CALCOLO DEGLI INTEGRALI

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

Parte 1. INTEGRALI INDEFINITI

1. Integrazione diretta

1.1. Principali regole di integrazione.

(1) Se $F'(x) = f(x)$, allora $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ dove C è una costante arbitraria.
(2) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ dove A è una costante
(3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$
(4) Se $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ed $u = \phi(x)$, allora $\int f(u)\,du = F(u) + C$

1.2. Tavola degli integrali elementari (immediati). Ecco un elenco

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, più in generale

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ con $n \neq -1$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$

$\int \sin x dx = -\cos x dx + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

1.3. Integrali risolvibili con le regole di integrazione e formule di integrazione.

Esercizio 1. $\int 5a^2x^6dx =$

Soluzione. $= 5a^2\int x^6dx = 5a^2\frac{x^7}{7} + C$

Esercizio 2. $\int \left(6x^2 + 8x + 3\right)dx =$

Soluzione. $= \int 6x^2dx + \int 8xdx + \int 3dx = \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + \frac{3x}{1} + C = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C$

Esercizio 3. $\int [x(x+a)(x+b)]\,dx =$

Soluzione: $= \int \left[x^3 + (a+b)x^2 + abx\right]dx = \int x^3dx + (a+b)\int x^2dx + ab\int xdx = \frac{x^4}{4} + (a+b)\frac{x^3}{3} + ab\frac{x^2}{2} + C$

Esercizio 4. $\int \left(a + bx^3\right)^2 dx =$

Soluzione: $= \int \left(a^2 + 2abx^3 + b^2x^6\right)dx = a^2\int dx + 2ab\int x^3dx + b^2\int x^6dx = a^2x + ab\frac{x^4}{2} + b^2\frac{x^7}{6} + C$

Esercizio 5. $\int \sqrt{2px}dx =$

Soluzione: $= \int (2px)^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}} + C$

Esercizio 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} =$

Soluzione: $=\int x^{-\frac{1}{n}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1}+C=n\frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{n-1}+C$

Esercizio 7. $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx=$

Soluzione: $=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-x+x^{\frac{1}{2}}+x-x^{\frac{1}{2}}+1\right)dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+x+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C$

Esercizio 8. $\int\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx=$

Soluzione: $=\int\left(x^4-x^2-2\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}}dx=\int\left(x^{\frac{10}{3}}-x^{\frac{4}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\int x^{\frac{10}{3}}dx-\int x^{\frac{4}{3}}dx-2\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}}-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+C$

Esercizio 9. $\int\frac{dx}{x^2+7}dx=$

Soluzione $=\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{x}{\sqrt{7}}+C$

Esercizio 10. $\int\frac{dx}{x^2-10}=$

Soluzione $=\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|+C$

Esercizio 11. $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}=$

Soluzione $=\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+C$

Esercizio 12. $\int\frac{adx}{a-x}=$

Soluzione. $=a\int\frac{dx}{a-x}=-a\int\frac{d\left(a-x\right)}{a-x}=-a\ln|a-x|+a\ln C=a\ln\left|\frac{C}{a-x}\right|$

Esercizio 13. $\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}=$

Soluzione $=\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}+C=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+C$

Esercizio 14. $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx=$

Soluzione $=\int\frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx-\int\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx=\int\frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\cdot\sqrt{2+x^2}}dx-\int\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}\cdot\sqrt{2+x^2}}dx=$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-\ln\left|\sqrt{2+x^2}\right|+C$$

Esercizio 15. $\int\frac{x^2+1}{x-1}=$

Soluzione. $=\int\frac{(x+1)(x-1)+2}{x-1}dx=\int\left(x+1\right)dx+2\int\frac{dx}{x-1}=\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|$

:

Esercizio 16. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3} dx =$

Soluzione. Divido il numeratore della frazione per il denominatore mediante la procedura di divisione di due polinomi e ottengo $x^2 + 5x + 7 = (x + 3)(x + 2) + 1$, per cui
$= \int \frac{(x+3)(x+2)+1}{x+3} dx = \int (x + 2) dx + \int \frac{dx}{x+3} = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x + 3|$

Esercizio 17. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx =$

Soluzione. Divido il numeratore della frazione per il denominatore mediante la procedura di divisione di due polinomi e ottengo $x^4 + x^2 + 1 = (x - 1)\left(x^3 + x^2 + 2x + 2\right) + 3 = (x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 2\right) + 3$, per cui
$= \int \frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+2\right)+3}{x-1} dx = \int \left(x^3 + x^2 + 2x + 2\right) dx + 3\int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3\ln|x - 1|$

Esercizio 18. $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx =$

Soluzione. $= \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{x+1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{dx}{(x+1)} - \int (x + 1)^{-2} dx = \ln|x + 1| + \frac{1}{x+1}$

Esercizio 19. $\int \frac{bdx}{\sqrt{1-x}} =$

Soluzione. $= b\int (1 - x)^{-\frac{1}{2}} d(1 - x) = -2b\sqrt{1 - x}$

Esercizio 20. $\int \sqrt{a - bx} dx =$

Soluzione. $= -\frac{1}{b}\int (a - bx)^{\frac{1}{2}} d(a - bx) = -\frac{2}{3b}(a - b)^{\frac{3}{2}}$

Esercizio 21. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x} dx =$

Soluzione. $= \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}dx} + \int \ln x d(\ln x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln^2 x$[1]

Esercizio 22. $= \int \frac{dx}{3x^2+5} =$

Soluzione. $= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} x$

Esercizio 23. $\int \frac{dx}{7x^2-8} =$

Soluzione. $= \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x^2-\frac{8}{7}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{16} \ln\left|\frac{x-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}{x+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}\right| = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{7}x-2\sqrt{2}}{\sqrt{7}x+2\sqrt{2}}\right|$

Esercizio 24. $\int \frac{x^2}{x^2+2} dx =$

Soluzione. $= \int \frac{x^2+2-2}{x^2+2} dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+2} = x - \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$

Esercizio 25. $\int \tan^2 x dx =$

[1] $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$

Soluzione. applicando la formula goniometrica, $= \int \left(\frac{1}{\cos^x} - 1\right) dx = \tan x - x + C$

Esercizio 26. $\int 3^x e^x =$

Soluzione. $= \int (3e)^x \, dx = \dfrac{(3e)^x}{\ln 3e} + C = \dfrac{(3e)^x}{1 + \ln 3} + C$

1.4. **Integrazione per introduzione sotto il segno di differenziale.** La regola 4), se$\int f(x)\, dx = F(x) + C$ e $du = \phi(x)$ allora $\int f(u)\, du = F(u) + C$ estende notevolmente la tavola degli integrali elementari, in quanto essa rimane valida anche nel caso in cui la variabile indipendente sia una funzione derivabile. In particolare

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-\frac{1}{2}}\, d(5x-2) = \frac{1}{5}\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$$

ciò equivale anche ad operare la sostituzione $5x - 2 = u$, da cui, differenziando, $5dx = du$.

Esercizio 27. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x+1} dx =$

Soluzione. riscriviamo il numeratore come $2x + 3 = 2x + 1 + 2$, avremo

$$= \int \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right) dx = \int dx + \int \frac{2dx}{2x+1} = x + \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x + \ln(2x+1) + C$$

Esercizio 28. $\int \dfrac{1-3x}{3+2x} =$

Soluzione. $\displaystyle = \int \frac{1}{2x+3} dx - \int \frac{3x}{2x+3} dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| - 3\int \frac{x}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} dx = \tfrac{1}{2}\ln|2x+3| - \frac{3}{2}\int \frac{x+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)} dx =$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x+3| - \frac{3}{2}\int dx + \frac{9}{4}\int \frac{1}{x+\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\ln\left|x+\frac{3}{2}\right| = \frac{11}{4}\ln|3+2x| - \frac{3}{2}x + C$$

Esercizio 29. $\int \dfrac{x^2+1}{x-1} dx =$

Soluzione. $\displaystyle = \int \frac{x^2-1+2}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} dx + 2\int \frac{dx}{x-1} = \int (x+1)\, dx + 2\ln|x-1| = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C$

Esercizio 30. $\int \dfrac{x^2+5x+7}{x+3} dx =$

Soluzione. $\displaystyle = \int \frac{x^2+6x+9-x-2}{x+3} dx = \int \frac{(x+3)^2}{x+3} dx - \int \frac{x+3-1}{x+3} dx = \int (x+3)\, dx - \int dx + \int \frac{dx}{x+3} = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+3| + C$

Esercizio 31. $\int \dfrac{x}{(x+1)^2} dx =$

Soluzione. $\displaystyle = \int \frac{x+1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \ln|x+1| - \int (x+1)^{-2}\, dx = \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$

Esercizio 32. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx =$

Soluzione. $= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+C$

Esercizio 33. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \ln x\,(d\ln x) = 2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln^2 x + C$

Esercizio 34. $\int \frac{dx}{3x^2+5} =$

Soluzione. $= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)+C$

Esercizio 35. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx =$

Soluzione. applichiamo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$ e avremo

$= \int \frac{x^2+4}{x^2+4}dx + \int \frac{2-5x}{x^2+4}dx = x+2\int \frac{dx}{x^2+4} - 5\int \frac{x}{x^2+4}dx = x+\arctan\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx = x+\arctan\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\ln\left|x^2+4\right|+C$

Esercizio 36. $\int \frac{x}{\sqrt{7-8x^2}}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{dx}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{7}{5}-x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{7}x+C$

Esercizio 37. $\int \frac{x}{\sqrt{8x^2+7}}dx =$

Soluzione. $\int \frac{dx}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+\frac{7}{8}}}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{7}{8}}\right|+C$

Esercizio 38. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx =$

Soluzione. $= \frac{1}{3}\int \frac{2x}{3x^2-2}dx - 5\int \frac{dx}{3x^2-2} = \frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right| - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right| - \frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right|+C$

Esercizio 39. $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx =$

Soluzione. $= 3\int \frac{1}{5x^2+7}dx - \int \frac{2x}{5x^2+7}dx = 3\int \frac{1}{5x^2+7}dx - \frac{1}{5}\int \frac{10x}{5x^2+7}dx = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{7}}\arctan\sqrt{\frac{5}{7}}x - \frac{1}{5}\ln\left|5x^2+7\right|+C$

Esercizio 40. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \sqrt{x^2-4} - 3\ln\left|\frac{x}{2} + \sqrt{x^2-4}\right| + C$

Esercizio 41. $\int \frac{x}{x^2-5}dx =$

Soluzione. $= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-5}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-5\right| + C$

Esercizio 42. $\int \frac{x^2}{x^6+1}dx =$

Soluzione. sapendo che $d\left(x^3\right) = 3x^2dx$, si ha $= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{\left(x^3\right)^2+1} = \frac{1}{3}\arctan x^3 + C$

Esercizio 43. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx =$

Soluzione. sapendo che $d\left(\arcsin x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, si può scrivere

$$= \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \left(\arcsin x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\arcsin x\right) = \frac{2}{3}\left(\arcsin x\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Esercizio 44. $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{x}{1+4x^2}dx - \int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{1+4x^2}dx - \int \left(\arctan 2x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\arctan 2x\right) = \frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right) - \frac{1}{3}\arctan^{\frac{3}{2}} 2x + C$

Esercizio 45. $\int 4^{2-3x}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{d\left(4^{2-3x}\right)}{-3\ln 4} = \frac{4^{2-3x}}{3\ln 4} + C$

Esercizio 46. $\int \left(e^x - e^{-x}\right)dx =$

Soluzione. $= \int e^x dx - \int e^{-x}dx = e^x + e^{-x} + C$

Esercizio 47. $\int e^{-\left(x^2+1\right)}xdx =$

Soluzione. Siccome $d\left(x^2+1\right) = 2xdx$, avremo

$$= \frac{1}{2}\int e^{-\left(x^2+1\right)}d\left(x^2+1\right) = -\frac{1}{2}e^{-\left(x^2+1\right)} + C$$

Esercizio 48. $\int x \cdot 7^{x^2}dx =$

Soluzione. siccome $d\left(x^2\right) = 2xdx$, avremo

$$= \frac{1}{2}\int 2 \cdot 7^{x^2} d\left(x^2\right) = \frac{7^x}{2\ln 7} + C$$

Esercizio 49. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx =$

Soluzione. ancora, poiché $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}dx$, avremo $= -\int e^{-\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C$

Esercizio 50. $\int \frac{e^x}{e^x - 1}dx =$

Soluzione. $= \int \frac{d\left(e^x - 1\right)}{e^x - 1}dx = \ln\left|e^x - 1\right| + C$

Esercizio 51. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} =$

Soluzione. $= \int \frac{d\left(e^x\right)}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = \arcsin e^x + C$

Esercizio 52. $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}dx =$

Soluzione. $= \sqrt{2}\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

Esercizio 53. $\int \left(\cos x + \sin x\right)^2 dx =$

Soluzione. applicando la proprietà fondamentale della goniometria, si ha

$$= \int \left(1 + 2\sin 2x\right)dx = \int dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x d\left(2x\right) = x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Esercizio 54. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx =$

Soluzione. essendo $d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, si ha

$$= 2\int \cos\sqrt{x}d\left(\sqrt{x}\right) = 2\sin\sqrt{x} + C$$

Esercizio 55. $\int \frac{\sin\left(\ln x\right)}{x}dx =$

Soluzione. ancora, essendo $d\left(\ln x\right) = \frac{dx}{x}$, si ha $= \int \sin\left(\ln x\right)d\left(\ln x\right) = -\cos\left(\ln x\right) + C$

Esercizio 56. $\int \sin^2 x dx$

Soluzione. ricordando le formule di bisezione, si può riscrivere l'integrale

$$= \int \frac{1 - \cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d\left(2x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Esercizio 57. $\int \cos^2 x dx$

Soluzione. sempre per le formule di bisezione
$$=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\int\cos 2xd\left(2x\right)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

Esercizio 58. $\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}}=$

Soluzione. $=2\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=2\ln\left|\tan\frac{x}{4}\right|+C$

Esercizio 59. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x^2}=$

Soluzione. ancora, poiché $d\left(x^2\right)=2xdx$, si ha
$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\cos^2 x^2}=\frac{1}{2}\tan x^2+C$$

Esercizio 60. $\int x\sin\left(1-x^2\right)dx=$

Soluzione. poiché $d\left(1-x^2\right)=-2xdx$, si ha $=-\frac{1}{2}\int\sin\left(1-x^2\right)d\left(1-x^2\right)=\frac{1}{2}\cos\left(1-x^2\right)+C$

Esercizio 61. $\int\tan xdx$

Soluzione. $=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln\left|\cos x\right|+C$ (ancora, $-\sin xdx=d\left(\cos x\right)$)

Esercizio 62. $=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=$

Soluzione. ricordando le formule di duplicazione $\sin 2x=2\sin x\cos x$ si ha
$$2\int\frac{dx}{\sin 2x}=\int\frac{d\left(2x\right)}{\sin 2x}=\ln\left|\tan x\right|+C$$

Esercizio 63. $\int\sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2xdx=$

Soluzione. essendo $d\left(\cos^2 x\right)=-\sin 2x$, si ha $=-\frac{1}{3}\int\sqrt{1+3\cos^2 x}d\left(1+3\cos^2 x\right)=-\frac{2}{9}\left(1+3\cos^2 x\right)^{\frac{3}{2}}+C$

