla retta t , dall'asintoto orizzontale della curva, dalla retta $x = k$ ($k > 1$) e dalla curva. Calcolare inoltre $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A(k)$.



Soluzione. Il grafico della curva è facilmente rappresentabile essendo la curva esponenziale e^{-x} traslata mediante il vettore $\vec{v}(0; 3)$ e l'asintoto sarà allora $y = 3$. La curva interseca l'asse y nel punto $A(0; 4)$. Determiniamo la tangente alla curva in questo punto, calcolando la derivata prima per ottenere il coefficiente angolare della retta,

$$y' = -e^{-x} \quad y'(0) = -1$$

la retta avrà equazione $x + y - 4 = 0$. Calcoliamo ora l'area della regione di piano colorata in figura

$$A(k) = \int_0^k (3 + e^{-x}) dx - 3k - \frac{1}{2} = |3x - e^{-x}|_0^k - 3k - \frac{1}{2} = 3k - e^{-k} + 1 - 3k - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-k}$$

Calcoliamo il limite dell'area in funzione di k

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - e^{-k} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 52. Per un punto $A(1; 0)$ si conduca la retta r di coefficiente angolare m ; detto B il punto di intersezione con la retta $x = 2$, si conduca da esso la perpendicolare a r ; sia P il suo punto di intersezione con la retta $x = m$. a) Determinare l'equazione del luogo γ descritto da P al variare di m . Tracciare la curva γ . b) Determinare infine l'area della regione piana limitata dalla tangente alla curva nel suo punto di ascissa 1, dalla retta $x = 2$ e dalla curva γ .



Soluzione. La retta passante per A ha equazione $y = m(x - 1)$; l'intersezione con la retta $x = 2$ individua il punto $B(2; m)$. La retta perpendicolare per B alla retta r avrà $m_{per} = -\frac{1}{m}$ e $q_{per} = \frac{m^2 + 2}{m}$; l'equazione di tale retta sarà $x + my - m^2 - 2 = 0$. Il punto P avrà pertanto coordinate $P\left(m; \frac{m^2 - m + 2}{m}\right)$. Il luogo, considerando m come l'incognita, avrà quindi equazione

$$y = \frac{x^2 - x + 2}{x}$$

Studiamo questa funzione il cui dominio è \mathbb{R}_0 . Il numeratore è sempre positivo e quindi non vi saranno intersezioni con gli assi. La funzione sarà positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Studiamo gli asintoti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x} \sim x = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 - x + 2}{x} \sim \frac{2}{0^\pm} = \pm\infty$$

la funzione non ha quindi asintoti orizzontali ma presenta un asintoto verticale di equazione $x = 0$ (asse y). Verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2 - x^2}{x} = -1$$

avremo quindi un asintoto obliquo di equazione $y = x - 1$.

Studiamo la sua derivata

$$y' = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

il suo dominio sarà ancora \mathbb{R}_0 . Il denominatore è sempre positivo nel dominio, mentre il numeratore lo è per $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$ e la funzione sarà crescente in questi due intervalli e decrescente in $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Avrà quindi un massimo relativo in $M\left(-\sqrt{2}; \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$ e un minimo relativo in $m\left(\sqrt{2}; \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)$. Calcoliamo la derivata seconda

$$y'' = \frac{2x^3 - 2x^3 + 4x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$$

la funzione avrà concavità verso l'alto per $x > 0$ e verso il basso per $x < 0$ e non presenta flessi. Il grafico è mostrato sotto.



b) troviamo ora la tangente richiesta. Il punto di ascissa 1 appartenente alla curva γ avrà coordinate $T(1; 2)$. Troviamo il coefficiente angolare di tale retta, conoscendo già la derivata della funzione

$$y'(1) = -1$$

e la tangente avrà equazione $x + y - 3 = 0$. Tale tangente interseca la retta $x = 2$ in $Q(2; 1)$.



L'area sarà uguale alla differenza tra la parte di piano sottesa dalla funzione nell'intervallo $[1; 2]$ e il trapezio rettangolo sotteso dalla tangente nello stesso intervallo. L'area del trapezio vale $\frac{3}{2}$, per cui

$$A = \int_1^2 \frac{x^2 - x + 2}{x} dx - \frac{3}{2} = \int_1^2 x dx - \int_1^2 dx + 2 \int_1^2 \frac{dx}{x} - \frac{3}{2} =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln x \right]_1^2 - \frac{3}{2} = \ln 4 - 1$$

Esercizio 53. Data la funzione

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \right)$$

a) determinare il dominio, eventuali punti singolari, di non derivabilità e le equazioni delle tangenti in questi punti; b) tracciare il grafico C della funzione; c) determinare l'area della regione piana limitata dalla curva C , dall'asse x e dalle rette $x = -\frac{3}{2}$ e $x = -1$.

Soluzione. La presenza del valore assoluto richiede di studiare la funzione sia caso in cui il suo argomento è positivo sia quando è negativo.

1. caso: $x \leq -1 \vee x > 1$, la funzione è

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \right)$$

il dominio è dato da

$$\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \frac{x^2+x-2}{x-1} > 0 \quad x < -2 \vee x > 1$$

per cui $D : -2 < x < -1 \quad x > 1$.

2. caso $-1 \leq x < 1$

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{-x^2 + 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\frac{-x^2 + x}{x - 1} \right)$$

il dominio è dato da

$$\begin{cases} \frac{-x^2+x}{x-1} > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \frac{-x^2+x}{x-1} > 0 \quad 0 < x < 1$$

per cui $D : -1 < x < 0$.

Il dominio della funzione sarà quindi $D : (-2; 0) \cup (1; +\infty)$, dove i punti singolari sono in corrispondenza di $x = -2, 1$. All'interno del dominio la funzione è sempre continua.

Calcoliamo la derivata della funzione

1. caso

$$f'(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{(2x+1)(\cancel{x-1}) - (x+2)(\cancel{x-1})}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{(x-1)^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{x+2}$$

2. caso:

$$f'(x) = \frac{\cancel{x-1}}{-x(\cancel{x-1})} \cdot \frac{(1-2x)(\cancel{x-1}) + x(\cancel{x-1})}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x}$$

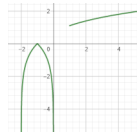
Il punto $x = -1$ appartiene ai due intervalli; verifichiamo se la derivata dx e sx della funzione in questo punto coincidono oppure no, cioè se la funzione oltre a essere continua in $x = -1$ è anche derivabile.

$$f'(-1^-) = 1 \quad f'(-1^+) = -1$$

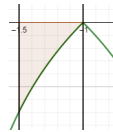
la funzione avrà quindi un punto angoloso in corrispondenza di $x = -1$. Tale valore caratterizza un punto del grafico di coordinate $P(-1; 0)$ e le tangenti in questo punto saranno

$$t_1 : y = x + 1 \quad t_2 : y = -x - 1$$

b) Completando lo studio si ottiene il seguente grafico



c) l'area da determinare è quella colorata nella figura sotto



$$A = - \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \ln \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \right) dx = - \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \ln(x+2) d(x+2) =$$

integriamo con il metodo per parti ponendo $d(x+2) = v'$ e $\ln(x+2) = u$, per cui

$$- [(x+2) \ln(x+2)]_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} d(x+2) = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \ln 2)$$

LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA

La lunghezza di un arco di curva di equazione $y = f(x)$ compresa tra due punti di ascissa $x = a$ e $x = b$ è uguale a

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Esercizio 54. Calcolare la lunghezza dell'arco della parabola semicubica $y^2 = x^3$ compreso tra l'origine delle coordinate e il punto dalle coordinate $(4; 8)$.

Soluzione. la funzione può essere scritta come, essendo l'intervallo nel primo quadrante, $y = x^{\frac{3}{2}}$ e quindi $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$l = \int_0^4 \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{4 + 9x} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (4 + 9x)^{\frac{1}{2}} dx$$

se poniamo $4 + 9x = t$, avremo $dx = \frac{1}{9}dt$; se $x = 0$, $t = 4$ e se $x = 4$, $t = 40$

$$l = \frac{1}{18} \int_4^{40} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{40} = \frac{1}{27} \cdot (40\sqrt{40} - 8) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

Esercizio 55. Calcolare la lunghezza dell'arco della parabola $y = 2\sqrt{x}$ compreso tra i punti di ascisse $x = 0$ e $x = 1$.

Soluzione. la parabola ha come asse di simmetria l'asse x . calcoliamo la derivata $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} dx = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)} dx =$$

poniamo $x + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$, per cui $x = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \tan^2 t$ e $dx = \frac{2 \tan t}{\cos^2 t} dt$; se $x = 0$, $t = 0$; se $x = 1$, $t = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\tan^2 t}\right)} \cdot \frac{2 \tan t}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin t} \cdot \frac{2 \sin t}{\cos^3 t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^3 t} dt = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} dt = \end{aligned}$$

calcoliamo il primo integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt$ per parti, riscrivendolo come $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt$, ponendo $u = \frac{\sin t}{\cos^3 t}$ e $v' = \sin t dt$; avremo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt = \left(-\cos t \frac{\sin t}{\cos^3 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \sin^2 t}{\cos^3 t} dt$$

cioè, sommando i termini "simili"

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \sin^2 t}{\cos^3 t} dt = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

pertanto

$$l = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} + [\ln(\tan t + \sec t + 1)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$$

Se la curva è data da una equazione parametrica, la lunghezza dell'arco di curva è data da

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'^2 + y'^2)} dt$$

Esercizio 56. Calcolare la lunghezza dell'arco dell'evolvente di cerchio

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

per $0 < t < T$.

