

Esercizi sulle Equazioni Differenziali

Esercizi presentati e svolti dal prof. Gianluigi Trivia

Nozioni fondamentali

L'equazione della forma $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ dove $y = y(x)$ è una funzione incognita, si chiama *equazione differenziale di ordine ennesimo*. Una funzione $\varphi(x)$ che trasforma in identità l'equazione differenziale, si chiama *soluzione* di questa equazione ed il suo grafico *curva integrale*. Se la soluzione è data in forma implicita $\Phi(x, y) = 0$, si dice al solito che è un *integrale*.

L'integrale $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ dell'equazione differenziale contenente n costanti arbitrarie indipendenti C_1, \dots, C_n ed equivalente all'equazione, si chiama *integrale generale*. Assegnando alle costanti valori definiti, si ottiene un *integrale particolare*.

Esercizi

Esercizio 1. Precisare se la funzione $y = 5x^2$ è soluzione dell'equazione differenziale $xy' = 2y$

Soluzione. Calcolo la derivata di y : $y' = 10x$ e sostituisco $10x^2 = 10x^2$. La risposta è positiva.

Esercizio 2. Precisare se la funzione $y = \frac{1}{x}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y' = x^2 + y^2$

Soluzione. Calcolo la derivata di y : $y' = -\frac{1}{x^2}$ e sostituisco $-\frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$. La risposta è negativa.

Esercizio 3. Precisare se la funzione $y = \frac{C^2 - x^2}{2x}$ è soluzione dell'equazione differenziale $(x + y) dx + xdy = 0$

Soluzione. Calcolo la derivata di y : $y' = -\frac{x^2 + C^2}{2x^2}$ e sostituisco riscrivendo l'equazione come $xy' + x + y = 0$ (ricordando che $y' = \frac{dy}{dx}$)

$$-x \left(\frac{x^2 + C^2}{2x^2} \right) + x + \frac{C^2 - x^2}{2x} = 0 \quad 0 = 0$$

risposta positiva.

Esercizio 4. Precisare se la funzione $y = 3 \sin x - 4 \cos x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y = 0$

Soluzione. Calcoliamo le derivate prima e seconda di y : $y' = 3 \cos x + 4 \sin x$ e $y'' = -3 \sin x + 4 \cos x$; sostituiamo nell'equazione $-3 \sin x + 4 \cos x + 3 \sin x - 4 \cos x = 0$, da cui $0 = 0$, risposta positiva.

Esercizio 5. Precisare se la funzione $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ è soluzione dell'equazione differenziale $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

Soluzione. Come prima, $\frac{dx}{dt} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$; $\frac{d^2x}{dt^2} = -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t$; sostituiamo

$$-C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t + \omega^2 (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = 0$$

risposta positiva.

Esercizio 6. Determinare il valore di k affinché la funzione $y(x) = e^{-2x} + k$, soluzione generale, sia soluzione particolare dell'equazione differenziale $y' + 2y = 1$.

Soluzione. ricaviamo la derivata della soluzione generale $y' = -2e^{-2x}$ e sostituiamo nell'equazione differenziale data

$$-2e^{-2x} + 2e^{-2x} + 2k = 1$$

da cui $k = \frac{1}{2}$.

Esercizio 7. Precisare se la funzione $y = xe^x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 0$.

Soluzione. $y' = e^x + xe^x$; $y'' = 2e^x + xe^x$; sostituendo si ha

$$2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x = 0$$

risposta positiva.

Esercizio 8. Determinare a, b, c in modo che $y = ax^2 + bx + c$ sia una soluzione dell'equazione differenziale $y'' - y' - 2y = 2x^2 + 4x + 1$

Soluzione. Calcoliamo le derivate della soluzione

$$y' = 2ax + b \quad y'' = 2a$$

e sostituendo si ha

$$2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c = 2x^2 + 4x + 1$$

confrontando i coefficienti della variabile con lo stesso grado

$$\begin{cases} -2a = 2 \\ -2a - 2b = 4 \\ 2a - b - 2c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Esercizio 9. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = x(x^2 + 1)^2$

Soluzione. il polinomio al secondo membro è la primitiva della funzione cercata, per cui

$$\int x(x^2 + 1)^2 dx$$

procediamo per sostituzione $x^2 + 1 = u$, $du = 2xdx$, cioè $dx = \frac{du}{2x}$, per cui

$$\frac{1}{2} \int 2x(x^2 + 1)^2 dx = \frac{1}{2} \int u^2 du = \frac{1}{6} u^3 + C = \frac{1}{6} (x^2 + 1)^3 + C$$

Esercizio 10. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' = x + 2$

Soluzione. il polinomio al secondo membro è la primitiva della primitiva della funzione cercata, per cui

$$\int (x + 2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

poi

$$\int \left(\frac{x^2}{2} + 2x + C \right) dx = \frac{x^3}{6} + x^2 + C_1 x + C_2$$

Equazioni differenziali del primo ordine

Equazioni lineari

Esercizio 11. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = 4y$

Soluzione. Un'equazione lineare è del tipo $y' = a(x)y + b(x)$; il suo integrale generale è

$$y = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) dx$$

con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$. Nel nostro caso $a(x) = 4$ e $b(x) = 0$, per cui essendo $A(x) = 4x$

$$y = e^{4x} \int e^{-4x} \cdot 0 dx = Ce^{4x}$$

Esercizio 12. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = y \sin x$

Soluzione. Nel nostro caso $a(x) = \sin x$ e $b(x) = 0$, per cui essendo $A(x) = -\cos x$

$$y = e^{-\cos x} \int e^{\cos x} \cdot 0 dx = Ce^{-\cos x}$$

Esercizio 13. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = 3y + 9$

Soluzione. Nel nostro caso $a(x) = 3$ e $b(x) = 9$, per cui essendo $A(x) = 3x$

$$y = e^{3x} \int 9e^{-3x} dx = e^{3x} \left(-\frac{9}{3} e^{-3x} + c \right) = Ce^{3x} - 3$$

Esercizio 14. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' - 4xy = e^{2x^2}$

Soluzione. Nel nostro caso $a(x) = 4x$ e $b(x) = e^{2x^2}$, per cui essendo $A(x) = 2x^2$

$$y = e^{2x^2} \int e^{-2x^2} \cdot e^{2x^2} dx = e^{2x^2} \int 1 dx = e^{2x^2} (x + C)$$

Esercizio 15. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = y + x + 1$

Soluzione. Nel nostro caso $a(x) = 1$ e $b(x) = x + 1$, per cui essendo $A(x) = x$

$$y = e^x \int e^{-x} (x + 1) dx = e^x \left(\int x e^{-x} dx + \int e^{-x} dx \right) = e^x [-e^{-x} (x + 1) - e^{-x} + C] = Ce^x - x - 2$$

Esercizio 16. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $xy' = 2x - y$ con $x > 0$

Soluzione. Riscriviamo: $y' = 2 - \frac{y}{x}$; con $a(x) = -\frac{1}{x}$ e $b(x) = 2$, per cui $A(x) = -\ln x = \ln \frac{1}{x}$

$$y = e^{\ln \frac{1}{x}} \int 2e^{\ln x} dx = \frac{1}{x} \int 2x dx = \frac{C}{x} + x$$

Esercizio 17. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = \frac{2y-1}{x} = x + 1$

Soluzione. Riscriviamo:

$$y' = -\frac{2}{x}y + \frac{1}{x} + x + 1$$

con $a(x) = -\frac{2}{x}$ e $b(x) = \frac{1}{x} + x + 1$, per cui $A(x) = \ln \frac{1}{x^2}$

$$y = e^{\ln \frac{1}{x^2}} \int x^2 \left(\frac{1}{x} + x + 1 \right) dx = \frac{1}{x^2} \left(\int (x + x^3 + x^2) dx \right) = \frac{C}{x^2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

Esercizio 18. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' + y = 2 \sin x$

Soluzione. Riscriviamo: $y' = -y + 2 \sin x$; con $a(x) = -1$ e $b(x) = 2 \sin x$, per cui $A(x) = -x$

$$y = e^{-x} \int 2e^x \sin x dx$$

calcoliamo l'integrale per parti prima con $f'(x) = e^x$ e $g(x) = \sin x$ e poi con $g(x) = \cos x$

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x$$

avremo quindi, sommando i due integrali

$$2 \int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x + C$$

riportando ora nel calcolo dell'integrale generale

$$y = e^{-x} (e^x \sin x - e^x \cos x + C) = Ce^{-x} + \sin x - \cos x$$

Esercizio 19. Determinare l'integrale dell'equazione differenziale $y' = y + x$ con la condizione $y(0) = 3$

Soluzione. avremo $a(x) = 1$ e $b(x) = x$, per cui $A(x) = x$

$$y = e^x \int e^{-x} x dx = e^x (-xe^{-x} - e^{-x} + C) = Ce^x - x - 1$$

calcoliamo ora il valore di C in questo caso

$$y(0) = C - 1 = 3 \quad C = 4$$

e la soluzione è

$$y = 4e^x - x - 1$$

Esercizio 20. Determinare l'integrale dell'equazione differenziale $y' = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x^2}$ con la condizione $y\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = 5$

Soluzione. avremo $a(x) = \frac{1}{x^2}$ e $b(x) = \frac{1}{x^2}$, per cui $A(x) = -\frac{1}{x}$

$$y = e^{-\frac{1}{x}} \int e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = -e^{-\frac{1}{x}} \int -e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = Ce^{\frac{1}{x}} + 1$$

calcoliamo ora il valore di C in questo caso

$$y\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = 2C + 1 = 5 \quad C = 2$$

e la soluzione è

$$y = 2e^{\frac{1}{x}} + 1$$

Esercizio 21. Determinare l'integrale dell'equazione differenziale $(1 + x^2)y' + xy - x(1 + x^2) = 0$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione dividendo per il coefficiente di y'

$$y' = -\frac{x}{1 + x^2}y + x = 0$$

avremo $a(x) = -\frac{x}{x^2+1}$ e $b(x) = x$, per cui $A(x) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$

$$y = e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2+1)} \int e^{\frac{1}{2} \ln(x^2+1)} x dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \int x \sqrt{x^2+1} dx =$$

risolviamo l'integrale per sostituzione $x^2 + 1 = t^2$ e $2x dx = 2t dt$

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} + C$$

da cui

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \left[\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{3} + C \right] = \frac{1}{3} (x^2+1) + \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$$

Variabili separabili

Esercizio 22. Determinare l'integrale dell'equazione $y' = \frac{y^2}{x^2+1}$

Soluzione. Si osserva che una soluzione banale è $y = 0$. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2+1}$$

da cui

$$-\frac{1}{y} = \arctan x + C \quad y = \frac{1}{C - \arctan x}$$

Esercizio 23. Determinare l'integrale dell'equazione $y' = 2x(y-1)^2$

Soluzione. Si osserva che una soluzione banale è $y = 1$. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int 2x dx \quad \int \frac{d(y-1)}{(y-1)^2} = \int 2x dx$$

da cui

$$-\frac{1}{y-1} = x^2 + C \quad y = 1 - \frac{1}{x^2 + C}$$

Esercizio 24. Determinare l'integrale dell'equazione $yy' = x^3$

Soluzione. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\int y dy = \int x^3 dx$$

da cui

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} + C \quad y = \pm \sqrt{\frac{x^4}{2} + C}$$

Esercizio 25. Determinare l'integrale dell'equazione $y' = 6e^{2x} \sqrt[3]{y^2}$

Soluzione. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri; $y = 0$ è una soluzione banale

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} dy = \int 6e^{2x} dx \quad \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int 6e^{2x} dx$$

da cui

$$3y^{\frac{1}{3}} = 3e^{2x} + C \quad y = (e^{2x} + C)^3$$

Esercizio 26. Determinare l'integrale dell'equazione $y' = -y^2 \cos x$

Soluzione. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri; $y = 0$ è una soluzione banale

$$\int -\frac{1}{y^2} dy = \int \cos x dx \quad \int -y^{-2} dy = \int \cos x dx$$

da cui

$$y^{-1} = \sin x + C \quad y = \frac{1}{\sin x + C}$$

Esercizio 27. Determinare l'integrale dell'equazione $y' = \frac{x+1}{y+1}$

Soluzione. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\int (y+1) dy = \int (x+1) dx$$

da cui

$$\frac{1}{2}y^2 + y = \frac{1}{2}x^2 + x + C \quad y^2 + 2y - (x^2 + 2x + C) = 0$$
$$y = -1 \pm \sqrt{x^2 + 2x + C}$$

Esercizio 28. Determinare l'integrale dell'equazione $y' = y \ln x$

Soluzione. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \ln x dx$$

risolviamo l'integrale $\int \ln x dx$ per parti con $g(x) = \ln x$ e $f'(x) = dx$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x$$

da cui

$$\ln y = x \ln x - x + C$$

$$y = Ce^{x(\ln x - 1)}$$

Esercizio 29. Determinare l'integrale dell'equazione $y' = e^{2x+y}$

Soluzione. L'equazione si può riscrivere come $y = e^{2x} \cdot e^y$. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\int \frac{1}{e^y} dy = \int e^{2x} dx \quad \int e^{-y} dy = \int e^{2x} dx$$

da cui

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad y = -\ln\left(c - \frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

Esercizio 30. Determinare l'integrale dell'equazione $3y' = \frac{x}{y^2} \sin x$

Soluzione. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\int 3y^2 dy = \int x \sin x dx$$

risolviamo l'integrale $\int x \sin x dx$ per parti con $g(x) = x$ e $f'(x) = \sin x$ da cui

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

$$y^3 = -x \cos x + \sin x + C$$

$$y = \sqrt[3]{-x \cos x + \sin x + C}$$

Esercizio 31. Determinare l'integrale dell'equazione differenziale $y' = -\frac{y^2}{2\sqrt{x+1}}$ con la condizione $y(3) = \frac{1}{5}$

Soluzione. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\int -\frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$$

$$\frac{1}{y} = \sqrt{x+1} + C \quad y = \frac{1}{\sqrt{x+1} + C}$$

calcoliamo ora il valore di C in questo caso

$$y(3) = \frac{1}{2+C} = \frac{1}{5} \quad C = 3$$

e la soluzione è

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 3}$$

Esercizio 32. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = \frac{xy+2y}{x-2}$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione

$$y' = y \left(\frac{x+2}{x-2} \right)$$

Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x+2}{x-2} dx$$
$$\ln y = \int \frac{x-2+4}{x-2} dx = \int dx + 4 \int \frac{1}{x-2} dx$$
$$\ln y = x + 4 \ln(x-2) + C$$
$$e^{\ln y} = e^x \cdot e^{\ln(x-2)^4} \cdot e^C$$

da cui

$$y = C(x-2)^4 e^x$$

Esercizio 33. Determinare l'integrale generale dell'equazione $y' = 2\sqrt{y} \cos x$ con la condizione $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$

Soluzione. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\int \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int \cos x dx$$
$$\sqrt{y} = \sin x + C \quad y = (\sin x + C)^2$$

troviamo il valore di C

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = (C+1)^2 = 4$$
$$C = 1$$

per cui

$$y = (\sin x + 1)^2$$

Esercizio 34. Risolvere

$$\frac{dy}{dt} = -2y \quad \text{con} \quad y(1) = -5$$

Soluzione. Osserviamo che $-2y = 0$ quando $y = 0$. Pertanto la costante $y(t) = 0$ è una soluzione particolare. Separiamo le variabili e integriamo entrambi i membri

$$\frac{dy}{y} = -2dt$$

cioè

$$\ln |y| = -2t + B$$

da cui

$$|y| = e^B e^{-2t} = C e^{-2t}$$

dove, ovviamente, $e^B = C$ se $y > 0$ e $C = -e^B$ se $y < 0$

La soluzione generale è

$$y = C e^{-2t}$$

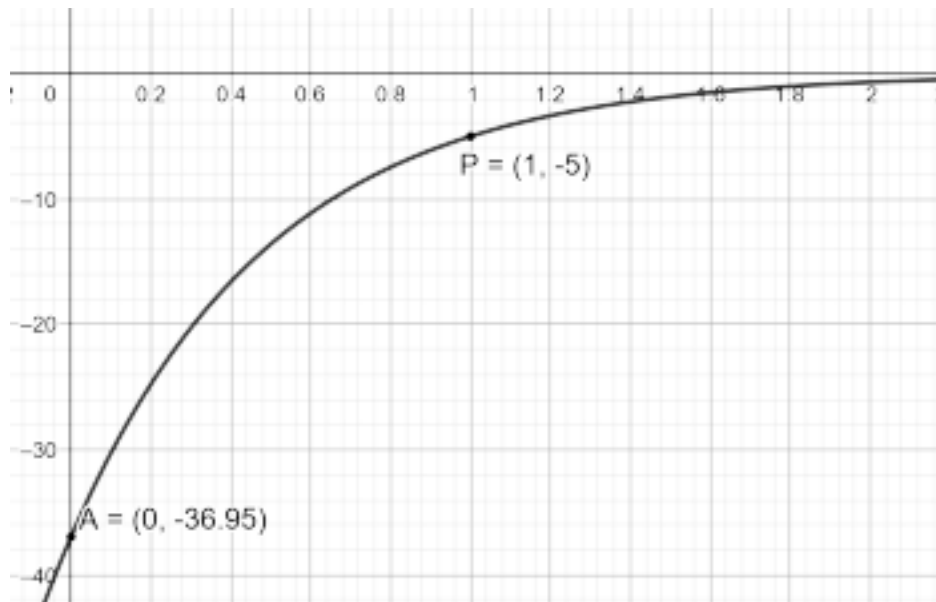
dove C è una costante. Introduciamo ora la condizione assegnata; avremo

$$-5 = C e^{-2 \cdot 1} \quad -5 = C e^{-2} \quad C = -5e^2$$

La soluzione particolare sarà

$$y(t) = -5e^2 e^{-2t} = -5e^{2(1-t)}$$

Tracciamo una parte del grafico di questa soluzione particolare



Esercizio 35. Trovare la soluzione generale della equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \sin x$$

Trovare poi la soluzione particolare per $y(0) = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Se $y = 0$ allora $y^2 = 0$. Pertanto $y(x) = 0$ è una soluzione costante. Separiamo ora le variabili

$$\frac{dy}{y^2} = \sin x dx$$

e integrando

$$-y^{-1} = -\cos x + C$$

da cui

$$y = \frac{1}{\cos x - C}$$

la soluzione generale sarà $y(x) = 0$ e

$$y(x) = \frac{1}{\cos x - C}$$

troviamo la soluzione particolare

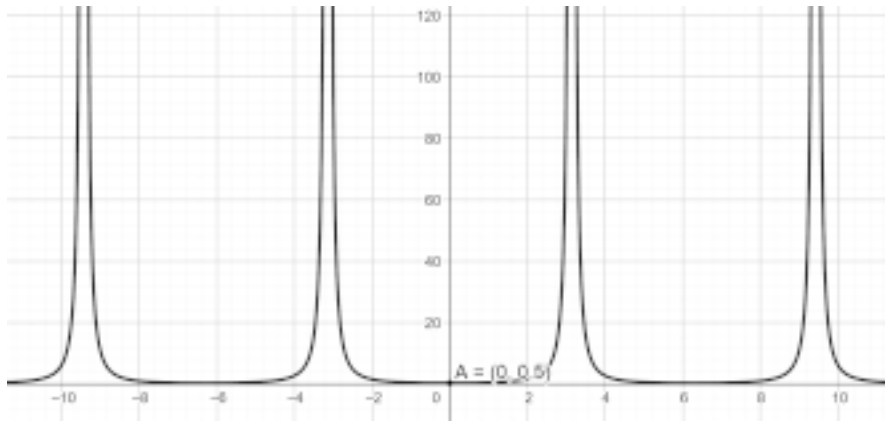
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1-C} \quad 1 - C = 2$$

da cui

$$C = -1$$

La soluzione particolare sarà

$$y = \frac{1}{\cos x + 1}$$



Esercizio 36. $\tan x \cdot \sin^2 y dx + \cos^2 x \cdot \cot y dy = 0$

Soluzione. divido primo e secondo membro per $\cos^2 x \sin^2 y$ per separare le variabili e ottengo

$$\frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + \frac{\cos y}{\sin^3 y} dy = 0$$

per cui

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{\cos y}{\sin^3 y} dy = C$$

risolvendo i singoli integrali con i metodi noti, si ha

$$\int -\cos^{-3} x d(\cos x) + \int \sin^{-3} y d(\sin y) = C$$

e si ha

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 y} = 2C \quad \cot^2 y + \tan^2 x = 2C$$