Esercizio 64. $\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx=$

Soluzione. poiché $d\left[\tan x\right]=\frac{1}{\cos^2 x}dx$, si ha $=\int\sqrt{\tan x}d\left(\tan x\right)=\frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}}+C$

Esercizio 65. $\int\frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$

Soluzione. $=\int\frac{1}{\cos^2 3x}dx+\int\frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(3x\right)}{\cos^2 3x}-\frac{1}{3}\int\left(\cos^{-2}3x\right)d\left(\cos 3x\right)=\frac{1}{3}\tan 3x+\frac{1}{\cos 3x}+C$

Esercizio 66. $\int\frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx=$

Soluzione. $=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3-4}{x^4-4x+1}dx=\frac{1}{4}\ln\left|x^4-4x+1\right|+C$, (il numeratore è, infatti, la derivata del denominatore)

Esercizio 67. $\int\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}dx$

Soluzione. operando in $\mathbb{R}$ si può scomporre il numeratore e ottenere

$$=\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)}dx=\int dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx=x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

Esercizio 68. $\int xe^{-x^2}dx=$

Soluzione. $=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d\left(-x^2\right)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

Esercizio 69. $\int\frac{x^3-1}{x+1}dx=$

Soluzione. $=\int\frac{x^3+1-2}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x+1}dx-2\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|+C$

Esercizio 70. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x}}=$

Soluzione. $=2\int e^{-\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=-2e^{-\frac{x}{2}}+C$

Esercizio 71. $\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx=$

Soluzione. poiché $d\left(x+\cos x\right)=1-\sin x$, avremo che il numeratore è la derivata del denominatore, per cui $=\ln|x+\cos x|+C$

Esercizio 72. $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}=$

Soluzione. essendo $d\left(\ln x\right)=\frac{dx}{x}$, avremo

$$=\int\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}+C$$

Esercizio 73. $\int\frac{dx}{e^x+1}=$

Soluzione. $=\int\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx=\int dx-\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=x-\ln|e^x+1|+C$

Esercizio 74. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx=$

Soluzione. poiché $d\left(\sin^2 x\right) = \sin x \cos x dx$, si può riscrivere

$$= \int \frac{d\left(\sin^2 x\right)}{\sqrt{2 - \left(\sin^2 x\right)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) + C$$

Esercizio 75. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} =$

Soluzione. $= \int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2+\tan^2 x} dx = \int \frac{d(\tan x)}{2+\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\tan \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

2. Integrali risolti con il metodo della sostituzione di variabile

Molti degli integrali precedenti si potevano anche risolvere con tale metodo, così come gli integrali che seguiranno potranno essere risolti anche con altri metodi.

Esercizio 76. $\int x(2x+5)^{10} dx =$

Soluzione. introduciamo la sostituzione $t = 2x+5$ o $x = \frac{t-5}{2}$, da cui $dx = \frac{dt}{2}$; l'integrale diviene

$$= \int \frac{t-5}{4} \cdot t^{10} dt = \frac{1}{4} \int t^{11} dt - \frac{5}{4} \int t^{10} dt = \frac{1}{48} t^{12} - \frac{5}{44} t^{11} = \frac{1}{48}(2x+5)^{12} - \frac{5}{44}(2x+5)^{11} + C$$

Esercizio 77. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} =$

Soluzione. introduciamo la sostituzione $2x+1 = \frac{1}{t^2}$ o $2x = \frac{1}{t^2} - 1$, da cui $2dx = -\frac{2}{t^3} dt$, cioè $dx = -\frac{1}{t^3} dt$ e otteniamo

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^3}}{\frac{1-t^2}{2t^2} \cdot \frac{1}{t}} dt = \int -\frac{1}{t^3} \cdot \frac{2t^3}{1-t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C$$

Esercizio 78. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} =$

Soluzione. sostituisco $\sqrt{e^x-1} = t$, cioè $e^x = t^2+1$ da cui $e^x dx = 2t dt$ e quindi $dx = \frac{2t}{t^2+1} dt$. Avremo

$$= \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \arctan t = 2 \arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) + C$$

Esercizio 79. $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx =$

Soluzione. $= \int \frac{\ln 2 + \ln x}{2\ln 2 + \ln x} \frac{dx}{x}$, sostituiamo $\ln x = t$ e $\frac{1}{x} dx = dt$ e avremo

$$= \int \frac{\ln 2 + t}{2\ln 2 + t} dt = \int \frac{2\ln 2 + t}{2\ln 2 + t} dt - \int \frac{\ln 2}{2\ln 2 + t} dt = t - \ln\left|2(2\ln 2 + t)\right| = \ln x - \ln\left|2\ln 4x\right| + C$$

Esercizio 80. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

Soluzione. sostituiamo $\sqrt{e^x+1}=t$, cioè $e^x=t^2-1$ e $e^x dx=2tdt$ e avremo

$$=\int\frac{\left(t^2-1\right)2t}{t}dt=2\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{3}t^3-2t=2t\left(\frac{t^2}{3}-1\right)=2\sqrt{e^2+1}\left[\frac{(e^x+1)}{3}-1\right]+C$$

Esercizio 81. $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=$

Soluzione. sostituendo $\sqrt{\cos x}=t$, $\cos^2 x=t^4$, $\sin^2 x=1-t^4$, da cui $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx=dt$, avremo

$$=2\int\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\cdot\sin^2 xdx=-2\int\left(1-t^4\right)dt=-2t+\frac{2}{5}t^5=-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}\left(\cos x\right)^{\frac{5}{2}}dx+C$$

Esercizio 82. $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

Soluzione. sostituzione con funzione goniometrica: $x=\sin t$, da cui $dx=\cos tdt$, si ha

$$=\int\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos tdt=\int\sin^2 tdt=\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$$

Esercizio 83. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$

Osservazione 84. poniamo $x=\sec t$, $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\tan t$ e $dx=\sec t\cdot\tan tdt$, pertanto

$$=\int\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=t=\arccos x+C$$

Esercizio 85. $\int\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx=$

Soluzione. poniamo $x=\frac{1}{t}$ da cui $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ e avremo

$$=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{4t^2-1}{t^2}}}=-\int\frac{t}{\sqrt{4t^2-1}}dt=-\frac{1}{8}\int\frac{d\left(4t^2-1\right)}{\sqrt{4t^2-1}}=-\frac{1}{4}\sqrt{4t^2-1}=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$$

Esercizio 86. $\int\sqrt{1-x^2}dx=$

Soluzione. introduciamo la sostituzione $x=\sin t$, $x^2=1-\cos^2 t$ e $dx=\cos tdt$ e l'integrale diviene

$$=\int\cos^2 tdt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\int\cos 2td\left(2t\right)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$$

3. Integrazione per parti

Dalla formula della derivata del prodotto di due funzioni $D\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ si ottiene, integrando entrambi i membri $f(x)\cdot g(x)=\int f'(x)\cdot g(x)+\int f(x)\cdot g'(x)$ da cui $\int f'(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)$, dove $f'(x)$ è riconosciuta come la derivata di una funzione nota $f(x)$.

Esercizio 87. $\int \ln x dx=$

Soluzione. Poniamo $f=\ln x$ e $1dx=dg$ con $g=x$; avremo

$$x\ln x-\int\frac{x}{x}dx=x\ln x-x+C$$

Esercizio 88. $\int x\sin x dx=$

Soluzione. Poniamo $x=f$ e $dg=\sin x\mathrm{dx}$ e avremo

$$=-x\cos x+\int\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C$$

Esercizio 89. $\int\frac{x}{e^x}dx=$

Soluzione. Poniamo $f=x$ e $dg=e^{-x}dx$ e avremo

$$=-\frac{x}{e^x}+\int\frac{1}{e^x}dx=-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}=-\frac{1+x}{e^x}+C$$

Esercizio 90. $\int x^2e^{3x}dx=$

Soluzione. Poniamo $f=x^2$e $dg=e^{3x}dx$ e otterremo

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{1}{3}\int 2xe^{3x}dx=$$

iteriamo il procedimento $f=2x$ e $dg=e^{3x}dx$ e avremo

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right]=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C$$

Esercizio 91. $\int x\sin x\cos x dx=$

Soluzione. applichiamo le formule goniometriche $=\frac{1}{2}\int x\sin 2x dx$ e poniamo $x=f$ e $\sin 2x dx=dg$

$$=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{4}\int\cos 2x dx=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$$

Esercizio 92. $\int x^2\ln x dx=$

Soluzione. ponendo $f=\ln x$ e $x^2dx=dg$ avremo

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$$

Esercizio 93. $\int\ln^2 x dx=$

Soluzione. ponendo $f = \ln^2 x$ e $dx = dg$ avremo

$$= x\ln^2 x - \int 2x \cdot \frac{\ln x}{x} dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

Esercizio 94. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx =$

Soluzione. ponendo $f = \ln x$ e $dg = \frac{dx}{x^3}$ si ha

$$= -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{4x^2} + C$$

Esercizio 95. $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx =$

Soluzione. ponendo $f = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ e $dg = dx$ si ha

$$= x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{x^2+1} + C$$

Esercizio 96. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx =$

Soluzione. ponendo $f = x$ e $dg = \frac{dx}{\sin^2 x}$ si ottiene

$$= -x\cot x + \int \cot x dx = -x\cot x - \ln|\sin x| + C$$

Esercizio 97. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x} dx =$

Soluzione. ponendo $f = x$ e $dg = \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$ si ottiene

$$= -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{2\sin x} dx = -\frac{x}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln|\tan x| + C$$

Esercizio 98. $\int e^x \sin x dx =$

Soluzione. ponendo $f = \sin x$ e $dg = e^x dx$ si ottiene $= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$ iteriamo ora la procedura ponendo nuovamente $f = \cos x$ e $dg = e^x dx$ si ottiene

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \sin x dx\right) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

sommando ora i due integrali e dividendo a metà entrambi i membri, si ottiene

$$2\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right) + C$$

Esercizio 99. $\int \sin(\ln x) dx =$

Soluzione. ponendo $f = \sin(\ln x)$ e $dg = dx$ si ottiene $= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx =$, ponendo ora nuovamente $f = \cos(\ln x)$ e $dg = dx$ si ha $x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$; avremo pertanto

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$$

risolvendo rispetto a $\int \sin(\ln x)\,dx$ si ottiene

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))}{2} + C$$

4. Integrali di funzioni razionali fratte e irrazionali

Esercizio 100. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} =$

Soluzione. il polinomio al denominatore può essere riscritto come $(x+1)^2 + 4$, da cui

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$$

Esercizio 101. $\int \frac{dx}{3x^2 - 3x + 1} =$

Soluzione. riscriviamo il denominatore

$$= \int \frac{dx}{3\left(x^2 - 2\cdot\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{36}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{6}\right)}{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{11}}\arctan\frac{6\left(x - \frac{1}{6}\right)}{\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{6x - 1}{\sqrt{11}}$$

Esercizio 102. $\int \frac{x dx}{x^2 - 7x + 13} =$

Soluzione. poniamo $2x - 7 = t$ e $dx = \frac{dt}{2}$ e avremo

$$= \int \frac{\frac{t+7}{2}}{\left(\frac{t+7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{t+7}{2}\right) + 13}\cdot\frac{dt}{2} = \int \frac{t+7}{t^2+3}dt = \int \frac{t}{t^2+3}dt + 7\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+3\right)}{t^2+3} + \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-7}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|4x^2 - 28x + 52\right| + \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-7}{\sqrt{3}} + C$$

Esercizio 103. $\int \frac{3x-2}{x^2 - 4x + 5}dx =$

Soluzione. poniamo $2x - 4 = t$ e $dx = \frac{dt}{2}$ e otteniamo

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(t+4) - 2}{\frac{(t+4)^2}{4} - 4\frac{t+4}{2} + 5}\cdot\frac{t}{2}dt = \int \frac{3t+4}{2}\cdot\frac{4}{t^2+4}\frac{dt}{2} = \int \frac{3t}{t^2+4}dt + 4\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+4\right)}{t^2+4} + 4\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+4\right| + 2\arctan\frac{t}{2} = \frac{3}{2}\ln\left|4x^2 - 16x + 20\right| + 2\arctan(x-2) + C$$

Esercizio 104. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}} =$

Soluzione. riscriviamo il polinomio al denominatore in modo da ottenere la differenza di due quadrati

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1 + \frac{9}{16}\right) - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x - \frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right) + C$$

Esercizio 105. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx =$

Soluzione. $= 3\int \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}}dx = 3\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \ln\left|(x-2)+\sqrt{x^2-4x+5}\right| + C$

Esercizio 106. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Soluzione. poniamo $x = \frac{1}{t}$ e $dx = -\frac{1}{t^2}$ e avremo

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| = -\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\right| = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C$$

Esercizio 107. $\int \sqrt{x-x^2}dx =$

Soluzione. riscriviamo completando il quadrato $= \int \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx =$ poniamo ora $x-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin t$ da cui $\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cos t$ e $dx = \frac{1}{2}\cos t dt$. Avremo

$$\frac{1}{4}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}\sin 2t = \frac{1}{8}\arcsin(2x-1) + \frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{1-(2x-1)^2} + C$$

Esercizio 108. $\int \frac{xdx}{x^4-4x^2+3} =$

Soluzione. $= \int \frac{xdx}{(x^2-2)^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-2\right)}{(x^2-2)^2-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right| + C$

Esercizio 109. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} =$

Soluzione. $= \int \frac{e^x dx}{\sqrt{\left(e^x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \int \frac{d\left(e^x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(e^x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \ln\left|e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right| + C$

Esercizio 110. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}} =$

Soluzione. $= \int \frac{\ln x+2}{\sqrt{5-(\ln x+2)^2}}d(\ln x+2) - \int \frac{2}{\sqrt{5-(\ln x+2)^2}}d(\ln x+2)$ Introduciamo la sostituzione $\ln x + 2 = t$ con $x = e^{t-2}$ e $dx = e^{t-2}dt$ e avremo

$$= \int \frac{t}{\sqrt{5-t^2}}dt - 2\int \frac{1}{\sqrt{5-t^2}}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(5-t^2\right)}{\sqrt{5-t^2}} - 2\int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2}} = -\sqrt{5-t^2} - 2\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}} = -\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x} - 2\arcsin\frac{2+}{}$$

Esercizio 111. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx =$

Soluzione. Applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati. Data una frazione algebrica razionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, se $Q(x) = (x-a)^{\alpha} \ldots . (x-l)^{\lambda}$ dove $a, \ldots l$ sono le radici reali differenti del polinomio e $\alpha, \ldots, \lambda$ numeri naturali che indicano la molteplicità delle radici, allora è ammissibile la decomposizione della frazione nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \ldots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_{\lambda}}{(x-l)^{\lambda}}$$

I coefficienti indeterminati al numeratore si calcolano riducendo allo stesso denominatore i due membri dell'identità sopra eguagliando i coefficienti dei termini di uguale grado.

$$= \int \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6} dx + \int \frac{3}{(x-2)(x-3)} dx =$$

risolviamo il secondo integrale con il metodo indicato riscrivendo

$$\frac{3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

da cui

$$3 = A(x-3) + B(x-2) = x(A+B) - (3A+2B)$$

avremo, pertanto, eguagliando i coefficienti di pari grado

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-3 \\ B=3 \end{cases}$$

l'integrale diverrà

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{x-3} = x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

Esercizio 112. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x-3)(x-4)} dx$

