Algebra lineare

Esercizi svolti dal prof. Trivia Gianluigi

Matrici quadrate di ordine 2

Un briciolo di teoria. Si chiama matrice quadrata di ordine 2 un insieme di quattro numeri reali, disposti in una tabella di due righe e due colonne come la seguente

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dove a e b sono gli elementi della prima riga e c e d quelli della seconda riga. Gli elementi a e c sono gli elementi della prima colonna e b e d sono quelli della seconda colonna. Gli elementi a e d sono gli elementi della diagonale principale e gli elementi b e c sono quelli della diagonale secondaria.

Tra le matrici di ordine 2 si definisce matrice 0, quella i cui elementi sono tutti nulli e matrice unità o identica quella in cui gli elementi della diagonale principale sono uguali a 1 e quelli della diagonale secondaria sono uguali a 0.

Le matrici di ordine 2 sono dette matrici quadrate perché il numero di righe è uguale al numero delle colonne, sono considerate cioè sempre simili.

Somma algebrica di matrici: date due matrici simili di A e B si definisce la loro somma algebrica, $A \pm B$ come la matrice che si ottiene sommando gli elementi corrispondenti, cioè

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

per cui

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_1 \pm a_2 & b_1 \pm b_2 \\ c_1 \pm c_2 & d_1 \pm d_2 \end{bmatrix}$$

per la somma valgono le stesse proprietà della somma di numeri, cioè le proprietà: commutativa, associativa, l'esistenza dell'elemento neutro (la matrice nulla, Z). Si definisce inoltre la matrice opposta cioè tale che $A + (-A) = (-A) + A = Z$

Esercizio 1. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

determinare la loro somma.

Soluzione. Avremo $C = A + B$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2+0 \\ 3+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

determinare la loro somma.

Soluzione. Avremo $C = A + B$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & -1+0 \\ -3+1 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

determinare la loro differenza.

Soluzione. Avremo $C = A - B$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-(-1) & -2-6 \\ -1-4 & 7-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4. Determinare x e y in modo che le due matrici siano uguali

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ y^2 & 5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 2y-1 \\ x & 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Le matrici sono uguali se sono simili e hanno gli stessi elementi. Il confronto allora dà

$$\begin{cases} x = 2y-1 \\ x = y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-2y+1 = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (y-1)^2 = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Determinare x, y, z in modo che le due matrici siano opposte

$$A = \begin{bmatrix} 1+x & 0 \\ z-2y & 3z-x \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -y-z & 0 \\ 4x+y & y+x \end{bmatrix}$$

Soluzione. Le matrici sono opposte se la loro somma è uguale alla matrice nulla, per cui

$$\begin{cases} 1+x-y-z = 0 \\ z-2y+4x+y = 0 \\ 3z-x+y+x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2z+1 = 0 \\ 4x+4z = 0 \\ y = -3z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Esercizio 6. Calcolare

$$A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Soluzione. In questo caso abbiamo la differenza di due matrici entrambi moltiplicate per un coefficiente costante. Troviamo separatamente le matrici che si ottengono dal prodotto e poi sommiamo i due risultati (per mostrare come avviene la moltiplicazione per una costante)

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \qquad -\tfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

per cui

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{15}{2} \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Prodotto di matrici: Prima di introdurre il prodotto tra matrici, occorre definire il prodotto di una riga di una matrice per una colonna di un'altra matrice.

Siano date le due matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

allora, il prodotto di una riga della prima matrice per una colonna della seconda è eguale alla somma del prodotto dei primi elementi delle due linee considerate più il prodotto dei loro secondi elementi. Ad esempio, prendiamo la prima riga della matrice A e la seconda colonna della matrice B

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 + b_1 d_2$$

Se consideriamo ora le due matrici A e B, avremo

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1a_1 & b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 7. Calcolare il prodotto delle due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Applichiamo il prodotto di ogni riga per ogni colonna

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \\ -3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 & -3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$$

Esercizio 8. Calcolare il prodotto delle due matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Applichiamo il prodotto di ogni riga per ogni colonna

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) & -1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 4 + (-4) \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Esercizio 9. Calcolare il prodotto delle due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Soluzione. Applichiamo il prodotto di ogni riga per ogni colonna

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{2} \cdot 0 + (-1) \cdot 0 & -\frac{1}{2} \cdot 1 + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene la matrice nulla. il prodotto di due matrici può essere la matrice nulla anche senza che nessuno dei due fattori sia la matrice nulla. Contrariamente a quanta accade per i numeri, per le matrici non vale dunque la legge di annullamento del prodotto.