Soluzione. Calcoliamo prima le derivate di x e y rispetto a t

$$\begin{aligned} x' &= a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t \\ y' &= a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t \end{aligned}$$

avremo

$$l = \int_0^T \sqrt{at^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \int_0^T \sqrt{at^2} dt = \frac{aT^2}{2}$$

Esercizio 57. Data la parabola di equazione $y^2 = 3x + 4$ e le due corde AB e CD perpendicolari all'asse x nei punti $(-\frac{5}{4}; 0)$ e $(\frac{1}{4}; 0)$, dimostrare che tra l'area del trapezio convesso $ABCD$ e l'area A del segmento parabolico limitato dalle due corde sussiste la relazione

$$\frac{38}{27}A(ABCD) = A + \frac{10}{9}$$



Soluzione. Troviamo le intersezioni della parabola con le due rette perpendicolari: retta $x = -\frac{5}{4}$, $A(-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2})$, $B(-\frac{5}{4}; \frac{1}{2})$; pertanto il segmento $\overline{AB} = 1$; retta $x = \frac{1}{4}$, $C(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{19}}{2})$, $D(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{19}}{2})$ e il segmento $CD = \sqrt{19}$. L'altezza del trapezio è la distanza tra le due rette parallele, cioè $h = |\frac{1}{4} - (-\frac{5}{4})| = \frac{3}{2}$. L'area del trapezio è

$$A(ABCD) = \frac{(1 + \sqrt{19}) \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}(1 + \sqrt{19})$$

Calcoliamo l'area del segmento di parabola mediante il calcolo dell'integrale (si ricorda anche la possibilità con fornita dalla formula di Archimede)

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}} \sqrt{3x+4} dx = \frac{2}{3} \int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}} (3x+4)^{\frac{1}{2}} d(3x+4) = \frac{2}{3} \left| (3x+4)^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} \right|_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{19}{8} \sqrt{19} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{18} (19\sqrt{19} - 1) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{38}{27} \left(\frac{3}{4} (1 + \sqrt{19}) \right) &= \frac{1}{18} (19\sqrt{19} - 1) + \frac{10}{9} \\ \frac{19}{18} + \frac{19}{18} \sqrt{19} &= \frac{19}{18} \sqrt{19} - \frac{1}{18} + \frac{10}{9} \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{19}{18} = \frac{19}{18}$$

CALCOLO DEI VOLUMI

Volume dei solidi di rotazione. Il volume del corpo generato dalla rotazione di un trapezoide mistilineo, limitato dalla curva $y = f(x)$, dall'asse delle x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, intorno all'asse x o intorno all'asse y si esprime con le formule

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

Esercizio 58. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della curva limitata dall'asse x e dalla parabola $y = ax - x^2$.



Soluzione. Il volume è dato da

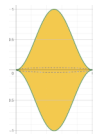
$$V_x = \pi \int_0^a (ax - x^2)^2 dx = \pi \int_0^a (a^2x^2 - 2ax^3 + x^4) dx = \pi \left[a^2 \frac{x^3}{3} - a \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{a^5}{30} \pi$$

Esercizio 59. Calcolare il volume dell'ellissoide generato dalla rotazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ attorno all'asse x .

Soluzione. Il volume si ottiene moltiplicando per due il volume del solido di rotazione che si ha ruotando di 360° intorno all'asse x il sottografico di $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, per cui

$$V = 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 \left[a^2 \frac{x^3}{3} - a \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{4}{3} ab^2 \pi$$

Esercizio 60. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della curva $y = \sin^2 x$ compresa tra i punti $x = 0$ e $x = \pi$.



Soluzione. risolviamo l'integrale utilizzando le formule goniometriche e considerando $\sin^4 x = \sin^2 x \cdot \sin^2 x$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi \sin^2 x (1 - \cos^2 x) dx = \pi \left(\int_0^\pi \sin^2 x dx - \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx \right) = \\ &= \pi \left(\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos^2 2x dx \right) = \pi \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi \cos 4x dx \right) = \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x \right]_0^\pi = \frac{3}{8} \pi^2 \end{aligned}$$

Esercizio 61. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della figura limitata dalla curva $y = e^x$ e dalle rette $x = 0$ e $y = 0$.



Soluzione. Calcoliamo l'integrale

$$V = \pi \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx = \left| \frac{\pi}{2} e^{2x} \right|_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 62. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della figura compresa tra le curve delle funzioni $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.



Soluzione. L'area delimitata da due figure è calcolata come $A = \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$, per cui

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left| \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi$$

Esercizio 63. Calcolare il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x della figura limitata dalla curva $y^2 = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$.



Soluzione. Calcoliamo l'integrale

$$V = \pi \int_0^1 x^3 dx = \pi \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4} \pi$$

Esercizio 64. Determinare l'area della regione T di piano delimitata dall'asse y , dalla parabola $y = x^2 + 1$ e dalla tangente a detta parabola nel punto $x_0 = 2$. Calcolare, inoltre, il volume V del solido ottenuto dalla rotazione completa di T attorno all'asse y e x e dalla retta $x = 1$.



Soluzione. Il punto di tangenza ha coordinate $A(2; 5)$. Determiniamo la tangente: $y' = 2x$, e $y'(2) = 4$; essa avrà coefficiente angolare $m = 4$ e applicando la relazione che descrive un fascio proprio di rette, avremo

$$y - 5 = 4(x - 2) \quad y = 4x - 3$$

tale retta interseca l'asse x nel punto $(\frac{3}{4}; 0)$. Troviamo prima l'area della parte colorata in figura.

$$A = \int_0^2 (x^2 + 1) dx - \left(\frac{5}{8} \times 5\right) + \left(\frac{3}{8} \times 3\right) = \left|\frac{x^3}{3} + x\right|_0^2 - 2 = \frac{8}{3}$$

in modo analogo

$$A = \int_0^2 (x^2 + 1) dx - \int_{\frac{3}{4}}^2 (4x - 3) dx - \int_0^{\frac{3}{4}} (4x - 3) dx = \frac{8}{3}$$



Soluzione. Calcoliamo ora il volume ottenuto ruotando la superficie attorno all'asse y .

$$V = \pi \left(\int_{-3}^5 \left(\frac{y}{4} + \frac{3}{4}\right) dy - \int_1^5 (y - 1)^{\frac{1}{2}} dy \right) = \pi \left(\left|\frac{y^2}{8} + \frac{3}{4}y\right|_{-3}^5 - \left|(y - 1)^{\frac{3}{2}}\right|_1^5 \right) = \frac{8}{3}\pi$$

Esercizio 65. Data la curva di equazione

$$y = \frac{2x - 1}{x - 2}$$

determinare il volume generato dalla regione piana limitata dalla curva, dalle rette $x = 4$ e $x = 6$ e dall'asintoto orizzontale della funzione in una rotazione completa attorno a tale asintoto.

Soluzione. La funzione data è una funzione omografica, cioè un'iperbole traslata. In questo caso è possibile determinare il volume richiesto dopo aver opportunamente traslato la curva in modo che il suo asintoto orizzontale coincida con l'asse x e quello verticale con l'asse y . Se una funzione omografica generica è espressa da $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ allora il vettore di traslazione sarà dato da

$$\vec{v} \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right) \quad \vec{v}(2; 2) \text{ le}$$

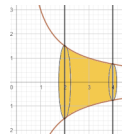
equazioni di traslazione sono

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

avremo

$$y' = \frac{2x' + 4 - 1}{x' + 2 - 2} - 2 = \frac{3}{x'}$$

Anche le due rette dovranno essere traslate verso sinistra di due unità.



Il volume sarà

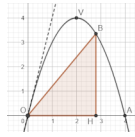
$$V = \pi \int_2^4 \frac{9}{x^2} = 9\pi \left| -\frac{1}{x} \right|_2^4 = \frac{9}{4}\pi$$

Esercizio 66. Dopo aver determinato nel piano xOy l'equazione della parabola γ , tangente in O alla retta $y = 4x$ e passante per $A(4; 0)$, detto V il vertice, rispondere ai seguenti quesiti:

- (1) sull'arco di γ contenuto nel semipiano $y \geq 0$ determinare, per via elementare, il punto B per il quale sia massima l'area del triangolo OBH , essendo H la proiezione di B sull'asse x
- (2) determinare il luogo φ del punto medio del segmento OB al variare di B sull'arco \widehat{OVA} di γ
- (3) calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse x la regione finita di piano delimitata da γ , da φ e dall'asse x .

Soluzione. Troviamo l'equazione della parabola. La retta data ha $m = 4$ e, ricordando il significato geometrico di derivata, se $y = ax^2 + bx$ è l'equazione generale di questa parabola passante per l'origine ($c = 0$), avremo $y' = 2ax + b$ e $y'(0) = b = 4$. Inoltre la parabola passa per il punto A e quindi $0 = 16a + 16$, da cui $a = -1$ e l'equazione sarà

$$\gamma: y = -x^2 + 4x$$



- 1) le coordinate del punto $B(x; -x^2 + 4x)$ con $0 < x < 4$ e l'area del triangolo rettangolo è

$$A = \frac{-x^3 + 4x^2}{2}$$

troviamo la condizione di massimo

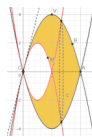
$$A' = \frac{-3x^2 + 8x}{2} = 0$$

da cui

$$x = \frac{8}{3} \quad A = \frac{128}{27}$$

- 2) il punto medio del segmento OB con B variabile, ha coordinate $M\left(\frac{t}{2}; \frac{-t^2+4t}{2}\right)$ per cui avremo

$$\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = \frac{-t^2+4t}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} t = 2x \\ y = \frac{-4x^2+8x}{2} = -2x^2 + 4x \end{cases}$$



- 3) Calcoliamo il volume cercato

$$V = \pi \int_0^4 (-x^2 + 4x)^2 dx - \pi \int_0^2 (-2x^2 + 4x)^2 dx =$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16}{3}x^3 \right]_0^4 - \pi \left[\frac{4x^5}{5} - 4x^4 + \frac{16}{3}x^3 \right]_0^2 =$$

$$V = \pi \left(\frac{1024}{5} - 512 + \frac{1024}{3} - \frac{128}{5} + 64 - \frac{128}{3} \right) = \frac{448}{15} \pi$$

APPLICAZIONI ALLA FISICA

Esercizio 67. Un punto materiale si muove su una linea retta con un'accelerazione che all'istante t è data da $a(t) = (2t - 6) \frac{m}{s^2}$. Sapendo che la velocità all'istante $t = 0$ è $v_0 = 8 \frac{m}{s}$, determinare 1) gli istanti t in cui il punto si ferma nelle posizioni A e B ; 2) la distanza tra A e B .

Soluzione. Calcoliamo come varia la velocità nel tempo

$$v(t) = \int (2t - 6) dt = t^2 - 6t + C$$

allora $v(0) = 8 = C$ e la legge delle velocità sarà $v(t) = t^2 - 6t + 8$. Se il punto si ferma, allora $v = 0$, per cui

$$t^2 - 6t + 8 = 0 \quad t_1 = 2 \quad t_2 = 4$$

calcoliamo la distanza tra i due punti

$$AB = s(4) - s(2) = \int_2^4 |t^2 - 6t + 8| dt = \left[\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t \right]_2^4 = \frac{4}{3} m$$

Esercizio 68. L'accelerazione di un corpo mobile su una retta, in funzione del tempo, è data dalla legge $a(t) = a_0 e^{-kt}$ con $a_0 = -2 \frac{m}{s^2}$ e $k = 6, 12 s^{-1}$. Sapendo che $v_0 = v(0) = 0, 5 \frac{m}{s}$, $s(0) = 0$, determinare a) la legge con cui varia la velocità in funzione del tempo; b) l'equazione oraria del moto e lo spazio percorso in $0, 3 s$.