Soluzione. applichiamo il metodo sopra indicato riscrivendo la frazione

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-4}$$

da cui $2x^2+41x-91 = A\left(x^2-7x+12\right) + B\left(x^2-5x+4\right) + C\left(x^2-4x+3\right)$ svolgendo e ordinando il polinomio si ha

$$2x^2+41x-91 = x^2(A+B+C) + x(-7A-5B-4C) + (12A+4B+3C)$$

avremo quindi il sistema

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ -7A-5B-4C=41 \\ 12A+4B+3C=-91 \end{cases} \qquad 1^a+3^a+2^a \qquad \begin{cases} A+B+C=2 \\ 6A=-48 \\ 12A+4B+3C=-91 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-8 \\ B=10-C \\ -96+40-C=-91 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-8 \\ B=-25 \\ C=35 \end{cases}$$

l'integrale diviene

$$= -8\int \frac{dx}{x-1} - 25\int \frac{dx}{x-3} + 35\int \frac{dx}{x-4} = \ln\left|\frac{x-4}{(x^2-4x+3)}\right| + C$$

Esercizio 113. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2} =$

Soluzione. riscriviamo la frazione come $\frac{dx}{x\left(x+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{\left(x+1\right)^2}$ ed eguagliando i numeratori avremo

$$1=A\left(x^2+2x+1\right)+B\left(x^2+x\right)+Cx \qquad 1=\left(A+B\right)x^2+\left(2A+B+C\right)x+A$$

otterremo le costanti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$$

l'integrale diviene

$$=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{d\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2}=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

Esercizio 114. $\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx=$

Soluzione. riscriviamo il numeratore come $x^4-6x^3+12x^2-8x+6+8x=x\left(x-2\right)^3+6+8x$ e osserviamo che il denominatore è lo sviluppo del cubo di un binomio; otterremo

$$=\int\frac{x\left(x-2\right)^3}{\left(x-2\right)^3}dx+\int\frac{8x+6}{\left(x-2\right)^3}dx=\int xdx+\int\frac{8x+6}{\left(x-2\right)^3}dx=$$

risolviamo il secondo integrale riscrivendo la frazione come $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}=\frac{8x+6}{(x-2)^3}$ ed eguagliando i numeratori si ha

$$8x+6=A\left(x^2-4x+4\right)+B\left(x-2\right)+C \qquad 8x+6=Ax^2+x\left(-4A+B\right)+\left(4A-2B+C\right)$$

otterremo le costanti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A=0 \\ -4A+B=8 \\ 4A-2B+C=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=0 \\ B=8 \\ C=22 \end{cases}$$

l'integrale diviene pertanto

$$=\frac{x^2}{2}+8\int\frac{d\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)^2}+22\int\frac{d\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)^3}=\frac{x^2}{2}-\frac{8}{x-2}-\frac{11}{\left(x-2\right)^2}=\frac{x^4-4x^3+4x^2-16x+10}{2\left(x-2\right)^2}+C$$

Esercizio 115. $\int\frac{dx}{\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2+4x+5\right)}=$

Soluzione. scomponiamo e riscriviamo i denominatori $=\int\frac{dx}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)\left[\left(x-2\right)^2+1\right]}=$ poniamo ora $x=t+2$ e $dx=dt$

$$=\int\frac{dt}{\left(t+1\right)\left(t-1\right)\left(t^2+1\right)}=\int\frac{dt}{t^4-1}=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2-2\left(t^2+1\right)}$$

poniamo ora $t=\tan z$ da cui $t^2+1=\frac{1}{\cos^2 z}$ e $dt=\frac{1}{\cos^2 z}dz$ e otterremo

$$=-\int\frac{\frac{1}{\cos^2 z}dz}{\frac{1}{\cos^4 z}-\frac{z}{\cos^2 z}}=\int\frac{\cos^2 z}{\cos 2z}dz=-\int\frac{1+\cos 2z}{2\cos 2z}dz=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(2z\right)}{\cos 2z}-\frac{1}{2}z=$$

$$-\frac{1}{4}\ln\left|\tan 2z+\sec z\right|-\frac{1}{2}z+C==-\frac{1}{4}\ln\left|\tan 2z+\sec z\right|-\frac{1}{2}z$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t}{1-t^2}+\sqrt{t^2+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan t=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-4}{1-\left(x-2\right)^2}+\sqrt{x^2+4x+5}\right|-\frac{1}{2}\arctan\left(x-2\right)+C$$

Esercizio 116. $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx=$

Soluzione. in questo caso applichiamo la sostituzione $x = t^2 + 1$ da cui $dx = 2tdt$ e otteniamo

$$= \int \frac{(t^2+1)}{t} 2tdt = 2\left(\int t^6 dt + 3\int t^4 dt + 3\int t^2 dt + \int dt\right) = \frac{2}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 + 2t =$$

$$\frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + 2(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

5. Integrali di funzioni goniometriche

Esercizio 117. $\int \cos^3 x dx =$

Soluzione. $= \int \cos^2 x d(\sin x) = \int \left(1-\sin^2 x\right) d(\sin x) = \int d(\sin x) - \int \sin^2 x d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Esercizio 118. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} =$

Soluzione. $= \dfrac{1}{2} \int \sin^2 \dfrac{x}{2} \cos^4 \dfrac{x}{2} d\left(\sin^2 \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \int \sin^2 \dfrac{x}{2}\left(1 + \sin^4 \dfrac{x}{2} - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}\right) d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\int \sin^2 \frac{x}{2} d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int \sin^6 \frac{x}{2} d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) - \int \frac{1}{2}\int \sin^4 \frac{x}{2} d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\sin^4 \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin^8 \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\sin^6 \frac{x}{2} + C$$

Esercizio 119. $\int \dfrac{dx}{3+5\cos x} dx =$

Soluzione. applichiamo le formule parametriche della goniometria per le quali $\cos x = \frac{1-t^2}{1-t^2}$ e $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ dove $t = \tan \frac{x}{2}$. Avremo quindi $x = 2\arctan t$ e $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. L'integrale diviene

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2\int \frac{dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \int \frac{dt}{(2-t)(2+t)} =$$

riscriviamo la frazione $\dfrac{1}{(2-t)(2+t)} = \dfrac{A}{2-t} + \dfrac{B}{2+t}$ e confrontando i numeratori $1 = t(A-B) + 2(A+B)$. A, B si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

e l'integrale diviene

$$= \int \frac{dt}{(2-t)(2+t)} = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dt}{2-t} + \int \frac{dt}{2+t}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

Esercizio 120. $\int \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} dx =$

Soluzione. utilizziamo la definizione di tangente come rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo

$$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} dx = -\ln|\cos x - \sin x| + C$$

Esercizio 121. $\int \dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx =$

Soluzione. poiché $d\left(\sin^2 x\right) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$, si ha $\int \dfrac{d\left(\sin^2 x\right)}{1+\sin^2 x} = \ln\left|1+\sin^2 x\right| + C$

Esercizio 122. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx =$

Soluzione. riscriviamo, completando il quadrato, $= \int \sqrt{-(x+1)^2+4}dx$; operiamo ora la sostituzione $x = 2\sin t - 1$ e $dx = 2\cos t dt$, avremo

$$= \int \sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)} \cdot 2\cos t dt = 4\int \cos^2 dt = 2\int (1+\cos 2t)\, dt = 2\int dt + 2\int \cos 2t dt = 2t + \sin 2t =$$

$$= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C$$

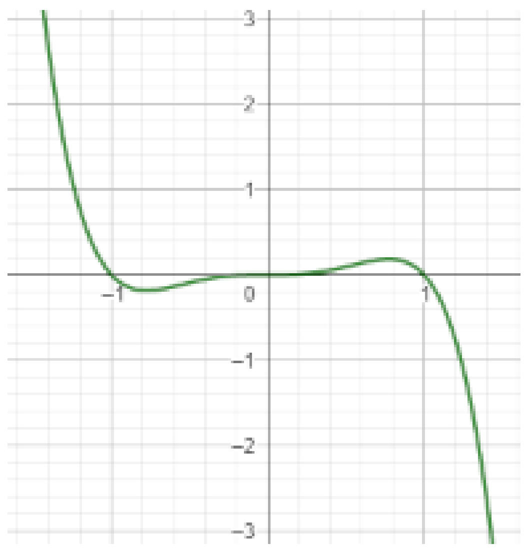
6. Problemi sugli integrali

Esercizio 123. Determinare la funzione $f(x)$ avente derivata $f'(x) = 3x^2 - 5x^4$ e il cui grafico γ passa per l'origine. Tracciare γ.

Soluzione. Si tratta di trovare la funzione primitiva, per cui

$$f(x) = \int \left(3x^2 - 5x^4\right) dx = x^3 - x^5 + C$$

passando per l'origine, tra le infinite funzioni soluzioni che si differenziano per una costante dovremo avere $C = 0$ e la funzione richiesta sarà $f(x) = x^3 - x^5$



Esercizio 124. Dopo aver tracciato il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{3x-1}{2-x}$$

determinare la primitiva $F(x)$ il cui grafico passa per i punti $(3; -8)$ e $(1; 0)$.

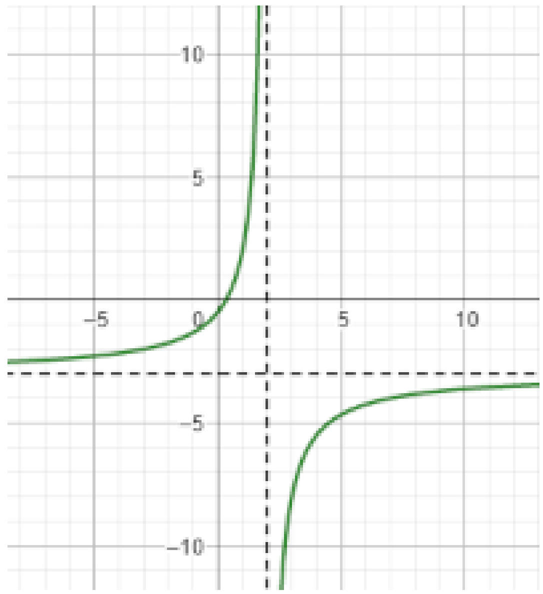
Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R} - \{2\}$ con un asintoto verticale di equazione $x = 2$ e un asintoto orizzontale $y = -3$. La funzione è positiva per $\frac{1}{3} < x < 2$.

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \tfrac{3x-1}{2-x} = \mp\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{3x-1}{2-x} = -3$$

la derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{5}{(2-x)^2}$$

la funzione è quindi sempre crescente nel dominio e non ammette punti stazionari.(anche la derivata seconda non si annulla mai). Una tale funzione può ovviamente essere rapidamente rappresentata osservando che appartiene alla famiglia delle funzioni omografiche, cioè iperbole traslate; in questo caso la traslazione è effettuata dal vettore $\overrightarrow{v}(2; -3)$ Il grafico è il seguente



Troviamo la primitiva; dividendo il numeratore per il denominatore abbiamo $(3x-1) = -3(2-x)+5$

$$F(x) = \int \frac{3x-1}{2-x}dx = \int \frac{-3(2-x)+5}{2-x}dx = -3\int dx + 5\int \frac{dx}{2-x} = -3x + 5\ln(|2-x|) + C$$

Se la funzione $F(x)$ passa per il punto $(3;-8)$ nell'intervallo $x>2$ avremo $-8 = -9 + C$, e per $x<2$, passa per il punto $(1;0)$ per cui $0 = -3 + C$

$$\begin{array}{ll} F_1(x) = -3x + 5\ln(2-x) + 1 & x > 2 \\ F_2(x) = -3x + 5\ln(x-2) + 3 & x < 2 \end{array}$$

Esercizio 125. Determinare la funzione $F(x)$ sapendo che il coefficiente angolare della retta tangente varia secondo la legge $f(x) = xe^{2-x}$ e che il grafico passa per il punto $(2;-3)$. Tracciare sullo stesso riferimento i grafici delle due funzioni.

Soluzione. Ricordando il significato geometrico di derivata, possiamo vedere che $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$. Pertanto calcoliamo l'integrale mediante l'integrazione per parti

$$F(x) = \int xe^{2-x}dx = -e^{2-x} + \int e^{2-x}dx = -e^{2-x}(x+1) + C$$

se il grafico della funzione $F(x)$ passa per il punto $(2;-3)$ allora $3 = 3 + C$, cioè $C = 0$, quindi

$$f(x) = xe^{2-x} \quad F(x) = -e^{2-x}(x+1)$$

ed entrambe le funzioni sono definite sull'intero insieme dei numeri reali.

Vediamo di studiare le funzioni singolarmente iniziando con $f(x)$: dominio: $\mathbb{R}$; è positiva per $x > 0$; calcoliamo i limiti

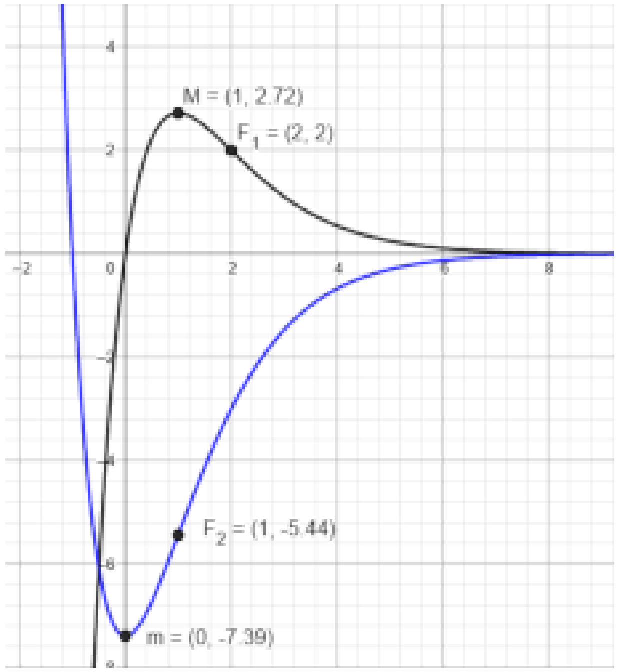
$$\lim_{x\to+\infty} xe^{2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^2}{e^x} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^2}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^{2-x} = -\infty$$

abbiamo un asintoto orizzontale destro di equazione $y = 0$; la funzione cresce per $x < 1$ e decresce per $x > 1$ e ammette un massimo per $x = 1$ nel punto $(1;e)$; ha un flesso per $x = 2$ nel punto $(2;2)$.

Grafico di $F(x) = -e^{2-x}(x+1)$: dominio $\mathbb{R}$; la funzione è positiva per $x < -1$; verifichiamo eventuali asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} -(x+1)e^{2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-(x+1)e^2}{e^x} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^2}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} -(x+1)e^{2-x} = +\infty$$

abbiamo ancora un asintoto orizzontale destro di eq: $y = 0$; essendo la derivata è $f(x)$, la funzione cresce per $x > 0$ e ammette un minimo nel punto $\left(0;-e^2\right)$; presenta un flesso nel punto $(1;-2e)$



Esercizio 126. La velocità massima (in ms^{-1}) di un punto mobile su una retta varia secondo la legge:

$$v(t) = 6\cos 2t \cdot \sin t \quad per \quad t \geq 0$$

(a) Determinare l'accelerazione $a(t)$; (b) determinare l'equazione oraria $s(t)$ sapendo che dopo t secondi dall'istante iniziale l'ascissa del punto è $-2\,m$.