Esercizio 10. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

calcolare $2A + B$, $A - 3B$, $A \cdot C - B \cdot C$

Soluzione. Applichiamo il prodotto di ogni riga per ogni colonna

$$A \cdot C - B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

se calcoliamo $(A - B) \cdot C$, si ottiene

$$(A - B) \cdot C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

cioè vale la proprietà distributiva a destra della moltiplicazione rispetto alla sottrazione.

Esercizio 11. Si determini una matrice X tale che sia $2(A + X) = B - C$.

Soluzione. Poiché le proprietà delle operazioni tra matrici sono identiche a quelle delle operazioni tra numeri reali (salvo la proprietà commutativa della moltiplicazione, che non vale per le matrici), si può considerare Ia relazione data come un'equazione matriciale e risolverla quindi con le stesse tecniche note per le equazioni algebriche di primo grado. Si ha dunque:

$$2A + 2X = B - C \quad 2X = B - C - 2A \quad X = \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}C - A$$

Esercizio 12. Date le due matrici $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ determinare x in modo che sia

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Soluzione. basta che sia

$$2x + 1 = 5 \quad x = 2$$

Esercizio 13. Date le due matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{bmatrix}$ determinare x e y in modo che il loro prodotto dia la matrice nulla.

Soluzione. Avremo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

moltiplicando abbiamo

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 - 3y & x - 3 \\ -9 + 9y & -3x + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\,(1 - y) & x - 3 \\ -9\,(1 - y) & -3\,(x - 3) \end{bmatrix}$$

per cui

$$x = 3 \quad y = 1$$

Esercizio 14. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ calcolare A^2.

Soluzione. la definizione di potenza di un numero è applicabile anche alle matrici, per cui

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Algebra delle matrici.

Esercizio 15. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ calcolare $3(A+2B)-C$

Soluzione. Calcoliamo prima $2B$

$$2B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

per cui

$$3(A+2B) = 3\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 21 \end{bmatrix}$$

infine

$$3(A+2B)-C = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 22 \end{bmatrix}$$

Esercizio 16. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$

Soluzione. Calcoliamo prima $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

come si può osservare il prodotto di due matrici non è commutativo.

Esercizio 17. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,determinare una matrice X tale che $A \cdot X = B$.

Soluzione. Indichiamo la matrice incognita X con $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dovrà essere

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

troviamo $A \cdot X$

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} -a+3c & -b+3d \\ c & d \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{array}{cc} 3c-a=2 & 3d-b=-1 \\ c=1 & d=3 \end{array}$$

sostituendo avremo $a=1$ e $b=10$; la matrice cercata è $X = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Esercizio 18. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,calcolare $A^2 = A \cdot A$.

Soluzione. Calcoliamo il quadrato della matrice

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ -2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{bmatrix} =$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

Esercizio 19. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$,calcolare $A^3 = A \cdot A^2$.

Soluzione. Calcoliamo il quadrato della matrice

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x^2 & x+x^3 \\ x+x^3 & x^2+x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+x^2) & x(1+x^2) \\ x(1+x^2) & x^2(1+x^2) \end{bmatrix} = \left(1+x^2\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix} \left(1+x^2\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix} = \left(1+x^2\right)^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 20. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,verificare che $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Soluzione. Calcoliamo il quadrato al primo membro,

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A+B)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

troviamo A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

troviamo AB

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

troviamo BA

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

troviamo B^2

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sommiamo il tutto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanti. Per le matrici di ordine 2, si definisce determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ il numero

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

cioè il prodotto degli elementi della diagonale principale meno il prodotto degli elementi della diagonale secondaria (il cosiddetto prodotto in croce).

Esercizio 21. Calcolare il determinante delle matrici $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

Soluzione. Dalla definizione abbiamo

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-6) - 3 \cdot 4 = 0$$

$$|C| = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Esercizio 22. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} \pi - 1 & \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Soluzione. Dalla definizione abbiamo

$$|A| = \begin{vmatrix} \pi - 1 & \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (\pi - 1) \cdot 0 - \sqrt{2} \cdot 0 = 0$$

se gli elementi di una linea del determinante sono tutti uguali a 0, allora il determinante della matrice è sempre uguale a 0.

Esercizio 23. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$

Soluzione. Dalla definizione abbiamo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{vmatrix} = 1 \cdot 2\sqrt{5} - (-2) \cdot \left(-\sqrt{5}\right) = 0$$

osserviamo che gli elementi della seconda riga sono uguali a quelli della prima ma moltiplicati entrambi per $\sqrt{5}$; da ciò si ricava la proprietà: se una matrice ha due linee uguali o proporzionale, il suo determinante è nullo.