Esercizio 37. $xy' - y = y^3$

Soluzione. $y' = \frac{dy}{dx}$, per cui

$$x \frac{dy}{dx} - y = y^3$$

divido per dy

$$\frac{x}{dx} = \frac{y^3 + y}{dy}$$

cioè

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(y^2 + 1)}$$

da cui

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y(y^2 + 1)} + C$$

il secondo integrale si risolve scrivendo la frazione come somma di frazioni di grado inferiore di numeratori incogniti

$$\frac{1}{y(y^2 + 1)} = \frac{A}{y} + \frac{By}{y^2 + 1}$$

da cui

$$\begin{aligned}Ay^2 + A + By^2 &= 1 \\ y^2(A + B) + A &= 1\end{aligned}$$

uguagliando i coefficienti dei termini omogenei dei due membri, si ha

$$\begin{aligned}A = -B & \quad A = 1 \\ A = 1 & \quad B = -1\end{aligned}$$

l'integrale si scompone allora

$$\begin{aligned}\ln|x| &= \int \frac{dy}{y} - \int \frac{ydy}{y^2 + 1} + C \\ \ln|x| &= \ln|y| - \frac{1}{2} \int \frac{2ydy}{y^2 + 1} + C \\ \ln|x| &= \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y^2 + 1| + C\end{aligned}$$

cioè

$$\ln|x| = \ln \left| \frac{Cy}{\sqrt{y^2 + 1}} \right|$$

da cui

$$x = \frac{Cy}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

Esercizio 38. $xyy' = 1 - x^2$

Soluzione. sempre ponendo $y' = \frac{dy}{dx}$, per cui

$$xy \frac{dy}{dx} = 1 - x^2 \quad ydy = \frac{1 - x^2}{x} dx$$

passando agli integrali

$$\int ydy = \int \frac{1 - x^2}{x} dx + C$$

ma $\int \frac{1-x^2}{x} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int x dx$, per cui

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$$

con qualche calcolo algebrico

$$\begin{aligned}y^2 &= 2 \ln|x| - x^2 + \ln C_1 & y^2 + x^2 &= \ln Cx^2 \\ Cx^2 &= e^{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Esercizio 39. $y - xy' = a(1 + x^2y')$

Soluzione. utilizzo anche qui il metodo delle variabili separabili; svolgo la moltiplicazione e raggruppo le y'

$$xy'(ax+1) = y - a$$

separo le variabili con la consueta sostituzione $y' = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{y-a} = \frac{dx}{x(1+ax)}$$

passo agli integrali

$$\int \frac{dy}{y-a} = \int \frac{dx}{x(1+ax)} + C$$

il secondo integrale si risolve come nel precedente esercizio

$$\frac{1}{x(1+ax)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+ax}$$

da cui

$$1 = A + Aax + Bx \quad 1 = x(Aa + B) + A$$

confronto i termini con lo stesso grado

$$A = 1 \quad B = -a$$

l'integrale è pertanto

$$\int \frac{dy}{y-a} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{adx}{1+ax} + C$$

risolvo i singoli integrali

$$\ln|y-a| = \ln|x| - \ln|1+ax| + \ln C = \ln \left| \frac{Cx}{1+ax} \right|$$

risolvendo l'equazione logaritmica si ha

$$y-a = \frac{Cx}{1+ax}$$

e infine

$$y = \frac{a^2x + Cx + a}{1+ax} = \frac{C_1x + a}{1+ax}$$

Esercizio 40. $3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$

Soluzione. dividendo per $\tan y (1 - e^x)$, ottenendo

$$\frac{3e^x dx}{(1 - e^x)} + \frac{\sec^2 y dy}{\tan y} = 0$$

ma $\sec^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$, per cui

$$\frac{3e^x dx}{(1 - e^x)} + \frac{(1 + \tan^2 y) dy}{\tan y} = 0$$

passando agli integrali, si ha

$$\int \frac{3e^x dx}{(1 - e^x)} + \int \frac{(1 + \tan^2 y) dy}{\tan y} = C$$

$$3 \int \frac{e^x dx}{(1 - e^x)} + \int \frac{1}{\tan y} dy + \int \tan y dy = C$$

ma $e^x dx = d(e^x)$ per cui

$$3 \int \frac{d(e^x)}{1 - e^x} + \int \frac{\cos y}{\sin y} dy + \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = C$$

calcoliamo gli integrali

$$-3 \ln |1 - e^x| + \ln |\sin y| - \ln |\cos y| - \ln C = 0$$

applicando le proprietà dei logaritmi si ha

$$\ln \frac{\tan y}{C(1 - e^x)^3} = 0$$

siccome $\ln a = 0$ se $a = 1$,

$$\tan y = C(1 - e^x)^3$$

Esercizio 41. $(1 + e^x) yy' = e^x$ con $y(0) = 1$

Soluzione. divido per $(1 + e^x)$

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

cioè

$$y dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

passando agli integrali

$$\int y dy = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx + C \quad \frac{y^2}{2} = \ln |1 + e^x| + \ln C$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln [C(1 + e^x)]$$

ora $y(0) = 1$, per cui sostituendo

$$\frac{1}{2} = \ln [C(2)] \quad e^{\frac{1}{2}} = 2C \quad C = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

e la soluzione è

$$e^{\frac{y^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + e^x)$$

Esercizio 42. $(xy^2 + x) dx + (x^2y - y) dy = 0$ con $y(0) = 1$

raccolgo dentro le parentesi

$$x(y^2 + 1) dx + y(x^2 - 1) dy = 0$$

divido per $(y^2 + 1)(x^2 - 1)$

$$\frac{x}{x^2 - 1} dx + \frac{y}{y^2 + 1} dy = 0$$

passando agli integrali

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx + \int \frac{y}{y^2 + 1} dy = 0$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{y}{y^2 + 1} dy = 0$$

risolvendo gli integrali

$$\frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \frac{1}{2} \ln |y^2 + 1| = \frac{1}{2} \ln C$$

applicando le proprietà dei logaritmi e risolvendo

$$(x^2 - 1)(y^2 + 1) = C_1$$

applicando le condizioni iniziali date

$$-1 \times 2 = C_1$$

per cui

$$(x^2 - 1)(y^2 + 1) = -2$$

o

$$y^2 = -\frac{1 + x^2}{x^2 - 1}$$

Esercizio 43. $xdy + ydx = y^2 dx$

Soluzione. riscriviamo come

$$xdy = (y^2 - y) dx$$

cioè

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y(y-1)}$$

risolviamo l'integrale al secondo membro riscrivendo la frazione come somma di due frazioni

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{y(A+B) - A}{y(y-1)}$$

confrontando i coefficienti otteniamo $A = -1$ e $B = 1$, per cui

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1}$$

da cui

$$\ln |x| = \ln \frac{|y-1|}{|y|} + \ln C$$

cioè

$$xy = C(y-1)$$

Esercizio 44. $y' \sin x = y \ln y$ con $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

Soluzione. sempre separando le variabili con la sostituzione $y' = \frac{dy}{dx}$, si ha

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} + C$$

ma nella frazione $\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\ln y}$, la derivata del logaritmo è proprio $\frac{1}{y}$, e, utilizzando le formule goniometriche, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, per cui

$$\int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} + C \quad \ln(\ln y) = \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx + C$$

$$\ln(\ln y) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx + C$$

ma $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} d(\tan \frac{x}{2})$ per cui

$$\ln(\ln y) = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) + \ln C \quad \ln y = C \tan \frac{x}{2}$$

cioè

$$y = e^{C \tan \frac{x}{2}}$$

applichiamo ora la condizione assegnata $y \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$ [$\tan \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$]

$$1 = e^C$$

da cui $C = 0$ e la soluzione particolare è $y = 1$

Esercizio 45. $y' = (x + y)^2$.

Soluzione. Per ottenere la separazione delle variabili, è necessario introdurre la seguente sostituzione:

$$x + y = u$$

da cui

$$y = u - x \quad y' = u' - 1$$

sostituendo

$$u' - 1 = u^2$$

cioè

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2$$

da cui

$$\frac{du}{1 + u^2} = dx$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \int dx$$

questi due sono entrambi integrali elementari, per cui

$$\arctan u = x + C$$

$$\arctan(x + y) = x + C$$

Esercizio 46. $y' = (8x + 2y + 1)^2$

Soluzione. come prima

$$\begin{aligned}8x + 2y + 1 &= u \\ 8 + 2y' &= u'\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{u' - 8}{2} &= u^2 \\ \frac{du}{dx} &= 2u^2 + 8\end{aligned}$$

separando

$$\frac{du}{2(u^2 + 4)} = dx$$

passando agli integrali

$$\int \frac{du}{2(u^2 + 4)} = \int dx + C$$

anche questi sono integrali elementari

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \arctan \frac{u}{2} &= x + C \\ \frac{1}{4} \arctan \frac{8x + 2y + 1}{2} &= x\end{aligned}$$

Esercizio 47. $(2x + 3y - 1) dx + (4x + 6y - 5) dy = 0$

Soluzione. $y' = \frac{1 - (2x + 3y)}{4x + 6y - 5}$ e introduco il seguente cambio di variabile

$$u = 2x + 3y$$

per cui, risolvendo rispetto a y

$$y = \frac{u - 2x}{3}$$

e derivando rispetto a x

$$y' = \frac{u' - 2}{3}$$

sostituendo nell'equazione iniziale

$$\frac{u' - 2}{3} = \frac{1 - u}{2u - 5}$$

cioè

$$u' = \frac{3 - 3u}{2u - 5} + 2 = \frac{u - 7}{2u - 5}$$

ma $u' = \frac{du}{dx}$, per cui separando le variabili

$$\frac{(2u - 5) du}{u - 7} = dx$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{(2u - 5) du}{u - 7} = \int dx + C$$

riscrivendo il numeratore, come per gli integrali di frazioni con Num e Den dello stesso grado

$$\int \left(2 + \frac{9}{u - 7} \right) du = x + C$$

risolvendo

$$2u + 9 \ln |u - 7| = x + C$$

sostituendo il valore di u , inizialmente posto, si ha

$$4x + 6y + 9 \ln |2x + 3y - 7| = x + C$$

e dividendo per 3 e raggruppando le costanti

$$3 \ln |2x + 3y - 7| + x + 2y = C_1$$

Esercizio 48. $(2x - y) dx + (4x - 2y + 3) dy = 0$

Soluzione. riscrivo come

$$y' = \frac{y - 2x}{4x - 2y + 3}$$

osservando che $4x - 2y = 2(2x - y)$, pongo $u = 2x - y$ da cui

$$y = 2x - u$$

e derivando rispetto a x

$$y' = 2 - u'$$

e sostituendo nell'equazione iniziale

$$2 - u' = \frac{-u}{2u + 3}$$

cioè

$$u' = \frac{5u + 6}{2u + 3}$$

ma $u' = \frac{du}{dx}$ e risolvendo separando le variabili, si ha

$$\frac{(2u + 3)}{5u + 6} du = dx$$

passando agli integrali

$$\begin{aligned} \int \frac{2u + 3}{5u + 6} du &= \int dx + C \\ \frac{2}{5} \int \frac{10u + 15}{10u + 12} du &= x + C \\ \frac{2}{5} \int \left(1 + \frac{3}{10u + 12} \right) du &= x + C \end{aligned}$$

risolvendo

$$2u + 3 \ln |5u + 6| = 5x + C_1$$

sostituendo nuovamente

$$4x - 2y + 3 \ln |10x - 5y + 6| = 5x + C_1$$

cioè

$$x + 2y + C_1 = 3 \ln |10x - 5y + 6|$$

Equazioni Omogenee

L'equazione differenziale $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ si dice omogenea, se $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sono funzioni dello stesso grado. L'equazione si può allora trasformare come

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

e con l'aiuto della sostituzione $y = ux$, dove u è la nuova funzione incognita, si riduce ad una equazione a variabili separabili.

Esercizio 49. $y' = \frac{y}{x} - 1$

Soluzione. pongo $y = ux$, e derivando rispetto a x , $y' = u + u'x$ e sostituendo

$$u + xu' = u - 1$$

cioè

$$u' = -\frac{1}{x}$$

quindi

$$u = -\int \frac{dx}{x} + C$$

risolvendo l'integrale elementare

$$u = -\ln|x| + \ln C$$

sostituendo nuovamente

$$\frac{y}{x} = -\ln|x| + \ln C$$

$$y = x \ln \left| \frac{C}{x} \right|$$

Esercizio 50. $y' = -\frac{x+y}{x}$

Soluzione. pongo $y = ux$, e derivando rispetto a x , $y' = u + u'x$ e sostituendo

$$u + u'x = -\frac{x(u+1)}{x} = -u - 1$$

da cui

$$u' = -\frac{2u+1}{x}$$

risolvo separando le variabili

$$\frac{du}{2u+1} = -\frac{dx}{x}$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{du}{2u+1} = -\int \frac{dx}{x} + \ln C$$

risolvendo gli integrali elementari, si ottiene

$$\frac{1}{2} \ln|2u+1| = -\ln|x| + \ln C$$

$$\ln|2u+1| = 2 \ln \left| \frac{C}{x} \right|$$

risolvendo l'equazione logaritmica

$$2u+1 = \frac{C^2}{x^2}$$

e sostituendo nuovamente

$$\frac{2y+x}{x} = \frac{C_1}{x^2}$$
$$y = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2}$$

Esercizio 51. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$

Soluzione. riscrivendo l'equazione

$$y' = \frac{y(x-y)}{x^2}$$

sostituendo $y = ux$, da cui $y' = u + u'x$, ottengo

$$u + u'x = \frac{ux^2(1-u)}{x^2} = u(1-u)$$

da cui

$$u' = \frac{du}{dx} = -\frac{u^2}{x}$$

separando le variabili

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

e passando agli integrali

$$\frac{1}{u} = \ln |Cx|$$

sostituendo nuovamente

$$\frac{x}{y} = \ln |Cx|$$

oppure

$$y = \frac{x}{\ln |Cx|}$$

Esercizio 52. $(x^2 + y^2) dx - 2xydy = 0$

Soluzione. rispetto a $y' = \frac{dy}{dx}$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}$$

sostituisco $\frac{y}{x} = u$ e $y' = u + u'x$, ottenendo

$$u + u'x = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2}$$

da cui

$$u' = \frac{1-u^2}{2ux}$$

e separando le variabili

$$\frac{2u}{1-u^2} du = \frac{dx}{x}$$

passando agli integrali

$$\int \frac{2u}{1-u^2} du = \int \frac{dx}{x} + C$$

e risolvendo, poiché $2udu = d(u^2)$

$$-\ln|1-u^2| = \ln|Cx|$$

$$\frac{1}{1-u^2} = Cx$$

oppure

$$Cx(1-u^2) = 1$$

sostituendo nuovamente

$$Cx\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right) = 1$$

$$x^2 - y^2 = Cx$$

Esercizio 53. $ydx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0$

Soluzione. Riscriviamo come $y' = -\frac{y}{2\sqrt{xy} - x}$ e applichiamo la sostituzione $y = ux$ e $y' = u + u'x$

$$u + u'x = -\frac{ux}{2x\sqrt{u} - x} = -\frac{u}{2\sqrt{u} - 1}$$

da cui

$$u'x = -\frac{u}{2\sqrt{u} - 1} - u = \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u} - 1} \quad \text{cioè} \quad x\frac{du}{dx} = \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u} - 1}$$

separando le variabili e passando agli integrali, si ottiene

$$\int \frac{-2\sqrt{u} + 1}{2u\sqrt{u}} du = \int \frac{dx}{x} + C \qquad \int -\frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \ln x + C$$

$$-\ln u - \frac{1}{\sqrt{u}} = \ln x + C \quad -\ln|y| + \ln|x| + \sqrt{\frac{x}{y}} = \ln x + C \quad \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$$

Esercizio 54. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione nella forma

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$$

introduciamo la sostituzione $y = ux$ e $y' = u + xu'$ e avremo

$$u + xu' = \frac{\sqrt{x^2(1+u^2)} + ux}{x} = \sqrt{1+u^2} + u$$

per cui

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{x} \quad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$$

passando agli integrali si ha

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} \quad \ln|u + \sqrt{u^2+1}| = \ln Cx \quad Cx = u + \sqrt{u^2+1}$$

cioè

$$Cx = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = \frac{1}{x} \left(y + \sqrt{y^2 + x^2} \right)$$

svolgendo si ha

$$Cx^2 - y = \sqrt{y^2 + x^2} \quad y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C}$$

Esercizio 55. Integrare l'equazione $(x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$