Soluzione. l'accelerazione può essere considerata come la variazione della velocità nell'intervallo di tempo; se tale intervallo tende a zero, la funzione che descrive come varia l'accelerazione rispetto al tempo è la derivata della funzione $v(t)$

$$a(t) = -12\sin 2t \sin t + 6\cos 2t \cos t = 6\cos t\left(6\cos^2 t - 5\right)$$

la legge oraria è

$$\int s(t)\,dt = 6\int \cos 2t \cdot \sin t dt = 6\int \left(2\cos^2 t - 1\right)\sin t dt = 6\int \left(1 - 2\cos^2 t\right) d(\cos t) =$$

$$= 6\int d(\cos t) - 12\int \cos^2 t d(\cos t) = 6\cos t - 4\cos^3 t + C$$

a $t = 0$ corrisponde $s(\pi\, sec) = -2$, per cui $-2 = -6 + 4 + C$, da cui $C = 0$ e la legge oraria sarà

$$s(t) = 6\cos t - 4\cos^3 t$$

Parte 2. Integrali definiti

7. Calcolo degli integrali definiti con l'aiuto di quelli indefiniti

7.1. **Integrale definito con limite superiore variabile:** Se la funzione $f(t)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$, allora la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva della funzione $f(x)$, cioè

$$F'(x) = f(x) \quad per \quad a \leq x \leq b$$

7.2. **Formula di Newton-Leibnitz.** Se $F'(x) = f(x)$, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

La primitiva $F(x)$ si determina calcolando l'integrale indefinito

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

8. Esercizi

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Esercizio 127. $F(x) = \int_1^x \ln t dt \quad (x > 0)$

Soluzione. $F'(x) = \ln x$

Esercizio 128. $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4}dt$

Soluzione. Riscriviamo $F(x) = -\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt$, avremo $F'(x) = -\sqrt{1+x^4}$

Esercizio 129. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$

Soluzione. $F'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$

Esercizio 130. $I = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos\left(t^2\right) dt \quad (x > 0)$

Soluzione. $\dfrac{dI}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Esercizio 131. Trovare i punti estremanti della funzione $y = \int_0^x \dfrac{\sin t}{t} dt$

Soluzione. $y' = \dfrac{\sin x}{x}$ per cui $\sin x = 0$ quando $x = k\pi$.

9. Calcolo degli integrali definiti

Esercizio 132. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Esercizio 133. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-2}^{-1} x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$

$\int\limits_{-x}^{x} e^t dt = e^x - e^{-x} = 2\sinh x$

Esercizio 134. $\int\limits_0^x \cos t dt = \sin t|_0^x = \sin x$

Esercizio 135. $\int\limits_1^2 \left(x^2 - 2x + 3\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - 4 + 6 - \frac{1}{3} + 1 - 3 = \frac{7}{3}$

Esercizio 136. $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \int\limits_0^8 (2x)^{\frac{1}{2}} + \int\limits_0^8 x^{\frac{1}{3}} = \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^8 = \frac{2^6}{\frac{3}{2}} + \frac{2^4}{\frac{4}{3}} = \frac{100}{3}$

Esercizio 137. $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int\limits_1^4 x^{-2}dx + \int\limits_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\Big|_1^4 = -\frac{1}{4} - 1 + 1 + 2 = \frac{7}{4}$

$\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}dx = \int\limits_2^6 (x-2)^{\frac{1}{2}}\, d(x-2) = \frac{x-2}{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^6 = \frac{2^3}{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{16}{3}$

Esercizio 138.

$$\int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}x = -\int\limits_{-3}^{0} (25+3x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{0} (25+3x)^{-\frac{1}{2}}\, d(3x+25) =$$
$$= -\frac{2}{3}\sqrt{3x+25}\big|_{-3}^{0} = -\frac{10}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$$

Esercizio 139. $\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1} = -\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|_{-3}^{-2} = -\frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$

Esercizio 140. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

Soluzione. Scomponiamo il denominatore e utilizziamo il metodo per le funzioni razionali $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(x+2)}$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

da cui

$$x = A(x+2) + B(x+1)$$
$$x = Ax + 2A + Bx + B = x(A+B) + (2A+B)$$

confrontando i termini al primo e al secondo membro di pari grado, si ha

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=-2A \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

l'integrale diviene allora

$$-\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + 2\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = -\ln|x+1||_0^1 + 2\ln|x+2||_0^1 = \ln\frac{9}{8}$$

Esercizio 141. $\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}dx$

Soluzione. Riscriviamo la frazione e scomponiamo

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^5+32-32}{x+2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cancel{(x+2)}\left(x^4-2x^3+4x^2-8x+16\right)}{\cancel{x+2}}dx - 32\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2}dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(x^4-2x^3+4x^2-8x+16\right)dx - 32\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2}dx =$$

$$\left.\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} - 4x^2 + 16x - 32\ln(x+2)\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} + \frac{8}{3} + 32 - 32\ln 3 = \frac{526}{15} - 32\ln 3$$

Esercizio 142. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

Soluzione. In questo caso il denominatore non è scomponibile, ma è possibile riscriverlo nella forma $x^2+4x+4+1 = (x+2)^2+1$, per cui,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

potremmo risolvere subito, ma per rendere più chiaro poniamo $x+2=z$, $dx=dz$

$$\int_0^1 \frac{dz}{z^2+1} = \arctan z|_0^1 = \arctan 3 - \arctan 2 = \arctan\frac{1}{7}$$

Esercizio 143. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$

Soluzione. risolviamo con il metodo di sostituzione ponendo $x^2 = z$, $2xdx = dz$, $dx = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$

$$\int_0^1 \frac{z\cancel{\sqrt{z}}}{z^4+1}\frac{dz}{2\cancel{\sqrt{z}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z}{z^4+1}dz$$

ripetiamo la sostituzione ponendo nuovamente $z^2 = t$, $2zdz = dt$, $dz = \frac{dt}{2\sqrt{z}}$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\cancel{\sqrt{t}}}{t^2+1}\frac{dt}{\cancel{\sqrt{t}}} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\arctan t\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{16}$$

Esercizio 144. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4}$

Esercizio 145. $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

Soluzione. riscriviamo il radicando come $9-4+4x-x^2 = 9-(x-2)^2$, per cui

$$=\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \int_2^{3,5} \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)\Bigg|_2^{3,5} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Esercizio 146. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 xdx$

Soluzione. Usiamo le formule goniometriche di bisezione

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xd(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi+2}{8}$$

Esercizio 147. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$

Soluzione. scomponiamo $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x$ e applichiamo la prima proprietà della goniometria

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 xdx == -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \left(1-\cos^2 x\right)dx =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)d(\cos x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\cos x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xd(\cos x) =$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 148. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

Soluzione. essendo $d(\ln x) = \frac{1}{x}$, possiamo riscrivere

$$= \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esercizio 149. $\int_0^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

Soluzione. essendo ancora $d(\ln x) = \frac{1}{x}$, possiamo riscrivere

$$= \int_0^e \sin(\ln x)\, d(\ln x) = -\cos(\ln x)|_0^e = 1 - \cos 1$$

Esercizio 150. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

Soluzione. applicando la definizione di tangente, riscriviamo

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x)|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

essendo il numeratore è l'opposto della derivata del denominatore.

Esercizio 151. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

Soluzione. procediamo mediante sostituzione: $e^x = u$, $e^x dx = du$; se $x = 0$ allora $u = 1$ e se $x = 1$ $u = e$

$$= \int_1^e \frac{\cancel{u}}{1+u^2} \frac{du}{\cancel{u}} = \int_1^e \frac{du}{1+u^2} = \arctan u|_1^e = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 152. $\int_1^3 \sqrt{x+1} dx = \int_1^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\, d(x+1) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{2}{3}\sqrt{64} - \frac{2}{3}\sqrt{8} = \frac{4\left(4-\sqrt{2}\right)}{3}$

Esercizio 153. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x = t^2$, $dx = 2tdt$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = 4$ $t = 16$

$$2\int_0^{16} \frac{tdt}{1+t} = 2\int_0^{16} \frac{t+1}{1+t} dt - 2\int_0^{16} \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln(t+1)|_0^{16} = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\Big|_0^4 = 4 - 2\ln 3$$

Esercizio 154. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $e^x - 1 = t^2$, $e^x dx = 2tdt$ per cui $dx = \dfrac{2tdt}{t^2+1}$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = \ln 2$ $t = 1$

$$2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = 2t - 2\arctan t|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 155. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x = \sin t$, $dx = \cos tdt$; se $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ allora $t = \frac{\pi}{4}$ e se $x = 1$ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cdot \cos tdt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 t}dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt =$$

$$= -\cot t - t|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 156. $\int\limits_1^2 \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x^2 - 1 = t^2$, $xdx = tdt$, per cui $dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}$; se $x = 1$ allora $t = 0$ e se $x = 2$ $t = \sqrt{3}$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - \arctan t|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Esercizio 157. $\int\limits_0^{\ln 5} \dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $e^x - 1 = t^2$, $e^x dx = 2tdt$, per cui $dx = \frac{2tdt}{t^2+1}$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = \ln 5$ $t = 2$

$$\int_0^2 \frac{\cancel{(t^2+1)}t}{t^2+4} \cdot \frac{2t}{\cancel{t^2+1}}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2+4}{t^2+4}dt - 8\int_0^2 \frac{1}{t^2+4}dt =$$

$$= 2t - 4\arctan \frac{t}{2}\bigg|_0^2 = 4 - \pi$$

Esercizio 158. $\int\limits_0^5 \dfrac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $3x+1=t^2$, $3dx=2tdt$, per cui $dx=\frac{2tdt}{3}$; se $x=0$ allora $t=1$ e se $x=5$ $t=4$

$$\int_1^4 \frac{\frac{2t}{3}}{2\left(\frac{t^2-1}{3}\right)+t}dt=\int_1^4 \frac{2t}{2t^2+3t-2}dt=$$

scomponiamo il denominatore in $(2t-1)(t+2)$, per cui $\frac{2t}{(2t-1)(t+2)}=\frac{A}{2t-1}+\frac{B}{t+2}$

$$\begin{cases} A+2B=2 \\ 2A-B=0 \end{cases} \begin{cases} 5A=2 \\ B=2A \end{cases} \begin{cases} A=\frac{2}{5} \\ B=\frac{4}{5} \end{cases}$$

l'integrale si può riscrivere

$$=\frac{1}{5}\int_1^4 \frac{1}{2t-1}dt+\frac{4}{5}\int_1^4 \frac{1}{t+2}dt=\frac{1}{5}\ln(2t-1)+\frac{4}{5}\ln(t+2)\Big|_1^4=\frac{1}{5}\ln 7+\frac{4}{5}\ln 6-\frac{4}{5}\ln 3=\frac{1}{5}\ln 112$$

Esercizio 159. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$; se $x=1$ allora $t=1$ e se $x=3$ $t=\frac{1}{3}$

$$-\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}}dt=\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+5t+t^2}}dt=\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{21}{4}\right)}}dt=$$

$$=\ln\left[\left(t+\frac{5}{2}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{21}{4}\right)}\right]\Bigg|_{\frac{1}{3}}^3=\ln\left(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right)-\ln\left(\frac{17}{6}+\frac{10}{6}\right)=\ln\left(\frac{7+2\sqrt{7}}{9}\right)$$

Esercizio 160. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

Soluzione. Procediamo con il metodo di integrazioni per parti, ricordando che

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=\left.u(x)\,v(x)\right|_a^b-\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

per cui se poniamo $u=x$ e $\cos x dx=v'$, avremo

$$=\left.x\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{2}+\left.\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

Esercizio 161. $\int_1^e \ln x dx$

Soluzione. Procediamo con il metodo di integrazioni per parti, ponendo $u=\ln x$ e $dx=v'$, avremo

$$=\left.x\ln x\right|_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot x dx=e-e+1=1$$

Esercizio 162. $\int_0^1 x^3e^{2x}dx$

Soluzione. Poniamo $u = x^3$ e $e^{2x}dx = v'$, avremo

$$x^3 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 3x^2 dx =$$

applichiamo nuovamente il metodo di integrazione ponendo $u = x^2$ e $e^{2x}dx = v'$, avremo

$$\frac{1}{2}x^3e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}xe^{2x}dx\right) =$$

di nuovo $u = x$, $v' = e^{2x}dx$

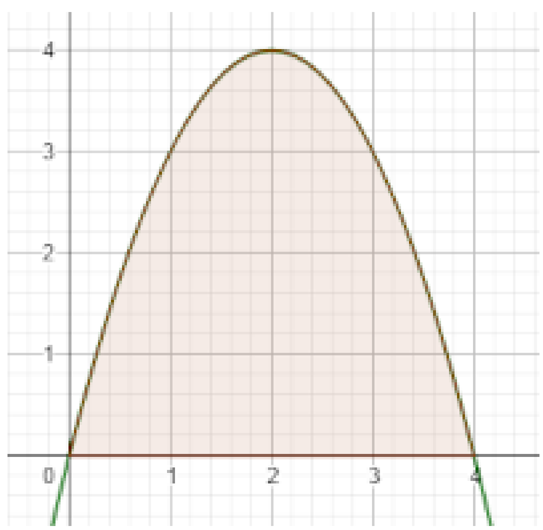
$$\frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{8}e^{2x} = \frac{e^2+3}{8}$$

Esercizio 163. $\int_{-2}^{2} \frac{x^3}{x^2+1}dx$

Soluzione. In questo caso si può osservare che la funzione è dispari ed è quindi simmetrica rispetto all'origine del piano cartesiano, quindi, essendo i due estremi opposti e simmetrici rispetto all'origine, l'integrale sarà $= 0$.

10. Calcolo delle aree di figure piane

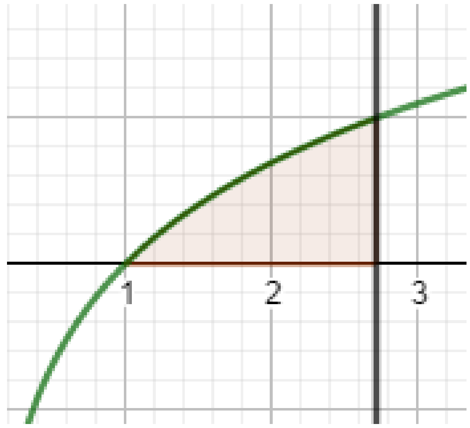
Esercizio 164. Calcolare l'area limitata dalla parabola $y = 4x - x^2$e dell'asse delle ascisse.



Soluzione. la parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

Esercizio 165. Calcolare l'area limitata dalla curva $y = \ln x$, dall'asse Ox e dalla retta $x = e$.