Esercizio 24. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} - 1 & 2 \\ 4\sqrt{3} + 5 & 4 \end{bmatrix}$

Soluzione. Calcolo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} - 1 & 2 \\ 4\sqrt{3} + 5 & 4 \end{vmatrix} = 8\sqrt{3} - 4 - 8\sqrt{3} - 10 = -14$$

Esercizio 25. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$

Soluzione. Il determinante della matrice è nullo perché la seconda riga è uguale alla prima moltiplicata per x; infatti, verificando, si ha

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 - x^2 = 0$$

Esercizio 26. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{bmatrix}$

Soluzione. Si ha

$$|A| = \begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix} = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

Esercizio 27. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} x & x-a \\ x-2a & x-3a \end{bmatrix}$

Soluzione. Si ha

$$|A| = \begin{vmatrix} x & x-a \\ x-2a & x-3a \end{vmatrix} = x(x-3a) - (x-a)(x-2a) = x^2 - 3ax - x^2 + 3ax - 2a^2 = -2a^2$$

Esercizio 28. Risolvere l'equazione $\begin{bmatrix} x & 2x \\ 3x & 4 \end{bmatrix} = 0$

Soluzione. Si ha

$$\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3x & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x - 6x^2 = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \tfrac{2}{3}$$

Esercizio 29. Risolvere l'equazione $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1+x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x & x \\ 1 & x+1 \end{bmatrix}$

Soluzione. Si ha

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1+x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & x \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$x^2 - 1 - x = 1 - x^2 - x \quad 2x^2 = 2 \quad x = \pm 1$$

Esercizio 30. Risolvere la disequazione $\begin{bmatrix} 2-x & x \\ x & x-1 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} x & 1-x \\ 2+x & x+1 \end{bmatrix}$

Soluzione. Si ha

$$\begin{vmatrix} 2-x & x \\ x & x-1 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} x & 1-x \\ 2+x & x+1 \end{vmatrix}$$

$$(2-x)(x-1) - x^2 > x(x+1) - (1-x)(2+x) \quad -2x^2 + 3x - 2 > 2x^2 + 2x - 2 \quad 0 < x < \tfrac{1}{4}$$

Matrice inversa. Si chiama matrice inversa, A^{-1}, di una matrice A di ordine n, una matrice (se esiste) pure quadrata e dello stesso ordine, tale che il loro prodotto dà la matrice unità

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Ricordiamo che solo le matrici con discriminante diverso da zero hanno una matrice inversa. Per calcolare la matrice inversa bisogna ricorrere ai complementi algebrici di una matrice.

Si dice **minore complementare** di un elemento di una matrice (quadrata) di ordine n il determinante che si ottiene sopprimendo dalla matrice data la riga e la colonna alle quali l'elemento appartiene. Il minore complementare di un elemento di una matrice di ordine n risulta quindi un determinante di ordine $(n-1)$.

Si dice **complemento algebrico** di un elemento a_{ik} di una matrice A di ordine n il minore complementare di a_{ik} preceduto dal segno $+$ o dal segno $-$ a seconda, rispettivamente, che $(i+k)$ sia pari o dispari.

Vediamo un esempio

Esempio. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ i complementi algebrici sono

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad A_{13} = + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15 \qquad ecc.$$

Matrici con m righe e n colonne. Detti m e n due numeri interi positivi e considerati $m \cdot n$ numeri reali, è detta matrice (m, n) l'insieme degli $m \cdot n$ numeri considerati disposti ordinatamente su m righe orizzontali e su n colonne verticali, del tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

le matrici quadrate, finora trattate, rappresentano il caso particolare $m = n$.

Tra le matrici $[m, n]$ si possono considerare anche le matrici riga $[m, 1]$ e matrici colonna $[1, n]$.

Date due matrici $[m, n]$, due elementi si dicono corrispondenti quando occupano lo stesso posto nelle rispettive matrici.

Due matrici $[m, n]$ sono uguali se tutti gli elementi corrispondenti sono uguali.

Si definisce la matrice opposta, $-A$, quella i cui elementi sono gli opposti dei rispettivi corrispondenti.

Data una matrice A di tipo $[m, n]$, si definisce la matrice trasposta di A, A_T, la matrice di tipo $[n, m]$ nella quale si scambiano ordinatamente le righe con le colonne. Evidentemente $(A_T)_T = A$.