Soluzione. L'equazione si può riscrivere come $x - y \cos \frac{y}{x} + x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = 0$; con la sostituzione $y = ux$ e $y' = u + xu'$, abbiamo

$$x - xu \cos u + x \cos u (u + xu') = 0$$

che si riduce a

$$\cos u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

separando le variabili e passando all'integrale si ha

$$\int \cos u du = - \int \frac{dx}{x}$$

da cui,

$$C = x e^{\sin \frac{y}{x}}$$

Esercizio 56. $x \ln \frac{x}{y} dy - y dx = 0$

Soluzione. dividiamo per $y dx$ e otteniamo $\frac{x}{y} \ln \frac{x}{y} - x' = 0$; sostituiamo $x = uy$ e $x' = u + yu'$ e avremo

$$u \ln u = u + yu' \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u(\ln u - 1)}$$

integrando

$$\ln y + \ln C = \ln(\ln u - 1)$$

da cui

$$Cy + 1 = \ln \frac{x}{y}$$

tornando alle variabili originarie

$$x = y e^{Cy+1}$$

Esercizio 57. $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$

Soluzione. riscriviamo l'equazione dividendo per dy :

$$xx' = \frac{x^2}{y} - y^3$$

sostituiamo $x = uy$ e $x' = u + yu'$ e avremo

$$uy(u + yu') = y(u^2 - y^2) \quad yu' = -y$$

separiamo le variabili e passiamo agli integrali

$$\int u du = - \int y dy \quad \frac{u^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$$

svolgendo i calcoli algebrici si ottiene la soluzione generale

$$x^2 + y^4 = Cy^2$$

Esercizio 58. $(2xy^2 - y) dx + xdy = 0$

Soluzione. Dividiamo per dx e sostituiamo $y = ux$, $y' = u + xu'$

$$2x^3u^2 - ux + ux + x^2u' = 0 \quad \frac{du}{u^2} = -2x dx$$

passando agli integrali

$$\frac{1}{u} = x^2 + C \quad \frac{x}{y} + x^2 = C$$

da cui con calcoli algebrici

$$y = \frac{x}{x^2 + C}$$

Esercizio 59. $x^2(y + 1) dx + (x^2 - 1)(y - 1) dy = 0$

Soluzione. riscriviamo come

$$\frac{x^2}{x^3 - 1} dx = -\frac{y - 1}{y + 1} dy$$

passando agli integrali

$$\frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx = - \int \frac{y - 1}{y + 1} dy = - \int \frac{y + 1}{y + 1} dy + 2 \int \frac{dy}{y + 1}$$

risolvendo si ha

$$\ln |x^3 - 1| = -3y + \ln (y + 1)^6$$

da cui

$$3y + \ln \frac{|x^3 - 1|}{(y + 1)^6} = C$$

Esercizio 60. $(1 + y^2)(e^{2x} dx - e^y dy) - (1 + y) dy = 0$

Soluzione. riscriviamo come

$$e^{2x} (1 + y^2) dx = e^y (1 + y^2) dy + (1 + y) dy$$

da cui, passando agli integrali

$$\int e^{2x} dx = \int e^y dy + \int \frac{1 + y}{1 + y^2} dy = e^y + \int \frac{dy}{1 + y^2} + \frac{1}{2} \int \frac{2y}{1 + y^2} dy$$

risolvendo

$$\frac{1}{2} e^{2x} - e^y + \arctan y + \frac{1}{2} \ln (1 + y^2) = C$$

Esercizio 61. $(4x^2 + 3xy + y^2) dx + (4y^2 + 3xy + x^2) dy = 0$

Soluzione. Riscriviamo come

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^2 + 3xy + y^2}{x^2 + 3xy + 4y^2}$$

Sostituiamo $y = ux$ e $y' = u + u'x$ e avremo

$$u'x = -\frac{x^2(4 + 3u + u^2)}{x^2(1 + 3u + 4u^2)} - u = -\frac{4(u^3 + u^2 + u + 1)}{1 + 3u + 4u^2} = -\frac{4(u + 1)(u^2 + 1)}{1 + 3u + 4u^2}$$

da cui passando agli integrali nella separazione delle variabili

$$\frac{1}{4} \int \frac{1 + 3u + 4u^2}{(u + 1)(u^2 + u + 1)} du = - \int \frac{dx}{x}$$

risolviamo il primo integrale riscrivendo la frazione come somma di due frazioni

$$\frac{1 + 3u + 4u^2}{(u + 1)(u^2 + u + 1)} = \frac{A}{u + 1} + \frac{B + Cu}{u^2 + u + 1} = \frac{u^2(A + C) + u(B + C) + (A + B)}{(u + 1)(u^2 + u + 1)}$$

confrontando i coefficienti dei termini di pari grado tra i due membri, abbiamo

$$\begin{cases} A + C = 4 \\ B + C = 3 \\ A + B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 3 \end{cases}$$

l'integrale diviene

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \frac{du}{u + 1} + \frac{3}{8} \int \frac{2u}{u^2 + u + 1} du &= - \int \frac{dx}{x} \\ \frac{1}{4} \ln |u + 1| + \frac{3}{8} \ln |u^2 + u + 1| &= - \ln x + \ln C \\ \frac{\ln [(u + 1)^2 (u^2 + u + 1)^3]}{8} &= \ln \frac{c}{x} \\ \left(\frac{y}{x} + 1\right)^2 \left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)^3 = \frac{C}{x^8} &\quad (x + y)^2 (x^2 + y^2)^3 = C \end{aligned}$$

Esercizio 62. Dalla condizione $y = 1$ per $x = 2$, ricavare la soluzione particolare dell'equazione $(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$.

Soluzione. riscriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$$

e sostituiamo $y = ux$ e $y' = u + xu'$ ottenendo

$$xu' = -\frac{x^2 - 3u^2x^2}{2ux^2} - u = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

risolviamo con il metodo delle variabili separabili

$$\int \frac{2u}{u^2 - 1} du = \int \frac{dx}{x}$$

da cui

$$\ln |u^2 - 1| = \ln |Cx|$$

cioè

$$y^2 = Cx^3 + x^2$$

nel caso in cui $y(2) = 1$, abbiamo $C = -\frac{3}{8}$ e l'equazione diviene

$$y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$$

Esercizio 63. $(2x - y + 4) dy + (x - 2y + 5) dx = 0$

Soluzione. Questa è una equazione riconducibile a equazione omogenea essendo della forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = \frac{-x + 2y - 5}{2x - y + 4}$$

se il determinante della matrice formata dai coefficienti delle due variabili è diverso da zero

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

allora si può introdurre la sostituzione $x = u + \alpha$ e $y = v + \beta$, dove α e β si possono ricavare dal sistema

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\alpha + 2\beta - 5 = 0 \\ 2\alpha - \beta + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

per cui la sostituzione è del tipo $x = u - 1$, $dx = du$, e $y = v + 2$, $dy = dv$

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{1 - u + 2v + 4 - 5}{2u - 2 - v - 2 + 4} = \frac{2v - u}{2u - v}$$

introduciamo ora la sostituzione tipica delle equazioni omogenee, $v = ut$, $v' = t + ut'$

$$ut' = \frac{u(2t - 1)}{u(2 - t)} - t = \frac{t^2 - 1}{2 - t}$$

passando agli integrali

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{2 - t}{t^2 - 1} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 - 1} dt$$

$$\ln Cu = 2 \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| - \frac{1}{2} \ln |t^2 - 1|$$

cioè, svolgendo

$$Cu = \frac{(t - 1)^{\frac{1}{2}}}{(t + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

ritornando alle incognite originarie x, y , poiché $t = \frac{v}{u} = \frac{y-2}{x+1}$, si ha

$$C(x + 1) = \frac{\left(\frac{y-2}{x+1} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{y-2}{x+1} + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

da cui, elevando al quadrato

$$(y - x - 3) = C(x + y - 1)^3$$

Esercizio 64. $y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$

Soluzione. In questo caso l'equazione è riconducibile ad omogenea ma il determinante dei coefficienti delle due incognite è nullo, infatti

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

la sostituzione necessaria diventa $u = a_1x + b_1y$, $u' = a_1 + b_1y'$, cioè $u = -3(x + y)$, $u' = -3 - 3y'$ e $y' = \frac{u' + 3}{-3}$. Avremo quindi

$$\frac{u' + 3}{3} = -\frac{u + 1}{\frac{3-u}{3}} = \frac{3(u + 1)}{u - 3}$$

cioè

$$\frac{1}{3} \frac{du}{dx} = \frac{3u + 3 - u - 3}{u - 3} = \frac{2(u + 3)}{u - 3}$$

e passando agli integrali

$$\frac{1}{6} \int \frac{u - 3}{u + 3} du = \int dx \quad \frac{1}{6} \int du - \int \frac{du}{u + 3} = \int dx$$

$$\frac{1}{6}u - \ln|u + 3| = x + C$$

passando alle incognite originarie

$$3x + y + 2 \ln(1 - x - y) = C$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale della forma $y' + P(x)y = Q(x)$ di primo grado rispetto a y e a y' si chiama equazione *lineare*. Se la funzione generale dell'equazione acquista la forma $y' + P(x)y = 0$ è detta *lineare omogenea*.

In questo caso le variabili si separano e la soluzione generale dell'equazione è data da

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Nel caso dell'equazione lineare la formula risolutiva si dimostra essere

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

Esercizio 65. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

Soluzione. Risolviamo applicando la formula risolutiva dell'equazione lineare non omogenea

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right]$$

da cui

$$y = e^{\ln x} \left[\int x e^{-\ln x} dx + C \right] = x \left(\int dx + C \right) = x^2 + Cx$$

Esercizio 66. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y' + y \cos x = 0$; trovare la soluzione particolare con valore iniziale $y(0) = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Calcoliamo prima l'integrale

$$\int \cos x dx = \sin x + B$$

la soluzione generale sarà

$$y(x) = Ce^{-\sin x}$$

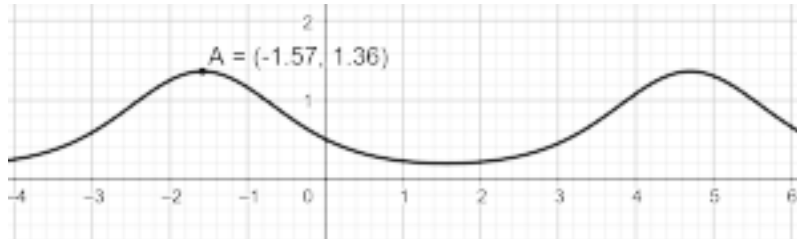
cerchiamo la soluzione particolare

$$y(0) = \frac{1}{2} = Ce^{-\sin 0} = C$$

pertanto

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-\sin x}$$

Vediamo il grafico della soluzione particolare



Esercizio 67. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$

Soluzione. Risolviamo applicando la formula risolutiva dell'equazione lineare non omogenea

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int x^3 e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right] = e^{-\ln x^2} \left[\int x^3 e^{\ln x^2} dx + C \right] = \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\int x^5 dx + C \right) = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2} \end{aligned}$$

Esercizio 68. $(1 + y^2) dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy) dy$

Soluzione. L'equazione è lineare rispetto a x , infatti

$$x' + \frac{xy}{1 + y^2} = \frac{\sin y}{\sqrt{1 + y^2}}$$

dove $P(y) = \frac{y}{1+y^2}$ e $Q(y) = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}$. Pertanto

$$x' = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{2y}{1+y^2} dy} \left[\int \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} e^{\frac{1}{2} \int \frac{2y}{1+y^2} dy} dy + C \right]$$

da cui

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \left[\int \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \sqrt{1+y^2} dy + C \right] \\ x\sqrt{1+y^2} + \cos y &= C \end{aligned}$$

Esercizio 69. $y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0$

Soluzione. Anche in questo caso si tratta di un'equazione lineare in y :

$$x' - \frac{2x}{y} = \frac{3}{y^2}$$

da cui

$$x = e^{\int \frac{2}{y} dy} \left[\int \frac{3}{y^2} e^{-\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right] = y^2 \left(\int \frac{3}{y^2} \cdot \frac{1}{y^2} dy + C \right)$$

cioè

$$x = Cy^3 - \frac{1}{y}$$

Esercizio 70. $(1 + x^2) y' + 2xy - \frac{1}{x} = 0$

Soluzione. Riscriviamo:

$$y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

dove $P(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ e $Q(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ per cui

$$y = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left[\int \frac{1}{x(1+x^2)} e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} dx + C \right] = e^{\ln \frac{1}{1+x^2}} \left[\int \frac{1}{x(1+x^2)} e^{\ln(1+x^2)} dx + C \right]$$

$$y = \frac{1}{1+x^2} \left(\int \frac{1+x^2}{x(1+x^2)} dx + C \right) = \frac{1}{1+x^2} (\ln|x| + C)$$

cioè

$$y(1+x^2) = \ln|x| + C$$

Esercizio 71. Trovare la soluzione particolare che soddisfa le condizioni date, $xy' + y - e^x = 0$ con $y = b$ quando $x = a$.

Soluzione. L'equazione può essere riscritta nella forma

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$$

da cui

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \frac{e^x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x} \left(\int \frac{e^x}{x} \cdot x dx + C \right) = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}$$

sostituendo le condizioni assegnate, possiamo ricavare C :

$$b = \frac{e^a}{a} + \frac{c}{a} \quad C = ab - e^a$$

la soluzione particolare sarà

$$y = \frac{e^x}{x} + \frac{ab - e^a}{x}$$

Esercizio 72. $(1 - x^2) y' + xy = 0$

Soluzione. caso particolare del tipo $y' + P(x)y = 0$, per cui la soluzione sarà del tipo $y = Ce^{-\int P(x) dx}$;

$$y = Ce^{-\int \frac{x}{1-x^2} dx} = Ce^{\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx} = C\sqrt{1-x^2}$$

Esercizio 73. Trovare la soluzione particolare che soddisfa le condizioni date,

$$y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$$

con $y = 0$ quando $x = 0$.

Soluzione. Riscriviamo l'equazione mettendo in evidenza la forma lineare

$$y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$$

per cui

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{-1}{1-x^2} dx} \left[\int (1+x) e^{-\int \frac{-1}{1-x^2} dx} + C \right] = e^{\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|} \left[\int (1+x) e^{\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|} + C \right] = \\ &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\int (x+1) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx + C \right) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\int \sqrt{1-x^2} dx + C \right) = \end{aligned}$$

risolviamo l'integrale mediante la sostituzione $x = \sin t$ e $dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\int \cos^2 t dt + C \right) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\int \frac{1+\cos 2t}{2} dt + C \right) = \\ &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos 2t}{2} dt + C \right) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C \right) \\ &y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + C \right) \end{aligned}$$

troviamo la soluzione particolare

$$C = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\arcsin x + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} - 1 \right)$$

Esercizio 74. Trovare la soluzione particolare che soddisfa le condizioni date,

$$y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$$

con $y = 0$ per $x = 0$.

Soluzione. $P(x) = \tan x$ e $Q(x) = \frac{1}{\cos x}$

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \tan x dx} \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{-\int \tan x dx} dx + C \right) = e^{-\ln \cos x} \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{\ln \cos x} dx + C \right) \\ &y = \frac{1}{\cos x} \left(\int dx + C \right) = \frac{x}{\cos x} + \frac{C}{\cos x} \end{aligned}$$

la soluzione particolare

$$0 = C \quad y = \frac{x}{\cos x}$$

Esercizio 75. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$

Soluzione. Questa è la cosiddetta equazione di Bernoulli del tipo $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$. La si può trasformare in una equazione lineare mediante la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -xu^2v^2$$

raccogliendo v al primo membro si ha

$$v \left(u' + \frac{u}{x} \right) + uv' = -xu^2v^2$$

per ricavare u , poniamo $u' + \frac{u}{x} = 0$, che risolviamo con il metodo delle variabili separabili

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0 \quad \int \frac{du}{u} = - \int \frac{dx}{x} \quad u = \frac{1}{x}$$

riscriviamo quindi l'equazione sostituendo il valore trovato di u

$$\frac{v'}{x} = -\frac{x}{x^2}v^2 \quad v' = -v^2$$

risolvendo per trovare v , abbiamo

$$\frac{dv}{dx} = -v^2 \quad \int v^{-2} dv = - \int dx \quad v = \frac{1}{x+C}$$

ma $v = \frac{y}{u} = xy$ per cui

$$xy = \frac{1}{x+C} \quad y(x^2 + Cx) = 1$$

Esercizio 76. $2xyy' - y^2 + x = 0$

Soluzione. L'equazione si può riscrivere

$$y' - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{2y}$$

Questa è la cosiddetta equazione di Bernoulli del tipo $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$, con $\alpha = -1$. La si può trasformare in una equazione lineare mediante la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$. Otteniamo

$$u'v + uv' - \frac{uv}{2x} = -\frac{1}{2uv} \quad v \left(u' - \frac{u}{2x} \right) + uv' = -\frac{1}{2uv}$$

ricaviamo u uguagliando a zero il coefficiente di v al primo membro

$$u' - \frac{u}{2x} = 0 \quad \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} \quad \ln |u| = \ln \sqrt{x}$$

da cui $u = \sqrt{x}$. sostituiamo

$$v' \sqrt{x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}v} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2xv} \quad \int 2v dv = - \int \frac{1}{x} dx$$

$$v^2 = \ln \frac{1}{|x|} + \ln C = \ln \frac{C}{x}$$

essendo ora $v = \frac{y}{u} = \frac{y}{\sqrt{x}}$, avremo

$$y^2 = x \ln \frac{C}{x}$$

Esercizio 77. $y' - y \frac{2x-1}{x^2} = 1$

Soluzione. risolviamo mediante la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - uv \frac{2x-1}{x^2} = 1$$

raccogliamo i termini contenenti v

$$v \left(u' - u \frac{2x-1}{x^2} \right) + uv' = 1$$

ricaviamo u uguagliando a zero il coefficiente di v al primo membro

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{2x}{x^2} dx - \int \frac{dx}{x^2}$$

da cui

$$u = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

sostituiamo tale funzione nell'equazione assegnata

$$x^2 e^{\frac{1}{x}} v' = 1$$

cioè

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{x}}}$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int dv = \int \frac{dx}{x^2 e^{\frac{1}{x}}}$$

per rendere evidente il procedimento, risolviamo l'integrale al secondo membro mediante la sostituzione $t = \frac{1}{x}$ e $dt = -\frac{1}{x^2} dx$, pertanto

$$v = - \int e^{-t} dt = e^{-t} = e^{-\frac{1}{x}} + C$$

avremo quindi

$$y = uv = x^2 \left(1 + C e^{\frac{1}{x}} \right)$$

Esercizio 78. $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y \right) dy = 0$

Soluzione. questa equazione ha la forma dell'equazione di Bernoulli del tipo $x' + P(y)x = Q(y)x^\alpha$.
Se, infatti, la riscriviamo, avremo

$$x' + \frac{x}{y} = \frac{1}{2}x^3$$

risolviamo con la sostituzione $x = uv$ e $x' = u'v + uv'$ e avremo

$$u'v + uv' + \frac{uv}{y} = \frac{1}{2}u^3v^3 \quad v \left(u' + \frac{u}{y} \right) + uv' = \frac{1}{2}u^3v^3$$

ricaviamo u da

$$u' + \frac{u}{y} = 0 \quad \int \frac{du}{u} = - \int \frac{dy}{y} \quad u = \frac{1}{y}$$

otterremo quindi

$$\frac{v'}{y} = \frac{1}{2} \frac{v^3}{y^3} \quad \int \frac{dv}{v^3} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} \quad \frac{1}{2v^2} = \frac{1}{2y} + C$$

ma $v = xy$, per cui

$$\frac{1}{2x^2y^2} = \frac{1}{2y} + C \quad \frac{1}{x^2y^2} = \frac{1}{y} + C'$$

cioè

$$x^2 = \frac{1}{y + C'y^2}$$

Esercizio 79. $y' + y \cos x = \sin x \cos x$

Soluzione. anche in questo caso risolviamo ponendo $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + uv \cos x = \sin x \cos x$$

raccogliendo i termini contenenti v e ponendoli uguali a zero, possiamo ricavare u

$$v(u' + u \cos x) + uv' = \sin x \cos x \quad u' + u \cos x = 0$$

da cui, passando agli integrali

$$\int \frac{du}{u} = - \int \cos x dx \quad u = e^{-\sin x}$$

sostituendo, per ricavare v' , avremo

$$e^{-\sin x} v' = \sin x \cos x$$

cioè

$$\int dv = \int \frac{\sin x \cos x}{e^{-\sin x}} dx = \int \sin x \cos x e^{\sin x} dx$$

risolviamo l'integrale al secondo membro sostituendo $\sin x = t$ e $\cos x dx = dt$, per cui

$$v = \int t e^t dt = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t = e^{\sin x} (\sin x - 1) + C$$

avremo quindi

$$y = uv = e^{-\sin x} \cdot e^{\sin x} (\sin x - 1) + C e^{-\sin x}$$

da cui

$$y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$$

Esercizio 80. $xy' - \frac{y}{x+1} - x = 0$

Soluzione. riscriviamo

$$y' = \frac{y}{x(x+1)} - 1 = 0$$

risolviamo sempre ponendo $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x(x+1)} - 1 = 0$$

raccogliendo i termini contenenti v e ponendoli uguali a zero avremo

$$v\left(u' - \frac{u}{x(x+1)}\right) + uv' - 1 = 0 \quad u' - \frac{u}{x(x+1)} = 0$$

risolvendo per ricavare u

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x(x+1)}$$

risolviamo l'integrale al secondo membro scrivendolo come somma di due frazioni

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

svolgendo e confrontando i termini di pari grado si ottiene $A = 1$ e $B = -1$, pertanto

$$\ln u = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln |x| - \ln |x+1|$$

da cui

$$u = \frac{x}{x+1}$$

sostituendo avremo

$$\frac{x}{x+1}v' = 1$$

e risolvendo

$$\int dv = \int \frac{x+1}{x} dx = \int dx + \int \frac{dx}{x}$$

da cui

$$v = x + \ln|x| + C$$

pertanto la soluzione generale sarà

$$y = uv = \frac{x}{x+1} (x + \ln|x| + C)$$

Esercizio 81. $(x^2y - x^2 + y - 1) dx + (xy + 2x - 3y - 6) dy = 0$

Soluzione. Raccogliamo a fattor comune

$$(x^2 + 1)(y - 1) dx + (x - 3)(y + 2) dy = 0$$

separando le variabili e passando agli integrali, si ha

$$\int \frac{x^2 + 1}{x - 3} dx = - \int \frac{y + 2}{y - 1} dy$$

risolviamo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 6x + 9 + 6x - 8}{x - 3} dx &= - \int \frac{y - 1}{y - 1} dy + 3 \int \frac{dy}{y - 1} \\ \int (x - 3) dx + 6 \int \frac{x - 3}{x - 3} + 10 \int \frac{dx}{x - 3} &= - \int dy - 3 \int \frac{dy}{y - 1} \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 6x + 10 \ln|x - 3| = -y - 3 \ln|y - 1| + C$$

che si può scrivere

$$\frac{x^2}{2} + 3x + y + \ln|(x - 3)^{10} (y - 1)^3| = C$$

Esercizio 82. $3xdy = y(1 + x \sin x - 3y^3 \sin x) dx$

Soluzione. Riscriviamo dividendo per $3xdx$ e avremo

$$y' - \frac{y}{3x} - \frac{y \sin x}{3} = -\frac{\sin x}{x} y^4 \quad y' - \frac{y}{3} \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) = -\frac{\sin x}{x} y^4$$