Soluzione. a) Sapendo che $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, possiamo ottenere

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 e^{-kt} dt = v_0 + \left[-\frac{a_0}{k} e^{-kt} \right]_0^t = v_0 + \left(-\frac{a_0}{k} e^{-kt} + \frac{a_0}{k} \right)$$

per cui

$$v(t) = v_0 + \frac{a_0}{k} (1 - e^{-kt}) = \frac{1}{2} + 0,33 (1 - e^{-6,12t})$$

b) ancora, poiché $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, si può scrivere

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \left[v_0 + \frac{a_0}{k} (1 - e^{-kt}) \right] dt = \left(v_0 + \frac{a_0}{k} \right) t + \frac{a_0}{k^2} (e^{-kt} - 1)$$

la distanza percorsa in $0, 3 s$ sarà

$$s = (0,5 - 0,33) 0,3 - 0,33 (e^{-6,12 \times 0,3} - 1) = 9,6 cm$$

Esercizio 69. Un conduttore è attraversato da una corrente di intensità $i(t) = k \sin \omega t$, essendo $k = 10 A$ e $\omega = 2 \frac{rad}{s}$. Calcolare la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore tra l'istante $t_1 = 0$ e l'istante $t_2 = 0, 5 s$.

Soluzione. Sapendo che l'intensità di carica per definizione è data da $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, dove q è la quantità di carica che fluisce nel tempo, avremo

$$q(t) = \int_0^{0,5} k \sin \omega t dt = \left[-\frac{k}{\omega} \cos \omega t \right]_0^{0,5} = [-5 \cos 2t]_0^{0,5} = -5 (\cos 1_{rad} - 1) = 2,3 C$$

AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

L'area della superficie generata dalla rotazione intorno all'asse x dell'arco di curva $y = f(x)$, compreso tra i punti di ascissa $x = a$ e $x = b$, si esprime con la formula

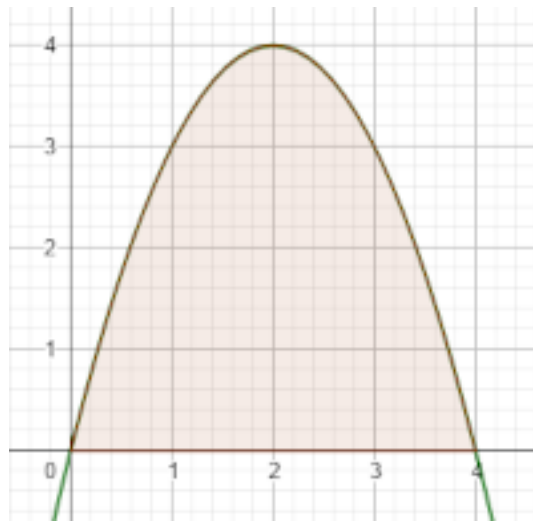
$$A_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Esercizio 70. Determinare l'area della superficie generata dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento di retto $y = \sqrt{3}x + 2$ per $x \in [1; 4]$.

Soluzione. L'area è ottenibile calcolando l'integrale

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^4 2(\sqrt{3}x + 2) dx = 4\pi \left| \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2x \right|_1^4 = 4\pi \left(8\sqrt{3} + 8 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \right) = 1 \\ &= 4\pi \left(\frac{15}{2}\sqrt{3} + 6 \right) = 6\pi (5\sqrt{3} + 4) \end{aligned}$$

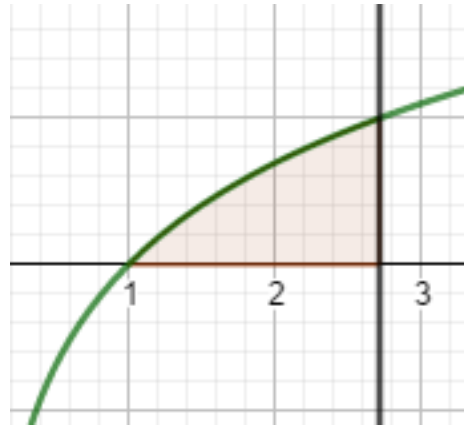
Esercizio 71. Calcolare l'area limitata dalla parabola $y = 4x - x^2$ e dell'asse delle ascisse.



Soluzione. la parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

Esercizio 72. Calcolare l'area limitata dalla curva $y = \ln x$, dall'asse Ox e dalla retta $x = e$.



Soluzione. la curva sarà compresa tra i punti di ascissa $x_1 = 1$ e $x_2 = e$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_1^e \ln x dx$$

risolviamo per parti con $u = \ln x$ e $v' = dx$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

Esercizio 73. Calcolare l'area limitata dalla curva $y = x(x-1)(x-2)$ e dall'asse Ox . La curva interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$, per cui



Soluzione. la curva interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \Big|_0^1 - \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

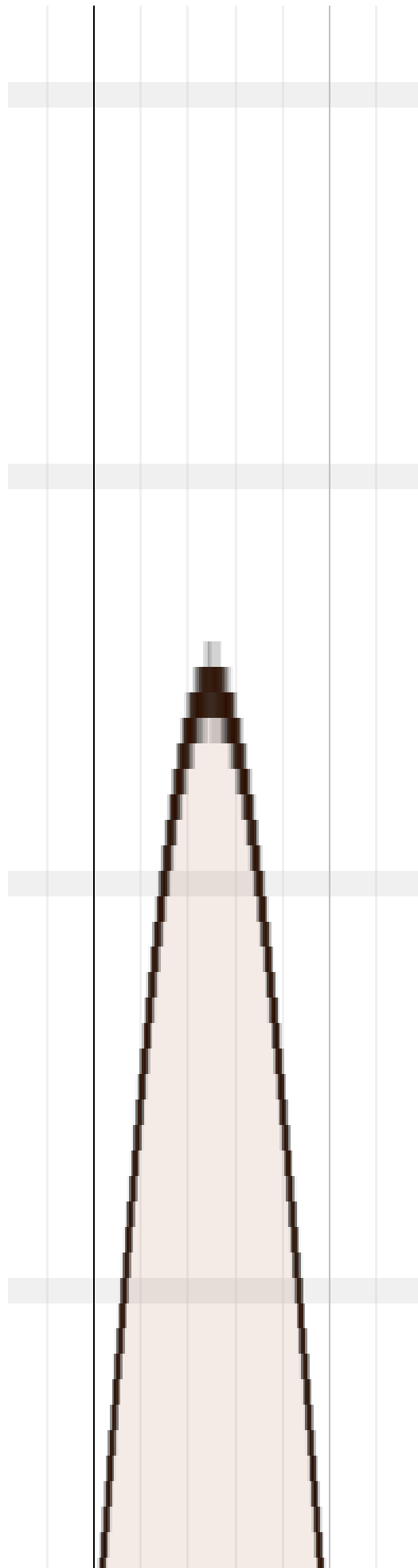
Esercizio 74. Calcolare l'area limitata dalla curva $y^3 = x$, dalla retta $y = 1$ e dalla verticale $x = 8$. La curva interseca la retta orizzontale nel punto di ascissa $x = 1$, per cui



Soluzione. Calcoliamo l'integrale della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ al quale sottraiamo l'area sotto la retta $y = 1$ (si può calcolare anche geometricamente come l'area del rettangolo)

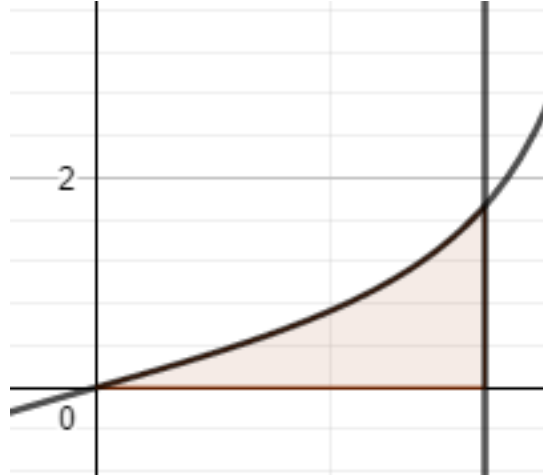
$$A = \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx - \int_1^8 dx = \left. \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - x \right|_1^8 = \frac{17}{4}$$

Esercizio 75. Calcolare l'area limitata da una semionda della sinusoide $y = \sin x$ e dall'asse OX .



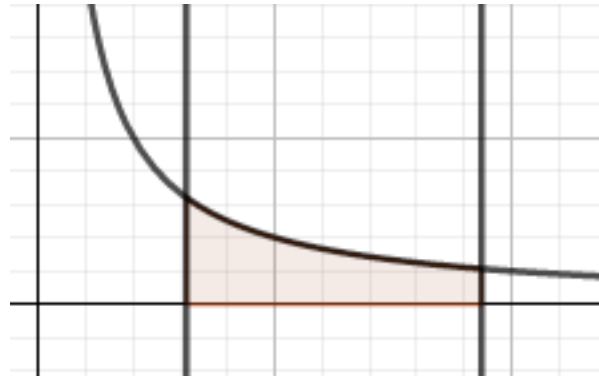
Soluzione. $A = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$

Esercizio 76. Calcolare l'area compresa tra la curva $y = \tan x$, l'asse OX e la retta $x = \frac{\pi}{3}$.



Soluzione. $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2$

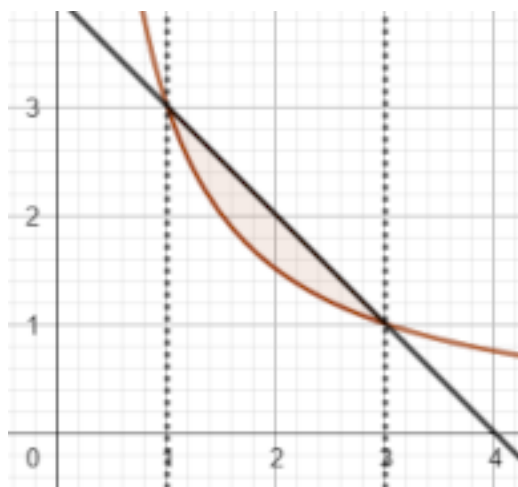
Esercizio 77. Calcolare l'area compresa tra l'iperbole $xy = m^2$, le verticali $x = a$ e $x = 3a$ ($a > 0$) e l'asse OX .