Algebra delle matrici. La somma algebrica di due o più matrici è possibile solo se hanno lo stesso numero di righe e di colonne. Se $A = [a_{ik}]$ e $B = [b_{ik}]$ la loro somma è data da

$$A + B = [a_{ik} + b_{ik}]$$

Il prodotto della matrice per uno scalare è la matrice che si ottiene moltiplicando per lo scalare tutti gli elementi della matrice

$$\alpha\,[A] = [\alpha \cdot a_{ik}]$$

Il prodotto di una matrice riga, $[m, 1]$, per una matrice colonna, $[1, n]$ è la matrice $[1, 1]$ che ha un solo prodotto, ottenibile come la somma dei prodotti degli elementi della riga per gli elementi della colonna. Es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

allora

$$A \cdot B = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = [21]$$

Esercizio 31. Determinare x e y in modo che le due matrici $\begin{bmatrix} 1 & x^2-1 & -3 \\ -2 & 5 & y-x \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & x-y^2 & -3 \\ -2 & 5 & x+y \end{bmatrix}$ siano uguali.

Soluzione. Confrontiamo gli elementi tra loro corrispondenti e poniamo le condizioni che li rendono uguali

$$\begin{cases} x^2-1 = x-y^2 \\ y-x = x+y \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2-x-1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 32. Determinare x e y in modo che le due matrici $\begin{bmatrix} x+y-1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x-y+1 & -3 \\ 4 & -2 \\ 0 & -x^2+y^1 \end{bmatrix}$ siano opposte.

Soluzione. Confrontiamo gli elementi tra loro corrispondenti e poniamo le condizioni che rendono opposti tutti gli elementi corrispondenti

$$\begin{cases} x+y-1 = -x+y-1 \\ x^2+y^2 = x^2-y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Esercizio 33. Determinare x, y, z in modo che la matrice $\begin{bmatrix} 2 & -1 & x & 3-y \\ x+z & 0 & 2 & -5 \\ 0 & x+2y-1 & -3 & z^2 \\ 0 & 2y-3z & 0 & y \end{bmatrix}$ sia triangolare superiore.

Soluzione. Ricordiamo che una matrice quadrata è triangolare superiore se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli.

$$\begin{cases} x+z = 0 \\ x+2y-1 = 0 \\ 2y-3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x \\ x+2y = 1 \\ 3x+2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x \\ x+2y = 1 \\ 2x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 34. Siano $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, calcolare $A+B+C$

Soluzione. Le matrici sono tutte del tipo $[2,3]$, cioè $m = 2$ e $n = 3$, per cui

$$A+B+C = \begin{bmatrix} 2+1+1 & 1+2-1 & -1-3+1 \\ 3-2 & -1+3 & 1+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 35. Siano $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, calcolare $A - B + C$

Soluzione. Le matrici sono tutte del tipo $[2,3]$, cioè $m = 2$ e $n = 3$, per cui

$$A - B + C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 36. Siano $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, calcolare $3A - 2B + C$

Soluzione. Le matrici sono tutte del tipo $[2,3]$, cioè $m = 2$ e $n = 3$, per cui

$$3A - 2B + C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 13 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 37. Siano $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determinare una quarta matrice X, tale che $2(A + B) = X + C$

Soluzione. Calcoliamo separatamente

$$2(A + B) = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -8 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

avremo

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -8 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -9 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Prodotto tra matrici. Siano $A = [a_{ij}]$ una matrice di tipo (m, s) e $B = [b_{ij}]$ una matrice di tipo (s, n). Le due matrici sono dunque tali che il numero delle colonne della prima sia uguale al numero delle righe della seconda (matrici conformabili rispetto alla moltiplicazione).

Si definisce prodotto (righe per colonne) della matrice A di tipo (m, s) per la matrice B di tipo (s, n), la matrice P di tipo (m, n) il cui generico elemento P_{ik} si ottiene moltiplicando la i-esima riga di A per la k-esima colonna di B. Vediamo un esempio: date le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la prima matrice ha 3 righe e due colonne, cioè di tipo $(3, 2)$ e la seconda ha due righe e 4 colonne, cioè di tipo $(2, 4)$. Siccome il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda possiamo eseguire la moltiplicazione e otterremo una matrice del tipo $(3, 4)$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2\cdot1+1\cdot4 & 2\cdot2+1\cdot3 & 2\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot3+1\cdot1 \\ 3\cdot1+0\cdot4 & 3\cdot2+0\cdot3 & 3\cdot1+0\cdot0 & 3\cdot3+0\cdot1 \\ 1\cdot1+2\cdot4 & 1\cdot2+2\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

mostriamo solo qualche esercizio semplice, perché i fogli elettronici eseguono immediatamente questa operazione con il comando `=matr.prodotto(caselle prima matrice:caselle seconda matrice)`.