Questa equazione è del tipo $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$, con $\alpha = 4$. La si può trasformare in una equazione lineare mediante la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$. Otteniamo

$$u'v + uv' - \frac{uv}{3} \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) = -\frac{\sin x}{x} u^4 v^4$$

raccogliendo v al primo membro e uguagliando a zero per ricavare u' , si ha

$$u' - \frac{u}{3} \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) = 0$$

risolviamo con il metodo delle variabili separabili

$$\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) dx$$

cioè

$$\ln |u| = \frac{1}{3} (\ln |x| - \cos x)$$

$$u = \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\frac{\cos x}{3}}} \quad u^4 = \frac{x \sqrt[3]{x}}{e^{\frac{4 \cos x}{3}}}$$

sostituiamo al posto di u la funzione trovata per ricavare v

$$\frac{e^{\frac{\cos x}{3}}}{e^{\frac{\cos x}{3}}} \frac{dv}{dx} = -\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x \sqrt[3]{x}}{e^{\frac{4 \cos x}{3}}} v^4$$

risolviamo ancora con il metodo delle variabili separabili e avremo

$$\int \frac{dv}{v^4} = - \int \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x \sqrt[3]{x}}{e^{\frac{4 \cos x}{3}}} v^4 \cdot \frac{e^{\frac{\cos x}{3}}}{e^{\frac{\cos x}{3}}} \right) dx = \int \frac{-\sin x}{e^{\cos x}} dx$$

$$-\frac{1}{3v^3} = \int \frac{d(\cos x)}{e^{\cos x}}$$

da cui

$$-\frac{1}{3v^3} = -\frac{1}{e^{\cos x}} + C \quad e^{\cos x}$$

ma $v = \frac{y}{u}$ e sostituendo con qualche calcolo si ottiene

$$x = y^3 (C' e^{\cos x} + 3)$$

Equazioni ai differenziali totali. Fattore integrante

Differenziali totali. Se per l'equazione differenziale $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ l'uguaglianza

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

è soddisfatta, l'equazione può allora essere trascritta nella forma $dU(x, y) = 0$ e si chiama *equazione ai differenziali totali*. L'integrale generale è $U(x, y) = C$.

Esercizio 83. Trova l'integrale generale dell'equazione $(x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$

Soluzione. L'equazione è della forma $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ con $\frac{\partial U}{\partial x} = x + y$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = x + 2y$. Verifichiamo se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \frac{\partial(x+y)}{\partial y} = \frac{\partial(x+2y)}{\partial x} \quad 1 = 1$$

Risolviamo

$$U = \int (x + y) dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)$$

allora derivando U rispetto a y e confrontandolo con $\frac{\partial U}{\partial y} = x + 2y$ si ha

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + 2y = x + \varphi'(y)$$

da cui $\varphi'(y) = 2y$; pertanto $\varphi(y) = y^2$. La soluzione generale sarà allora

$$\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$$

Esercizio 84. Trova l'integrale generale dell'equazione $(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2xydy = 0$

Soluzione. L'equazione è della forma $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ con $\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y^2 + 2x$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy$. Verifichiamo se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \frac{\partial(x^2+y^2+2x)}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial x} \quad 2y = 2y$$

Risolviamo

$$U = \int (x^2 + y^2 + 2x) dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 + \varphi(y)$$

derivando U rispetto a y e confrontandolo con $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy$ si ha

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy = 2xy + \varphi'(y)$$

da cui $\varphi'(y) = 0$; pertanto $\varphi(y) = C$. La soluzione generale sarà

$$\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$$

Esercizio 85. $xdx + ydy = \frac{xdy - ydx}{x^2 - y^2}$

Soluzione 86. Riscriviamo l'equazione con qualche semplice passaggio algebrico

$$xdx + ydy - \frac{x}{x^2 - y^2} dy + \frac{y}{x^2 - y^2} dx = 0 \quad \left(x + \frac{y}{x^2 - y^2}\right) dx + \left(y - \frac{x}{x^2 - y^2}\right) dy = 0$$

l'equazione è quindi del tipo $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ con $\frac{\partial U}{\partial x} = x + \frac{y}{x^2 - y^2}$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = y - \frac{x}{x^2 - y^2}$.

Verifichiamo se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(x + \frac{y}{x^2 - y^2}\right) = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(y - \frac{x}{x^2 - y^2}\right) = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

Risolviamo

$$U = \int \left(x + \frac{y}{x^2 - y^2}\right) dx + \varphi(y) =$$

$$= \int x dx + y \int \frac{y}{x^2 - y^2} dx + \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - y}{x + y} \right| + \varphi(y)$$

derivando U rispetto a y e confrontandolo con $\frac{\partial U}{\partial y} = y - \frac{x}{x^2 - y^2}$ si ha

$$y - \frac{x}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x + y}{x - y} \cdot \frac{-2x}{(x + y)^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{x^2 - y^2} + \varphi'(y)$$

da cui $\varphi'(y) = y$ e $\varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C$. La soluzione generale sarà

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - y}{x + y} \right| = C$$

Esercizio 87. $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$

Soluzione. l'equazione è nella forma $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ con $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$.
Verifichiamo se è un integrale totale

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{y^3} \right) = -\frac{6x}{y^4} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \right) = -\frac{6x}{y^4}\end{aligned}$$

Risolviamo

$$U = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$$

Deriviamo U rispetto a y e confrontiamolo con $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$, avremo

$$\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} = -\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y)$$

da cui $\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}$ e $\varphi(y) = -\frac{1}{y} + C$. La soluzione generale sarà

$$x^2 - y^2 = Cy^3$$

Esercizio 88. Trovare l'integrale particolare dell'equazione

$$\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 2$.

Soluzione. l'equazione è nella forma $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ con $\frac{\partial U}{\partial x} = x + e^{\frac{x}{y}}$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)$.
Verifichiamo se è un integrale totale

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)\right] = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\end{aligned}$$

Risolviamo

$$U = \int \left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} + \varphi(y)$$

Deriviamo U rispetto a y e confrontiamolo con $\frac{\partial U}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)$, avremo

$$e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y} e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}} - y \cdot \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \varphi'(y)$$

da cui $\varphi'(y) = 0$ e $\varphi(y) = C_0$. La soluzione generale sarà

$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = C$$

introducendo le sostituzioni indicate, possiamo ricavare C e quindi la soluzione particolare

$$0 + 2 \cdot 1 = C$$

$$x^2 = 4 - 2ye^{\frac{x}{y}}$$

Fattore integrante

Se il primo membro dell'equazione $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ non è un differenziale totale e se le condizioni del teorema di Cauchy sono soddisfatte, allora esiste una funzione $\mu = \mu(x, y)$ (fattore integrante) tale che

$$\mu(Pdx + Qdy) = dU$$

Se ne deduce che la funzione μ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

Il fattore integrante μ si trova nei due casi seguenti

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = F(x) \quad \text{allora} \quad \mu = \mu(x) \\ \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = F_1(y) \quad \text{allora} \quad \mu = \mu(y) \end{aligned}$$

Esercizio 89. Integrare l'equazione

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$$

Soluzione. In questo caso $P(x, y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$ e $Q(x, y) = x^2 + y^2$. Le due derivate, la prima rispetto a y e la seconda rispetto a x non sono uguali e l'equazione non rappresenta un differenziale esatto.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

Calcoliamo

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{x^2 + y^2} (2x + x^2 + y^2 - 2x) = 1,$$

allora avremo $\mu = \mu(x)$. Si ha allora, dipendendo μ da x

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx = dx$$

e

$$\ln \mu = x$$

da cui

$$\mu = e^x$$

moltiplichiamo ora l'equazione data per e^x e avremo

$$\left[e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) \right] dx + \left[e^x (x^2 + y^2) \right] dy = 0$$

che è l'equazione ai differenziali totali. Infatti

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^x + x^2e^x + e^xy^2 = e^x(2x + x^2 + y^2)$$

Avremo

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^x (x^2 + y^2)$$

per cui

$$U = \int e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + \varphi(y) = \int 2xye^x dx + \int x^2ye^x + \int e^x \frac{y^3}{3} dx + \varphi(y)$$

i primi due integrali si possono risolvere per parti ponendo $e^x dx = v'$ e $2x = u$ (1° caso) $x^2 = u$ (2° caso)

$$\int 2xye^x dx = 2xye^x - 2ye^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 ye^x - 2xye^x + 2ye^x$$

per cui

$$U = 2yxe^x - 2ye^x + x^2 ye^x - 2xye^x + 2ye^x + \frac{y^3}{3} e^x + \varphi(y) = x^2 ye^x + \frac{y^3}{3} e^x + \varphi(y)$$

Deriviamo U rispetto a y e confrontiamolo con $\frac{\partial U}{\partial y} = e^x (x^2 + y^2)$,

$$e^x (x^2 + y^2) + \varphi'(y) = e^x (x^2 + y^2)$$

da cui

$$\varphi'(y) = 0 \quad \varphi(y) = C_0$$

e la soluzione generale sarà

$$C = e^x y \left(x^2 + \frac{y^3}{3} \right)$$

Equazioni differenziali del 1° ordine non risolubili rispetto alla derivata

Equazioni del primo ordine di gradi superiori

Se l'equazione $F(x, y, y') = 0$ è, per esempio, di secondo grado rispetto a y' , allora risolvendo l'equazione come una comune equazione di secondo grado, si ottengono due equazioni

$$y' = f_1(x, y) \quad y' = f_2(x, y)$$

L'integrale generale dell'equazione ha in questo caso la forma

$$\Phi(x, y, C) = \Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) = 0$$

Esercizio 90. Trovare l'integrale generale e particolare dell'equazione

$$xy'^2 + 2xy' - y = 0$$

Soluzione. Risolviamo prima trattandola come un'equazione algebrica di 2° grado rispetto a y' . Avremo

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + xy}}{x} = -1 \pm \sqrt{\frac{x^2 + xy}{x}}$$

avremo pertanto le due soluzioni

$$y' = -1 + \sqrt{\frac{x^2 + xy}{x}} \quad y' = -1 - \sqrt{\frac{x^2 + xy}{x}}$$

Le due soluzioni così ottenute sono equazioni differenziali omogenee e le risolviamo sostituendo $y = ux$ e $y' = u + xu'$ (risolviamo tecnicamente solo la prima, essendo la procedura per la seconda identica a parte un segno)

$$u + x \frac{du}{dx} = -1 + \sqrt{1 + u}$$

separando le variabili

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{-(1+u) + \sqrt{1+u}}$$

applichiamo la seguente ulteriore sostituzione: $1 + u = t^2$, $du = 2tdt$ e avremo

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2t}{t(1-t)} dt = -2 \int \frac{dt}{t-1}$$

da cui

$$\ln x = \ln \frac{C}{(t-1)^2} = \ln \frac{C}{(\sqrt{u+1}-1)^2} \quad x = \frac{C}{(\sqrt{u+1}-1)^2}$$

Avremo quindi, sostituendo nuovamente $u = \frac{y}{x}$, le due soluzioni

$$\frac{C}{x} = \left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} - 1\right)^2 \quad \frac{C}{x} = \left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} + 1\right)^2$$

Svolgendo i quadrati e moltiplicando si ottiene

$$\Phi(x, y, C) = \left[(2x + y - C) - 2\sqrt{x^2 + xy}\right] \left[(2x + y - C) + 2\sqrt{x^2 + xy}\right] = 0$$

$$\Phi(x, y, C) = (2x + y - C)^2 - 4(x^2 + xy) = 0$$

svolgendo il quadrato, sommando e applicando il prodotto notevole

$$(y - C)^2 = 4Cx$$

questa soluzione generale rappresenta un fascio di parabole.

Troviamo la soluzione particolare derivando rispetto a C

$$-2(y - C) = 4x \quad -2y + 2C = 4x \quad C = 2x + y$$

sostituiamo il valore trovato nella soluzione generale

$$4x^2 = 4x(2x + y) \quad da$$

cui

$$y + x = 0$$

È possibile risolvere anche utilizzando un altro metodo, cioè mediante la sostituzione $y' = p$, come mostrato di seguito.

Esercizio 91. Trovare l'integrale generale e quello particolare dell'equazione differenziale

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e avremo

$$y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$$

e deriviamo poi rispetto a x e consideriamo $p = f(x)$

$$p = 2p \frac{dp}{dx} - p - x \frac{dp}{dx} + x$$

raccogliamo e con qualche calcolo, si ha

$$(2p - x) \frac{dp}{dx} = 2p - x \quad \frac{dp}{dx} = 1 \quad p = x + C$$

sostituiamo $y' = x + C$ e avremo

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{x^2}{2}$$

da cui

$$y = Cx + C^2 + \frac{x^2}{2}$$

troviamo la soluzione particolare derivando rispetto a C

$$0 = x + 2C \quad C = -\frac{x}{2}$$

sostituendo avremo

$$y = -\frac{x}{2} \left(x - \frac{x}{2} \right) + \frac{x^2}{2} \quad y = \frac{x^2}{4}$$

Esercizio 92. Risolvi la seguente equazione differenziale determinando il suo integrale generale

$$\frac{y^2}{y'^2} + y^2 = \left(x - \frac{y}{y'} \right)^2$$

Soluzione. Svolgiamo qualche calcolo

$$y^2 + y^2 y'^2 = x^2 y'^2 + y^2 - 2xyy' \quad y^2 y'^2 - x^2 y'^2 + 2xyy' = 0$$

raccogliamo

$$y' [y' (y^2 - x^2) + 2xy] = 0$$

può essere considerata con caratteristiche riconducibili a un'equazione spuria di secondo grado, per cui $y' = 0$ restituisce una costante, mentre

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

è una equazione differenziale omogenea; sostituiamo pertanto $y = ux$ e $y' = u + xu'$,

$$u + xu' = \frac{2ux^2}{x^2(1-u^2)} \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u+u^3}{1-u^2}$$

integrando con il metodo delle variabili separabili si ha

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-u^2}{u+u^3} du$$

calcoliamo l'integrale al secondo membro

$$\int \frac{1-u^2}{u+u^3} du = \int \frac{1+3u^2-4u^2}{u+u^3} du = \int \frac{1+3u^2}{u+u^3} du - \frac{4}{2} \int \frac{2u}{1+u^2} du =$$

$$\ln |u+u^3| - 2 \ln |1+u^2| = \ln \left| \frac{u}{1+u^2} \right|$$

Ritornando all'equazione differenziale, avremo

$$\ln |x| = \ln \left| \frac{u}{1+u^2} \right| + \ln C$$

da cui

$$C = \frac{x(1+u^2)}{u}$$

e sostituendo $u = \frac{y}{x}$, avremo, dopo qualche calcolo algebrico

$$x^2 + y^2 - Cy = 0$$

un fascio di circonferenze di centro $\left(0; \frac{C}{2}\right)$ e raggio variabile $r = \frac{C}{2}$.

Esercizio 93. Trovare l'integrale generale e particolare dell'equazione

$$4y'^2 - 9x = 0$$

Soluzione. Risolviamo come un'equazione di 2° grado. Avremo

$$y' = \pm \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

le due soluzioni saranno

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad y' = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

risolvendo con il metodo delle variabili separabili si ha

$$\int dy = \frac{3}{2} \int \sqrt{x} \quad \int dy = \frac{3}{2} - \int \sqrt{x}$$

le soluzioni saranno pertanto

$$x\sqrt{x} - y + C = 0 \quad x\sqrt{x} + y - C = 0$$

moltiplicando avremo

$$x^3 = y^2 + 2Cy + C^2$$

da cui

$$x^3 = (y + C)^2$$

troviamo la soluzione particolare derivando rispetto a C

$$0 = 2(y + C) \quad C = -y$$

quindi non abbiamo integrale singolare.