Soluzione. $A = \int_a^{3a} \frac{m^2}{x} dx = m^2 \ln(x) \Big|_a^{3a} = m^2 (\ln 3a - \ln a) = m^2 \ln 3$

Esercizio 78. Determinare l'area del dominio così definito:

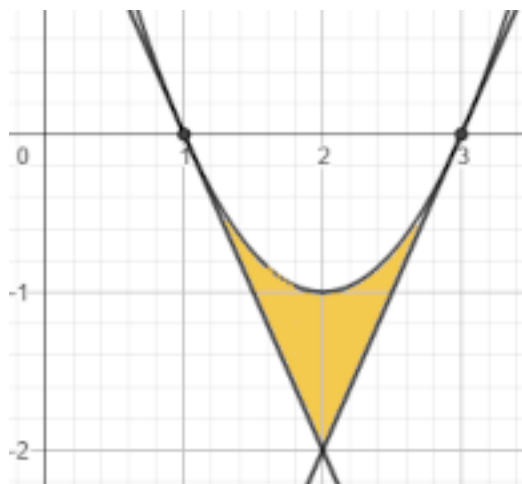
$$\begin{cases} xy \geq 3 \\ x + y - 4 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Soluzione. L'area delimitata è quella rappresentata in figura, intersezione delle tre condizioni. si tratta pertanto di calcolare l'area sottesa dalla retta nell'intervallo $1 \leq x \leq 3$ dalla quale sottrarre l'area sottesa dal ramo di iperbole equilatera sempre nello stesso intervallo. L'area sottesa dalla retta equivale a quella del trapezio rettangolo, che vale $A_{tr} = \frac{(3+1) \cdot 2}{2} = 4$

$$A = 4 - \int_1^3 \frac{3}{x} dx = 4 - 3 \ln(x) \Big|_1^3 = 4 - \ln 27$$

Esercizio 79. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, determinare l'area della regione piana limitata dalle tangenti nei punti di intersezione con l'asse x e dalla curva.



Soluzione. La parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $x = 1$ e $x = 3$. Le tangenti in questi due punti saranno simmetriche rispetto all'asse della parabola e si incontreranno quindi nel punto di ascissa $x = 2$ e avranno, quindi, coefficienti angolari opposti uguali rispettivamente a $m_1 = -2$ e $m_2 = 2$ e le loro equazioni saranno $r_1 : 2x + y - 2 = 0$ e $r_2 : 2x - y - 6 = 0$. Il loro punto di intersezione sarà $(2; -2)$. [Le tangenti si possono pure determinare ricordando il significato geometrico di derivata di una funzione]. L'area richiesta, indicata in figura, è la differenza tra l'area del triangolo isoscele e quella del segmento di parabola. Il triangolo ha area $A_{tr} = 2$. L'area richiesta sarà

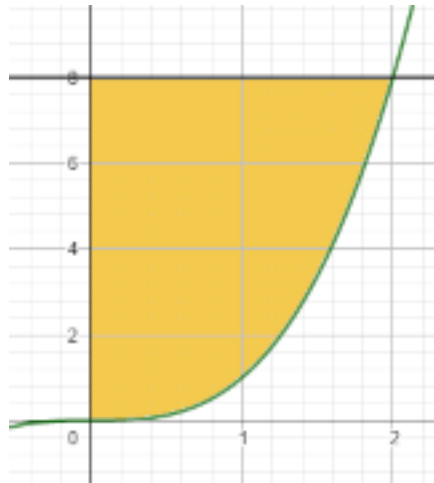
$$A = 2 - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx = 2 - \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right|_1^3 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 80. Calcolare l'area compresa tra la versiera di Agnesi $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ e il semiasse positivo delle ascisse.



Soluzione. $A = a^3 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{a^3}{a} \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} a^2$

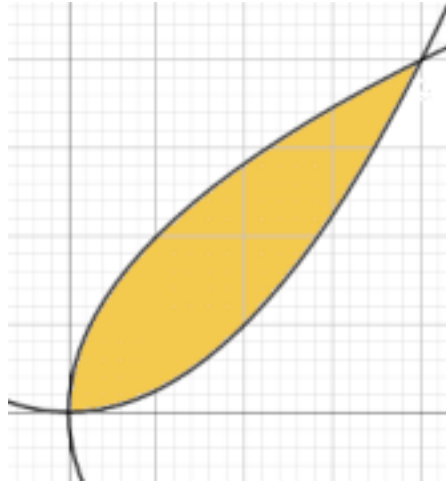
Esercizio 81. Calcolare l'area della figura limitata dalla curva $y = x^3$, dalla retta $y = 8$ e dall'asse OY .



Soluzione. L'area richiesta è la differenza tra l'area sottesa dalla retta e quella sottesa dalla curva nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$. Pertanto

$$A = 16 - \int_0^2 x^3 dx = 16 - \frac{x^4}{4} \arctan x \Big|_0^2 = 16 - 4 = 12$$

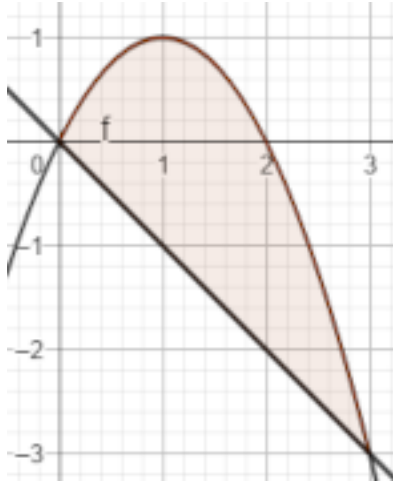
Esercizio 82. Calcolare l'area delimitata dalle parabole $y^2 = 2px$ e $x^2 = 2py$.



Soluzione. L'area richiesta è la differenza tra le parti di piano sottese dalle due curve nell'intervallo $[0; 2p]$

$$A = \int_0^{2p} \sqrt{2px} dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p} dx = \frac{2x\sqrt{2px}}{3} - \frac{x^3}{6p} \Big|_0^{2p} = \frac{8p^2}{3} - \frac{4p^2}{3} = \frac{4}{3}p^2$$

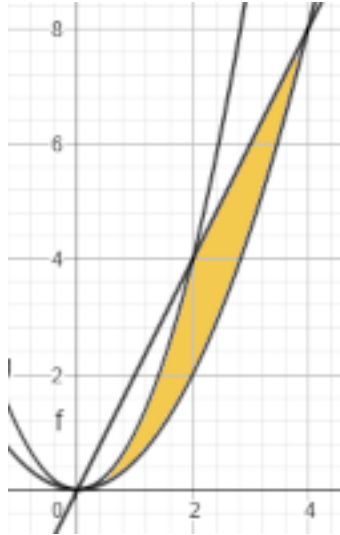
Esercizio 83. Calcolare l'area delimitata dalla parabole $y = -x^2 + 2x$ e dalla retta $y = -x$.



Soluzione. La retta e la parabola si intersecano nei punti $(0; 0)$ e $(3; 0)$. L'area richiesta è data da

$$A = \int_0^3 (-x^2 + 2x - (-x)) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2}$$

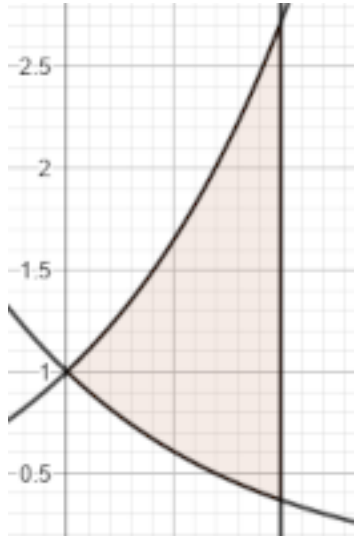
Esercizio 84. Calcolare l'area compresa tra le parabole $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{2}$ e dalla retta $y = 2x$.



Soluzione. Le due parabole e la retta si intersecano nell'origine. La retta interseca la parabola $y = x^2$ nel punto di ascissa $x = 4$ e incontra l'altra parabola nel punto di ascissa $x = 2$.

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) dx - \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = -\frac{x^3}{6} + x^2 \Big|_0^4 - x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 4$$

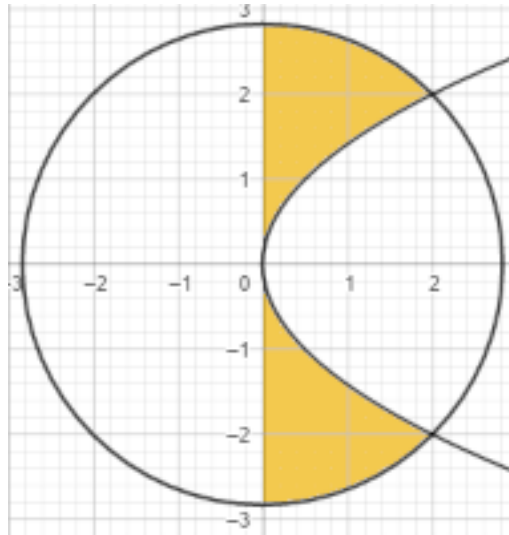
Esercizio 85. Calcola l'area limitata dalle curve $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ e dalla retta $x = 1$.



Soluzione. Le due curve esponenziali si intersecano nel punto di ascissa $x = 0$ e intersecano la retta verticale nel punto di ascissa $x = 1$.

$$A = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e^x + e^{-x} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e}$$

Esercizio 86. Calcolare l'area delle due parti del cerchio $x^2 + y^2 = 8$ delimitata dalla parabola $y^2 = 2x$



Soluzione. Le due parti di cerchio hanno, per simmetria, la stessa area e questo consente di calcolare il solo integrale della parte di piano nel quadrante positivo. La parabola interseca la circonferenza nel punto di ascissa $x = 2$. L'area sarà pertanto la differenza tra la parte sottesa dalla circonferenza e quella sottesa dalla parabola nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$.

$$\frac{A}{2} = \int_0^2 \sqrt{8-x^2} dx - \int_0^2 \sqrt{2x} dx =$$

calcoliamo il primo integrale sostituendo $x = 2\sqrt{2} \cos t$, $dx = -2\sqrt{2} \sin t dt$; se $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$; se $x = 2$, $t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{A}{2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8 \sin^2 t} \cdot (-2\sqrt{2} \sin t) dt - \int_0^2 \sqrt{2x^{\frac{1}{2}}} dx = 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \sqrt{2} \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \right) =$$

ma $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$, per cui

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) - \sqrt{2} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{2} = 4t - 2 \sin 2t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3} = \pi + 2 - \frac{8}{3} = \pi - \frac{2}{3}$$

l'area totale sarà quindi

$$A = 2\pi - \frac{4}{3}$$

Esercizio 87. Dopo aver determinato le parabole γ e γ' appartenenti al fascio $y = -x^2 + ax + c$ passanti per $A(0; 3)$ e tangenti alla retta $r: 4x + 4y - 21 = 0$, detti M e N i rispettivi punti di tangenza (M appartenente al primo quadrante), determinare la retta parallela a r che interseca gli archi \widehat{AM} e \widehat{AN} di γ e γ' , nei punti R e T in modo che sia massima l'area del triangolo MTR ; calcolare poi l'area del triangolo mistilineo AMN .

