CALCOLO DEGLI INTEGRALI

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

Parte 1. INTEGRALI DEFINITI

1. Calcolo degli integrali definiti

Esercizio 1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Esercizio 2. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3} = \int_{-2}^{-1} x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$

$$\int_{-x}^{x} e^t dt = e^x - e^{-x} = 2\sinh x$$

Esercizio 3. $\int_0^x \cos t dt = \sin t|_0^x = \sin x$

Esercizio 4. $\int_1^2 \left(x^2 - 2x + 3\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - 4 + 6 - \frac{1}{3} + 1 - 3 = \frac{7}{3}$

Esercizio 5. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \int_0^8 (2x)^{\frac{1}{2}} + \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} = \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^8 = \frac{2^6}{\frac{3}{2}} + \frac{2^4}{\frac{4}{3}} = \frac{100}{3}$

Esercizio 6. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int_1^4 x^{-2}dx + \int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\Big|_1^4 = -\frac{1}{4} - 1 + 1 + 2 = \frac{7}{4}$

$$\int_2^6 \sqrt{x-2}dx = \int_2^6 (x-2)^{\frac{1}{2}}\, d(x-2) = \frac{x-2}{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^6 = \frac{2^3}{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{16}{3}$$

Esercizio 7.

$$\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}x = -\int_{-3}^{0} (25+3x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = -\frac{1}{3}\int_{-3}^{0} (25+3x)^{-\frac{1}{2}}\, d(3x+25) =$$
$$= -\frac{2}{3}\sqrt{3x+25}\Big|_{-3}^{0} = -\frac{10}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$$

Esercizio 8. $\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1} = -\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|_{-3}^{-2} = -\frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$

Esercizio 9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

Soluzione. Scomponiamo il denominatore e utilizziamo il metodo per le funzioni razionali $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{(x+1)(x+2)}$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

da cui

$$x = A(x+2) + B(x+1)$$
$$x = Ax + 2A + Bx + B = x(A+B) + (2A+B)$$

confrontando i termini al primo e al secondo membro di pari grado, si ha

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=-2A \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

l'integrale diviene allora

$$-\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x+1} + 2\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x+2} = -\ln|x+1||_0^1 + 2\ln|x+2||_0^1 = \ln\frac{9}{8}$$

Esercizio 10. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2} dx$

Soluzione. Riscriviamo la frazione e scomponiamo

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^5+32-32}{x+2} dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cancel{(x+2)}\left(x^4-2x^3+4x^2-8x+16\right)}{\cancel{x+2}} dx - 32\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} dx =$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(x^4-2x^3+4x^2-8x+16\right) dx - 32\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} dx =$$

$$\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} - 4x^2 + 16x - 32\ln(x+2)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} + \frac{8}{3} + 32 - 32\ln 3 = \frac{526}{15} - 32\ln 3$$

Esercizio 11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

Soluzione. In questo caso il denominatore non è scomponibile, ma è possibile riscriverlo nella forma $x^2+4x+4+1 = (x+2)^2+1$, per cui,

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

potremmo risolvere subito, ma per rendere più chiaro poniamo $x+2=z$, $dx=dz$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dz}{z^2+1} = \arctan z|_0^1 = \arctan 3 - \arctan 2 = \arctan\frac{1}{7}$$

Esercizio 12. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$

Soluzione. risolviamo con il metodo di sostituzione ponendo $x^2=z$, $2xdx=dz$, $dx=\frac{dz}{2\sqrt{z}}$

$$\int_0^1 \frac{z\cancel{\sqrt{z}}}{z^4+1}\frac{dz}{2\cancel{\sqrt{z}}}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z}{z^4+1}dz$$

ripetiamo la sostituzione ponendo nuovamente $z^2=t$, $2zdz=dt$, $dz=\frac{dt}{2\sqrt{z}}$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\cancel{\sqrt{t}}}{t^2+1}\frac{dt}{\cancel{\sqrt{t}}}=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}\arctan t|_0^1=\frac{1}{4}(\arctan 1-\arctan 0)=\frac{\pi}{16}$$

Esercizio 13. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{4}$

Esercizio 14. $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

Soluzione. riscriviamo il radicando come $9-4+4x-x^2=9-(x-2)^2$, per cui

$$=\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}=\int_2^{3,5} \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}}=\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)\Bigg|_2^{3,5}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$$