Esercizio 94. Trovare l'integrale generale dell'equazione $yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0$

Soluzione. Risolviamo come un'equazione di 2° grado. Avremo

$$y' = \frac{(xy + 1) \pm \sqrt{(xy + 1)^2 - 4xy}}{2y} = \frac{(xy + 1) \pm (xy - 1)}{2y}$$

avremo quindi due soluzioni del tipo

$$y' = x \quad y' = \frac{1}{y}$$

Risolviamo le due equazioni con il metodo delle variabili separabili

$$y = \frac{x^2}{2} + C \quad \frac{y^2}{2} = x + C$$

oppure

$$\frac{x^2}{2} - y + C = 0 \quad x - \frac{y^2}{2} + C = 0$$

moltiplichiamo e avremo la soluzione generale

$$\left(\frac{x^2}{2} - y + C\right) \left(x - \frac{y^2}{2} + C\right) = 0$$

Esercizio 95. Trovare l'integrale generale dell'equazione $y = y'^2 e^{y'}$

Soluzione. Risolviamo introducendo la sostituzione $y' = p$; avremo $y = p^2 e^p$; deriviamo ora rispetto a x con $p = f(x)$

$$p = 2p \frac{dp}{dx} e^p + p^2 e^p \frac{dp}{dx}$$

raccogliamo

$$\frac{dp}{dx} (2pe^p + p^2) e^p = p$$

dividiamo entrambi i membri per p e separiamo le variabili

$$dp (2e^p + pe^p) = dx$$

integrando

$$\int 2e^p dp + \int pe^p dp = \int dx$$

il secondo integrale a sinistra si può risolvere per parti e avremo, scrivendo le soluzioni in forma parametrica, mediante il parametro p

$$2e^p + pe^p - e^p + C = x$$

$$y = p^2 e^p$$

Esercizio 96. Trovare l'integrale generale dell'equazione $x = \sin y' + \ln y'$

Soluzione. Risolviamo introducendo la sostituzione $y' = p$; avremo $x = \sin p + \ln p$; deriviamo ora rispetto a x con $p = f(x)$

$$1 = \cos p \frac{dp}{dx} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dx}$$

sostituiamo $dx = \frac{dy}{p}$ e avremo

$$1 = \cos p \frac{dp}{dy} p + \frac{1}{p} \frac{dp}{dy} p$$

da cui

$$dy = (p \cos p + 1) dp$$

e integrando, utilizzando anche l'integrazione per parti

$$y = p \sin p - \int \sin p dp + p + C$$

scrivendo le soluzioni in forma parametrica, avremo

$$y = p \sin p + \cos p + p + C$$

$$x = \sin p + \ln p$$

Esercizio 97. $2dx + \sqrt{\frac{x}{y}} dy - \sqrt{\frac{y}{x}} dx = 0$

Soluzione. Moltiplichiamo tutto per $\sqrt{\frac{y}{x}}$ e avremo

$$2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

da cui

$$y' = \frac{y}{x} - 2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

introduciamo la sostituzione $y = ux$ e $y' = u + xu'$ e otteniamo

$$u + xu' = u - 2\sqrt{u}$$

e separando le variabili e passando agli integrali

$$-\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

cioè

$$\ln|x| + \sqrt{\frac{y}{x}} = C$$

Esercizio 98. $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$

Soluzione. introduciamo la sostituzione $y = ux$ e $y' = u + xu'$ e otteniamo

$$u + xu' = u + \tan u$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{\tan u} \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{\cos u}{\sin u} du$$

cioè

$$\ln \left| \sin \frac{y}{x} \right| = \ln C + \ln|x|$$

che si può riscrivere

$$y = x \arcsin(Cx)$$

Esercizio 99. $2dx + \sqrt{\frac{x}{y}}dy - \sqrt{\frac{y}{x}}dx = 0$

Soluzione. Moltiplichiamo entrambi i membri per $\sqrt{\frac{y}{x}}$ e otterremo

$$2\sqrt{\frac{y}{x}}dx + dy - \frac{y}{x}dx = 0$$

dividiamo tutto per dx

$$2\sqrt{\frac{y}{x}} + y' - \frac{y}{x} = 0$$

ca cui

$$y' = \frac{y}{x} - 2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Poniamo $y = ux$ e $y' = u + xu'$ e avremo

$$u + xu' = u - 2\sqrt{u}$$

cioè, passando poi agli integrali

$$-\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

risolvendo

$$\ln|x| = -\sqrt{u} + C$$

e poiché $u = \frac{y}{x}$, avremo

$$\ln|x| + \sqrt{\frac{y}{x}} = C$$

Esercizio 100. $yy' + y^2 = \cos x$

Soluzione. Impostiamo la risoluzione ponendo $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$

$$uv(u'v + uv') + u^2v^2 = \cos x$$

raccogliamo i termini contenenti la variabile v e avremo

$$v(u' + u) + uv' = \frac{\cos x}{uv}$$

per ricavare u

$$u' + u = 0$$

cioè

$$\int \frac{du}{u} = - \int dx \quad \ln u = -x \quad u = e^{-x}$$

l'equazione diventa

$$e^{-x}v' = \frac{\cos x}{ve^{-x}}$$

separando le variabili e integrando si ha

$$e^{-2x} \frac{dv}{v} = \frac{\cos x}{v} \quad \int v dv = \int \frac{\cos x}{v} \quad \frac{v^2}{2} = \int \cos x e^{2x} dx$$

risolviamo l'integrale per parti

$$\begin{aligned} \int \cos x e^{2x} dx &= \sin x e^{2x} - 2 \int \sin x e^{2x} dx = \\ &= \sin x e^{2x} - 2 \left[-\cos x e^{2x} + 2 \int \cos x e^{2x} dx \right] \end{aligned}$$

per cui

$$\int \cos x e^{2x} dx = \sin x e^{2x} + 2 \cos x e^{2x} - 4 \int \cos x e^{2x} dx$$

cioè

$$\int \cos x e^{2x} dx = \frac{\sin x e^{2x} + 2 \cos x e^{2x}}{5} + C$$

avremo, tornando all'equazione differenziale,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{5} \sin x e^{2x} + \frac{2}{5} \cos x e^{2x} + C'$$

da cui

$$v = e^x \sqrt{\frac{1}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C e^{-2x}}$$

Essendo $y = uv$, avremo

$$y = e^{-x} \cdot \left(e^x \sqrt{\frac{1}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C e^{-2x}} \right)$$

da cui

$$y^2 = \frac{1}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C e^{-2x}$$

Esercizio 101. $y \frac{dp}{dy} = -p + p^2$

Soluzione. l'equazione si può riscrivere, separando le variabili come

$$\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p^2 - p} = \frac{dp}{p(p-1)}$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dp}{p(p-1)}$$

risolviamo l'integrale al secondo membro

$$\frac{1}{p(p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1}$$

cioè

$$1 = p(A+B) - A$$

da cui $A+B=0$ e $A=-1$, e quindi $A=-1$ e $B=1$, e si ha

$$\ln|y| = -\int \frac{dp}{p} + \int \frac{dp}{p-1} = \ln|p| + \ln|p-1| + \ln|C|$$

cioè

$$\ln Cy = \ln \frac{p-1}{p}$$

e le soluzioni si possono scrivere

$$yp = C(p-1)$$

Esercizio 102. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$

Soluzione. La derivata prima è presente anche con grado 2, e possiamo dapprima procedere come per le equazioni di secondo grado in modo da scomporla nel prodotto di due fattori dove la derivata prima sarà solo di primo grado. Applichiamo quindi la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado:

$$y' = \frac{-3xy \pm \sqrt{9x^2y^2 - 8x^2y^2}}{2x^2} = \frac{-3xy \pm xy}{2x^2}$$

avremo quindi

$$y'_1 = -2\frac{y}{x} \quad y'_2 = -\frac{y}{x}$$

risolviamo le due equazioni, cominciando dalla prima

$$\frac{dy_1}{dx} = -2\frac{y}{x} \quad \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dx}{x} \quad \ln y + 2 \ln x = \ln C \quad C = xy^2$$

nel secondo caso

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dx}{x} \quad \ln y + \ln x = \ln C \quad C = xy$$

moltiplicando le due soluzioni avremo

$$(x^2y - C)(xy - C) = 0$$

Esercizio 103. $e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$

Soluzione. Abbiamo $P(x, y) = e^y$ e $Q(x, y) = xe^y - 2y$; osservo che si tratta di un differenziale totale poiché $\frac{\partial P}{\partial y} = e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Allora l'equazione ha la forma $dU = 0$. Si ha

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^y \quad \frac{\partial U}{\partial y} = xe^y - 2y$$

d'onde

$$U = \int e^y dx + \varphi(y) = xe^y + \varphi(y)$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial y} = xe^y + \varphi'(y)$$

e confrontando avremo

$$xe^y + \varphi'(y) = xe^y - 2y$$

da cui

$$\varphi'(y) = -2y \quad \varphi(y) = -y^2 + C$$

la soluzione sarà

$$C = xe^y - y^2$$

Esercizio 104. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$

Soluzione. Ricordando le proprietà dei logaritmo, possiamo riscrivere l'equazione

$$y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right)$$

e poniamo $y = ux$ e $y' = u + xu'$, avremo

$$u + xu' = u(1 + \ln u)$$

cioè

$$x \frac{du}{dx} = u \ln u$$

e separando le variabili e passando agli integrali

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{\ln u}$$

ma $\frac{du}{u} = d(\ln u)$, e si ottiene

$$\ln x = \int \frac{d(\ln u)}{\ln u} = \ln(\ln u)$$

da cui

$$x = \ln u + C$$

ma $u = \frac{y}{x}$, per cui

$$x = \ln \frac{y}{x} + C$$

che si può anche mettere nelle forma

$$y = xe^{x-C}$$

Esercizio 105. $xdy - ydx = y^2 dx$

Soluzione. riscriviamo, raccogliendo i termini contenenti dx

$$x dy = y(y+1) dx$$

e separiamo le variabili, passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \frac{dx}{x}$$

risolviamo l'integrale a primo membro scomponendo la frazione nella somma di due frazioni con denominatore di primo grado

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1}$$

da cui, moltiplicando per il denominatore comune e confrontando i termini di pari grado, si ottiene $A = 1$ e $B = -1$; la nostra equazione diviene pertanto

$$\ln x = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{|y|}{|y+1|} + \ln C$$

cioè

$$x = \frac{Cy}{y+1}$$

o

$$x + \frac{x}{y} = C$$

Esercizio 106. $\tan x \frac{dy}{dx} - yx = a$

Soluzione. separiamo le variabili

$$\frac{dy}{a+y} = \frac{dx}{\tan x}$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{a+y} = \int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

ma $\cos x$ è la derivata di $\sin x$, per cui avremo,

$$\ln |a+y| = \ln |\sin x| + \ln C$$

da cui

$$y = C \sin x - a$$

Esercizio 107. $xyy'^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0$

Soluzione. La derivata prima è presente anche elevata al quadrato, e l'equazione può essere affrontata preliminarmente come un'equazione di secondo grado nella variabile y' . Risolvendo

$$y' = \frac{(x^2 + y^2) \pm \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2}}{2xy} = \frac{(x^2 + y^2) \pm (x^2 - y^2)}{2xy}$$

le soluzioni sono

$$y'_1 = \frac{x}{y} \quad y'_2 = \frac{y}{x}$$

risolviamo ora le due equazioni differenziali separatamente, iniziando dalla prima

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \int y dy = \int x dx \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C' \quad y^2 - x^2 + C = 0$$

ora la seconda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad y - Cx = 0$$

moltiplicando le due soluzioni, si ottiene

$$(y^2 - x^2 + C)(y - Cx) = 0$$

Esercizio 108. $(3x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - 3y^2) dy = 0$

Soluzione. anche questo è un differenziale esatto, per cui

$$P(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2 = \frac{\partial U}{\partial x} \quad Q(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2 = \frac{\partial U}{\partial y}$$

risolvendo

$$U = \int (3x^2 + 2xy - y^2) dx + \varphi(y) = x^3 + x^2y - xy^2 + \varphi(y)$$

derivando poi rispetto a y e confrontando, si ha

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2xy + x^2 + \varphi'(y) = x^2 - 2xy - 3y^2$$

da cui

$$\varphi'(y) = -3y^2 \quad \varphi(y) = -y^3 + C$$

la soluzione sarà

$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = C$$

Esercizio 109. $2yp \frac{dp}{dy} = 3p^2 + 4y^2$

Soluzione. dividiamo per y^2 e avremo

$$2 \frac{p}{y} \frac{dp}{dy} = 3 \frac{p^2}{y^2} + 4$$

poniamo $p = uy$ e $p' = u + yu'$

$$2u(u + yu') = 3u^2 + 4 \quad 2u^2 + 2uyu' = 3u^2 + 4 \quad 2uyu' = u^2 + 4$$

separiamo le variabili e passiamo agli integrali

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2u}{u^2 + 4} du$$

che dà

$$\ln Cy = \ln(u^2 + 4) \quad Cy = u^2 + 4$$

da cui, ritornando alle variabili iniziali

$$Cy^3 = p^2 + 4y^2$$

Esercizio 110. $y' = \frac{y+1}{x}$ con $y = 0$ per $x = 1$.

Soluzione. riscriviamo

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}$$

e poniamo $y = ux$ e $y' = u + xu'$

$$u + xu' = u + \frac{1}{x} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

passando agli integrali e risolvendo, si ha

$$\int du = \int \frac{dx}{x^2} \quad u = -\frac{1}{x} + C \quad \frac{y}{x} = -\frac{1}{x} + C$$

cioè $y = Cx - 1$; introducendo le condizioni fissate si ottiene

$$0 = -1 + C \quad C = 1 \quad y = x - 1$$

Esercizio 111. $e^{x-y}y' = 1$ con $y = 1$ per $x = 1$.

Soluzione. applicando le proprietà delle potenze possiamo scrivere

$$\frac{e^x}{e^y}y' = 1$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int \frac{dx}{e^x} = \int \frac{dy}{e^y} \quad \int e^{-x} dx = \int e^{-y} dy \quad -e^{-x} = -e^{-y} + C$$

imponendo le condizioni si ha $e^{-1} = e^{-1} + C$, da cui $C = 0$ e la soluzione è

$$x = y$$

Esercizio 112. $y' - 2y + x^2 = 0$ con $y = \frac{1}{4}$ per $x = 0$.

Soluzione. introduciamo la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$ e otteniamo

$$u'v + uv' - 2uv + x^2 = 0$$

raccogliamo i termini contenenti la variabile v

$$v(u' - 2u) + uv' + x^2 = 0$$

ricaviamo u'

$$u' - 2u = 0 \quad \frac{du}{2u} = dx \quad u = e^{2x}$$

l'equazione diviene

$$e^{2x}v' + x^2 = 0$$

e risolvendo separando le variabili

$$- \int dv = \int \frac{x^2}{e^{2x}} dx$$

risolviamo l'integrale al secondo membro per parti

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \frac{1}{2} \int 2xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int xe^{-2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \end{aligned}$$

pertanto

$$y = uv = e^{2x} \cdot e^{-2x} \left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{4} \right) + Ce^{2x}$$

applicando la condizioni assegnate si ha

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + C \quad C = 0$$

e la soluzione particolare sarà

$$y = \frac{2x^2 + 2x + 1}{4}$$

Esercizio 113. $y' - 2y + x^2 = 0$ con $y = \frac{1}{4}$ per $x = 0$.

Soluzione. introduciamo la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$ e otteniamo

$$u'v + uv' - 2uv + x^2 = 0$$

raccogliamo i termini contenenti la variabile v

$$v(u' - 2u) + uv' + x^2 = 0$$

ricaviamo u'

$$u' - 2u = 0 \quad \frac{du}{2u} = dx \quad u = e^{2x}$$

l'equazione diviene

$$e^{2x}v' + x^2 = 0$$

e risolvendo separando le variabili

$$- \int dv = \int \frac{x^2}{e^{2x}} dx$$

risolviamo l'integrale al secondo membro per parti

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \frac{1}{2} \int 2xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int xe^{-2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \end{aligned}$$

pertanto

$$y = uv = e^{2x} \cdot e^{-2x} \left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{4} \right) + Ce^{2x}$$

applicando la condizioni assegnate si ha

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + C \quad C = 0$$

e la soluzione particolare sarà

$$y = \frac{2x^2 + 2x + 1}{4}$$

Esercizio 114. $y' + y = 2x$ con $y = -1$ per $x = 0$.

Soluzione. introduciamo la sostituzione $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$ e otteniamo

$$u'v + uv' + uv = 2x$$

raccogliamo i termini contenenti la variabile v

$$v(u' + u) + uv' = 2x$$

ricaviamo u'

$$u' + u = 0 \quad \frac{du}{u} = -dx \quad u = e^{-x}$$

l'equazione diviene

$$e^{-x} \frac{dv}{dx} = 2x$$

e risolvendo separando le variabili

$$\int dv = \int 2xe^x dx$$

risolviamo l'integrale al secondo membro per parti

$$v = \int 2xe^x dx = 2xe^x - 2 \int e^x dx = 2xe^x - 2e^x + C$$

pertanto

$$y = uv = e^{-x} (2xe^x - 2e^x + C) = 2x - 2 + Ce^{-x}$$

applicando la condizioni assegnate si ha

$$-1 = -2 + C \quad C = 1$$

e la soluzione particolare sarà

$$y = 2x - 2 + e^{-x}$$

Esercizio 115. $xy' = y$ con $y = 1$ per $x = 1$.

Soluzione. riscriviamo nella forma

$$y' = \frac{y}{x}$$

e introduciamo la sostituzione $y = ux$ e $y' = u + xu'$; l'equazione diviene

$$u + xu' = u \quad x \frac{du}{dx} = 0 \quad u = C$$

cioè

$$u = C \quad \frac{y}{x} = C \quad y = Cx$$

appliciamo la condizione

$$1 = C \quad y = x$$

Esercizio 116. $y' \cot x + y = 2$ con $y = 2$ per $x = 0$.

Soluzione. riscriviamo

$$\frac{dy}{dx} \cot x = 2 - y$$

e separiamo le variabili, passando poi agli integrali

$$\int \frac{dy}{2-y} = \int \frac{dx}{\cot x} \quad - \int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$$

da cui

$$- \ln |y - 2| = - \ln C |\cos x|$$

cioè

$$y = 2 - C \cos x$$

introduciamo i valori assegnati per ottenere la soluzione particolare

$$y - 2 = C \quad C = 0$$

cioè $y = 2$.

Esercizio 117. $y' + y = \cos x$ con $y = \frac{1}{2}$ per $x = 0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y = uv$, $y' = uv' + u'v$ e avremo

$$uv' + u'v + uv = \cos x$$

raccogliamo i termini contenenti v , e avremo $v(u' + u) + uv' = \cos x$; ricaviamo u

$$u' + u = 0 \quad \frac{du}{u} = -dx \quad u = e^{-x}$$

si avrà

$$e^{-x}v' = \cos x \quad \frac{dv}{dx} = e^x \cos x \quad \int dv = \int e^x \cos x dx$$

risolviamo l'integrale a secondo membro per parti

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

quindi

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x + C$$

ora, $y = uv$, per cui

$$y = e^{-x} \cdot \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + Ce^{-x} = \frac{\sin x + \cos x}{2} + Ce^{-x}$$

ricaviamo la soluzione particolare

$$\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \quad C = 0$$

e la soluzione è

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{2}$$

Equazioni differenziali di ordine superiore

Esercizio 118. Determina l'integrale generale dell'equazione: $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Soluzione. Risolviamo introducendo l'equazione caratteristica:

$$u^2 + 2u - 3 = 0 \quad u = -1 \pm \sqrt{1+3} \quad u_1 = -3 \quad x_2 = 1$$

essendo $\Delta > 0$, la soluzione

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

Esercizio 119. Determina l'integrale generale dell'equazione: $y'' + 2y' + 4y = 0$.

Soluzione. Risolviamo introducendo l'equazione caratteristica:

$$u^2 + 2u + 4 = 0 \quad u = -1 \pm \sqrt{1-4} \quad u_{1,2} = -1 \pm 3i$$

essendo $\Delta < 0$, la soluzione

$$y = e^{-x} (c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x)$$

Esercizio 120. Determina l'integrale generale dell'equazione: $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Soluzione. Risolviamo introducendo l'equazione caratteristica:

$$u^2 - 6u + 9 = 0 \quad u = 3 \pm \sqrt{9-9} \quad u_{1,2} = 3$$

essendo $\Delta = 0$, la soluzione

$$y = e^{3x} (c_1 + c_2 x)$$

Esercizio 121. Determina l'integrale generale dell'equazione: $y'' + y' = 10$.