Soluzione. Le parabole passano per A e quindi $c = 3$ e l'equazione si riduce a $y = -x^2 + ax + 3$. Essendo tangenti alla retta r avremo

$$\begin{cases} y = -x^2 + ax + 3 \\ y = -x + \frac{21}{4} \end{cases} \quad x^2 - x(a-1) + \frac{9}{4} = 0 \quad a_1 = -4 \quad a_2 = 2$$

le parabole saranno $\gamma: -x^2 - 4x + 3$ e $\gamma_1: -x^2 + 2x + 3$. Ora, ricordando il significato geometrico di derivata, possiamo trovare i due punti di tangenza:

$$\begin{aligned} -1 &= -2x_N + a & a &= -4 & N &\left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{4}\right) \\ -1 &= -2x_M + a & a &= 2 & M &\left(\frac{3}{2}; \frac{15}{4}\right) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora le intersezioni T, R in funzione della distanza tra le due rette con R nel primo quadrante e T nel secondo ($3 \leq q \leq \frac{21}{4}$)

$$R \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -x + q \end{cases} \quad 0 < x < \frac{3}{2}; \quad x^2 - 3x + q - 3 = 0 \quad R \left(\frac{3 - \sqrt{21 - 4q}}{2}; \frac{2q - 3 + \sqrt{21 - 4q}}{2} \right)$$

$$T \begin{cases} y = -x^2 - 4x + 3 \\ y = -x + q \end{cases} \quad -\frac{3}{2} < x < 0 \quad x^2 - 3x + q - 3 = 0 \quad T \left(\frac{-3 + \sqrt{21 - 4q}}{2}; \frac{2q + 3 - \sqrt{21 - 4q}}{2} \right)$$

troviamo il segmento RT (poniamo per comodità di scrittura $\sqrt{21 - 4q} = t$)

$$RT = \sqrt{(3 - t^2) + (t - 3)^2} = |t - 3| \sqrt{2} = (\sqrt{21 - 4q} - 3) \sqrt{2}$$

l'altezza del triangolo è la distanza tra le due rette parallele

$$h = \frac{|\frac{3}{2} + \frac{15}{4} - q|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{21}{4} - q|}{\sqrt{2}}$$

l'area sarà quindi

$$A = \left[(\sqrt{21 - 4q} - 3) \sqrt{2} \right] \cdot \frac{|\frac{21}{4} - q|}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{21 - 4q} - 3) (\frac{21}{4} - q)}{2}$$

troviamo la condizione di massimo

$$A' = \frac{\frac{-2}{\sqrt{21-4q}} \left(\frac{21-4q}{4} \right) - (\sqrt{21-4q} - 3)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \sqrt{21-4q} = 0$$

$$2 = \sqrt{21-4q} \quad q = \frac{17}{4}$$

la retta parallela sarà $4x + 4y - 17 = 0$.



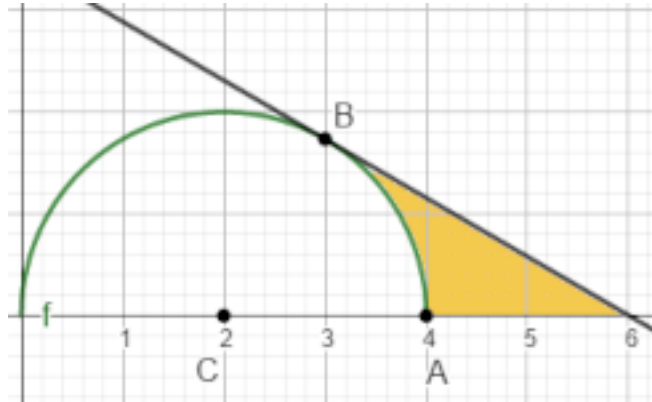
Calcoliamo l'area del triangolo mistilineo colorato in figura.

$$A = \left(\frac{27}{4} + \frac{15}{4} \right) \times \frac{3}{2} - \int_{-\frac{3}{2}}^0 (-x^2 - 4x + 3) dx - \int_0^{\frac{3}{2}} (-x^2 + 2x + 3) dx =$$

$$= \frac{63}{4} - \left| -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right|_{-\frac{3}{2}}^0 - \left| -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{63}{4} - \frac{63}{8} - \frac{45}{8} = \frac{9}{4}$$

Esercizio 88. Dati i punti $A(4;0)$ e $C(2;0)$, determinare l'equazione della semicirconferenza giacente nel semipiano $y \geq 0$, passante per A e con centro in C . Calcolare l'area della parte di piano limitata dall'asse x , dalla semicirconferenza e dalla retta a essa tangente nel suo punto di ascisse $x = 3$.

Soluzione. La semicirconferenza ha centro in C e passa per A e, per simmetria, per $O(0,0)$ e quindi ha raggio $r = 2$. L'equazione della circonferenza è: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e la semicirconferenza richiesta avrà equazione $y = \sqrt{4x - x^2}$. Il punto di tangenza avrà coordinate $B(3; \sqrt{3})$



Calcoliamo l'area colorata in figura

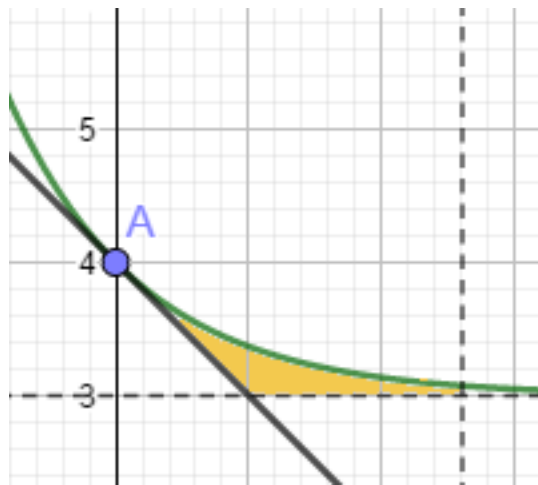
$$A = \frac{3 \times \sqrt{3}}{2} (A_{\text{triangolo}}) - \int_3^4 \sqrt{4x - x^2} dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_3^4 \sqrt{4x - x^2} dx =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_3^4 \sqrt{4x - x^2 - 4 + 4} dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_3^4 \sqrt{4 - (x-2)^2} dx =$$

se poniamo $x - 2 = t$, con $dx = dt$ e $x = 3$, allora $t = 1$, $x = 4$, $t = 2$, avremo

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \left| \frac{t}{2} \sqrt{4 - t^2} + 2 \arcsin \frac{t}{2} \right|_1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

Esercizio 89. Tracciare la curva γ di equazione $y = 3 + e^{-x}$ e, scritta l'equazione della tangente t a γ nel suo punto di intersezione con l'asse y , determinare l'area $A(k)$ della regione piana limitata dalla retta t , dall'asintoto orizzontale della curva, dalla retta $x = k$ ($k > 1$) e dalla curva. Calcolare inoltre $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A(k)$.



Soluzione. Il grafico della curva è facilmente rappresentabile essendo la curva esponenziale e^{-x} traslata mediante il vettore $\vec{v}(0;3)$ e l'asintoto sarà allora $y = 3$. La curva interseca l'asse y nel punto $A(0;4)$. Determiniamo la tangente alla curva in questo punto, calcolando la derivata prima per ottenere il coefficiente angolare della retta,

$$y' = -e^{-x} \quad y'(0) = -1$$

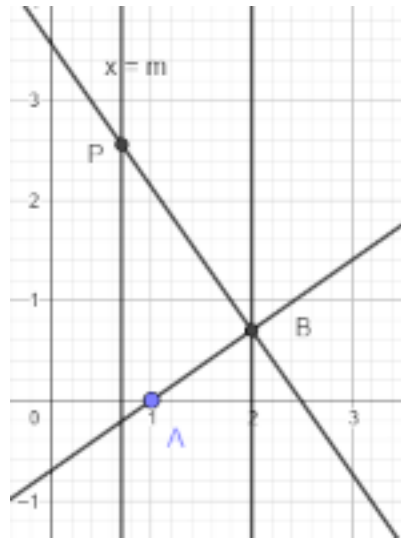
la retta avrà equazione $x + y - 4 = 0$. Calcoliamo ora l'area della regione di piano colorata in figura

$$A(k) = \int_0^k (3 + e^{-x}) dx - 3k - \frac{1}{2} = |3x - e^{-x}|_0^k - 3k - \frac{1}{2} = 3k - e^{-k} + 1 - 3k - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-k}$$

Calcoliamo il limite dell'area in funzione di k

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - e^{-k} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 90. Per un punto $A(1;0)$ si conduca la retta r di coefficiente angolare m ; detto B il punto di intersezione con la retta $x = 2$, si conduca da esso la perpendicolare a r ; sia P il suo punto di intersezione con la retta $x = m$. a) Determinare l'equazione del luogo γ descritto da P al variare di m . Tracciare la curva γ . b) Determinare infine l'area della regione piana limitata dalla tangente alla curva nel suo punto di ascissa 1, dalla retta $x = 2$ e dalla curva γ .



Soluzione. La retta passante per A ha equazione $y = m(x - 1)$; l'intersezione con la retta $x = 2$ individua il punto $B(2; m)$. La retta perpendicolare per B alla retta r avrà $m_{per} = -\frac{1}{m}$ e $q_{per} = \frac{m^2 + 2}{m}$; l'equazione di tale retta sarà $x + my - m^2 - 2 = 0$. Il punto P avrà pertanto coordinate $P\left(m; \frac{m^2 - m + 2}{m}\right)$. Il luogo, considerando m come l'incognita, avrà quindi equazione

$$y = \frac{x^2 - x + 2}{x}$$

Studiamo questa funzione il cui dominio è \mathbb{R}_0 . Il numeratore è sempre positivo e quindi non vi saranno intersezioni con gli assi. La funzione sarà positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Studiamo gli asintoti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x} \sim x = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 - x + 2}{x} \sim \frac{2}{0^\pm} = \pm\infty$$

la funzione non ha quindi asintoti orizzontali ma presenta un asintoto verticale di equazione $x = 0$ (asse y). Verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2 - x^2}{x} = -1$$

avremo quindi un asintoto obliquo di equazione $y = x - 1$.