Esercizio 38. date le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

calcolare il loro prodotto

Soluzione. La matrice A è di tipo $(2,3)$, la matrice B è di tipo $(3,2)$; la moltiplicazione è quindi possibile e si avrà una matrice di tipo $(2,2)$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 39. date le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

calcolare il loro prodotto

Soluzione. La matrice A è di tipo $(1,2)$, la matrice B è di tipo $(2,3)$; la moltiplicazione è quindi possibile e si avrà una matrice di tipo $(1,3)$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Determinanti. Il determinante di una qualsiasi matrice di ordine n è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una linea qualsiasi (riga o colonna) peri rispettivi complementi algebrici. (In tale definizione, rientra anche il caso del determinante del secondo ordine, già visto).

Esempio. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Osservando le righe e le colonne della matrice e potendo sceglierne una a piacere tra di esse per il calcolo del determinante, risulta conveniente sviluppare il determinante secondo la prima colonna che contiene il maggior numero di zeri:

$$|A| = -1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5$$

Ovviamente, non sempre si incontrano situazione così favorevoli. Nel solo caso delle matrici $(3,3)$ per le quali è possibile introdurre una regola pratica, detta di Sarrus, di cui mostriamo un esempio

Esempio. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ si può risolvere facilmente riscrivendo gli elementi della matrice con l'aggiunta alla loro destra della prima e della seconda colonna; poi si calcolo il prodotto degli elementi della diagonale principale e delle due diagonali ad essa parallele al quale si aggiunge il prodotto delle diagonali secondarie cambiate di segno.

Soluzione. Riscriviamo gli elementi in uno schema

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}$$

il calcolo è il seguente:

$$[1\cdot(-1)\cdot 4]+[2\cdot 1\cdot(-2)]+[-3\cdot 2\cdot 1]-[-3\cdot(-1)\cdot(-2)]-[1\cdot 1\cdot 1]-[4\cdot 2\cdot 2]=-25$$

Esercizio 40. Trovare la matrice inversa della matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

Soluzione. Calcoliamo il determinante della matrice A con la regola di Sarrus

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \end{vmatrix}=\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 6 & 6 \end{array}=1-4=-3\neq 0$$

Costruiamo la matrice di tutti i complementari algebrici della matrice data A

$$\begin{array}{lll} A_{11}=+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=1 & A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-2 & A_{13}=+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}=6 \\ A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-2 & A_{22}=+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=1 & A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}=6 \\ A_{31}=+\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0 & A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0 & A_{33}=+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3 \end{array}$$

la matrice dei complementari è

$$A^*=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ora formiamo la matrice trasposta, cioè la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne

$$A^*_T=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

dividiamo ora ogni elemento per il $|A|=5$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 41. Trovare la matrice inversa della matrice $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Soluzione. Calcoliamo il determinante della matrice A con la regola di Sarrus

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}=-1-8+8+2=1\neq 0$$

Costruiamo la matrice di tutti i complementari algebrici della matrice data A

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$
$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

la matrice dei complementari è

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

ora formiamo la matrice trasposta, cioè la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne

$$A^*_T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

dividiamo ora ogni elemento per il $|A| = 1$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 42. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 34 & 55 & 89 \\ 144 & 233 & 377 \\ 610 & 987 & 1597 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Utilizzando le proprietà di combinazione lineare delle matrici, riscriviamo sostituendo alla seconda colonna la somma della prima con la seconda

$$A = \begin{bmatrix} 34 & 89 & 89 \\ 144 & 377 & 377 \\ 610 & 1597 & 1597 \end{bmatrix}$$

il determinante è quindi nullo avendo la matrice due colonne uguali.

Esercizio 43. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 11 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Applichiamo la regola di Sarrus

$$|A| = \begin{matrix} 25 & 10 & 5 & 25 & 10 \\ 11 & 2 & 7 & 11 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{matrix} = 50 + 280 + 110 - 40 - 350 - 110 = -60$$

Esercizio 44. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Soluzione. sostituiamo alla seconda riga la differenza tra la seconda e la prima e alla terza riga la differenza tra la quarta e la terza riga; la matrice diventa

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\\13&14&15&16\end{bmatrix}$$

$$|A|=0$$

il determinante è quindi nullo avendo la matrice due righe uguali.

Esercizio 45. Calcolare il determinante della matrice

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{bmatrix}$$

Soluzione. Mostriamo in questo caso come calcolare questo determinante con un foglio elettronico:

1) copiamo gli elementi della matrice nelle celle di un foglio elettronico occupando, ad es., le celle da A1 a D4

2) indichiamo alla matrice che i valori inseriti vanno considerati come gli elementi di una matrice digitando in una casella vicina `=MAT.DETERM($A$1:$D$4)`; otterremo 12.