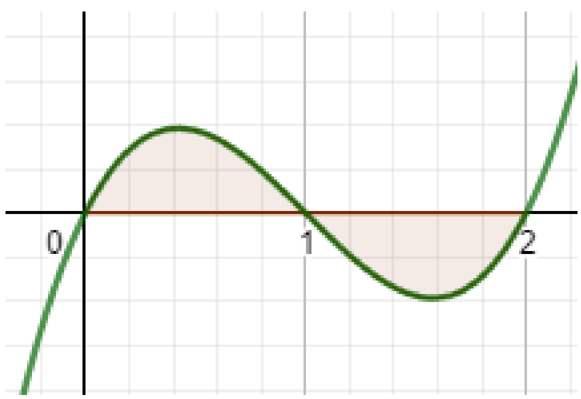
Soluzione. la curva sarà compresa tra i punti di ascissa $x_1 = 1$ e $x_2 = e$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_1^e \ln x dx$$

risolviamo per parti con $u = \ln x$ e $v' = dx$

$$= x \ln x|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x|_1^e = e - e + 1 = 1$$

Esercizio 166. Calcolare l'area limitata dalla curva $y = x(x-1)(x-2)$ e dall'asse Ox. La curva interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$, per cui



Soluzione. la curva interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, per cui possiamo calcolare l'integrale

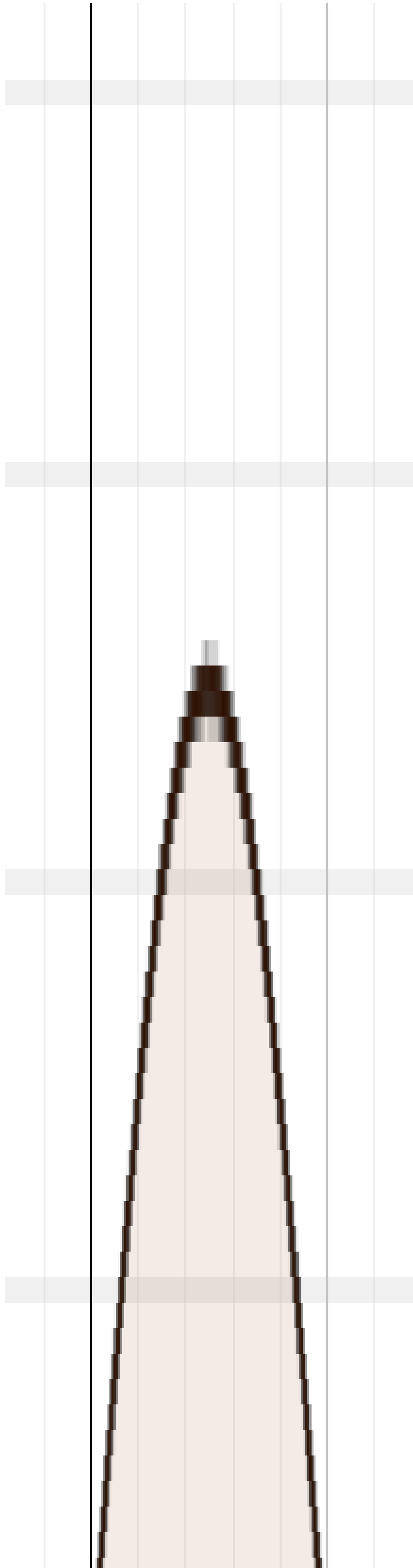
$$A = \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) dx - \int_1^2 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right|_0^1 - \left.\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right|_1^2 = \frac{1}{2}$$

Esercizio 167. Calcolare l'area limitata dalla curva $y^3 = x$, dalla retta $y = 1$ e dalla verticale $x = 8$. La curva interseca la retta orizzontale nel punto di ascissa $x = 1$, per cui

Soluzione. Calcoliamo l'integrale della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ al quale sottraiamo l'area sotto la retta $y = 1$ (si può calcolare anche geometricamente come l'area del rettangolo)

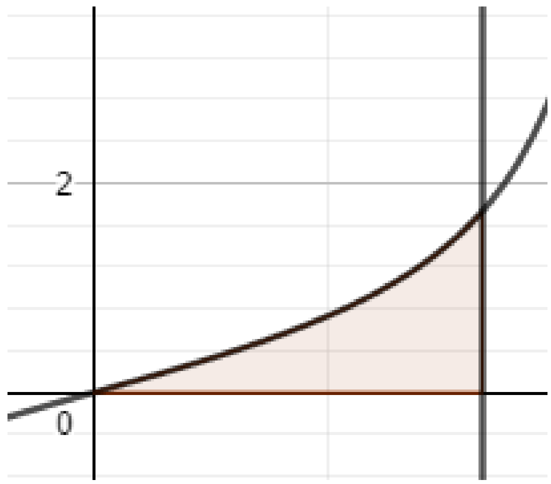
$$A = \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx - \int_1^8 dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - x \Big|_0^8 = \frac{17}{4}$$

Esercizio 168. Calcolare l'area limitata da una semionda della sinusoide $y = \sin x$ e dall'asse OX.



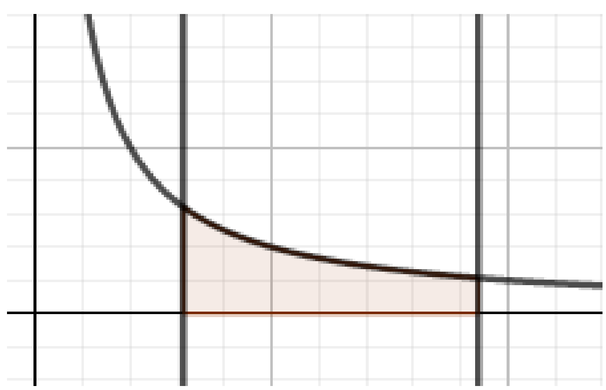
Soluzione. $A = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi} = 2$

Esercizio 169. Calcolare l'area compresa tra la curva $y = \tan x$, l'asse OX e la retta $x = \frac{\pi}{3}$.



Soluzione. $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln(\cos x)|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2$

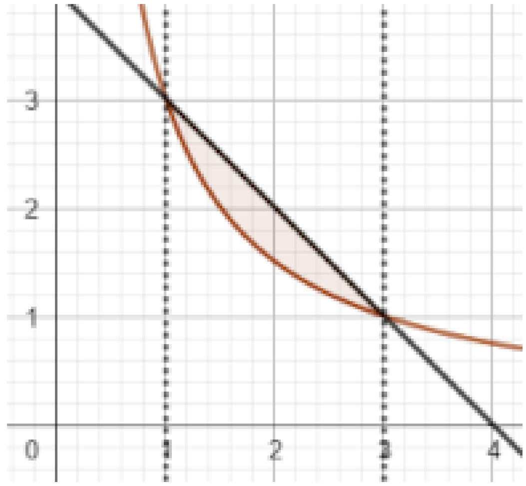
Esercizio 170. Calcolare l'area compresa tra l'iperbole $xy = m^2$, le verticali $x = a$ e $x = 3a$ $(a > 0)$ e l'asse OX.



Soluzione. $A = \int_a^{3a} \frac{m^2}{x} dx = m^2 \ln(x)\big|_a^{3a} = m^2 (\ln 3a - \ln a) = m^2 \ln 3$

Esercizio 171. Determinare l'area del dominio così definito:

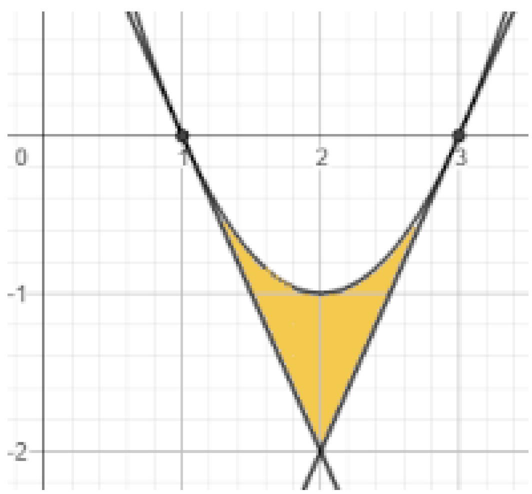
$$\begin{cases} xy \geq 3 \\ x + y - 4 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Soluzione. L'area delimitata è quella rappresentata in figura, intersezione delle tre condizioni. si tratta pertanto di calcolare l'area sottesa dalla retta nell'intervallo $1 \leq 3 \leq 3$ dalla quale sottrarre l'area sottesa dal ramo di iperbole equilatera sempre nello stesso intervallo. L'area sottesa dalla retta equivale a quella del trapezio rettangolo, che vale $A_{tr} = \frac{(3+1)\cdot 2}{2} = 4$

$$A = 4 - \int_1^3 \frac{3}{x} dx = 4 - 3\ln(x)|_1^3 = 4 - \ln 27$$

Esercizio 172. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, determinare l'area della regione piana limitata dalle tangenti nei punti di intersezione con l'asse x e dalla curva.



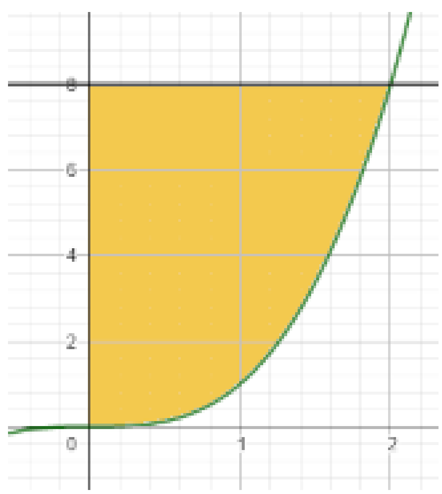
Soluzione. La parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $x = 1$ e $x = 3$. Le tangenti in questi due punti saranno simmetriche rispetto all'asse della parabola e si incontreranno quindi nel punto di ascissa $x = 2$ e avranno, quindi, coefficienti angolari opposti uguali rispettivamente a $m_1 = -2$ e $m_2 = 2$ e le loro equazioni saranno $r_1 : 2x+y-2 = 0$ e $r_2 : 2x - y - 6 = 0$. Il loro punto di intersezione sarà $(2; -2)$. [Le tangenti si possono pure determinare ricordando il significato geometrico di derivata di una funzione]. L'area richiesta, indicata in figura, è la differenza tra l'area del triangolo isoscele e quella del segmento di parabola. Il triangolo ha area $A_{tr} = 2$. L'area richiesta sarà

$$A = 2 - \int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = 4 - \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right|_1^3 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 173. Calcolare l'area compresa tra la versiera di Agnesi $y = \frac{a^3}{X^2+a^2}$ e il semiasse positivo delle ascisse.

Soluzione. $A = a^3 \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{X^2+a^2} = \dfrac{a^3}{a} \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2} a^2$

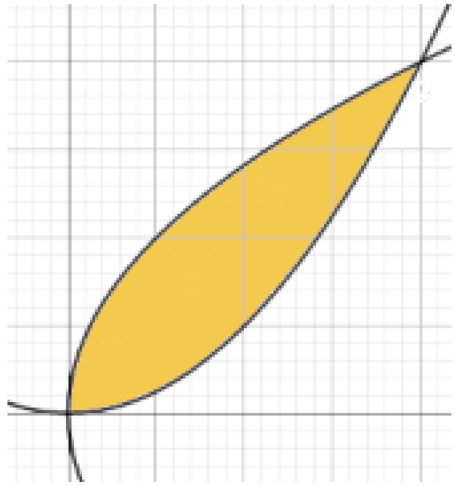
Esercizio 174. Calcolare l'area della figura limitata dalla curva $y = x^3$, dalla retta $y = 8$ e dall'asse OY.



Soluzione. L'area richiesta è la differenza tra l'area sottesa dalla retta e quella sottesa dalla curva nell'intervallo $0 \le x \le 2$. Pertanto

$$A = 16 - \int_0^2 x^3 dx = 16 - \frac{x^4}{4} \arctan x \Big|_0^2 = 16 - 4 = 12$$

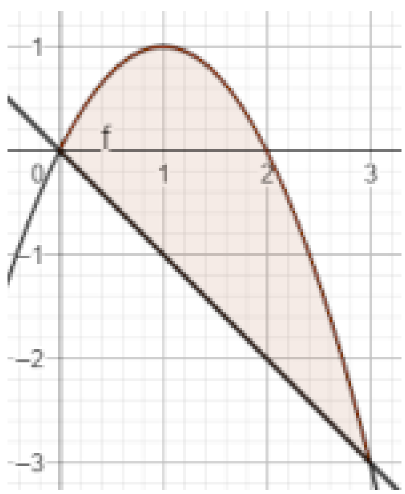
Esercizio 175. Calcolare l'area delimitata dalle parabole $y^2 = 2px$ e $x^2 = 2py$.



Soluzione. L'area richiesta è la differenza tra le parti di piano sottese dalle due curve nell'intervallo $[0;2p]$

$$A = \int_0^{2p} \sqrt{2px}dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p}dx = \frac{2x\sqrt{2px}}{3} - \frac{x^3}{6p}\Big|_0^{2p} = \frac{8p^2}{3} - \frac{4p^2}{3} = \frac{4}{3}p^2$$

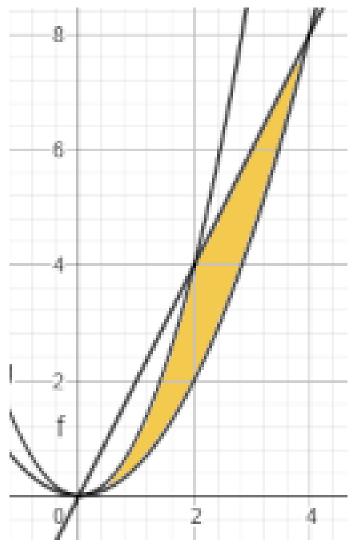
Esercizio 176. Calcolare l'area delimitata dalla parabole $y = -x^2 + 2x$ e dalla retta $y = -x$.



Soluzione. La retta e la parabola si intersecano nei punti $(0;0)$ e $(3;0)$. L'area richiesta è data da

$$A = \int_0^3 \left(-x^2 + 2x - (-x)\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{9}{2}$$

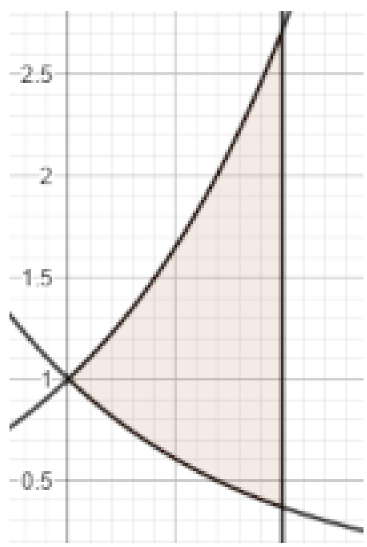
Esercizio 177. Calcolare l'area compresa tra le parabole $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{2}$ e dalla retta $y = 2x$.



Soluzione. Le due parabole e la retta si intersecano nell'origine. La retta interseca la parabola $y = x^2$ nel punto di ascissa $x = 4$ e incontra l'altra parabola nel punto di ascissa $x = 2$.

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right) dx - \int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right) dx = -\frac{x^3}{6} + x^2\Big|_0^4 - x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4$$

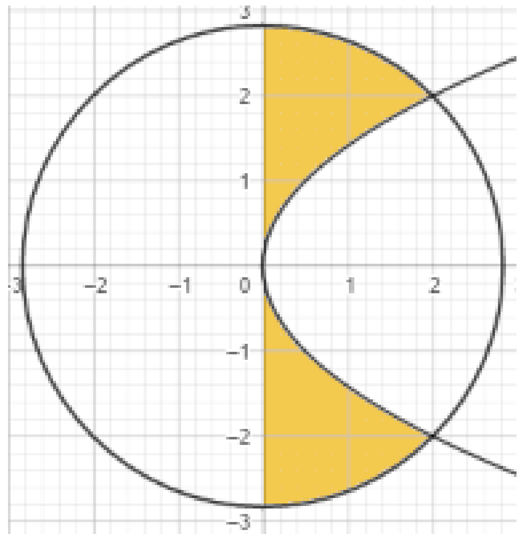
Esercizio 178. Calcola l'area limitata dalle curve $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ e dalla retta $x = 1$.