Esercizio 15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 xdx$

Soluzione. Usiamo le formule goniometriche di bisezione

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xd(2x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi+2}{8}$$

Esercizio 16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$

Soluzione. scomponiamo $\sin^3 x=\sin x\cdot\sin^2 x$ e applichiamo la prima proprietà della goniometria

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\sin^2 xdx==-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)dx=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)d(\cos x)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\cos x)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xd(\cos x)=$$

$$=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

Esercizio 17. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

Soluzione. essendo $d(\ln x) = \frac{1}{x}$, possiamo riscrivere

$$=\int\limits_{e}^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esercizio 18. $\int\limits_{0}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

Soluzione. essendo ancora $d(\ln x) = \frac{1}{x}$, possiamo riscrivere

$$=\int\limits_{0}^{e} \sin(\ln x)\, d(\ln x) = -\cos(\ln x)|_0^e = 1 - \cos 1$$

Esercizio 19. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

Soluzione. applicando la definizione di tangente, riscriviamo

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln(\cos x)|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

essendo il numeratore è l'opposto della derivata del denominatore.

Esercizio 20. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

Soluzione. procediamo mediante sostituzione: $e^x = u$, $e^x dx = du$; se $x = 0$ allora $u = 1$ e se $x = 1$ $u = e$

$$=\int\limits_{1}^{e} \frac{\cancel{u}}{1+u^2}\frac{du}{\cancel{u}} = \int\limits_{1}^{e} \frac{du}{1+u^2} = \arctan u|_1^e = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 21. $\int\limits_{1}^{3} \sqrt{x+1}dx = \int\limits_{1}^{3} (x+1)^{\frac{1}{2}}\, d(x+1) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{2}{3}\sqrt{64} - \frac{2}{3}\sqrt{8} = \frac{4\left(4-\sqrt{2}\right)}{3}$

Esercizio 22. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x = t^2$, $dx = 2tdt$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = 4$ $t = 16$

$$2\int\limits_{0}^{16} \frac{tdt}{1+t} = 2\int\limits_{0}^{16} \frac{t+1}{1+t}dt - 2\int\limits_{0}^{16} \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln(t+1)|_0^{16} = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\Big|_0^4 = 4 - 2\ln 3$$

Esercizio 23. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $e^x - 1 = t^2$, $e^x dx = 2tdt$ per cui $dx = \dfrac{2tdt}{t^2+1}$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = \ln 2$ $t = 1$

$$2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = 2t - 2\arctan t\Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 24. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x = \sin t$, $dx = \cos tdt$; se $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ allora $t = \frac{\pi}{4}$ e se $x =1$ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cdot \cos tdt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 t}dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt =$$

$$= -\cot t - t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 25. $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x^2 - 1 = t^2$, $xdx = tdt$, per cui $dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}$; se $x = 1$ allora $t = 0$ e se $x = 2$ $t = \sqrt{3}$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - \arctan t\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Esercizio 26. $\int\limits_{0}^{\ln 5} \dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $e^x - 1 = t^2$, $e^x dx = 2tdt$, per cui $dx = \frac{2tdt}{t^2+1}$; se $x = 0$ allora $t = 0$ e se $x = \ln 5$ $t = 2$

$$\int_0^2 \frac{\cancel{(t^2+1)}t}{t^2+4}\cdot\frac{2t}{\cancel{t^2+1}}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2+4}{t^2+4}dt - 8\int_0^2 \frac{1}{t^2+4}dt =$$

$$= 2t - 4\arctan\frac{t}{2}\Big|_0^2 = 4 - \pi$$

Esercizio 27. $\int\limits_{0}^{5} \dfrac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $3x+1=t^2$, $3dx=2tdt$, per cui $dx=\frac{2tdt}{3}$; se $x=0$ allora $t=1$ e se $x=5$ $t=4$

$$\int_1^4 \frac{\frac{2t}{3}}{2\left(\frac{t^2-1}{3}\right)+t}dt=\int_1^4 \frac{2t}{2t^2+3t-2}dt=$$

scomponiamo il denominatore in $(2t-1)(t+2)$, per cui $\frac{2t}{(2t-1)(t+2)}=\frac{A}{2t-1}+\frac{B}{t+2}$

$$\begin{cases} A+2B=2 \\ 2A-B=0 \end{cases} \begin{cases} 5A=2 \\ B=2A \end{cases} \begin{cases} A=\frac{2}{5} \\ B=\frac{4}{5} \end{cases}$$

l'integrale si può riscrivere

$$=\frac{1}{5}\int_1^4 \frac{1}{2t-1}dt+\frac{4}{5}\int_1^4 \frac{1}{t+2}dt=\frac{1}{5}\ln(2t-1)+\frac{4}{5}\ln(t+2)\Big|_1^4=\frac{1}{5}\ln 7+\frac{4}{5}\ln 6-\frac{4}{5}\ln 3=\frac{1}{5}\ln 112$$