Soluzione. Equazione non omogenea. Troviamo prima l'integrale generale della omogenea associata

$$y'' + y' = 0$$

Risolviamo introducendo l'equazione caratteristica:

$$u^2 + 1 = 0 \quad u = \pm i$$

essendo $\Delta > 0$, la soluzione

$$y = c_1 e^{-x} + c_2$$

cerchiamo ora un integrale particolare che sarà di forma polinomiale

$$g(x) = Ax^2 + Bx + C \quad g'(x) = 2Ax + B \quad g''(x) = 2A$$

sostituendo avremo

$$2A + 2Ax + B = 10$$

cioè

$$A = 0 \quad B = 10$$

la soluzione completa sarà

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 + 10x$$

La soluzione di queste equazioni passa soprattutto nell'abbassamento del loro ordine mediante una sostituzione del tipo $y' = p$ e $y'' = p \frac{dp}{dy}$ qualora nell'equazione compaia la sola variabile y . Vi sono anche equazione a soluzione immediata come nell'esercizio che segue:

Esercizio 122. $y'' = \frac{1}{x}$.

Soluzione. $y' = \ln|x| + C_1$, e $y = x \ln|x| - x + C_1 x + C_2$

Esercizio 123. $y'' = -\frac{1}{2y^3}$

Soluzione. poniamo $y' = p$ e $y'' = p \frac{dp}{dy}$, da cui

$$p \frac{dp}{dy} = -\frac{1}{2y^3}$$

e separando le variabili

$$p dp = -\frac{dy}{2y^3} = -\frac{1}{2} y^{-3} dy$$

passando agli integrali

$$\int p dp = -\frac{1}{2} \int y^{-3} dy \quad \frac{p^2}{2} = -\frac{1}{2} \int y^{-3} dy \quad p^2 = \frac{1}{2y^2} + C_1$$

da cui

$$y'^2 - \left(\frac{1}{2y^2} + C_1\right) = 0 \quad \left(y' - \sqrt{\frac{1}{2y^2} + C_1}\right) \left(y' + \sqrt{\frac{1}{2y^2} + C_1}\right) = 0$$

risolviamo il primo fattore

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + 2C_1 y^2}{y^2}}$$

da cui

$$\int \sqrt{\frac{y^2}{1 + 2C_1 y^2}} dy = \int \frac{dx}{\sqrt{2}} \quad \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2C_1} \int \frac{2C_1 y}{\sqrt{1 + 2C_1 y^2}} dy$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}C_1} \sqrt{1 + 2C_1 y^2} + C_2$$

Esercizio 124. $x^2y'' + xy' = 1$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e avremo

$$x^2p' + xp = 1$$

introduciamo una nuova sostituzione: $p = uv$ e quindi $p' = u'v + uv'$; otterremo

$$x^2(u'v + uv') + uvx = 1$$

cioè

$$x^2u'v + x^2uv' + uvx = 1$$

raccogliendo i termini contenenti v e ponendo uguale a zero, abbiamo

$$v(x^2u' + ux) + x^2uv' = 1$$

$$x^2u' + ux = 0$$

e separando le variabili e passando agli integrali

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x} \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \quad u = \frac{1}{x}$$

sostituendo nell'equazione $x^2uv' = 1$

$$xv' = 1$$

da cui

$$v = \ln x + C_1$$

ma essendo $p = uv$, e $p = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \ln x + \frac{C_1}{x}$$

ossia

$$y = \int \frac{\ln x}{x} dx + \int \frac{C_1}{x} dx = \int \ln x (d \ln x) + C_1 \ln |x| + C_2$$

da cui

$$y = \frac{1}{2} |\ln x|^2 + C_1 \ln |x| + C_2$$

Esercizio 125. $yy'' = y^2y' + y'^2$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p \frac{dp}{dy}$; l'equazione infatti non contiene termini in x

$$yp \frac{dp}{dy} = y^2p + p^2$$

dividendo per py

$$\frac{dp}{dy} = y + \frac{p}{y}$$

e introducendo la nuova sostituzione $p = uy$, $p' = u + yu'$, avremo

$$u + yu' = y + u$$

da cui $u' = 1$ e $u = y + C_1$, $p = y^2 + C_1y$; ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1y \quad \int \frac{dy}{y^2 + C_1y} \int dx \quad x = \int \frac{dy}{y(y + C_1)}$$

risolviamo questo integrale

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{y(y+C_1)} = \frac{1}{y(y+C_1)}$$

da cui $Ay + AC_1 + By = 1$, che dà

$$A = \frac{1}{C_1} \quad B = -\frac{1}{C_1}$$

e quindi

$$x = \frac{1}{C_1} \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{C_1} \int \frac{dy}{y+C_1} = \frac{1}{C_1} \ln|y| - \frac{1}{C_1} \ln|C_1+y| + C - 2$$

ossia

$$x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{C_1+y} \right| + C_2$$

Esercizio 126. $yy'' - y'(1+y') = 0$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p \frac{dp}{dy}$; l'equazione infatti non contiene termini in x

$$yp \frac{dp}{dy} - p(1+p) = 0$$

dividendo per py

$$\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y} - \frac{p}{y} = 0$$

e introducendo la nuova sostituzione $p = uy$, $p' = u + yu'$, avremo

$$u + yu' - \frac{1}{y} - u = 0$$

da cui $u' = \frac{1}{y^2}$ e $u = -\frac{1}{y} + C_1$, per cui $p = -1 + C_1y$; ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui

$$\frac{dy}{dx} = C_1y - 1 \quad x = \int \frac{dy}{C_1y - 1}$$

ossia

$$x = \ln|C_1y - 1| + C_2$$

Esercizio 127. $y'' = -\frac{x}{y'}$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p'$;

$$p' = -\frac{x}{p}$$

ossia

$$p \frac{dp}{dx} = -x$$

e separando le variabili e passando agli integrali

$$pdp = -x dx \quad \int pdp = -\int x dx$$

da cui

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_0 \quad p = \pm \sqrt{C_1 - x^2}$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 - x^2}$$

da cui

$$dy = \pm \sqrt{C_1 - x^2} dx \quad y = \pm \int \sqrt{C_1 - x^2} dx$$

risolviamo l'integrale con la sostituzione $x = \sqrt{C_1} \sin t$, e $dx = \sqrt{C_1} \cos t dt$,

$$y = \pm \int \sqrt{C_1 (1 - \sin^2 t)} \cos t dt = \pm \sqrt{C_1} \int \cos^2 t dt$$

e applicando le formule di bisezione

$$y = \pm \sqrt{C_1} \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pm \sqrt{C_1} \left(\frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt \right) = \pm \sqrt{C_1} \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + C_2$$

ma $t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1}}$

$$y = \pm \sqrt{C_1} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1}} + \frac{x}{C_1} \sqrt{C_1 - x^2} \right) + C_2$$

Esercizio 128. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p'$;

$$xp' = p \ln \frac{p}{x}$$

e dividendo per x

$$p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}$$

questa equazione, abbassata di grado, si può risolvere ponendo $\frac{p}{x} = u$ e $p' = u + xu'$

$$u + xu' = u \ln u \quad x \frac{du}{dx} = u (\ln u - 1) \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{u (\ln u - 1)}$$

passando agli integrali

$$\ln |x| = \int \frac{du}{u (\ln u - 1)} = \int \frac{d(\ln u)}{(\ln u - 1)} = \ln |\ln u - 1| + \ln C_1$$

da cui

$$x = C_1 \ln u - C_1$$

ma $u = \frac{p}{x}$

$$x = C_1 \ln \frac{p}{x} - C_1 \quad x + C_1 = C_1 \ln \frac{p}{x} \quad \frac{x}{C_1} + 1 = \ln \frac{p}{x}$$

cioè

$$e^{\frac{x}{C_1} + 1} = \frac{p}{x}$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui, separando le variabile e passando agli integrali

$$y = \int x e^{\frac{x}{C_1}} dx$$

e integrando per parti

$$y = C_1 e^{\frac{x}{C_1} + 1} (x - C_1) + C_2$$

Esercizio 129. Trovare la soluzione particolare di $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$ con $y = 0, y' = 3$ per $x = 0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p'$;

$$(1+x^2)p' - 2xp = 0 \quad p' - \frac{2x}{x^2+1}p = 0$$

questa è un'equazione differenziale omogenea di primo grado

$$p = C_1 e^{+\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = C_1 e^{\ln(x^2+1)} = C_1 (x^2 + 1)$$

ma $p = y' = \frac{dy}{dx}$, per cui

$$\frac{dy}{dx} = C_1 (x^2 + 1) \quad \int dy = C_1 \int (x^2 + 1) dx$$

e quindi

$$y = C_1 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + C_2$$

troviamo il valore di C_1 , imponendo la condizione assegnata

$$3 = C_1$$

troviamo ora C_2

$$0 = 3 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + C_2$$

cioè

$$C_2 = 0$$

e la soluzione particolare è

$$y = x^3 + 3x$$

Esercizio 130. Trovare la soluzione particolare di $1 + y'^2 = 2yy'' = 0$ con $y = 1, y' = 1$ per $x = 1$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p \frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$1 + p^2 = 2yp \frac{dp}{dy} \quad \frac{1+p^2}{p} = 2y \frac{dp}{dy}$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \int \frac{2p}{1+p^2} dp$$

da cui

$$\ln |y| = \ln |1+p^2| + \ln C \quad y = C_1 (1+p^2)$$

ma $p = y'$, e quindi

$$y = C_1 + C_1 y'^2 \quad y'^2 = \frac{y}{C_1} - 1$$

risolviamo rispetto a y'

$$y' = \pm \sqrt{\frac{y-C_1}{C_1}} \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{C_1}} \sqrt{y-C_1}$$

passando agli integrali e risolvendo

$$\sqrt{C_1} \int \frac{dy}{\sqrt{y-C_1}} = \pm \int dx$$

cioè

$$2\sqrt{C_1}\sqrt{y-C_1} = \pm x + C_2$$

trovo C_1

$$1 = \pm \sqrt{\frac{1-C_1}{C_1}} \quad \sqrt{C_1} = \sqrt{1-C_1} \quad C_1 = \frac{1}{2}$$

trovo C_2

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \pm 1 + C_2 \quad 1 = 1 + C_2 \quad C_2 = 0$$

e la soluzione particolare è

$$y = \frac{x^2 + 1}{2}$$

Esercizio 131. Trovare la soluzione particolare di $yy'' + y'^2 = y^3$ con $y = 1$, $y' = 1$ per $x = 0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p\frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$yp\frac{dp}{dy} = p^3 - p^2 \quad \frac{dp}{dy} = \frac{p^3 - p^2}{yp}$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{p}{p^3 - p^2} dp \quad \ln|y| = \int \frac{dp}{p^2 - p}$$

risolviamo l'integrale sostituendo alla frazione la somma di due frazioni con numeratore da individuare

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} = \frac{1}{p(p-1)}$$

moltiplicando e confrontando i termini di pari grado

$$Ap - A + Bp = 1 \quad p(A+B) - A = 1 =$$

da cui $A = -1$ e $B = 1$, per cui

$$\ln|y| = \int \frac{dp}{p} + \int \frac{dp}{p-1} \quad \ln C_1 |y| = \ln \left| \frac{p-1}{p} \right|$$

cioè

$$C_1 y = \frac{p-1}{p} \quad C_1 y = \frac{y' - 1}{y'}$$

cioè

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - C_1 y}$$

da cui, separando le variabili

$$x = y - \frac{C_1}{2} y^2 + C_2$$

trovo C_1

$$C_1 = 0$$

trovo C_2

$$0 = 1 + C_2 \quad C_2 = -1$$

e la soluzione particolare è

$$y = x + 1$$

Esercizio 132. Trovare la soluzione particolare di $y''y^3 = 1$ con $y = 1$, $y' = 1$ per $x = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p \frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$p \frac{dp}{dy} y^3 = 1 \quad p \frac{dp}{dy} = \frac{1}{y^3}$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int p dp = \int y^{-3} dy$$

da cui

$$p^2 = -\frac{1}{y^2} + 2C_1$$

cioè

$$p = \pm \frac{\sqrt{2C_1 y^2 - 1}}{y}$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui, separando le variabili

$$\int dx = \pm \int \frac{y dy}{\sqrt{2C_1 y^2 - 1}} = \pm \frac{1}{2C_1} \int \frac{2C_1 y dy}{\sqrt{2C_1 y^2 - 1}}$$

ma $D \left[\sqrt{2C_1 y^2 - 1} \right] = \frac{2C_1 y}{\sqrt{2C_1 y^2 - 1}}$, per cui

$$x = \pm \frac{1}{2C_1} \sqrt{2C_1 y^2 - 1} + C_2$$

trovo C_1

$$1 = \pm \sqrt{2C_1 - 1} \quad C_1 = 1$$

trovo C_2

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 1} + C_2 \quad C_2 = 1$$

e la soluzione particolare è

$$2y^2 - 4x^2 = 1$$

Esercizio 133. Trovare la soluzione particolare di $yy'' + y'^2 = 1$ con $y = 1$, $y' = 1$ per $x = 0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p \frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 1 \quad yp \frac{dp}{dy} = 1 - p^2$$

separando le variabili e passando agli integrali

$$\int \frac{p dp}{1 - p^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2p dp}{1 - p^2} = \int \frac{dy}{y}$$

da cui

$$\ln |1 - p^2| = \ln \frac{C_1}{y^2}$$

cioè

$$p^2 = 1 - C_1 y^{-2}$$

e

$$p = \pm \frac{\sqrt{y^2 - C_1}}{y}$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui, separando le variabili

$$\int dx = \pm \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - C_1}}$$

ma $D[\sqrt{y^2 - C_1}] = \frac{y}{\sqrt{y^2 - C_1}}$, per cui

$$x = \pm \sqrt{y^2 - C_1} + C_2$$

trovo C_1

$$1 = \pm \sqrt{1 - C_1} \quad C_1 = 0$$

trovo C_2

$$0 = C_2 - 1 \quad C_2 = 1$$

e la soluzione particolare è

$$x = y + 1$$

Esercizio 134. Trovare la soluzione particolare di $y'' + y'^2 + y'(y - 1) = 0$ con $y = 2$, $y' = 2$ per $x = 0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p \frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$p \frac{dp}{dy} - p^2 + p(y - 1) = 0 \quad \frac{dp}{dy} - p = -(y - 1)$$

questa è un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 1$; introduciamo pertanto la sostituzione $p = uv$ e $p' = u'v + u'v$

$$u'v + u'v - uv - 1 + y = 0$$

ricaviamo u raccogliendo i termini contenenti v

$$v(u' - u) + uv' - 1 + y = 0$$

da cui

$$u' - u = 0 \quad u = e^y$$

e sostituendo

$$e^y v' + y - 1 = 0$$

cioè

$$v' = \frac{dv}{dy} = \frac{1-y}{e^y} \quad v = \int \frac{1-y}{e^y} dy = ye^{-y}$$

pertanto

$$p = uv = e^y (ye^{-y}) = y + C_1$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui, separando le variabili

$$dx = \frac{dy}{y+C_1} \quad x = \ln(y + C_1) + C_2$$

trovo C_1

$$2 = 2 + C_1 \quad C_1 = 0$$

trovo C_2

$$0 = \ln 2 + C_2 \quad C_2 = -\ln 2$$

e la soluzione particolare è

$$x = \ln y - \ln 2 = \ln \frac{y}{2}$$

da cui

$$y = 2e^x$$

Esercizio 135. Trovare la soluzione particolare di $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$ con $y = 1, y' = 1$ per $x = 0$.

Soluzione. Introduciamo la sostituzione $y' = p$ e $y'' = p \frac{dp}{dy}$ (non compare il termine x);

$$y^2 + p^2 - 2yp \frac{dp}{dy} = 0$$

introduciamo pertanto la sostituzione $p = uv$ e $p' = u'v + u'v$

$$y^2 + u^2v^2 - 2yuv(u'v + u'v) = 0$$

svolgendo e raccogliendo i termini contenenti v

$$v^2(u^2 - 2yuu') + y^2 - 2yu^2vv' = 0$$

da cui, ricavando u

$$2yuu' = u^2 \quad 2y \frac{du}{dy} = u$$

separando le variabili

$$\ln |u| = \frac{1}{2} \ln |y| \quad u = \sqrt{y}$$

ora sostituendo questo valore di u , abbiamo

$$y^2 - 2y^2vv' = 0 \quad vv' = \frac{1}{2} \quad v = \sqrt{y}$$

per cui

$$p = uv = \sqrt{y} \cdot \sqrt{y} \quad p = y + C_1$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$, per cui, separando le variabili

$$dx = \frac{dy}{y+C_1} \quad x = \ln |y + C_1| + C_2$$

trovo C_1

$$1 = 1 + C_1 \quad C_1 = 0$$

trovo C_2

$$0 = \ln 1 + C_2 \quad C_2 = 0$$

e la soluzione particolare è

$$x = \ln y$$

o

$$y = e^x$$

Equazioni differenziali lineari

Esercizio 136. Trovare la soluzione particolare di $xy'' + y' = x^2$

Soluzione. L'equazione omogenea associata è $xy'' + y' = 0$; risolviamo tale equazione sostituendo $y' = x$ e $y'' = p'$; avremo

$$xp' + p = 0 \quad x \frac{dp}{dx} = -p \quad \int \frac{dx}{x} = - \int \frac{dp}{p}$$

da cui

$$\ln |x| = \ln \left| \frac{C_1}{p} \right| \quad p = \frac{C_1}{x}$$

ma $p = \frac{dy}{dx}$ per cui

$$y = C_1 \ln x + C_2$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea di tipo $y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = 0$ ha la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$

La soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea (come in questo esercizio) ha la forma $y = y_0 + Y$, dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e Y è la soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Se è noto un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea, la soluzione generale dell'equazione non omogenea corrispondente può essere trovata dalla formula $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$ dove le funzioni $C_i(x)$ sono definite dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n & = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n^{(n-1)}(x)y_n' & = f(x) \end{cases}$$

(metodo delle costanti arbitrarie).

Applichiamo il metodo sopra indicato, dove $y_1 = \ln x$ e $y_2 = 1$; inoltre, l'equazione data si può riscrivere come

$$\begin{cases} C_1'(x) \ln x + C_2'(x) \cdot 1 & = 0 \\ C_1'(x) \frac{1}{x} + C_2'(x) \cdot 0 & = x \end{cases}$$

risolvendo si ha

$$\begin{cases} C_1'(x) & = x^2 \\ C_2'(x) & = -x^2 \ln x \end{cases}$$

pertanto

$$C_1(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + A \quad C_2(x) = - \int x^2 \ln x dx = -\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + B$$

con A e B costanti arbitrarie. La soluzione sarà

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \left(\frac{x^3}{3} + A \right) \ln x + \left(-\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + B \right) = \frac{x^3}{9} + A \ln x + B$$

Esercizio 137. Trovare la soluzione particolare di $xy'' - xy' = 3x^2$

Soluzione. L'equazione omogenea associata è $xy'' - xy' = 0$; risolviamo tale equazione

$$y'' = y' \quad y = C_1 + C_2 e^x$$

per cui $y_1 = C_1 \cdot 1$ e $y_2 = C_2 e^x$

La soluzione sarà della forma $y = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) e^x$; e l'equazione data si può scrivere come $y'' - y' = 3x$

Applicando ancora il metodo delle costanti arbitrarie, avremo

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^x & = 0 \\ C_1'(x)(-1) + C_2'(x) \cdot 0 & = 3x \end{cases}$$

risolvendo si ha

$$\begin{cases} C_1'(x) & = -3x \\ C_2'(x) & = 3xe^{-x} \end{cases}$$

pertanto

$$C_1(x) = -\int 3x dx = -\frac{3x^2}{2} + A \quad C_2(x) = 3 \int xe^x dx = -(x+1)e^{-x} + B$$

con A e B costanti arbitrarie. La soluzione sarà

$$y = -\frac{3x^2}{2} + A - (x+1)e^{-x} + Be^x =$$

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Esercizio 138. Trovare la soluzione generale dell'equazione $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$

Soluzione. Questa equazione è del tipo $y'' + y' + y = f(x)$. La sua soluzione generale può essere scritta come $y = y_0 + Y$ dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e Y una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione con secondo membro nullo è $2y'' - y' - y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $2k^2 - k - 1 = 0$, le cui soluzioni sono $k_2 = -\frac{1}{2}$ e $k_1 = 1$.