Soluzione. Le due curve esponenziali si intersecano nel punto di ascissa $x = 0$ e intersecano la retta verticale nel punto di ascissa $x = 1$.

$$A = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) dx = e^x + e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e}$$

Esercizio 179. Calcolare l'area delle due parti del cerchio $x^2 + y^2 = 8$ delimitata dalla parabola $y^2 = 2x$



Soluzione. Le due parti di cerchio hanno, per simmetria, la stessa area e questo consente di calcolare il solo integrale della parte di piano nel quadrate positivo. La parabola interseca la circonferenza nel punto di ascissa $x = 2$. L'area sarà pertanto la differenza tra la parte sottesa dalla circonferenza e quella sottesa dalla parabola nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$.

$$\frac{A}{2} = \int_0^2 \sqrt{8 - x^2}dx - \int_0^2 \sqrt{2x}dx =$$

calcoliamo il primo integrale sostituendo $x = 2\sqrt{2}\cos t$, $dx = -2\sqrt{2}\sin t dt$; se $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$; se $x = 2$, $t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{A}{2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8\sin^2 t} \cdot \left(-2\sqrt{2}\sin t\right) dt - \int_0^2 \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}dx = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \sqrt{2}\left(\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2\right) =$$

ma $\sin^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2}$, per cui

$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) - \sqrt{2} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{2} = 4t - 2\sin 2t|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3} = \pi + 2 - \frac{8}{3} = \pi - \frac{2}{3}$$

l'area totale sarà quindi

$$A = 2\pi - \frac{4}{3}$$

Esercizio 180. Dopo aver determinato le parabole γ e γ' appartenenti al fascio $y = -x^2 + ax + c$ passanti per $A(0;3)$ e tangenti alla retta $r : 4x + 4y - 21 = 0$, detti M e N i rispettivi punti di tangenza (M appartenente al primo quadrante), determinare la retta parallela a r che interseca gli archi $\widehat{AM}$ e $\widehat{AN}$ di γ e γ', nei punti R e T in modo che sia massima l'area del triangolo MTR; calcolare poi l'area del triangolo mistilineo AMN.

Soluzione. Le parabole passano per A e quindi $c = 3$ e l'equazione si riduce a $y = -x^2 + ax + 3$. Essendo tangenti alla retta r avremo

$$\begin{cases} y = -x^2 + ax + 3 \\ y = -x + \frac{21}{4} \end{cases} \qquad x^2 - x(a-1) + \frac{9}{4} = 0 \quad a_1 = -4 \quad a_2 = 2$$

le parabole saranno $\gamma : -x^2 - 4x + 3$ e $\gamma_1 = -x^2 + 2x + 3$. Ora, ricordando il significato geometrico di derivata, possiamo trovare i due punti di tangenza:

$$-1 = -2x_N + a \quad a = -4 \quad N\left(-\tfrac{3}{2}; \tfrac{27}{4}\right)$$

$$-1 = -2x_M + a \quad a = 2 \quad M\left(\tfrac{3}{2}; \tfrac{15}{4}\right)$$

Calcoliamo ora le intersezioni T, R in funzione della distanza tra le due rette con R nel primo quadrante e T nel secondo ($3 \leq q \leq \frac{21}{4}$)

$$R \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -x + q \end{cases} \quad 0 < x < \tfrac{3}{2}; \quad x^2 - 3x + q - 3 = 0 \quad R\left(\tfrac{3-\sqrt{21-4q}}{2}; \tfrac{2q-3+\sqrt{21-4q}}{2}\right)$$

$$T \begin{cases} y = -x^2 - 4x + 3 \\ y = -x + q \end{cases} \quad -\tfrac{3}{2} < x < 0 \quad x^2 - 3x + q - 3 = 0 \quad T\left(\tfrac{-3+\sqrt{21-4q}}{2}; \tfrac{2q+3-\sqrt{21-4q}}{2}\right)$$

troviamo il segmento RT (poniamo per comodità di scrittura $\sqrt{21-4q} = t$

$$RT = \sqrt{(3-t^2) + (t-3)^2} = |t-3|\sqrt{2} = \left(\sqrt{21-4q} - 3\right)\sqrt{2}$$

l'altezza del triangolo è la distanza tra le due rette parallele

$$h = \frac{\left|\frac{3}{2} + \frac{15}{4} - q\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\frac{21}{4} - q\right|}{\sqrt{2}}$$

l'area sarà quindi

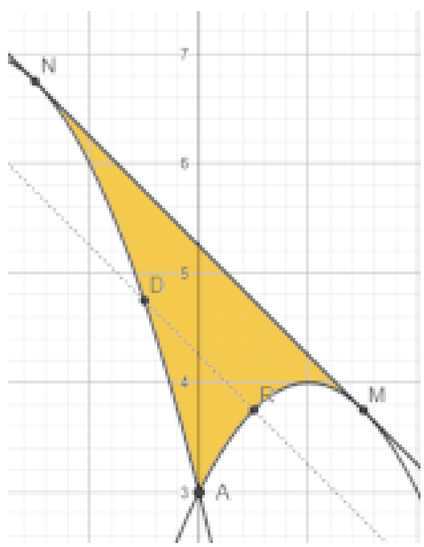
$$A = \left[\left(\sqrt{21-4q} - 3\right)\sqrt{2}\right] \cdot \frac{\left|\frac{21}{4} - q\right|}{2\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{21-4q} - 3\right)\left(\frac{21}{4} - q\right)}{2}$$

troviamo la condizione di massimo

$$A' = \frac{\frac{-2}{\sqrt{21-4q}}\left(\frac{21-4q}{4}\right) - \left(\sqrt{21-4q} - 3\right)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{21-4q} = 0$$

$$2 = \sqrt{21-4q} \qquad q = \tfrac{17}{4}$$

la retta parallela sarà $4x + 4y - 17 = 0$.



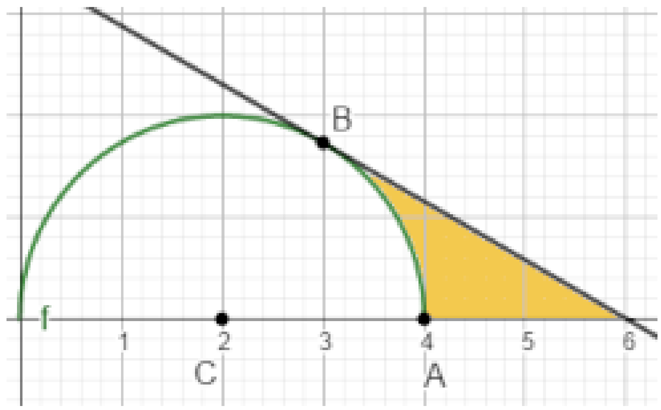
Calcoliamo l'area del triangolo mistilineo colorato in figura.

$$A = \left(\frac{27}{4} + \frac{15}{4}\right) \times \frac{3}{2} - \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \left(-x^2 - 4x + 3\right) dx - \int_{0}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx =$$

$$= \frac{63}{4} - \left|-\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right|_{-\frac{3}{2}}^{0} - \left|-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right|_{0}^{\frac{3}{2}} = \frac{63}{4} - \frac{63}{8} - \frac{45}{8} = \frac{9}{4}$$

Esercizio 181. Dati i punti $A(4;0)$ e $C(2;0)$, determinare l'equazione della semicirconferenza giacente nel semipiano $y \geq 0$, passante per A e con centro in C. Calcolare l'area della parte di piano limitata dall'asse x, dalla semicirconferenza e dalla retta a essa tangente nel suo punto di ascisse $x = 3$.

Soluzione. La semicirconferenza ha centro in C e passa per A e, per simmetria, per $O\left(0,0\right)$ e quindi ha raggio $r=2$. L'equazione della circonferenza è: $x^2+y^2-4x=0$ e la semicirconferenza richiesta avrà equazione $y=\sqrt{4x-x^2}$. Il punto di tangenza avrà coordinate $B\left(3;\sqrt{3}\right)$



Calcoliamo l'area colorata in figura

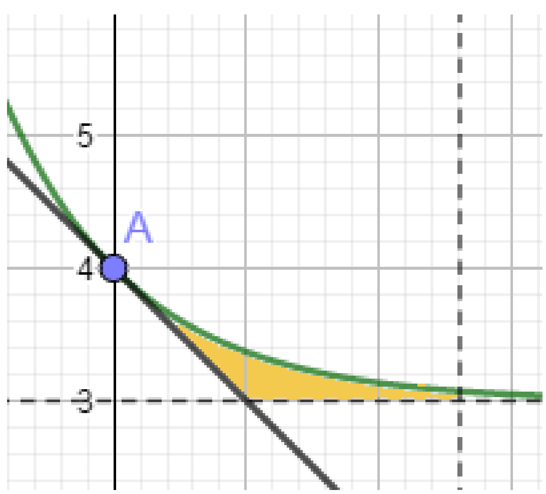
$$A=\frac{3\times\sqrt{3}}{2}\left(A_{triangolo}\right)-\int_3^4\sqrt{4x-x^2}dx=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\int_3^4\sqrt{4x-x^2}dx=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\int_3^4\sqrt{4x-x^2-4+4}dx=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\int_3^4\sqrt{4-\left(x-2\right)^2}dx=$$

se poniamo $x-2=t$, con $dx=dt$ e $x=3$, allora $t=1$, $x=4$, $t=2$, avremo

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}-\left|\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}+2\arcsin\frac{t}{2}\right|_1^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

Esercizio 182. Tracciare la curva γ di equazione $y=3+e^{-x}$ e, scritta l'equazione della tangente t a γ nel suo punto di intersezione con l'asse y, determinare l'area $A\left(k\right)$ della regione piana limitata dalla retta t, dall'asintoto orizzontale della curva, dalla retta $x=k$ $\left(k>1\right)$ e dalla curva. Calcolare inoltre $A=\lim_{k\to\infty}A\left(k\right)$.



Soluzione. Il grafico della curva è facilmente rappresentabile essendo la curva esponenziale e^{-x} traslata mediante il vettore $\overrightarrow{v}\left(0;3\right)$ e l'asintoto sarà allora $y=3$. La curva interseca l'asse y nel punto $A\left(0;4\right)$. Determiniamo la tangente alla curva in questo punto, calcolando la derivata prima per ottenere il coefficiente angolare della retta,

$$y'=-e^{-x}\quad y'\left(0\right)=-1$$

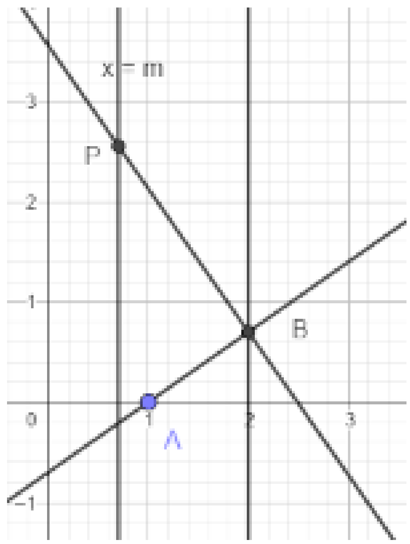
la retta avrà equazione $x + y - 4 = 0$. Calcoliamo ora l'area della regione di piano colorata in figura

$$A(k) = \int_0^k \left(3 + e^{-x}\right) dx - 3k - \frac{1}{2} = \left|3x - e^{-x}\right|_0^k - 3k - \frac{1}{2} = 3k - e^{-k} + 1 - 3k - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-k}$$

Calcoliamo il limite dell'area in funzione di k

$$A = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} - e^{-k} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 183. Per un punto $A(1;0)$ si conduca la retta r di coefficiente angolare m; detto B il punto di intersezione con la retta $x = 2$, si conduca da esso la perpendicolare a r; sia P il suo punto di intersezione con la retta $x = m$. a) Determinare l'equazione del luogo γ descritto da P al variare di m. Tracciare la curva γ. b) Determinare infine l'area della regione piana limitata dalla tangente alla curva nel suo punto di ascissa 1, dalla retta $x = 2$ e dalla curva γ.



Soluzione. La retta passante per A ha equazione $y = m(x-1)$; l'intersezione con la retta $x = 2$ individua il punto $B(2;m)$. La retta perpendicolare per B alla retta r avrà $m_{per} = -\frac{1}{m}$ e $q_{per} = \frac{m^2+2}{m}$; l'equazione di tale retta sarà $x + my - m^2 - 2 = 0$. Il punto P avrà pertanto coordinate $P\left(m; \frac{m^2-m+2}{m}\right)$. Il luogo, considerando m come l'incognita, avrà quindi equazione

$$y = \frac{x^2 - x + 2}{x}$$

Studiamo questa funzione il cui dominio è $\mathbb{R}_0$. Il numeratore è sempre positivo e quindi non vi saranno intersezioni con gli assi. La funzione sarà positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Studiamo gli asintoti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{x^2-x+2}{x} \sim x = \pm\infty \qquad \lim_{x\to o^{\pm}} \tfrac{x^2-x+2}{x} \sim \tfrac{2}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

la funzione non ha quindi asintoti orizzontali ma presenta un asintoto verticale di equazione $x = 0$ (asse y). Verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 2 - x^2}{x} = -1$$

avremo quindi un asintoto obliquo di equazione $y = x - 1$.

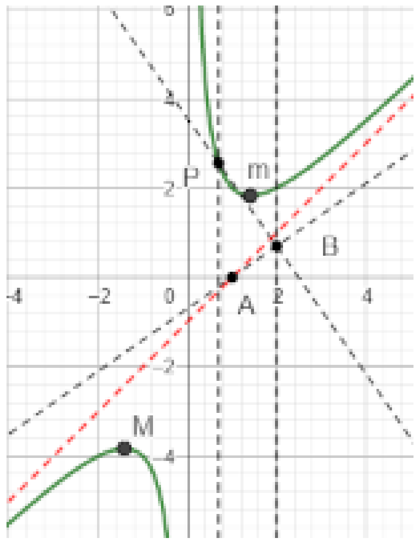
Studiamo la sua derivata

$$y' = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

il suo dominio sarà ancora $\mathbb{R}_0$. Il denominatore è sempre positivo nel dominio, mentre il numeratore lo è per $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$ e la funzione sarà crescente in questi due intervalli e decrescente in $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Avrà quindi un massimo relativo in $M\left(-\sqrt{2};\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$ e un minimo relativo in $m\left(\sqrt{2};\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)$. Calcoliamo la derivata seconda

$$y''=\frac{2x^3-2x^3+4x}{x^4}=\frac{4}{x^3}$$

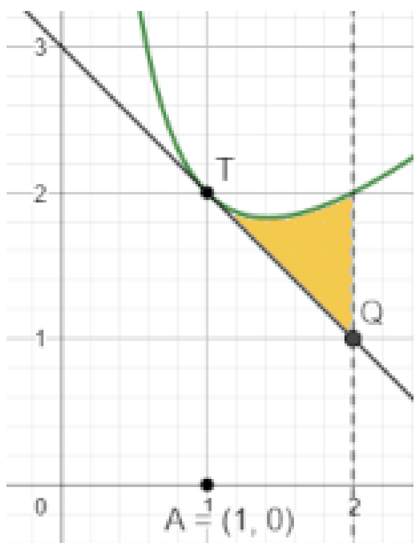
la funzione avrà concavità verso l'alto per $x>0$ e verso il basso per $x<0$ e non presenta flessi. Il grafico è mostrato sotto.



b) troviamo ora la tangente richiesta. Il punto di ascissa 1 appartenente alla curva γ avrà coordinate $T(1;2)$. Troviamo il coefficiente angolare di tale retta, conoscendo già la derivata della funzione

$$y'(1)=-1$$

e la tangente avrà equazione $x+y-3=0$. Tale tangente interseca la retta $x=2$ in $Q(2;1)$.