Esercizio 46. Calcolare il determinante della matrice

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3&5\\2&2&5&-2\\4&4&6&3\\8&8&10&-1\end{bmatrix}$$

Soluzione. sostituiamo alla prima riga la differenza tra la seconda e la prima; la matrice diventa

$$A=\begin{bmatrix}0&1&3&5\\0&2&5&-2\\0&4&6&3\\0&8&10&-1\end{bmatrix}$$

$$|A|=0$$

il determinante è quindi nullo avendo una colonna nulla, oppure si poteva osservare subito che la matrice ha due colonne uguali.

Esercizio 47. Calcolare il determinante della matrice

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3&1&6\\-1&2&7&8&-2\\2&-4&-5&3&1\\4&-8&2&-1&1\\-5&10&7&5&0\end{bmatrix}$$

Soluzione. Mostriamo in questo caso come calcolare questo determinante con un foglio elettronico:

1) copiamo gli elementi della matrice nelle celle di un foglio elettronico occupando, ad es., le celle da A1 a E5

2) indichiamo alla matrice che i valori inseriti vanno considerati come gli elementi di una matrice digitando in una casella vicina `=MAT.DETERM($A$1:$E$5)`; otterremo 0.

Esercizio 48. Risolvere l'equazione $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & x & x \end{vmatrix} = 0$

Soluzione. Avremo, applicando la regola di Sarrus

$$\begin{matrix} x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & x & 1 & x & x \\ x & x & x & x & x \end{matrix} = x^3 + x + x^2 - x^2 - x^2 - x^2 = 0$$

da cui

$$x^3 - 2x^2 + x = x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x(x-1)^2 = 0$$

le soluzioni sono $x_1 = 0$ o $x_2 = 1$.

Esercizio 49. Risolvere la disequazione $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} < 0$

Soluzione. Avremo, applicando la regola di Sarrus

$$\begin{matrix} \sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ x & x & 1 & x & x \\ x & \sqrt{2} & \sqrt{2} & x & \sqrt{2} \end{matrix} = 2x + x + \sqrt{2}x - x^2 - 2 - \sqrt{2}x < 0$$

da cui

$$-x^2 + 3x - 2 < 0$$

le soluzioni sono $x < 1 \vee x > 2$.

Esercizio 50. Risolvere l'equazione $\begin{vmatrix} \sin x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & \cos x \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Soluzione. Avremo, applicando la regola di Sarrus

$$\begin{matrix} \sin x & 1 & 2 & \sin x & 1 \\ 3 & 1 & \cos x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix} = \sin x - \cos x + 0 + 2 - 0 - 3 = 0$$

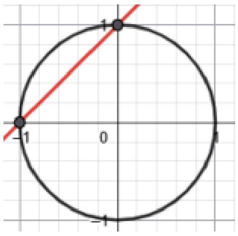
da cui si ottiene l'equazione goniometrica lineare

$$\sin x - \cos x - 1 = 0$$

scegliamo la soluzione grafica introducendo la sostituzione $X = \cos x$ e $Y = \sin x$ avremo

$$\begin{cases} Y - X - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

intersezione tra la retta $y = x + 1$, parallela alla bisettrice I e III quadrante, e la circonferenza goniometrica di centro O e raggio 1.



le soluzioni sono $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\vee\; x = \pi + 2k\pi$

Sistemi lineari

Esercizio 51. Scrivere il sistema in forma matriciale

$$\begin{cases} x - y + z + w = 3 \\ x + y + z - w = -3 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

la matrice completa è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

il sistema si scrive allora

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 52. Scrivere in forma matriciale il sistema e risolverlo

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + y + 2z = -11 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

il sistema si scrive allora

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix}$$

la matrice dei coefficienti è quadrata e possiamo risolvere con il cosiddetto metodo di Cramer

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$$

dove D è il determinante della matrice dei coefficienti, $D = |A|$, D_x, D_y, D_z sono rispettivamente i determinanti delle matrici che si ottengono sostituendo nella matrice A la matrice dei termini noti al posto della prima, seconda, terza colonna. Avremo

$$|D_x| = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -11 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 33 \quad |D_y| = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -11 & 2 \end{vmatrix} = 44 \quad |D_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -11 \end{vmatrix} = -99$$

avremo quindi

$$x = \tfrac{33}{11} = 3 \quad y = \tfrac{44}{11} = 4 \quad z = -\tfrac{99}{11} = -9$$