Esercizio 28. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

Soluzione. procediamo per sostituzione ponendo $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$; se $x=1$ allora $t=1$ e se $x=3$ $t=\frac{1}{3}$

$$-\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}}dt=\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+5t+t^2}}dt=\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{21}{4}\right)}}dt=$$

$$=\ln\left[\left(t+\frac{5}{2}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{21}{4}\right)}\right]\Bigg|_{\frac{1}{3}}^3=\ln\left(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right)-\ln\left(\frac{17}{6}+\frac{10}{6}\right)=\ln\left(\frac{7+2\sqrt{7}}{9}\right)$$

Esercizio 29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

Soluzione. Procediamo con il metodo di integrazioni per parti, ricordando che

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx= u(x)\,v(x)|_a^b-\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

per cui se poniamo $u=x$ e $\cos x dx=v'$, avremo

$$= x\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx=\frac{\pi}{2}+\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

Esercizio 30. $\int_1^e \ln x dx$

Soluzione. Procediamo con il metodo di integrazioni per parti, ponendo $u=\ln x$ e $dx=v'$, avremo

$$= x\ln x|_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot x dx=e-e+1=1$$

Esercizio 31. $\int_0^1 x^3e^{2x}dx$

Soluzione. Poniamo $u = x^3$ e $e^{2x}dx = v'$, avremo

$$x^3 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 3x^2 dx =$$

applichiamo nuovamente il metodo di integrazione ponendo $u = x^2$ e $e^{2x}dx = v'$, avremo

$$\frac{1}{2}x^3e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}xe^{2x}dx\right) =$$

di nuovo $u = x$, $v' = e^{2x}dx$

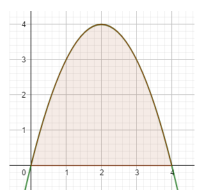
$$\frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{8}e^{2x} = \frac{e^2+3}{8}$$

Esercizio 32. $\int_{-2}^{2} \frac{x^3}{x^2+1}dx$

Soluzione. In questo caso si può osservare che la funzione è dispari ed è quindi simmetrica rispetto all'origine del piano cartesiano, quindi, essendo i due estremi opposti e simmetrici rispetto all'origine, l'integrale sarà $= 0$.

2. Calcolo delle aree di figure piane

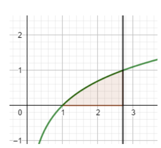
Esercizio 33. Calcolare l'area limitata dalla parabola $y = 4x - x^2$e dell'asse delle ascisse.



Soluzione. la parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

Esercizio 34. Calcolare l'area limitata dalla curva $y = \ln x$, dall'asse Ox e dalla retta $x = e$.



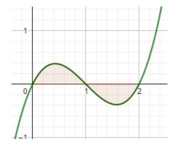
Soluzione. la curva sarà compresa tra i punti di ascissa $x_1 = 1$ e $x_2 = e$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_1^e \ln x dx$$

risolviamo per parti con $u = \ln x$ e $v' = dx$

$$= x \ln x|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}dx = x \ln x - x|_1^e = e - e + 1 = 1$$

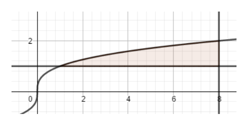
Esercizio 35. Calcolare l'area limitata dalla curva $y = x\,(x-1)\,(x-2)$ e dall'asse Ox. La curva interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$, per cui



Soluzione. la curva interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, per cui possiamo calcolare l'integrale

$$A = \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) dx - \int_1^2 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right|_0^1 - \left.\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right|_1^2 = \frac{1}{2}$$

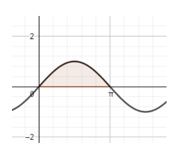
Esercizio 36. Calcolare l'area limitata dalla curva $y^3 = x$, dalla retta $y = 1$ e dalla verticale $x = 8$. La curva interseca la retta orizzontale nel punto di ascissa $x = 1$, per cui