In questo caso la funzione $f(x)$ che caratterizza il secondo membro ha la forma di $e^{ax}P_n(x)$ dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n . Nel nostro caso $a = 2$ e $n = 1$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi del tipo $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, essendo $(k_1 \neq k_2) \in \mathbb{R}$ e quindi

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{-\frac{x}{2}}$$

Le caratteristiche evidenziate della funzione al secondo membro, consentono di esprimere la soluzione particolare nella forma

$$Y = e^{2x}(Ax + B)$$

Deriviamo due volte

$$Y' = 2e^{2x}(Ax + B) + Ae^{2x} \quad Y'' = 4e^{2x}(Ax + B) + 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x}$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e confrontiamo i termini in x con lo stesso grado e dividendo poi il tutto per e^{2x} , avremo

$$5Ax + 7A + 5B = 4x$$

da cui

$$5A = 4 \quad 7A + 5B = 0$$

avremo

$$A = \frac{4}{5} \quad B = -\frac{28}{25}$$

e la soluzione sarà

$$y = C_1e^x + C_2e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)$$

Esercizio 139. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - 2y' + y = xe^x$

Soluzione. Questa equazione è ancora del tipo $y'' + y' + y = f(x)$. La sua soluzione generale può essere scritta come $y = y_0 + Y$ dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e Y una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea è $y'' - 2y' + y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 2k + 1 = 0$, che essendo il quadrato di un binomio, ammette due radici uguali $K_1 = k_2 = 1$.

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $y_0 = e^x (C_1 + C_2x)$

In questo caso la funzione $f(x)$ che caratterizza il secondo membro ha la forma di $e^{ax}P_n(x)$ dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n . Nel nostro caso $a = 1$ e $n = 1$. La soluzione particolare Y , questa volta, avendo l'equazione caratteristica una radice doppia, sarà del tipo $y = x^r e^{ax}Q_n(x) = x^2 e^x (Ax + B)$, dove $r = 2$, indica l'ordine della radice

Deriviamo due volte

$$Y' = 2xe^x (Ax + B) + x^2 e^x (Ax + B) + Ax^2 e^x$$

$$Y'' = 4xe^x (Ax + B) + x^2 e^x (Ax + B) + 2e^x (Ax + B) + 2Ax^2 e^x + 4xe^x$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e confrontiamo i termini in x con lo stesso grado e dividendo poi il tutto per e^{2x} , avremo

$$6Ax + 4B = x$$

da cui

$$A = \frac{1}{6} \quad B = 0$$

e la soluzione sarà

$$y = e^x (C_1 + C_2x) + \frac{1}{6}x^3 e^x$$

Esercizio 140. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' + y = x \sin x$

Soluzione. Questa equazione è ancora del tipo $y'' + y' + y = f(x)$. La sua soluzione generale può essere scritta come $y = y_0 + Y$ dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e Y una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea è $y'' + y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 + 1 = 0$, che ammette solo radici complesse $K = \pm i$ (Un numero complesso può essere rappresentato da $k = \alpha \pm i\beta$, nel nostro caso quindi $\alpha = 0$ e $\beta = 1$)

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $y_0 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

$f(x) = x \sin x$, cioè della forma $e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$. Nel nostro caso $a = 0$ e $b = 1$, $P_n(x) = 0$ e $Q_m(x) = x$, quindi $a = 0$, $b = 1$, $r = 1$ e la soluzione particolare è del tipo

$$Y = x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$$

Deriviamo due volte

$$Y' = 2Ax \cos x - Ax^2 \sin x + B \cos x - Bx \sin x + 2Cx \sin x + Cx^2 \cos x + D \sin x + Dx \cos x$$

$$Y'' = -Ax^2 \cos x - Cx^2 \sin x - 4Ax \sin x - Bx \cos x + 4Cx \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x + 2D \cos x - Dx \sin x$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data

$$-4Ax \sin x + 4Cx \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x + 2D \cos x = x \sin x$$

e confrontando i termini in $x \cos x$, $x \sin x$, $\cos x$, $\sin x$, avremo

$$A = -\frac{1}{4} \quad B = 0 \quad D = \frac{1}{4} \quad C = 0$$

e la soluzione sarà

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{4}x^2 \cos x + \frac{1}{4}x \sin x$$

Esercizio 141. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - 5y' + 6y = 0$

Soluzione. Questa equazione è omogenea e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 5k + 6 = 0$, che ammette le radici $k_1 = 2$ e $k_2 = 3$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ per cui

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Esercizio 142. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - 2y' + 2y = 0$

Soluzione. Questa equazione è omogenea e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 2k + 2 = 0$, che ammette radici complesse $k_1 = 1 - i$ e $k_2 = 1 + i$, per cui $\alpha = 1$ e $\beta = 1$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ per cui

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Esercizio 143. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$\frac{y' - y}{y''} = 3$$

Soluzione. Questa equazione si può riscrivere come

$$3y'' - y' + y = 0$$

e risulta quindi omogenea; la sua equazione caratteristica è $3k^2 - k + 1 = 0$, che ammette radici complesse

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{11}}{6} \quad k_2 = \frac{1 + \sqrt{11}}{6}$$

per cui $\alpha = \frac{1}{6}$ e $\beta = \frac{\sqrt{11}}{6}$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ per cui

$$y = e^{\frac{x}{6}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{6} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{6} x \right)$$

Esercizio 144. Trovare la soluzione particolare dell'equazione $y'' - 5y' + 4y = 0$ quando per $x = 0$, si ha $y = 5$ e $y' = 8$

Soluzione. Questa equazione è omogenea; la sua equazione caratteristica è $k^2 - 5k + 4 = 0$, che ammette le soluzioni

$$k_1 = 1 \quad k_2 = 4$$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

calcoliamo la derivata prima di tale soluzione

$$y' = C_1 e^x + 4C_2 e^{4x}$$

per cui

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ C_1 + 4C_2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

e la soluzione particolare è

$$y = 4e^x + e^{4x}$$

Esercizio 145. Trovare la soluzione particolare dell'equazione $y'' + 4y = 0$ quando per $x = 0$, si ha $y = 0$ e $y' = 2$

Soluzione. Questa equazione è omogenea; la sua equazione caratteristica è $k^2 + 4 = 0$, che ammette come soluzioni $k = \pm 2i$, ($\alpha = 0$ e $\beta = 2$)

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto,

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

calcoliamo la derivata prima di tale soluzione

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$$

per cui

$$C_1 = 0 \quad C_2 = 1$$

e la soluzione particolare è

$$y = \sin 2x$$

Esercizio 146. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$

Soluzione. Questa equazione è ancora del tipo $y'' + y' + y = f(x)$. La sua soluzione generale può essere scritta come $y = y_0 + Y$ dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e Y una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea è $y'' - 4y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 4 = 0$, che ammette le due soluzioni $k_1 = -2$ e $k_2 = 2$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto, del tipo $y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

$f(x) = x^2 e^{2x}$, cioè della forma $x^r e^{ax} Q_n(x)$. Nel nostro caso $a = 2$ e $r = 1$, e la soluzione particolare è del tipo

$$Y = x e^{2x} (Ax^2 + Bx + C)$$

Deriviamo due volte

$$Y' = e^{2x} (Ax^2 + Bx + C) + 2x e^{2x} (Ax^2 + Bx + C) + x e^{2x} (2Ax + B)$$

$$Y'' = 2e^{2x} (Ax^2 + Bx + C) + e^{2x} (2Ax + B) + 2e^{2x} (Ax^2 + Bx + C) + 4x e^{2x} (Ax^2 + Bx + C) + 2x e^{2x} (2Ax + B) + e^{2x} (2Ax + B) + 2x e^{2x} (2Ax + B) + 2A x e^{2x}$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data, dividendo tutto per e^{2x}

$$4Ax^2 + 4Bx + 4C - 8Ax^2 + 4Bx + 2A + B + 2A = x^2$$

cioè

$$-4Ax^2 + 8Bx + 4A + B + 4C = x^2$$

da cui

$$A = -\frac{1}{4} \quad B = 0 \quad C = \frac{1}{4}$$

e la soluzione sarà

$$y = x e^{2x} \left(-\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} \right)$$

Esercizio 147. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$

Soluzione. Questa equazione è del tipo $y'' + y' + y = f_1(x) + f_2(x)$. La sua soluzione generale può essere scritta come $y = y_0 + Y_1 + Y_2$ dove y_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea e $Y_1 + Y_2$ la somma delle soluzioni particolari dell'equazione completa.

L'equazione omogenea è $y'' - 4y' + 4y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 4k + 4 = 0$, che ammette la radice doppia $k = 2$.

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = e^{2x}(C_1 + C_2x)$

troviamo Y_1 per $f_1(x) = \sin x$, cioè della forma $e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$. Nel nostro caso $a = 0$ e $b = 2$, $P_n(x) = A$ e $Q_m(x) = B$, quindi $Y_1 = A\cos 2x + B\sin 2x$

troviamo ora Y_2 per $f_2(x) = e^{2x}$; sarà $Y_2 = Cx^2e^{2x}$; pertanto

$$Y = Y_1 + Y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x + Cx^2e^{2x}$$

Deriviamo due volte

$$Y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + 2Cxe^{2x} + 2Cx^2e^{2x}$$

$$Y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 2Ce^{2x} + 8Cxe^{2x} + 4Cx^2e^{2x}$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo

$$8A\sin 2x - 8B\cos 2x + 2Ce^{2x} = \sin 2x + e^{2x}$$

e confrontando i termini in $\cos 2x, \sin 2x, e^{2x}$, avremo

$$A = \frac{1}{8} \quad B = 0 \quad C = \frac{1}{2}$$

e la soluzione sarà

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

Esercizio 148. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - y' + y = x^3 + 6$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y'' - y' + y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - k + 1 = 0$, che ammette le due soluzioni complesse $k_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ e $k_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto,

$$y_0 = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

$f(x) = x^3 + 6$, cioè della forma $e^{ax}Q_n(x)$ con $a = 0$. La soluzione particolare è del tipo

$$Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Deriviamo due volte

$$Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$Y'' = 6Ax + 2B$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data

$$Ax^3 + x^2(B - 3A) + x(6A - 2B + C) + 2B + C + D = x^3 + 6$$

cioè

$$A = 1 \quad B - 3A = 0 \quad 6A - 2B + C = 0 \quad 2B + C + D = 6$$

da cui

$$A = 1 \quad B = 3 \quad C = D = 0$$

e la soluzione sarà

$$y = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + x^3 + 3x^2$$

Esercizio 149. Trovare la soluzione particolare dell'equazione $y'' + 2y' + y = e^{2x}$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $k^2 + 2k + 1 = 0$, che ammette due soluzioni coincidenti $k_{1,2} = -1$,

La soluzione dell'equazione omogenea è, pertanto,

$$y_0 = e^{-x} (C_1 + C_2x)$$

ora $f(x) = e^{2x}$ e quindi

$$Y = e^{ax} P_n(x) = Ae^{2x}$$

calcoliamo la derivata prima e seconda

$$Y' = 2Ae^{2x} \quad y'' = 4Ae^{2x}$$

sostituisco nell'equazione data

$$9Ae^{2x} = e^{2x}$$

da cui

$$A = \frac{1}{9}$$

e la soluzione è

$$y = e^{-x} (C_1 + C_2x) + \frac{1}{9}e^{2x}$$

Esercizio 150. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y'' + y' - 2y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 + k - 2 = 0$, che ammette le radici $k_1 = -2$ e $k_2 = 1$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1e^{-2x} + C_2e^x$

troviamo Y che sarà della forma $e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$. Nel nostro caso $a = 0$ e $b = 2$, $P_n(x) = A$ e $Q_m(x) = B$, quindi $Y = A \cos 2x + B \sin 2x$

Deriviamo due volte

$$Y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$$

$$Y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo

$$(-2A - 6B) \sin 2x + (-6A + 2B) \cos 2x = 8 \sin 2x$$

e confrontando i termini in $\cos 2x, \sin 2x$, avremo

$$A = -\frac{2}{5} \quad B = -\frac{6}{5}$$

e la soluzione sarà

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^x - \frac{2}{5} \cos 2x - \frac{6}{5} \sin 2x$$

Esercizio 151. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y'' - 7y' + 12y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 7k + 12 = 0$, che ammette le radici $k_1 = 3$ e $k_2 = 4$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$

troviamo Y che sarà della forma $e^{ax} P_n(x)$. Nel nostro caso $a = 4$, $P_n(x) = Ax$, quindi $Y = xAe^{4x}$

Deriviamo due volte

$$Y' = Ae^{4x} + 4Axe^{4x}$$

$$Y'' = 4Ae^{4x} + 4Ae^{4x} + 16Axe^{4x}$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo, dividendo tutto per e^{4x}

$$8A + 16Ax - 7A - 28Ax + 12Ax = -1$$

e confrontando i termini simili

$$A = -1$$

e la soluzione sarà

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} - x e^{4x}$$

Esercizio 152. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - 2y' + y = 2e^x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y'' - 2y' + y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 2k + 1 = 0$, che ammette due radici coincidenti $k = 1$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = e^x (C_1 + C_2 x)$

una soluzione particolare sarà $Y = Ax^2 e^x$

Deriviamo due volte

$$Y' = 2Axe^x + Ax^2 e^x$$

$$Y'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2 e^x$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo, dividendo tutto per e^x

$$2A + 4Ax + Ax^2 - 4Ax - 2Ax^2 + Ax^2 = 2$$

e confrontando i termini simili

$$A = 1$$

e la soluzione sarà

$$y = e^x (C_1 + C_2 e^x) + x^2 e^x$$

Esercizio 153. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8 \cos 2x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y'' - 2y' - 8y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 2k - 8 = 0$, che ammette le radici $k_1 = -2$ e $k_2 = 4$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$

troviamo Y_1 per $f_1(x) = e^x$, cioè della forma $Y_1 = Ae^x$

deriviamo due volte

$$Y_1' = Ae^x \quad Y_1'' = Ae^x$$

sostituendo e uguagliando a e^x , avremo $A = -\frac{1}{9}$

troviamo ora Y_2 per $f_2(x) = -8 \cos 2x$; sarà $Y_2 = B \cos 2x + C \sin 2x$;

Deriviamo due volte

$$Y_2' = -2B \sin 2x + 2C \cos 2x$$

$$Y_2'' = -4B \cos 2x - 4C \sin 2x$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo

$$\cos 2x (-12B - 4C) + \sin 2x (12C + 4B) = -8 \cos 2x$$

e confrontando i termini in $\cos 2x$, $\sin 2x$, avremo

$$B = \frac{3}{5} \quad C = \frac{1}{5}$$

e la soluzione sarà

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{9} e^x + \frac{3}{5} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x$$

Esercizio 154. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y'' - 2y' + 5y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 2k + 5 = 0$, che ammette le radici $k_1 = 1 - 2i$ e $k_2 = 1 + 2i$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

troviamo Y per $f(x) = e \cos 2x$, cioè $Y = e^x [Ax \cos 2x + Bx \sin 2x]$

deriviamo due volte

$$Y' = e^x [Ax \cos 2x + Bx \sin 2x] + e^x [A \cos 2x - 2Ax \sin 2x + B \sin 2x + 2Bx \cos 2x]$$

$$Y'' = e^x [Ax \cos 2x + Bx \sin 2x] + 2e^x [A \cos 2x - 2Ax \sin 2x + B \sin 2x + 2Bx \cos 2x] + e^x [-4A \sin 2x - 4Ax \cos 2x + 4B \cos 2x + 4Bx \sin 2x]$$

sostituendo e dividendo per e^x , avremo

$$(4B) \cos 2x + (-4A) \sin 2x = \cos 2x$$

da cui $B = \frac{1}{4}$ e $A = 0$

e la soluzione sarà

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4} x e^x \sin 2x$$

Esercizio 155. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' + y' = 2e^x + 5x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y'' + y' = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 + k = 0$, che ammette le radici $k_1 = -1$ e $k_2 = 0$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2$

troviamo Y_1 per $f_1(x) = 2e^x$, cioè della forma $Y_1 = Ae^x$

deriviamo due volte

$$Y_1' = Ae^x \quad Y_1'' = Ae^x$$

sostituendo e uguagliando a e^x , avremo $A = 1$ e quindi $Y_1 = e^x$

troviamo ora Y_2 per $f_2(x) = 5x$; sarà $Y_2 = x(Ax + B)$;

Deriviamo due volte

$$Y_2' = 2Ax + B$$

$$Y_2'' = 2A$$

sostituiamo le derivate nell'equazione data e otteniamo

$$2A + 2Ax + B = 5x$$

e confrontando i termini simili, avremo

$$A = \frac{5}{2} \quad B = -5$$

con $Y_2 = \frac{5}{2}x^2 - 5x$ e la soluzione generale sarà

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 + \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x$$

Esercizio 156. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - y = 2x \sin x$

Soluzione. L'equazione omogenea è $y'' - y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^2 - 1 = 0$, che ammette le radici $k_1 = -1$ e $k_2 = 1$

La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$

troviamo Y per $f(x) = 2x \sin x$, della forma $Y = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$
deriviamo due volte

$$Y' = (A + Cx + D) \cos x + (C - Ax - B) \sin x$$

$$Y'' = C \cos x - (A + Cx + D) \sin x - A \sin x + (C - Ax - B) \cos x$$

sostituendo

$$(-2A - 2D) \sin x - 2Cx \sin x + (2C - 2B) \cos x - 2Ax \cos x = 2x \sin x$$

e uguagliando i termini con $\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x$, avremo $A = 0, B = -1, C = -1, D = 0$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \cos x - x \sin x$$

Esercizio 157. Due carichi uguali sono sospesi all'estremità di una molla. Trovare l'equazione del moto descritto da uno di questi carichi se l'altro si stacca dalla molla.