Esercizio 53. Verificare se e possibile o no il sistema seguente

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 8 \\ -2x + y - 3z = -4 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Soluzione. Si può valutare se il sistema è risolvibile o impossibile senza procedere alla sua risoluzione mediante il calcolo classico, applicando le proprietà delle matrice e dei loro determinanti e dei teoremi che li riguardano. Scriviamo la matrice dei coefficienti e la matrice completa e valutiamo il loro rango

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante della matrice A:

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{matrix} = 1 - 12 + 12 - 3 - 6 + 8 = 0$$

risultando nullo cerchiamo un eventuale minore con determinante diverso da zero (cerchiamo cioè quale è il rango della matrice); abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9$$

la matrice ha quindi rango 2. La matrice completa ha però il minore

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

per il teorema di Rouché-Capelli le due matrici, avendo rango diverso, il sistema risulta impossibile.

Esercizio 54. Trovare la soluzione generale del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 16 \end{cases}$$

Soluzione. Il sistema è composto da tre equazioni in quattro incognite. Lo si può risolvere considerando solo le prime due equazioni e prendendo come incognite x_1 e x_3. Tratteremo perciò x_2 e x_4 come dei parametri. II sistema diventa allora:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 15 - 2x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 1 - 4x_2 + x_4 \end{cases}$$

scriviamo il sistema in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 2x_2 - 2x_4 \\ 1 - 4x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

risolviamo con il metodo di Cramer

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 15-2x_2-2x_4 & -5 \\ 1-4x_2+x_4 & 2 \end{vmatrix} = 30-4x_2-4x_4+5-20x_2+5x_4 = 35-24x_2+x_4$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 15-2x_2-2x_4 \\ 2 & 1-4x_2+x_4 \end{vmatrix} = 1-4x_2+x_4-30+4x_2+4x_4 = -29+5x_4$$

Calcoliamo le soluzioni:

$$x_1 = \frac{35-24x_2+x_4}{12} \quad x_3 = \frac{-29+5x_4}{12}$$

si hanno quindi infinite soluzioni dipendenti dai valori particolari assunti da x_2 e da x_4.

Risolviamo ora alcuni sistemi con n equazioni e n incognite con il metodo di Cramer applicato ai casi in cui le incognite sono almeno 3 (per il caso di due incognite possiamo basarci sui metodi classici di risoluzione: sostituzione, confronto e combinazione lineare).

Esercizio 55. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x+4y+6z=4 \\ x-y-2z=-2 \\ -x+2y+3z=3 \end{cases}$$

Soluzione. Il sistema in forma matriciale è

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

calcoliamo il determinante della matrice completa e i determinanti D_x, D_y, D_z

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \quad D_y = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad D_z = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

avremo le soluzioni

$$x = \frac{-2}{1} = -2 \quad y = \frac{2}{1} = 2 \quad z = \frac{-1}{1} = -1$$

Esercizio 56. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 5x+y+2z=5 \\ x-5y+z=15 \\ -2x+4y+z=-15 \end{cases}$$

Soluzione. Il sistema in forma matriciale è

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ -15 \end{bmatrix}$$

calcoliamo il determinante della matrice completa e i determinanti D_x, D_y, D_z

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -60$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 15 & -5 & 1 \\ -15 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -105 \quad D_y = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 15 & 1 \\ -2 & -15 & 1 \end{vmatrix} = 165 \quad D_z = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & 15 \\ -2 & 4 & -15 \end{vmatrix} = 30$$

avremo le soluzioni

$$x=\frac{105}{60}=\frac{7}{4}\quad y=-\frac{165}{60}=-\frac{11}{4}\quad z=-\frac{30}{60}=-\frac{1}{2}$$

Esercizio 57. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w=-8\\ 2x+3y+4z+w=-2\\ 3x+4y+z+2w=-18\\ 4x+y+2z+3w=-1\end{cases}$$

Soluzione. Il sistema in forma matriciale è

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8\\ -3\\ -18\\ -1\end{bmatrix}$$

calcoliamo con il supporto di un foglio elettronico, il determinante della matrice completa e i determinanti D_x, D_y, D_z, D_w

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=160$$

$$D_x=\begin{vmatrix} -8 & 2 & 3 & 4\\ -3 & 3 & 4 & 1\\ -18 & 4 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=160\quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & -8 & 3 & 4\\ 2 & -3 & 4 & 1\\ 3 & -18 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-800$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -8 & 4\\ 2 & 3 & -3 & 1\\ 3 & 4 & -18 & 2\\ 4 & 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=480 D_w=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -8\\ 2 & 3 & 4 & -3\\ 3 & 4 & 1 & -18\\ 4 & 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-320$$

avremo le soluzioni

$$x=\frac{160}{160}=1\quad y=-\frac{800}{460}=5\quad z=\frac{480}{160}=3\quad w=-\frac{320}{160}=-2$$