L'area sarà uguale alla differenza tra la parte di piano sottesa dalla funzione nell'intervallo $[1;2]$ e il trapezio rettangolo sotteso dalla tangente nello stesso intervallo. L'area del trapezio vale $\frac{3}{2}$, per cui

$$A=\int_1^2\frac{x^2-x+2}{x}dx-\frac{3}{2}=\int_1^2 xdx-\int_1^2 dx+2\int_1^2\frac{dx}{x}-\frac{3}{2}=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x+2\ln x\right]_1^2-\frac{3}{2}=\ln 4-1$$

Esercizio 184. Data la funzione

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{\left|x^2-1\right|}{x-1}\right)$$

a) determinare il dominio, eventuali punti singolari, di non derivabilità e le equazioni delle tangenti in questi punti; b) tracciare il grafico C della funzione; c) determinare l'area della regione piana limitata dalla curva C, dall'asse x e dalle rette $x = -\frac{3}{2}$ e $x = -1$.

Soluzione. La presenza del valore assoluto richiede di studiare la funzione sia caso in cui il suo argomento è positivo sia quando è negativo.

1. caso: $x \leq -1 \ \vee \ x > 1$, la funzione è

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x^2+x-2}{x-1}\right)$$

il dominio è dato da

$$\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad \frac{x^2+x-2}{x-1} > 0 \quad x < -2 \ \vee \ x > 1$$

per cui $D : -2 < x < -1 \ \ x > 1$.

2. caso $-1 \leq x < 1$

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{-x^2+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{-x^2+x}{x-1}\right)$$

il dominio è dato da

$$\begin{cases} \frac{-x^2+x}{x-1} > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad \frac{-x^2+x}{x-1} > 0 \quad 0 < x < 1$$

per cui $D : -1 < x < 0$.

Il dominio della funzione sarà quindi $D : (-2; 0) \ \ (1; +\infty)$, dove i punti singolari sono in corrispondenza di $x = -2, 1$. All'interno del dominio la funzione è sempre continua.

Calcoliamo la derivata della funzione

1. caso

$$f'(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{(2x+1)\cancel{(x-1)} - (x+2)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{(x-1)^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{x+2}$$

2. caso:

$$f'(x) = \frac{\cancel{x-1}}{-x\cancel{(x-1)}} \cdot \frac{(1-2x)\cancel{(x-1)} + x\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x}$$

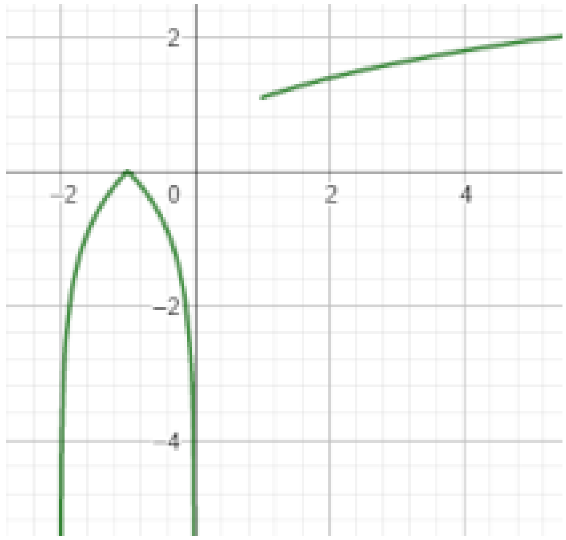
Il punto $x = -1$ appartiene ai due intervalli; verifichiamo se la derivata dx e sx della funzione in questo punto coincidono oppure no, cioè se la funzione oltre a essere continua in $x = -1$ è anche derivabile.

$$f'(-1^-) = 1 \qquad f'(-1^+) = -1$$

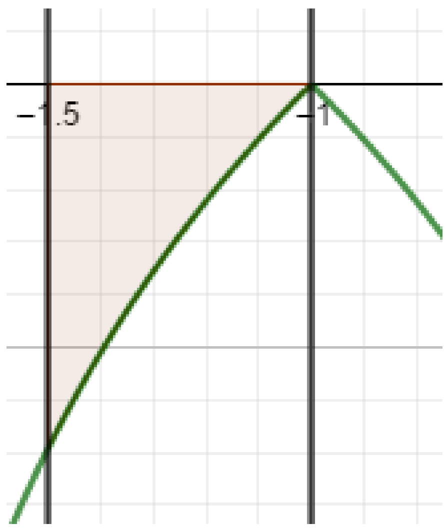
la funzione avrà quindi un punto angoloso in corrispondenza di $x = -1$. Tale valore caratterizza un punto del grafico di coordinate $P(-1; 0)$ e le tangenti in questo punto saranno

$$t_1 : y = x + 1 \qquad t_2 : y - x - 1$$

b) Completando lo studio si ottiene il seguente grafico



c) l'area da determinare è quella colorata nella figura sotto



$$A = -\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \ln\left(\frac{x^2+x-2}{x-1}\right)dx = -\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \ln(x+2)\, d(x+2) =$$

integriamo con il metodo per parti ponendo $d(x+2) = v'$ e $\ln(x+2) = u$, per cui

$$-\left[(x+2)\ln(x+2)\right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} d(x+2) = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$$

Lunghezza di un arco di curva

La lunghezza di un arco di curva di equazione $y = f(x)$ compresa tra due punti di ascissa $x = a$ e $x = b$ è uguale a

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$$

Esercizio 185. Calcolare la lunghezza dell'arco della parabola semicubica $y^2 = x^3$ compreso tra l'origine delle coordinate e il punto dalle coordinate $(4; 8)$.

Soluzione. la funzione può essere scritta come, essendo l'intervallo nel primo quadrante, $y = x^{\frac{3}{2}}$ e quindi $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$l = \int_0^4 \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{(4+9x)}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (4+9x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

se poniamo $4 + 9x = t$, avremo $dx = \dfrac{1}{9}dt$; se $x = 0$, $t = 4$ e se $x = 4$, $t = 40$

$$l = \frac{1}{18}\int_0^4 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{40} = \frac{1}{27}\cdot\left(40\sqrt{40} - 8\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

Esercizio 186. Calcolare la lunghezza dell'arco della parabola $y = 2\sqrt{x}$ compreso tra i punti di ascisse $x = 0$ e $x = 1$.

Soluzione. la parabola ha come asse di simmetria l'asse x. calcoliamo la derivata $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}dx = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)}dx =$$

poniamo $x + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$, per cui $x = \dfrac{1}{\cos^2 t} - 1 = \tan^2 t$ e $dx = \dfrac{2\tan t}{\cos^2 t}dt$; se $x = 0$, $t = 0$; se $x = 1$, $t = \frac{\pi}{4}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\tan^2 t}\right)}\cdot\frac{2\tan t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin t}\cdot\frac{2\sin t}{\cos^3 t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^3 t}dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}dt =$$

calcoliamo il primo integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$ per parti, riscrivendolo come $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\frac{\sin t}{\cos^3 t}dt$, ponendo $u = \frac{\sin t}{\cos^3 t}$ e $v' = \sin t dt$; avremo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\frac{\sin t}{\cos^3 t}dt = \left(-\cos t\frac{\sin t}{\cos^3 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$$

cioè, sommando i termini "simili"

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

pertanto

$$l = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\ln\left(\tan t + \sec t + 1\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Se la curva è data da una equazione parametrica, la lunghezza dell'arco di curva è data da

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'^2 + y'^2)}\,dt$$

Esercizio 187. Calcolare la lunghezza dell'arco dell'evolvente di cerchio

$$\begin{cases} x = a\left(\cos t + t\sin t\right) \\ y = a\left(\sin t - t\cos t\right) \end{cases}$$

per $0 < t < T$.

Soluzione. Calcoliamo prima le derivate di x e y rispetto a t

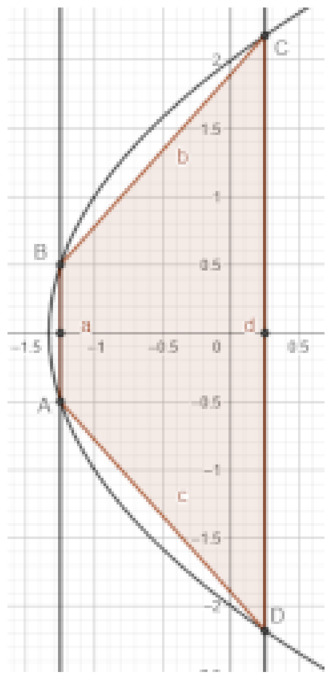
$$x' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t$$
$$y' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t$$

avremo

$$l = \int_0^T \sqrt{at^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}dt = \int_0^T \sqrt{at^2}dt = \frac{aT^2}{2}$$

Esercizio 188. Data la parabola di equazione $y^2 = 3x + 4$ e le due corde AB e CD perpendicolari all'asse x nei punti $\left(-\frac{5}{4};0\right)$ e $\left(\frac{1}{4};0\right)$, dimostrare che tra l'area del trapezio convesso $ABCD$ e l'area A del segmento parabolico limitato dalle due corde sussiste la relazione

$$\frac{38}{27}A(ABCD) = A + \frac{10}{9}$$



Soluzione. Troviamo le intersezioni della parabola con le due rette perpendicolari: retta $x = -\frac{5}{4}$, $A\left(-\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right)$; pertanto il segmento $\overline{AB} = 1$; retta $x = \frac{1}{4}$, $C\left(\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{19}}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{19}}{2}\right)$ e il segmento $CD = \sqrt{19}$. L'altezza del trapezio è la distanza tra le due rette parallele, cioè $h = \left|\frac{1}{4} - \left(-\frac{5}{4}\right)\right| = \frac{3}{2}$. L'area del trapezio è

$$A(ABCD) = \frac{(1+\sqrt{19}) \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}\left(1+\sqrt{19}\right)$$

Calcoliamo l'area del segmento di parabola mediante il calcolo dell'integrale (si ricorda anche la possibilità con fornita dalla formula di Archimede)

$$A = 2\int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}} \sqrt{3x+4}dx = \frac{2}{3}\int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}} (3x+4)^{\frac{1}{2}} d(3x+4) = \frac{2}{3}\left|(3x+4)^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3}\right|_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{19}{8}\sqrt{19} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{18}\left(19\sqrt{19} - 1\right)$$

Pertanto

$$\frac{38}{27}\left(\frac{3}{4}\left(1+\sqrt{19}\right)\right) = \frac{1}{18}\left(19\sqrt{19}-1\right) + \frac{10}{9}$$

$$\frac{19}{18}+\cancel{\frac{19}{18}\sqrt{19}}=\cancel{\frac{19}{18}\sqrt{19}}-\frac{1}{8}+\frac{10}{9}$$

da cui

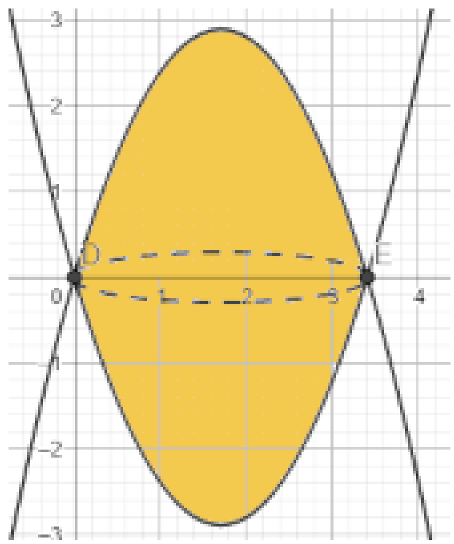
$$\frac{19}{18}=\frac{19}{18}$$

Calcolo dei volumi

Volume dei solidi di rotazione. Il volume del corpo generato dalla rotazione di un trapezoide mistilineo, limitato dalla curva $y = f(x)$, dall'asse delle x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, intorno all'asse x o intorno all'asse y si esprime con le formule

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

Esercizio 189. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della curva limitata dall'asse x e dalla parabola $y = ax - x^2$.



Soluzione. Il volume è dato da

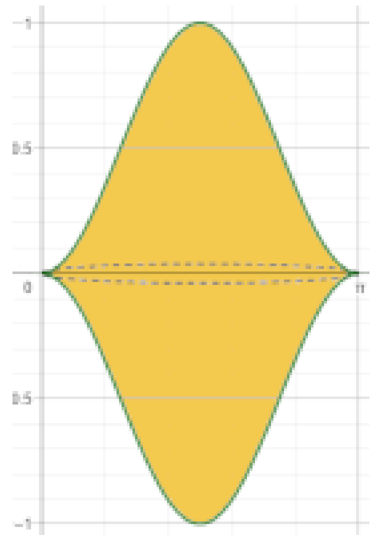
$$V_x = \pi \int_0^a \left(ax - x^2\right)^2 dx = \pi \int_0^a \left(a^2x^2 - 2ax^3 + x^4\right) dx = \pi\ a^2\frac{x^3}{3} - a\frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\Big|_0^a = \frac{a^5}{30}\pi$$

Esercizio 190. Calcolare il volume dell'ellissoide generato dalla rotazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ attorno all'asse x.

Soluzione. Il volume si ottiene moltiplicando per due il volume del solido di rotazione che si ha ruotando di 360∘ intorno all'asse x il sottografico di $y = b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$, per cui

$$V = 2\pi b^2 \int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2\ a^2\frac{x^3}{3} - a\frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\Big|_0^a = \frac{4}{3}ab^2\pi$$

Esercizio 191. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della curva $y = \sin^2 x$ compresa tra i punti $x = 0$ e $x = \pi$.



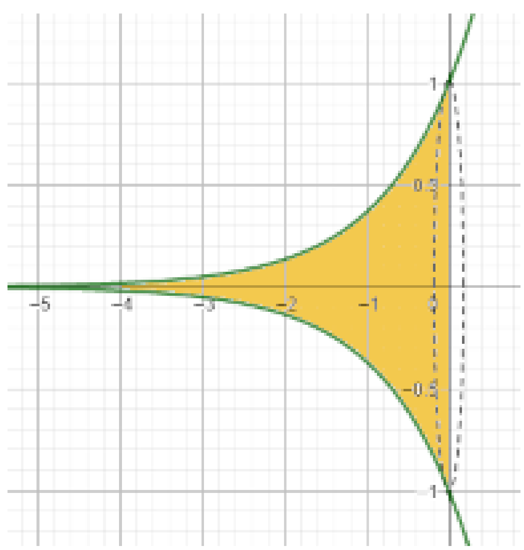
Soluzione. risolviamo l'integrale utilizzando le formule goniometriche e considerando $\sin^4 x = \sin^2 x \cdot \sin^2 x$

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \pi \left(\int_0^\pi \sin^2 x dx - \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx \right) =$$

$$= \pi \left(\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos^2 2x dx \right) = \pi \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi \cos 4x dx \right) =$$

$$\pi \left| \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x \right|_0^\pi = \frac{3}{8} \pi^2$$

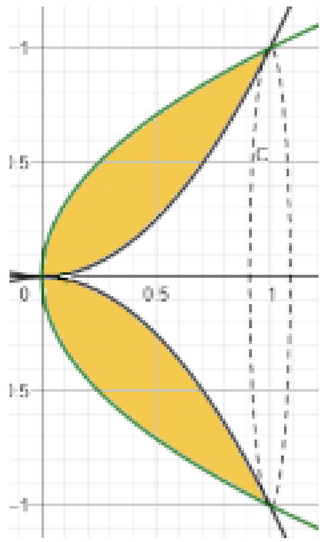
Esercizio 192. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della figura limitata dalla curva $y = e^x$ e dalle rette $x = 0$ e $y = 0$.