Studiamo la sua derivata

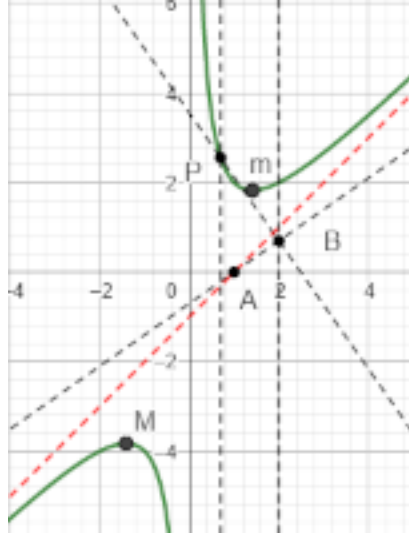
$$y' = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

il suo dominio sarà ancora \mathbb{R}_0 . Il denominatore è sempre positivo nel dominio, mentre il numeratore lo è per $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$ e la funzione sarà crescente in questi due intervalli e decrescente in $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Avrà

quindi un massimo relativo in $M\left(-\sqrt{2}; \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$ e un minimo relativo in $m\left(\sqrt{2}; \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)$. Calcoliamo la derivata seconda

$$y'' = \frac{2x^3 - 2x^3 + 4x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$$

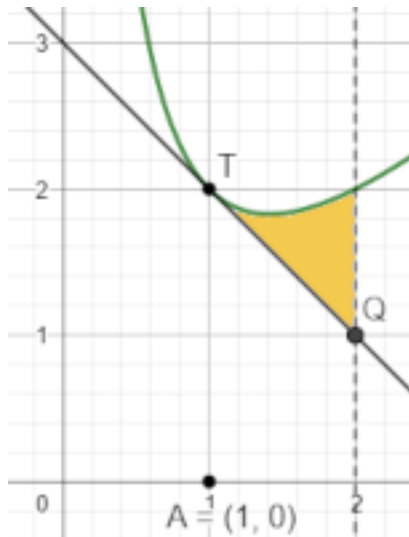
la funzione avrà concavità verso l'alto per $x > 0$ e verso il basso per $x < 0$ e non presenta flessi. Il grafico è mostrato sotto.



b) troviamo ora la tangente richiesta. Il punto di ascissa 1 appartenente alla curva γ avrà coordinate $T(1; 2)$. Troviamo il coefficiente angolare di tale retta, conoscendo già la derivata della funzione

$$y'(1) = -1$$

e la tangente avrà equazione $x + y - 3 = 0$. Tale tangente interseca la retta $x = 2$ in $Q(2; 1)$.



L'area sarà uguale alla differenza tra la parte di piano sottesa dalla funzione nell'intervallo $[1; 2]$ e il trapezio rettangolo sotteso dalla tangente nello stesso intervallo. L'area del trapezio vale $\frac{3}{2}$, per cui

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \frac{x^2 - x + 2}{x} dx - \frac{3}{2} = \int_1^2 x dx - \int_1^2 dx + 2 \int_1^2 \frac{dx}{x} - \frac{3}{2} = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln x \right]_1^2 - \frac{3}{2} = \ln 4 - 1 \end{aligned}$$

Esercizio 91. Data la funzione

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \right)$$

a) determinare il dominio, eventuali punti singolari, di non derivabilità e le equazioni delle tangenti in questi punti; b) tracciare il grafico C della funzione; c) determinare l'area della regione piana limitata dalla curva C , dall'asse x e dalle rette $x = -\frac{3}{2}$ e $x = -1$.

Soluzione. La presenza del valore assoluto richiede di studiare la funzione sia caso in cui il suo argomento è positivo sia quando è negativo.

1. caso: $x \leq -1 \vee x > 1$, la funzione è

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \right)$$

il dominio è dato da

$$\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \frac{x^2+x-2}{x-1} > 0 \quad x < -2 \vee x > 1$$

per cui $D : -2 < x < -1 \vee x > 1$.

2. caso $-1 \leq x < 1$

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{-x^2 + 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\frac{-x^2 + x}{x - 1} \right)$$

il dominio è dato da

$$\begin{cases} \frac{-x^2+x}{x-1} > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \frac{-x^2+x}{x-1} > 0 \quad 0 < x < 1$$

per cui $D : -1 < x < 0$.

Il dominio della funzione sarà quindi $D : (-2; 0) \cup (1; +\infty)$, dove i punti singolari sono in corrispondenza di $x = -2, 1$. All'interno del dominio la funzione è sempre continua.

Calcoliamo la derivata della funzione

1. caso

$$f'(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{(2x+1)\cancel{(x-1)} - (x+2)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{x+2}$$

2. caso:

$$f'(x) = \frac{\cancel{x-1}}{-x\cancel{(x-1)}} \cdot \frac{(1-2x)\cancel{(x-1)} + x\cancel{(x-1)}}{(x-1)^2} = \frac{1}{x}$$

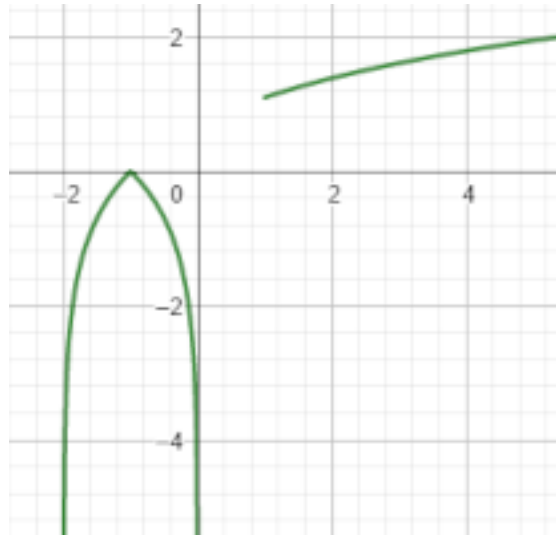
Il punto $x = -1$ appartiene ai due intervalli; verifichiamo se la derivata dx e sx della funzione in questo punto coincidono oppure no, cioè se la funzione oltre a essere continua in $x = -1$ è anche derivabile.

$$f'(-1^-) = 1 \quad f'(-1^+) = -1$$

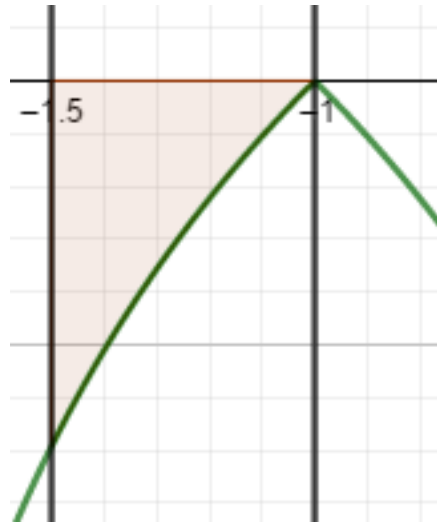
la funzione avrà quindi un punto angoloso in corrispondenza di $x = -1$. Tale valore caratterizza un punto del grafico di coordinate $P(-1; 0)$ e le tangenti in questo punto saranno

$$t_1 : y = x + 1 \quad t_2 : y = -x - 1$$

b) Completando lo studio si ottiene il seguente grafico



c) l'area da determinare è quella colorata nella figura sotto



$$A = - \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \ln \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \right) dx = - \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \ln(x + 2) d(x + 2) =$$

integriamo con il metodo per parti ponendo $d(x + 2) = v'$ e $\ln(x + 2) = u$, per cui

$$- [(x + 2) \ln(x + 2)]_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} d(x + 2) = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \ln 2)$$

LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA

La lunghezza di un arco di curva di equazione $y = f(x)$ compresa tra due punti di ascissa $x = a$ e $x = b$ è uguale a

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Esercizio 92. Calcolare la lunghezza dell'arco della parabola semicubica $y^2 = x^3$ compreso tra l'origine delle coordinate e il punto dalle coordinate (4; 8).

Soluzione. la funzione può essere scritta come, essendo l'intervallo nel primo quadrante, $y = x^{\frac{3}{2}}$ e quindi $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$l = \int_0^4 \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{4 + 9x} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (4 + 9x)^{\frac{1}{2}} dx$$

se poniamo $4 + 9x = t$, avremo $dx = \frac{1}{9}dt$; se $x = 0$, $t = 4$ e se $x = 4$, $t = 40$

$$l = \frac{1}{18} \int_0^4 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{40} = \frac{1}{27} \cdot (40\sqrt{40} - 8) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

Esercizio 93. Calcolare la lunghezza dell'arco della parabola $y = 2\sqrt{x}$ compreso tra i punti di ascisse $x = 0$ e $x = 1$.

Soluzione. la parabola ha come asse di simmetria l'asse x . calcoliamo la derivata $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} dx = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)} dx =$$

poniamo $x + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$, per cui $x = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \tan^2 t$ e $dx = \frac{2 \tan t}{\cos^2 t} dt$; se $x = 0$, $t = 0$; se $x = 1$, $t = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\tan^2 t}\right)} \cdot \frac{2 \tan t}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin t} \cdot \frac{2 \sin t}{\cos^3 t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^3 t} dt = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} dt = \end{aligned}$$

calcoliamo il primo integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt$ per parti, riscrivendolo come $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt$, ponendo $u = \frac{\sin t}{\cos^3 t}$ e $v' = \sin t dt$; avremo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt = \left(-\cos t \frac{\sin t}{\cos^3 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \sin^2 t}{\cos^3 t} dt$$

cioè, sommando i termini "simili"

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \sin^2 t}{\cos^3 t} dt = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

pertanto

$$l = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} + [\ln(\tan t + \sec t + 1)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$$

Se la curva è data da una equazione parametrica, la lunghezza dell'arco di curva è data da

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'^2 + y'^2)} dt$$

Esercizio 94. Calcolare la lunghezza dell'arco dell'evolvente di cerchio

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

per $0 < t < T$.