Soluzione. Calcoliamo l'integrale della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ al quale sottraiamo l'area sotto la retta $y = 1$ (si può calcolare anche geometricamente come l'area del rettangolo)

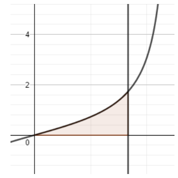
$$A = \int_1^8 \sqrt[3]{x}dx - \int_1^8 dx = \left.\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - x\right|_0^8 = \frac{17}{4}$$

Esercizio 37. Calcolare l'area limitata da una semionda della sinusoide $y = \sin x$ e dall'asse OX.



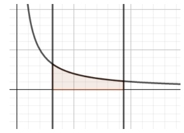
Soluzione. $A = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi} = 2$

Esercizio 38. Calcolare l'area compresa tra la curva $y = \tan x$, l'asse OX e la retta $x = \frac{\pi}{3}$.



Soluzione. $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln(\cos x)|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2$

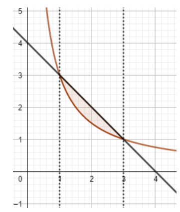
Esercizio 39. Calcolare l'area compresa tra l'iperbole $xy = m^2$, le verticali $x = a$ e $x = 3a$ $(a > 0)$ e l'asse OX.



Soluzione. $A = \int_a^{3a} \frac{m^2}{x} dx = m^2 \ln(x)\Big|_a^{3a} = m^2 (\ln 3a - \ln a) = m^2 \ln 3$

Esercizio 40. Determinare l'area del dominio così definito:

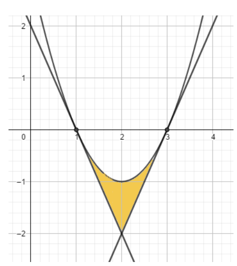
$$\begin{cases} xy \geq 3 \\ x + y - 4 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Soluzione. L'area delimitata è quella rappresentata in figura, intersezione delle tre condizioni. si tratta pertanto di calcolare l'area sottesa dalla retta nell'intervallo $1 \leq 3 \leq 3$ dalla quale sottrarre l'area sottesa dal ramo di iperbole equilatera sempre nello stesso intervallo. L'area sottesa dalla retta equivale a quella del trapezio rettangolo, che vale $A_{tr} = \frac{(3+1)\cdot 2}{2} = 4$

$$A = 4 - \int_1^3 \frac{3}{x} dx = 4 - 3\ln(x)\big|_1^3 = 4 - \ln 27$$

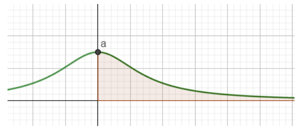
Esercizio 41. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, determinare l'area della regione piana limitata dalle tangenti nei punti di intersezione con l'asse x e dalla curva.



Soluzione. La parabola interseca l'asse x nei punti di ascissa $x = 1$ e $x = 3$. Le tangenti in questi due punti saranno simmetriche rispetto all'asse della parabola e si incontreranno quindi nel punto di ascissa $x = 2$ e avranno, quindi, coefficienti angolari opposti uguali rispettivamente a $m_1 = -2$ e $m_2 = 2$ e le loro equazioni saranno $r_1 : 2x + y - 2 = 0$ e $r_2 : 2x - y - 6 = 0$. Il loro punto di intersezione sarà $(2; -2)$. [Le tangenti si possono pure determinare ricordando il significato geometrico di derivata di una funzione]. L'area richiesta, indicata in figura, è la differenza tra l'area del triangolo isoscele e quella del segmento di parabola. Il triangolo ha area $A_{tr} = 2$. L'area richiesta sarà

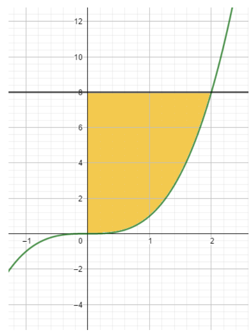
$$A = 2 - \int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = 4 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\Big|_1^3 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 42. Calcolare l'area compresa tra la versiera di Agnesi $y = \frac{a^3}{X^2 + a^2}$ e il semiasse positivo delle ascisse.