Esercizio 58. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y+z+u=1\\ x+y+z+w=0\\ x+y+u+w=1\\ x+z+u+w=0\\ y+z+u+w=2\end{cases}$$

Soluzione. Il sistema in forma matriciale è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ u\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

calcoliamo con il supporto di un foglio elettronico, il determinante della matrice completa e i determinanti D_x, D_y, D_z, D_u, D_w

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad D_u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad D_w = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

avremo le soluzioni

$$x = -\tfrac{4}{4} = -1 \quad y = \tfrac{4}{4} = 1 \quad z = \tfrac{0}{4} = 0 \quad u = \tfrac{4}{4} = 1 \quad w = \tfrac{0}{4} = 0$$

Esercizio 59. Verificare se e possibile o no il sistema seguente

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ y - z = -1 \\ 2x + y + z = 10 \end{cases}$$

Soluzione. Si può valutare se il sistema è risolvibile o impossibile senza procedere alla sua risoluzione mediante il calcolo classico, applicando le proprietà delle matrice e dei loro determinanti e dei teoremi che li riguardano. Scriviamo la matrice dei coefficienti e la matrice completa e valutiamo il loro rango

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante della matrice A:

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{matrix} = 1 + 4 + 0 - 6 + 1 + 0 = 0$$

risultando nullo cerchiamo un eventuale minore con determinante diverso da zero (cerchiamo cioè quale è il rango della matrice); abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

la matrice ha quindi rango 2. La matrice completa ha però il minore

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -9$$

per il teorema di Rouché-Capelli le due matrici, avendo rango diverso, il sistema risulta impossibile.

Esercizio 60. Verificare se è possibile o no il sistema seguente

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 8y - 5z = 2 \\ x + 5y - 3z = 1 \end{cases}$$

Soluzione. Si può valutare se il sistema è risolvibile o impossibile senza procedere alla sua risoluzione mediante il calcolo classico, applicando le proprietà delle matrice e dei loro determinanti e dei teoremi che li riguardano. Scriviamo la matrice dei coefficienti e la matrice completa e valutiamo il loro rango

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -5 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante della matrice A:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & 5 & -3 & 1 & 5 \end{matrix} = -48 - 5 + 0 - 0 + 50 + 3 = 0$$

risultando nullo cerchiamo un eventuale minore con determinante diverso da zero (cerchiamo cioè quale è il rango della matrice); abbiamo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15$$

la matrice ha quindi rango 2. La matrice completa ha però il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = -5$$

per il teorema di Rouché-Capelli le due matrici, avendo lo stesso rango, il sistema risulta possibile, ma essendo il rango minore del numero delle incognite, le soluzioni sono infinite.

Esercizio 61. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z - u = 3 \\ x - 2y - z + u = -1 \\ x + y - 2z + 3u = 3 \\ 3x + 6y + 7z - 8u = 8 \end{cases}$$

Soluzione. Il sistema in forma matriciale è

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

calcoliamo con il supporto di un foglio elettronico, il determinante della matrice completa e i determinanti D_x, D_y, D_z, D_u

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = -16$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 8 & 6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 0 \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & -8 \end{vmatrix} = 0 \quad D_u = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

il sistema ammette infinite soluzioni. Lo si può risolvere considerando, ad esempio, solo le prime tre equazioni nelle quali l'incognita u diventa un parametro letterale.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 + u \\ x - 2y - z = -1 - u \\ x + y - 2z = 3 - 3u \end{cases}$$

calcoliamo il determinante della matrice completa e i determinanti D_x, D_y, D_z

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3+u & 1 & 1 \\ -1-u & -2 & -1 \\ 3-3u & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 3+u & 1 & 1 & 3+u & 1 \\ -1-u & -2 & -1 & -1-u & -2 \\ 3-3u & 1 & -2 & 3-3u & 1 \end{array} = 15 - u$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3+u & 1 \\ 1 & -1-u & -1 \\ 1 & 3-3u & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 2 & 3+u & 1 & 2 & 3+u \\ 1 & -1-u & -1 & 1 & -1-u \\ 1 & 3-3u & -2 & 1 & 3-3u \end{array} = 17 - 3u$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3+u \\ 1 & -2 & -1-u \\ 1 & 1 & 3-3u \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 3+u & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1-u & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3-3u & 1 & 1 \end{array} = 19u - 5$$

pertanto

$$x = \frac{15-u}{14} \quad y = \frac{17-3u}{14} \quad z = \frac{19u-5}{14}$$