Soluzione. Calcoliamo prima le derivate di x e y rispetto a t

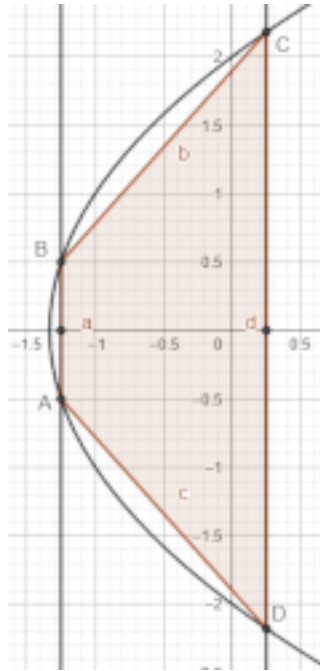
$$\begin{aligned}x' &= a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t \\y' &= a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t\end{aligned}$$

avremo

$$l = \int_0^T \sqrt{at^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \int_0^T \sqrt{at^2} dt = \frac{aT^2}{2}$$

Esercizio 95. Data la parabola di equazione $y^2 = 3x + 4$ e le due corde AB e CD perpendicolari all'asse x nei punti $(-\frac{5}{4}; 0)$ e $(\frac{1}{4}; 0)$, dimostrare che tra l'area del trapezio convesso $ABCD$ e l'area A del segmento parabolico limitato dalle due corde sussiste la relazione

$$\frac{38}{27}A(ABCD) = A + \frac{10}{9}$$



Soluzione. Troviamo le intersezioni della parabola con le due rette perpendicolari: retta $x = -\frac{5}{4}$, $A(-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2})$, $B(-\frac{5}{4}; \frac{1}{2})$; pertanto il segmento $\overline{AB} = 1$; retta $x = \frac{1}{4}$, $C(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{19}}{2})$, $D(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{19}}{2})$ e il segmento $CD = \sqrt{19}$. L'altezza del trapezio è la distanza tra le due rette parallele, cioè $h = |\frac{1}{4} - (-\frac{5}{4})| = \frac{3}{2}$. L'area del trapezio è

$$A(ABCD) = \frac{(1 + \sqrt{19}) \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}(1 + \sqrt{19})$$

Calcoliamo l'area del segmento di parabola mediante il calcolo dell'integrale (si ricorda anche la possibilità con fornita dalla formula di Archimede)

$$\begin{aligned}A &= 2 \int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}} \sqrt{3x+4} dx = \frac{2}{3} \int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}} (3x+4)^{\frac{1}{2}} d(3x+4) = \frac{2}{3} \left| (3x+4)^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} \right|_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{19}{8} \sqrt{19} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{18} (19\sqrt{19} - 1)\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\frac{38}{27} \left(\frac{3}{4} (1 + \sqrt{19}) \right) &= \frac{1}{18} (19\sqrt{19} - 1) + \frac{10}{9} \\ \frac{19}{18} + \frac{19}{18} \sqrt{19} &= \frac{19}{18} \sqrt{19} - \frac{1}{18} + \frac{10}{9}\end{aligned}$$

da cui

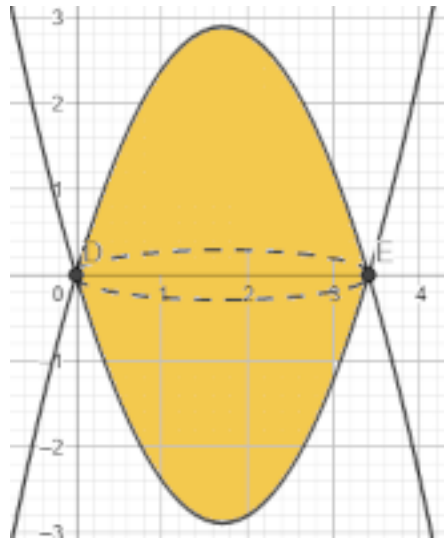
$$\frac{19}{18} = \frac{19}{18}$$

CALCOLO DEI VOLUMI

Volume dei solidi di rotazione. Il volume del corpo generato dalla rotazione di un trapezoide mistilineo, limitato dalla curva $y = f(x)$, dall'asse delle x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, intorno all'asse x o intorno all'asse y si esprime con le formule

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

Esercizio 96. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della curva limitata dall'asse x e dalla parabola $y = ax - x^2$.



Soluzione. Il volume è dato da

$$V_x = \pi \int_0^a (ax - x^2)^2 dx = \pi \int_0^a (a^2x^2 - 2ax^3 + x^4) dx = \pi \left. a^2 \frac{x^3}{3} - a \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right|_0^a = \frac{a^5}{30} \pi$$

Esercizio 97. Calcolare il volume dell'ellissoide generato dalla rotazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ attorno all'asse x .

Soluzione. Il volume si ottiene moltiplicando per due il volume del solido di rotazione che si ha ruotando di 360° intorno all'asse x il sottografo di $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, per cui

$$V = 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 \left. a^2 \frac{x^3}{3} - a \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right|_0^a = \frac{4}{3} ab^2 \pi$$

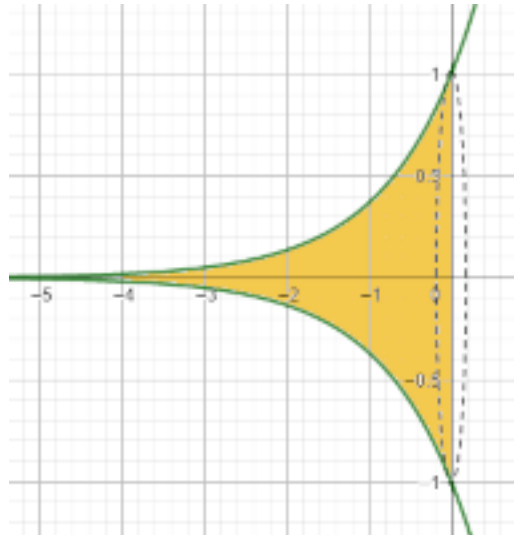
Esercizio 98. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della curva $y = \sin^2 x$ compresa tra i punti $x = 0$ e $x = \pi$.



Soluzione. risolviamo l'integrale utilizzando le formule goniometriche e considerando $\sin^4 x = \sin^2 x \cdot \sin^2 x$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x (1 - \cos^2 x) dx = \pi \left(\int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx \right) = \\
 &= \pi \left(\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos^2 2x dx \right) = \pi \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int_0^{\pi} dx - \frac{1}{8} \int_0^{\pi} \cos 4x dx \right) = \\
 &\quad \pi \left| \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x \right|_0^{\pi} = \frac{3}{8} \pi^2
 \end{aligned}$$

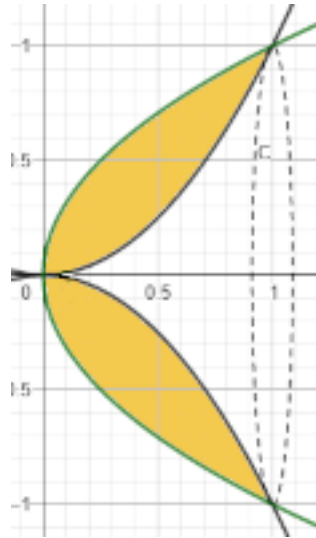
Esercizio 99. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della figura limitata dalla curva $y = e^x$ e dalle rette $x = 0$ e $y = 0$.



Soluzione. Calcoliamo l'integrale

$$V = \pi \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx = \left| \frac{\pi}{2} e^{2x} \right|_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{2}$$

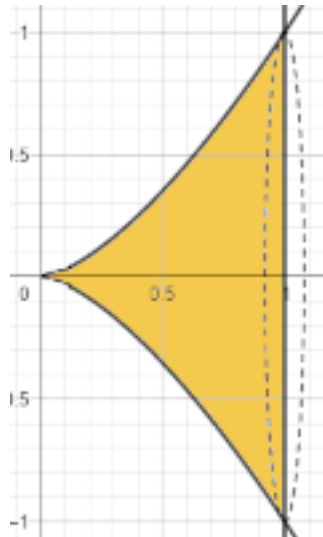
Esercizio 100. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della figura compresa tra le curve delle funzioni $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.



Soluzione. L'area delimitata da due figure è calcolata come $A = \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$, per cui

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left| \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi$$

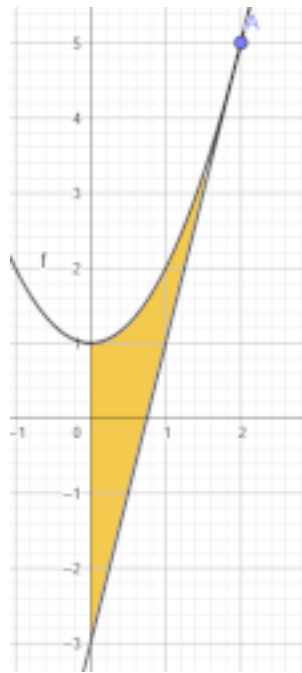
Esercizio 101. Calcolare il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x della figura limitata dalla curva $y^2 = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$.



Soluzione. Calcoliamo l'integrale

$$V = \pi \int_0^1 x^3 dx = \pi \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4} \pi$$

Esercizio 102. Determinare l'area della regione T di piano delimitata dall'asse y , dalla parabola $y = x^2 + 1$ e dalla tangente a detta parabola nel punto $x_0 = 2$. Calcolare, inoltre, il volume V del solido ottenuto dalla rotazione completa di T attorno all'asse y e x e dalla retta $x = 1$.



Soluzione. Il punto di tangenza ha coordinate $A(2; 5)$. Determiniamo la tangente: $y' = 2x$, e $y'(2) = 4$; essa avrà coefficiente angolare $m = 4$ e applicando la relazione che descrive un fascio proprio di rette, avremo

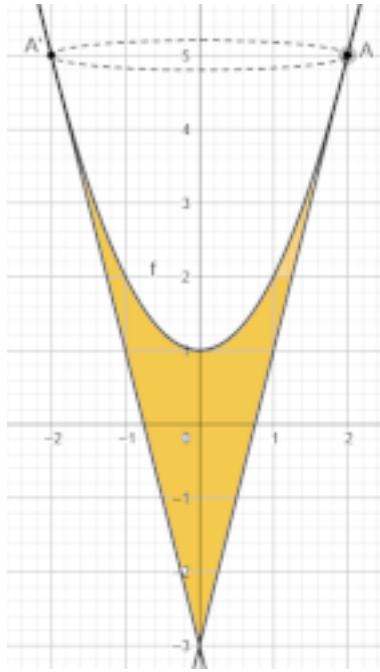
$$y - 5 = 4(x - 2) \quad y = 4x - 3$$

tale retta interseca l'asse x nel punto $(\frac{3}{4}; 0)$. Troviamo prima l'area della parte colorata in figura.

$$A = \int_0^2 (x^2 + 1) dx - \left(\frac{5}{8} \times 5\right) + \left(\frac{3}{8} \times 3\right) = \left| \frac{x^3}{3} + x \right|_0^2 - 2 = \frac{8}{3}$$

in modo analogo

$$A = \int_0^2 (x^2 + 1) dx - \int_{\frac{3}{4}}^2 (4x - 3) dx - \int_0^{\frac{3}{4}} (4x - 3) dx = \frac{8}{3}$$



Soluzione. Calcoliamo ora il volume ottenuto ruotando la superficie attorno all'asse y .

$$V = \pi \left(\int_{-3}^5 \left(\frac{y}{4} + \frac{3}{4} \right) dy - \int_1^5 (y-1)^{\frac{1}{2}} dy \right) = \pi \left(\left| \frac{y^2}{8} + \frac{3}{4}y \right|_{-3}^5 - \left| (y-1)^{\frac{3}{2}} \right|_1^5 \right) = \frac{8}{3}\pi$$

Esercizio 103. Data la curva di equazione

$$y = \frac{2x-1}{x-2}$$

determinare il volume generato dalla regione piana limitata dalla curva, dalle rette $x = 4$ e $x = 6$ e dall'asintoto orizzontale della funzione in una rotazione completa attorno a tale asintoto.