Soluzione. Calcoliamo l'integrale

$$V = \pi \int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx = \left| \frac{\pi}{2} e^{2x} \right|_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{2}$$

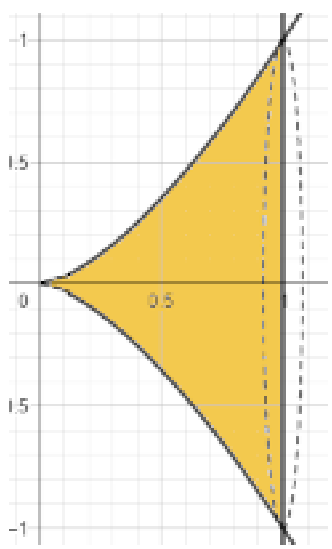
Esercizio 193. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della figura compresa tra le curve delle funzioni $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.



Soluzione. L'area delimitata da due figure è calcolata come $A = \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx$, per cui

$$V = \pi \int_0^1 \left(x - x^4\right) dx = \pi \left|\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\pi$$

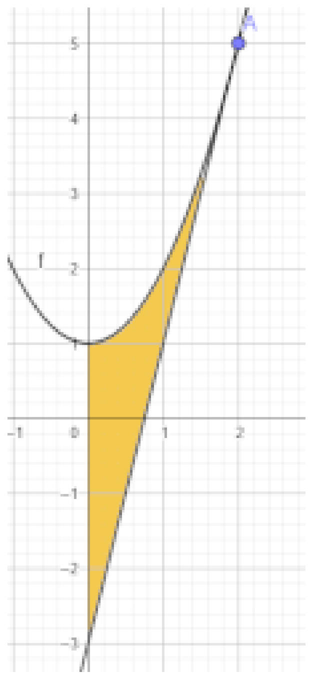
Esercizio 194. Calcolare il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x della figura limitata dalla curva $y^2 = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$.



Soluzione. Calcoliamo l'integrale

$$V = \pi \int_0^1 x^3 dx = \pi \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}\pi$$

Esercizio 195. Determinare l'area della regione T di piano delimitata dall'asse y, dalla parabole $y = x^2 + 1$ e dalla tangente a detta parabola nel punto $x_0 = 2$. Calcolare, inoltre, il volume V del solido ottenuto dalla rotazione completa di T attorno all'asse y.e x e dalla retta $x = 1$.



Soluzione. Il punto di tangenza ha coordinate $A\,(2;5)$. Determiniamo la tangente: $y'=2x$, e $y'\,(2)=4$; essa avrà coefficiente angolare $m=4$ e applicando la relazione che descrive un fascio proprio di rette, avremo

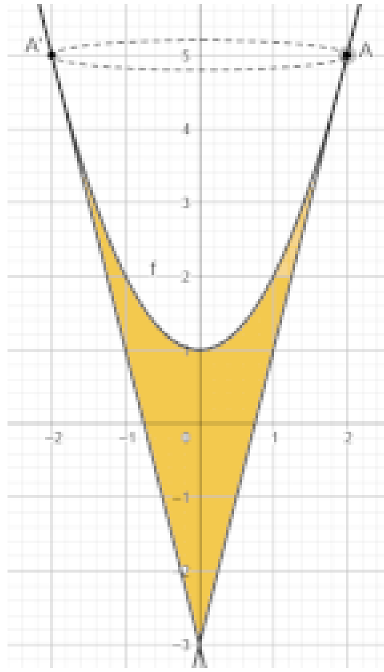
$$y-5=4\,(x-2)\qquad y=4x-3$$

tale retta interseca l'asse x nel punto $\left(\frac{3}{4};0\right)$. Troviamo prima l'area della parte colorata in figura.

$$A=\int_0^2 \left(x^2+1\right)dx-\left(\frac{5}{8}\times 5\right)+\left(\frac{3}{8}\times 3\right)=\left|\frac{x^3}{3}+x\right|_0^2-2=\frac{8}{3}$$

in modo analogo

$$A=\int_0^2 \left(x^2+1\right)dx-\int_{\frac{3}{4}}^{2}(4x-3)\,dx-\int_0^{\frac{3}{4}}(4x-3)\,dx=\frac{8}{3}$$



Soluzione. Calcoliamo ora il volume ottenuto ruotando la superficie attorno all'asse y.

$$V=\pi\left(\int_{-3}^{5}\left(\frac{y}{4}+\frac{3}{4}\right)dy-\int_{1}^{5}(y-1)^{\frac{1}{2}}\,dy\right)=\pi\left(\left|\frac{y^2}{8}+\frac{3}{4}y\right|_{-3}^{5}-\left|(y-1)^{\frac{3}{2}}\right|_{1}^{5}\right)=\frac{8}{3}\pi$$

Esercizio 196. Data la curva di equazione

$$y=\frac{2x-1}{x-2}$$

determinare il volume generato dalla regione piana limitata dalla curva, dalle rette $x=4$ e $x=6$ e dall'asintoto orizzontale della funzione in una rotazione completa attorno a tale asintoto.

Soluzione. La funzione data è una funzione omografica, cioè un'iperbole traslata. In questo caso è possibile determinare il volume richiesto dopo aver opportunamente traslato la curva in modo che il suo asintoto orizzontale coincida con l'asse x e quello verticale con l'asse y. Se una funzione omografica generica è espressa da $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ allora il vettore di traslazione sarà dato da

$$\overrightarrow{v}\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)\qquad\overrightarrow{v}(2;2)\ \ le$$

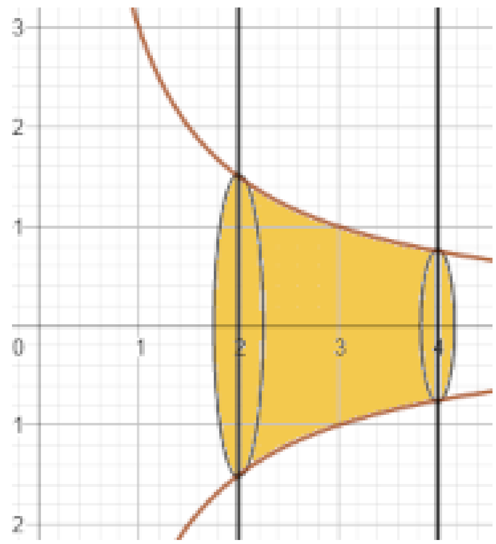
equazioni di traslazione sono

$$\begin{cases}x'=x-2\\y'=y-2\end{cases}\qquad\begin{cases}x=x'+2\\y=y'+2\end{cases}$$

avremo

$$y'=\frac{2x'+4-1}{x'+2-2}-2=\frac{3}{x'}$$

Anche le due rette dovranno essere traslate verso sinistra di due unità.



Il volume sarà

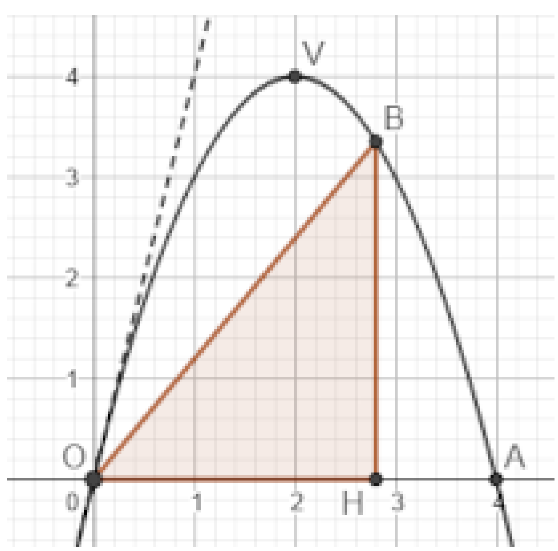
$$V = \pi \int_2^4 \frac{9}{x^2} = 9\pi \left| -\frac{1}{x} \right|_2^4 = \frac{9}{4}\pi$$

Esercizio 197. Dopo aver determinato nel piano xOy l'equazione della parabola γ, tangente in O alla retta $y = 4x$ e passante per $A\,(4;0)$, detto V il vertice, rispondere ai seguenti quesiti:

(1) sull'arco di γ contenuto nel semipiano $y \geq 0$ determinare, per via elementare, il punto B per il quale sia massima l'area del triangolo OBH, essendo H la proiezione di B sull'asse x
(2) determinare il luogo φ del punto medio del segmento OB al variare di B sull'arco $\widehat{OVA}$ di γ
(3) calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse x la regione finita di piano delimitata da γ, da φ e dall'asse x.

Soluzione. Troviamo l'equazione della parabola. La retta data ha $m = 4$ e, ricordando il significato geometrico di derivata, se $y = ax^2 + bx$ è l'equazione generale di questa parabola passante per l'origine ($c = 0$), avremo $y' = 2ax + b$ e $y'(0) = b = 4$. Inoltre la parabola passa per il punto A e quindi $0 = 16a + 16$, da cui $a = -1$ e l'equazione sarà

$$\gamma : y = -x^2 + 4x$$



1) le coordinate del punto $B\left(x;-x^2+4x\right)$ con $0<x<4$ e l'area del triangolo rettangolo è

$$A=\frac{-x^3+4x^2}{2}$$

troviamo la condizione di massimo

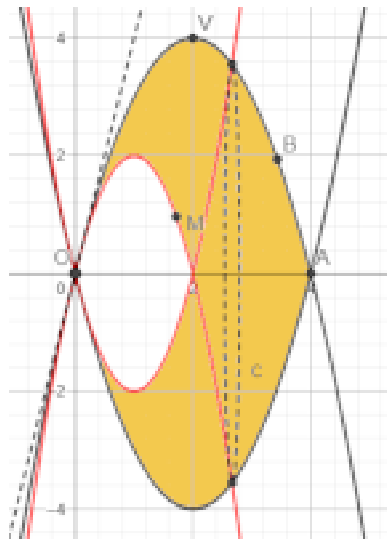
$$A'=\frac{-3x^2+8x}{2}=0$$

da cui

$$x=\tfrac{8}{3}\quad A=\tfrac{128}{27}$$

2) il punto medio del segmento OB con B variabile, ha coordinate $M\left(\frac{t}{2};\frac{-t^2+4t}{2}\right)$ per cui avremo

$$\begin{cases} x=\frac{t}{2} \\ y=\frac{-t^2+4t}{2} \end{cases}\qquad \begin{cases} t=2x \\ y=\frac{-4x^2+8x}{2}=-2x^2+4x \end{cases}$$



3) Calcoliamo il volume cercato

$$V=\pi\int_0^4\left(-x^2+4x\right)^2dx-\pi\int_0^2\left(-2x^2+4x\right)^2dx=$$

$$V=\pi\left[\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{16}{3}x^3\right]_0^4-\pi\left[\frac{4x^5}{5}-4x^4+\frac{16}{3}x^3\right]_0^2=$$

$$V=\pi\left(\frac{1024}{5}-512+\frac{1024}{3}-\frac{128}{5}+64-\frac{128}{3}\right)=\frac{448}{15}\pi$$

Applicazioni alla fisica

Esercizio 198. Un punto materiale si muove su una linea retta con un'accelerazione che all'istante t è data da $a\left(t\right)=\left(2t-6\right)\,\frac{m}{s^2}$. Sapendo che la velocità all'istante $t=0$ è $v_0=8\,\frac{m}{s}$, determinare 1) gli istanti t in cui il punto si ferma nelle posizioni A e B; 2) la distanza tra A e B.

Soluzione. Calcoliamo come varia la velocità nel tempo

$$v\left(t\right)=\int\left(2t-6\right)dt=t^2-6t+C$$

allora $v\left(0\right)=8=C$ e la legge delle velocità sarà $v\left(t\right)=t^2-6t+8$. Se il punto si ferma, allora $v=0$, per cui

$$t^2-6t+8=0\quad t_1=2\quad t_2=4$$

calcoliamo la distanza tra i due punti

$$AB = s(4) - s(2) = \int_2^4 \left|t^2 - 6t + 8\right| dt = \left[\left|\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t\right|\right]_2^4 = \frac{4}{3}\,m$$

Esercizio 199. L'accelerazione di un corpo mobile su una retta, in funzione del tempo, è data dalla legge $a(t) = a_0 e^{-kt}$ con $a_0 = -2\frac{m}{s^2}$ e $k = 6,12\,s^{-1}$. Sapendo che $v_0 = v(0) = 0,5\,\frac{m}{s}$, $s(0) = 0$, determinare a) la legge con cui varia la velocità in funzione del tempo; b) l'equazione oraria del moto e lo spazio percorso in $0,3\,s$.

Soluzione. a) Sapendo che $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, possiamo ottenere

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 e^{-kt} dt = v_0 + \left[-\frac{a_0}{k} e^{-kt}\right]_0^t = v_0 + \left(-\frac{a_0}{k} e^{-kt} + \frac{a_0}{k}\right)$$

per cui

$$v(t) = v_0 + \frac{a_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) = \frac{1}{2} + 0,33\left(1 - e^{-6,12t}\right)$$

b) ancora, poiché $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, si può scrivere

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \left[v_0 + \frac{a_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\right] dt = \left(v_0 + \frac{a_0}{k}\right) t + \frac{a_0}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right)$$

la distanza percorsa in $0,3\,s$ sarà

$$s = (0,5 - 0,33)\,0,3 - 0,33\left(e^{-6,12\times 0,3} - 1\right) = 9,6\,cm$$

Esercizio 200. Un conduttore è attraversato da una corrente di intensità $i(t) = k \sin\omega t$, essendo $k = 10\,A$ e $\omega = 2\,\frac{rad}{s}$. Calcolare la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore tra l'istante $t_1 = 0$ e l'istante $t_2 = 0,5\,s$.

Soluzione. Sapendo che l'intensità di carica per definizione è data da $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, dove q è la quantità di carica che fluisce nel tempo, avremo

$$q(t) = \int_0^{0,5} k \sin\omega t dt = \left[-\frac{k}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{0,5} = \left[-5\cos 2t\right]_0^{\frac{1}{2}} = -5\left(\cos 1_{rad} - 1\right) = 2,3\,C$$

Area di una superficie di rotazione

L'area della superficie generata dalla rotazione intorno all'asse x dell'arco di curva $y = f(x)$, compreso tra i punti di ascissa $x = a$ e $x = b$, si esprime con la formula

$$A_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx$$

Esercizio 201. Determinare l'area della superficie generata dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento di retto $y = \sqrt{3}x + 2$ per $x \in [1; 4]$.

Soluzione. L'area è ottenibile calcolando l'integrale

$$A = 2\pi \int_1^4 2\left(\sqrt{3}x + 2\right) dx = 4\pi \left|\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2x\right|_1^4 = 4\pi\left(8\sqrt{3} + 8 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right) = 1$$

$$= 4\pi\left(\frac{15}{2}\sqrt{3} + 6\right) = 6\pi\left(5\sqrt{3} + 4\right)$$