Soluzione. Introduciamo le seguenti condizioni: allungamento della molla sotto l'azione di uno dei carichi a riposo uguale ad a e massa del carico m . Se x è la coordinata del carico misurata lungo la verticale a partire dalla posizione di equilibrio in presenza di un carico, si ha

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - \frac{mg}{a} (x + a)$$

riscriviamo l'equazione in una forma più sintetica

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{a} x$$

che possiamo riscrivere ancora con le notazioni finora utilizzate

$$x''(t) + \frac{g}{a} x = 0$$

Equazione omogenea di tipo $k^2 = -\frac{g}{a}$, le cui soluzioni sono $k_1 = -\sqrt{\frac{g}{a}}$ e $k_2 = \sqrt{\frac{g}{a}}$

La soluzione sarà

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t$$

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = -C_1 \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t + C_2 \sqrt{\frac{g}{a}} \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t$$

se le condizioni iniziali sono $x_0 = a$ e $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 = 0$, si ottiene $C_1 = a$ e $C_2 = 0$, si ha

$$x = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t$$

0.1 Equazioni a coefficienti costanti di grado superiore al secondo**Esercizio 158.** Trova la soluzione generale della seguente equazione $y''' - 13y'' + 12y' = 0$ **Soluzione.** L'equazione è omogenea e come per il caso delle equazioni di grado due

$$k(k^2 - 13k + 12k) = 0 \quad k_1 = 0 \quad k_2 = 1 \quad k_3 = 12$$

per cui la soluzione generale, sulla falsariga delle equazioni di secondo grado

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{12x}$$

Esercizio 159. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3$ **Soluzione.** L'equazione omogenea è $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$ e la sua equazione caratteristica è $k^4 - 2k^3 + k^2 = 0$, che ammette le radici doppie $k_{1,2} = 0$ e $k_{3,4} = 1$ La soluzione dell'equazione omogenea è $y_0 = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x$ $f(x) = x^3$ per cui Y è della forma $Y = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$

deriviamo quattro volte

$$Y' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx \quad Y'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D$$

$$Y''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C \quad Y^{IV} = 120Ax + 24B$$

sostituendo e raggruppando secondo le potenze di x , si ha

$$x^3(20A) + x^2(-120A + 12B) + x(120A - 48B + 6C) + (24B - 12C + 2D) = x^3$$

e confrontando i termini simili, avremo $A = \frac{1}{20}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 3$, $D = 12$ e la soluzione generale sarà

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2$$

Esercizio 160. Calcolare gli integrali della seguente equazione differenziale

$$(1 + \tan^2 y) \tan y \cdot e^{\tan^2 y} \cdot y' = e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

Soluzione. L'equazione può essere risolta con il metodo delle variabili separabili

$$\left[(1 + \tan^2 y) \tan y \cdot e^{\tan^2 y} \right] dy = \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \right) dx$$

da cui

$$\int (1 + \tan^2 y) \tan y \cdot e^{\tan^2 y} dy = \int \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \right) dx$$

risolviamo il primo integrale sostituendo $\tan y = t$, per cui, essendo $y = \arctan t$, si ha $dy = \frac{1}{1+t^2} dt$ e l'integrale diviene

$$\frac{1}{2} \int t e^{t^2} 2t dt = \frac{1}{2} \int e^{t^2} d(t^2) = \frac{1}{2} e^{t^2}$$

sostituendo nuovamente, si ha

$$\int (1 + \tan^2 y) \tan y \cdot e^{\tan^2 y} dy = \frac{1}{2} e^{\tan^2 y} + C_1$$

risolviamo ora il secondo integrale

$$\int \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

anche qui operiamo la sostituzione $\sqrt[3]{x} = t$ da cui $dx = 3tdt^2$; l'integrale diviene

$$\int \frac{e^t}{t^2} \cdot 3t^2 dt = 3 \int e^t dt = 3e^t$$

da cui

$$\int \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = 3e^{\sqrt[3]{x}} + C_2$$

Confrontando i risultati dei due integrali, si ha

$$\frac{1}{2} e^{\tan^2 y} = 3e^{\sqrt[3]{x}}$$

passando al logaritmo naturale, si ha

$$\ln \left(\frac{1}{2} e^{\tan^2 y} \right) = \ln \left(3e^{\sqrt[3]{x}} \right)$$

cioè

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{2} + \tan^2 y &= \ln 3 + \sqrt[3]{x} \\ \tan^2 y &= \ln 6 + \sqrt[3]{x} \\ y &= \pm \arctan (\ln 6 + \sqrt[3]{x}) + C \end{aligned}$$

Esercizio 161. Risolvere la seguente equazione differenziale $y' - x \sin x (y^2 - 4y - 5) = 0$

Soluzione. Equazione del primo ordine a variabili separabili.

$$\frac{dy}{(y^2 - 4y - 5)} = x \sin x dx$$

integrando entrambi i membri

$$\int \frac{dy}{(y^2 - 4y - 5)} = \int x \sin x dx$$

Calcoliamo l'integrale della funzione razionale al primo membro, dopo aver scomposto il denominatore

$$\int \frac{dy}{(y-5)(y+1)} \quad \text{si ha} \quad \frac{1}{(y-5)(y+1)} = \frac{A}{y-5} + \frac{B}{y+1}$$

$$1 = y(A+B) + (A-5B)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-5B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

da cui

$$\frac{1}{6} \int \frac{dy}{(y-5)} - \frac{1}{6} \int \frac{dy}{y+1} = \int x \sin x dx$$

risolviamo l'integrale al secondo membro per parti, osservando che $\sin x dx = d(-\cos x)$

$$\frac{1}{6} \int \frac{dy}{(y-5)} - \frac{1}{6} \int \frac{dy}{y+1} = -x \cos x + \int \cos x dx$$

avremo

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{y-5}{y+1} \right| &= 6(-x \cos x + \sin x + C) \\ \frac{y-5}{y+1} &= e^{6(-x \cos x + \sin x + C)} \end{aligned}$$

$$\frac{y-5}{y+1} - 1 = e^{6(-x \cos x + \sin x + C)} - 1$$

$$-\frac{6}{y+1} = e^{6(-x \cos x + \sin x + C)} - 1$$

da cui

$$y = \frac{-6}{e^{6(-x \cos x + \sin x + C)} - 1} - 1 = \frac{5 + e^{6(-x \cos x + \sin x + C)}}{1 - e^{6(-x \cos x + \sin x + C)}}$$

Esercizio 162. Determinare gli integrali di $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

Soluzione. Equazione del tipo $y' + P(x)y = Q(x)$. Risolviamo introducendo due funzioni, dipendenti da x , tali che $y = uv$, e derivando si ha $y' = u'v + uv'$. Sostituiamo nell'equazione data

$$u'v + uv' + uv \cos x = \sin x \cos x$$

cioè

$$uv' + v(u' + u \cos x) = \sin x \cos x$$

imponiamo $u' + u \cos x = 0$, da cui otteniamo, separando le variabili

$$\frac{du}{u} = -\cos x dx \quad \int \frac{du}{u} = -\int \cos x dx$$

$$\ln |u| = -\sin x \quad u = e^{-\sin x}$$

sostituiamo per ottenere v

$$e^{-\sin x} v' = \sin x \cos x$$

e di nuovo, separando le variabili

$$dv = \frac{\sin x \cos x}{e^{-\sin x}} \quad \int dv = \int \frac{\sin x \cos x}{e^{-\sin x}} dx$$

$$v = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx$$

poniamo $t = \sin x$, per cui $dt = \cos x dx$, l'integrale diviene $v = \int t e^t dt$; integriamo per parti:

$$v = t e^t - \int e^t dt = e^t (t - 1) = e^{\sin x} (\sin x - 1)$$

da cui

$$y = uv = e^{-\sin x} \cdot (e^{\sin x} (\sin x - 1) + C) = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$$

Esercizio 163. Dopo aver calcolato gli integrali dell'equazione differenziale $yy' = y^2 x e^x$, calcolare l'integrale particolare che soddisfa la condizione $y(1) = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Risolviamo con il metodo delle variabili separabili

$$\frac{y}{y^2} dy = x e^x dx$$

e integrando

$$\frac{1}{2} \int \frac{2y dy}{y^2} = \int x e^x dx$$

da cui, integrando per parti l'integrale al secondo membro

$$\frac{1}{2} \ln |y^2| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

risolviamo rispetto a y

$$y = C_1 e^{e^x(x-1)}$$

dove $C_1 = e^c$. L'integrale particolare sarà, sostituendo $\frac{1}{2} = C_1 e^{e \cdot 0} = C_1$

$$y = \frac{1}{2} e^{e^x(x-1)}$$

Esercizio 164. Trovare l'integrale che soddisfa la condizione $x \neq 3$ e la condizione iniziale $y(0) = 0$, della seguente equazione differenziale

$$x(y-1) = (x-3)^2 y'$$

Soluzione. risolviamo separando le variabili e integrando entrambi i membri

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y-1} &= \frac{x}{(x-3)^2} dx & \int \frac{dy}{y-1} &= \int \frac{x}{(x-3)^2} dx \\ \ln |y-1| &= \int \frac{x-3}{(x-3)^2} dx + 3 \int \frac{dx}{(x-3)^2} & \ln |y-1| &= \ln |(x-3)| - \frac{3}{x-3} + C \end{aligned}$$

la soluzione sarà

$$y-1 = C_1 (x-3)^2 e^{\frac{1}{3-x}} \quad y = C_1 (x-3)^2 e^{\frac{1}{3-x}} + 1$$

se $x \neq 3$, allora $y(0) = C_2 e^{\frac{1}{3}} + 1$

Esercizio 165. Risolvere la seguente equazione differenziale $y' - (y^2 - 4y - 21) \left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right) = 0$

Soluzione. risolviamo mediante la separazione delle variabili

$$\frac{dy}{y^2 - 4y - 21} = \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx$$

e passando all'integrale

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4y - 21} = \int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx$$

Risolviamo l'integrale al primo membro

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4y - 21} = \int \frac{1}{(y-7)(y+3)} dy$$

riscriviamo la frazione come somma di frazioni

$$\frac{1}{(y-7)(y+3)} = \frac{A}{y-7} + \frac{B}{y+3} = \frac{Ay + 3A + By - 7B}{(y-7)(y+3)} = \frac{y(A+B) + 3A - 7B}{(y-7)(y+3)}$$

ricaviamo A e B dal sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A - 7B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ B = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

l'integrale diviene

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4y - 21} = \frac{1}{10} \int \frac{dy}{y - 7} - \frac{1}{10} \int \frac{dy}{y + 3} = \frac{1}{10} \left(\ln \left| \frac{y - 7}{y + 3} \right| \right)$$

Risolviamo ora l'integrale al secondo membro

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx$$

introduciamo la sostituzione $1 + \sqrt{x} = t^2$ da cui $dx = 4t(t^2 - 1)$, l'integrale diviene

$$\int (4t^4 - 4t^2) dt = \frac{4}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 = \frac{4}{5}(1 + \sqrt{x})^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{15}(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(3\sqrt{x} - 2) + C$$

L'equazione differenziale avrà come soluzioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \left(\ln \left| \frac{y - 7}{y + 3} \right| \right) &= \frac{4}{15} (1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}} (3\sqrt{x} - 2) + C & \frac{y + -7}{y + 3} &= e^{\frac{8}{3}(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(3\sqrt{x} - 2) + C_1} \\ 1 - \frac{10}{y + 3} &= e^{\frac{8}{3}(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(3\sqrt{x} - 2) + C_1} & 1 - e^{\frac{8}{3}(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(3\sqrt{x} - 2) + C_1} &= \frac{10}{y + 3} \\ y &= \frac{10}{\left(1 - e^{\frac{8}{3}(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(3\sqrt{x} - 2) + C_1} \right)} - 3 \end{aligned}$$

Esercizio 166. Determinare gli integrali della seguente equazione differenziali

$$y - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} y' = 0$$

Soluzione. equazione differenziale lineare del primo ordine che risolviamo separando le variabili

$$\frac{dy}{dx} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} = y \quad \frac{dy}{y} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

l'integrale al primo membro è immediato $\int \frac{dy}{y} = \ln |y|$. Calcoliamo l'integrale al secondo membro operando la sostituzione $x = t^2$ da cui $dx = 2tdt$; l'integrale diviene

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\sqrt{1+t}}{t} \cdot 2tdt = 2 \int \sqrt{1+t} dt \\ &= 2 \int (1+t)^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} (1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Le soluzioni saranno

$$\ln |y| = \frac{4}{3} (1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C \quad y = C_1 e^{\frac{4}{3}(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}$$

Problemi

Esercizio 167. Crescita di una colonia di batteri. Una coltura di batteri cresce, istante per istante, con una velocità proporzionale al numero di batteri della colonia, secondo una costante $k = 10$. **a)** Indica con $y(t)$ il numero di batteri presenti dopo t ore dall'inizio dell'osservazione e scrivi l'equazione differenziale che deve soddisfare la funzione $y(t)$. Supposto che all'inizio fossero presenti 100 batteri, **b)** Determina la soluzione particolare dell'equazione differenziale che costituisce il modello del problema; **c)** Stabilisci da quanti batteri sarà costituita la colonia dopo 5 ore; **d)** Stabilisci dopo quanto tempo il numero di batteri sarà il doppio di quello iniziale. Esprimi il risultato in ore e minuti, arrotondato ai minuti.

Soluzione. **a)** La variazione in aumento del numero dei batteri nel tempo $\frac{dy}{dt} = y'$ avviene in modo costante, per cui

$$y' = \frac{1}{10}y$$

Risolviamo tale equazione trovando il suo integrale generale

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{10} \int dt \quad \ln y = \frac{t}{10} + C$$

da cui

$$y = Ce^{\frac{t}{10}}$$

b) la condizione iniziale $y(0) = 100$, consente di trovare la soluzione particolare

$$100 = C \cdot e^0 = C$$

per cui la soluzione è

$$y = 100e^{\frac{t}{10}}$$

c) dopo 5 ore, cioè con $t = 5$, avremo

$$y = 100\sqrt{e} \simeq 165$$

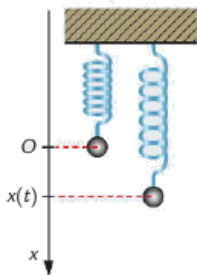
d) il numero di batteri diviene il doppio di quello iniziale, cioè 200, per cui

$$200 = 100e^{\frac{t}{10}} \quad \frac{t}{10} = \ln 2$$

cioè

$$t = 10 \ln 2 \simeq 6,93 \text{ ore} \simeq 6^h56^m$$

Esercizio 168. Un corpo di massa $m = 1 \text{ kg}$ è appeso a una molla di costante elastica $k = 9 \text{ N/m}$. Se si sposta il corpo dalla sua posizione di equilibrio O , esso effettua delle oscillazioni intorno a O . La posizione del corpo all'istante t è individuata dall'ascissa $x(t)$ (in metri) sull'asse delle ascisse rappresentato in figura.



0.1. EQUAZIONI A COEFFICIENTI COSTANTI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

a. La legge della fisica che esprime x in funzione di t soddisfa l'equazione differenziale

$$mx'' + kx = 0$$

di cui si chiede la soluzione generale.

Supposto che all'istante $t = 0$ il corpo si trovi sul semiasse delle ascisse positive a $0,5 m$ da O e che la sua velocità sia di $1,5 m/s$, determinare:

b. Determinare la soluzione particolare dell'equazione differenziale che soddisfa le precedenti condizioni.

Soluzione. La legge esprime l'azione della forza di gravità che estende la molla di costante elastica k . Risolviamo l'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti

$$mx'' + kx = 0$$

l'equazione caratteristica è

$$mr^2 + k = 0 \quad r^2 = -\frac{k}{m} \quad r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

essa ha $\Delta < 0$, e ricordando che $\omega^2 = \frac{k}{m}$ per cui

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

la sua velocità sarà

$$x'(t) = -c_1\omega \sin \omega t + c_2\omega \cos \omega t$$

b) se $x(0) = 0,5$ e $x'(0) = 1,5$ si ottiene (con $\omega = 3$)

$$c_1 = 0,5 \quad c_2 = \frac{1,5}{3} = 0,5$$

per cui

$$x(t) = 0,5 \cos(\omega t) + 0,5 \sin(\omega t)$$

Esercizio 169. Considera la seguente equazione differenziale:

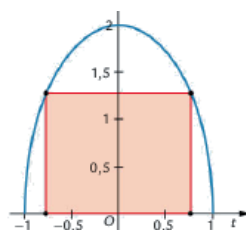
$$x(t) \cdot x'(t) = -4t$$

L'equazione differenziale assegnata identifica la relazione che c'è tra la velocità $x'(t)$ di un punto materiale, che si muove di moto rettilineo, la sua posizione $x(t)$ e il tempo t (le distanze sono espresse in metri, il tempo in secondi e si suppone che i coefficienti abbiano le opportune unità di misura).

a. Risolvi l'equazione differenziale assegnata e determina la soluzione particolare passante per il punto $P(0,2)$.

b. Verifica che il grafico della soluzione particolare trovata, in un sistema di assi in cui t è posto in ascissa e x in ordinata, è la semi ellisse rappresentata in figura. Tra i rettangoli inscritti nella regione di piano limitata dalla semi ellisse e dall'asse delle ascisse (in figura è rappresentato come esempio uno di tali rettangoli), determina quello di area massima.

c. Scrivi una analoga equazione differenziale che esprima l'accelerazione cui è soggetto il punto materiale in funzione della posizione $x(t)$ e del tempo t . Sfruttando anche quest'ultima relazione, calcola posizione, velocità e accelerazione del punto materiale nell'istante $t = 0,50 s$, senza calcolare esplicitamente l'espressione analitica delle funzioni velocità ed accelerazione.



Soluzione. L'equazione assegnata è del tipo a variabili separabili, per cui

$$x \frac{dx}{dt} = -4t \quad x dx = -4t dt$$

passando agli integrali

$$\int x dx = -4 \int t dt \quad x^2 = -4t^2 + C$$

l'equazione si riscrive,

$$4t^2 + x^2 = C$$

l'equazione particolare per $t = 0$ e $x = 2$ è

$$C = 4$$

per cui, riscrivendo come equazione di un'ellisse

$$\frac{t^2}{1} + \frac{x^2}{4} = 1$$

equazione dell'ellisse in cui $a = 1$ e $b = 2$ (come mostrato in figura).

Il rettangolo inscritto ha come asse di simmetria l'asse delle ordinate (x). Prendiamo un vertice generico del possibile rettangolo appartenente all'ellisse nel primo quadrante. Esso ha coordinate $A(t, x)$, cioè $A(t, 2\sqrt{1-t^2})$, con $0 \leq t \leq 1$ e $0 \leq x \leq 2$. L'area del rettangolo è

$$A = 2t\sqrt{1-t^2}$$

Per trovare l'eventuale massimo, calcoliamo la derivata

$$A' = 2\sqrt{1-t^2} + 2t \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{2(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}}$$

il numeratore si annulla per

$$1 - 2t^2 = 0 \quad t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

la soluzione fornisce i vertici dei due punti simmetrici rispetto all'asse x (delle ordinate, in questo caso).

L'area sarà quindi

$$A = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

c. L'accelerazione è la derivata della legge delle velocità indicata all'inizio, per cui

$$xx'' + x'^2 + 4 = 0$$

ma, dall'equazione assegnata, $x' = -\frac{4t}{x}$, per cui

$$xx'' + \frac{16t^2}{x^2} = -4 \quad x'' = -\frac{16t^2}{x^3} - \frac{4}{x}$$

se $t = \frac{1}{2}$, dalle equazioni già ottenute si ha, da $4t^2 + x^2 = 4$

$$x = \sqrt{3} \simeq 1,7 \text{ m}$$

da $x' = -\frac{4t}{x}$, si ha

$$x' = v = -\frac{2}{1,7} = -1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e da $x'' = -\frac{16t^2}{x^3} - \frac{4}{x}$, si ha

$$x'' = a = -\frac{4}{1,7^3} - \frac{4}{1,7} = -3,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$