Soluzione. La funzione data è una funzione omografica, cioè un'iperbole traslata. In questo caso è possibile determinare il volume richiesto dopo aver opportunamente traslato la curva in modo che il suo asintoto orizzontale coincida con l'asse x e quello verticale con l'asse y . Se una funzione omografica generica è espressa da $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ allora il vettore di traslazione sarà dato da

$$\vec{v} \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right) \quad \vec{v}(2; 2) \text{ le}$$

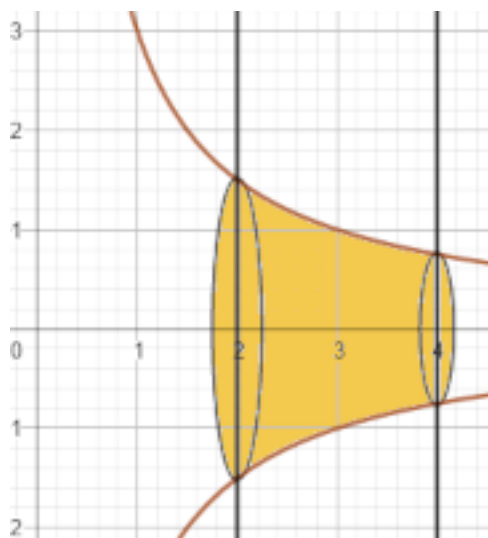
equazioni di traslazione sono

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

avremo

$$y' = \frac{2x' + 4 - 1}{x' + 2 - 2} - 2 = \frac{3}{x'}$$

Anche le due rette dovranno essere traslate verso sinistra di due unità.



Il volume sarà

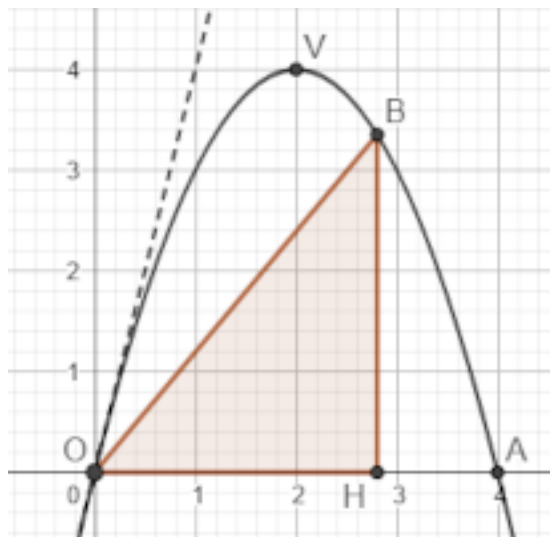
$$V = \pi \int_2^4 \frac{9}{x^2} = 9\pi \left| -\frac{1}{x} \right|_2^4 = \frac{9}{4}\pi$$

Esercizio 104. Dopo aver determinato nel piano xOy l'equazione della parabola γ , tangente in O alla retta $y = 4x$ e passante per $A(4;0)$, detto V il vertice, rispondere ai seguenti quesiti:

- (1) sull'arco di γ contenuto nel semipiano $y \geq 0$ determinare, per via elementare, il punto B per il quale sia massima l'area del triangolo OBH , essendo H la proiezione di B sull'asse x
- (2) determinare il luogo φ del punto medio del segmento OB al variare di B sull'arco \widehat{OVA} di γ
- (3) calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse x la regione finita di piano delimitata da γ , da φ e dall'asse x .

Soluzione. Troviamo l'equazione della parabola. La retta data ha $m = 4$ e, ricordando il significato geometrico di derivata, se $y = ax^2 + bx$ è l'equazione generale di questa parabola passante per l'origine ($c = 0$), avremo $y' = 2ax + b$ e $y'(0) = b = 4$. Inoltre la parabola passa per il punto A e quindi $0 = 16a + 16$, da cui $a = -1$ e l'equazione sarà

$$\gamma : y = -x^2 + 4x$$



1) le coordinate del punto $B(x; -x^2 + 4x)$ con $0 < x < 4$ e l'area del triangolo rettangolo è

$$A = \frac{-x^3 + 4x^2}{2}$$

troviamo la condizione di massimo

$$A' = \frac{-3x^2 + 8x}{2} = 0$$

da cui

$$x = \frac{8}{3} \quad A = \frac{128}{27}$$

2) il punto medio del segmento OB con B variabile, ha coordinate $M\left(\frac{t}{2}; \frac{-t^2+4t}{2}\right)$ per cui avremo

$$\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = \frac{-t^2+4t}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} t = 2x \\ y = \frac{-4x^2+8x}{2} = -2x^2 + 4x \end{cases}$$



3) Calcoliamo il volume cercato

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (-x^2 + 4x)^2 dx - \pi \int_0^2 (-2x^2 + 4x)^2 dx = \\ V &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16}{3}x^3 \right]_0^4 - \pi \left[\frac{4x^5}{5} - 4x^4 + \frac{16}{3}x^3 \right]_0^2 = \\ V &= \pi \left(\frac{1024}{5} - 512 + \frac{1024}{3} - \frac{128}{5} + 64 - \frac{128}{3} \right) = \frac{448}{15} \pi \end{aligned}$$

AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

L'area della superficie generata dalla rotazione intorno all'asse x dell'arco di curva $y = f(x)$, compreso tra i punti di ascissa $x = a$ e $x = b$, si esprime con la formula

$$A_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Esercizio 105. Determinare l'area della superficie generata dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento di retto $y = \sqrt{3}x + 2$ per $x \in [1; 4]$.

Soluzione. L'area è ottenibile calcolando l'integrale

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^4 2(\sqrt{3}x + 2) dx = 4\pi \left| \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2x \right|_1^4 = 4\pi \left(8\sqrt{3} + 8 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \right) = 1 \\ &= 4\pi \left(\frac{15}{2}\sqrt{3} + 6 \right) = 6\pi (5\sqrt{3} + 4) \end{aligned}$$

Esercizio 106. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x \cdot \ln(\sin^2 x + 2)}{(\sin^2 x + 1)^3} dx$$

Soluzione. Osservando che $2 \sin x \cos x dx = d(\sin^2 x)$, introduciamo la seguente sostituzione $t = \sin^2 x$ e $dt = 2 \sin x \cos x dx$; l'integrale diviene

$$\int_0^1 \frac{\ln(t+2)}{(t+1)^3} dt$$

Calcoliamo l'integrale indefinito per parti, ponendo $f = \ln(t+2)$ sarà $f' = \frac{1}{t+2}$ e $g' = (t+1)^{-3} dt$, per cui $g = -\frac{1}{2(t+1)^2}$

$$I = \int \frac{\ln(t+2)}{(t+1)^3} dt$$

quindi

$$I = -\frac{\ln(t+2)}{2(t+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t+1)^2(t+2)} dt =$$

calcoliamo l'integrale $\int \frac{1}{(t+1)^2(t+2)} dt$ riscrivendo la frazione come

$$\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t+2} = \frac{1}{(t+1)^2(t+2)}$$

svolgendo abbiamo

$$\begin{aligned} A(t+1)(t+2) + B(t+2) + C(t+1)^2 &= 1 \\ At^2 + 3At + 2A + Bt + 2B + Ct^2 + 2Ct + C &= 1 \\ t^2(A+C) + t(3A+B+2C) + (2A+2B+C) &= 1 \end{aligned}$$

confrontando i termini ai due membri osserviamo che

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 3A+B+2C=0 \\ 2A+2B+C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} C=-A \\ 3A+B-2A=0 \\ 2A+2B-A=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=-A \\ A=-B \\ A+2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

l'integrale diverrà

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(t+1)^2(t+2)} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+2}$$

avremo quindi

$$I = -\frac{\ln(t+2)}{2(t+1)^2} - \frac{1}{2} \ln|t+1| - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2} \ln|t+2| + C$$

Il nostro integrale definito avrà quindi come soluzione

$$\int_0^1 \frac{\ln(t+2)}{(t+1)^3} dt = -\frac{\ln 3}{8} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\ln 3}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{3 \ln 3}{8}$$

Esercizio 107. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_2^{2+\ln 2} \frac{\ln(4 + e^{2x-4})}{e^{x-2}} dx$$

Soluzione. operiamo la sostituzione $t = e^{x-2}$ e $x = \ln t + 2$, $dx = \frac{dt}{t}$. L'integrale diviene

$$\int_1^2 \frac{\ln(4 + t^2)}{t^2} dt =$$

integriamo per parti con $f' = \frac{dt}{t^2}$ e $g = \ln(4 + t^2)$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{1}{t} \ln(4 + t^2) \right]_1^2 + 2 \int_1^2 \frac{dt}{4 + t^2} = \left[-\frac{1}{t} \ln(4 + t^2) + \frac{2}{2} \arctan \frac{x}{2} \right]_1^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \ln 8 + \frac{\pi}{4} + \ln 5 - \arctan \frac{1}{2} = \ln \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 108. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $t = \ln x$, per cui $x = e^t$ e $dx = e^t dt$; inoltre, se $x = 1$, allora $t = \ln 1 = 0$ e se $x = e^2$, allora $t = \ln e^2 = 2$. Avremo quindi

$$\int_0^2 \frac{t \cdot e^t}{e^t \sqrt{t+1}} dt = \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt = \int_0^2 \frac{2t}{2\sqrt{t+1}} dt$$

ricordando che il differenziale di $d(\sqrt{t+1}) = \frac{dt}{2\sqrt{t+1}}$, integriamo per parti

$$2t\sqrt{t+1} \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 \sqrt{t+1} dt = \left[2t\sqrt{t+1} - \frac{4}{3} (t+1)\sqrt{t+1} \right]_0^2 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{t+1} (t-2) \right]_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$