Soluzione. $A = a^3 \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{X^2+a^2} = \frac{a^3}{a} \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} a^2$

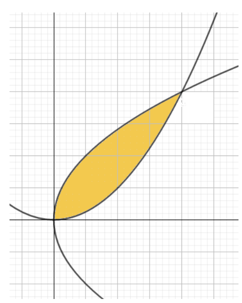
Esercizio 43. Calcolare l'area della figura limitata dalla curva $y = x^3$, dalla retta $y = 8$ e dall'asse OY.



Soluzione. L'area richiesta è la differenza tra l'area sottesa dalla retta e quella sottesa dalla curva nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$. Pertanto

$$A = 16 - \int_0^2 x^3 dx = 16 - \frac{x^4}{4} \arctan x \Big|_0^2 = 16 - 4 = 12$$

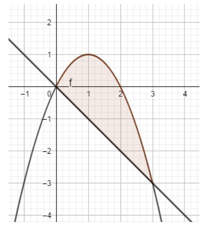
Esercizio 44. Calcolare l'area delimitata dalle parabole $y^2 = 2px$ e $x^2 = 2py$.



Soluzione. L'area richiesta è la differenza tra le parti di piano sottese dalle due curve nell'intervallo $[0; 2p]$

$$A = \int_0^{2p} \sqrt{2px}dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p} dx = \frac{2x\sqrt{2px}}{3} - \frac{x^3}{6p}\Big|_0^{2p} = \frac{8p^2}{3} - \frac{4p^2}{3} = \frac{4}{3}p^2$$

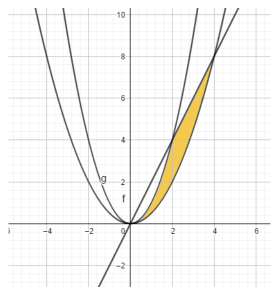
Esercizio 45. Calcolare l'area delimitata dalla parabole $y = -x^2 + 2x$ e dalla retta $y = -x$.



Soluzione. La retta e la parabola si intersecano nei punti $(0;0)$ e $(3;0)$. L'area richiesta è data da

$$A = \int_0^3 \left(-x^2 + 2x - (-x)\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{9}{2}$$

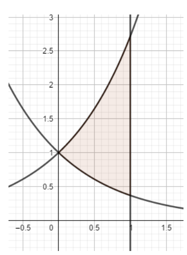
Esercizio 46. Calcolare l'area compresa tra le parabole $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{2}$ e dalla retta $y = 2x$.



Soluzione. Le due parabole e la retta si intersecano nell'origine. La retta interseca la parabola $y = x^2$ nel punto di ascissa $x = 4$ e incontra l'altra parabola nel punto di ascissa $x = 2$.

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right) dx - \int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right) dx = -\frac{x^3}{6} + x^2\Big|_0^4 - x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4$$

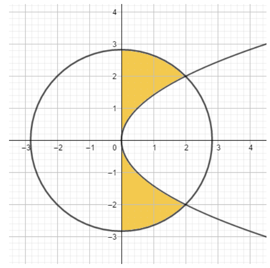
Esercizio 47. Calcola l'area limitata dalle curve $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ e dalla retta $x = 1$.



Soluzione. Le due curve esponenziali si intersecano nel punto di ascissa $x = 0$ e intersecano la retta verticale nel punto di ascissa $x = 1$.

$$A = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) dx = e^x + e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e}$$

Esercizio 48. Calcolare l'area delle due parti del cerchio $x^2 + y^2 = 8$ delimitata dalla parabola $y^2 = 2x$



Soluzione. Le due parti di cerchio hanno, per simmetria, la stessa area e questo consente di calcolare il solo integrale della parte di piano nel quadrate positivo. La parabola interseca la circonferenza nel punto di ascissa $x = 2$. L'area sarà pertanto la differenza tra la parte sottesa dalla circonferenza e quella sottesa dalla parabola nell'intervallo $0 \le x \le 2$.

$$\frac{A}{2} = \int_0^2 \sqrt{8 - x^2} dx - \int_0^2 \sqrt{2x} dx =$$

calcoliamo il primo integrale sostituendo $x = 2\sqrt{2}\cos t$, $dx = -2\sqrt{2}\sin t dt$; se $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$; se $x = 2$, $t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{A}{2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8\sin^2 t} \cdot \left(-2\sqrt{2}\sin t\right) dt - \int_0^2 \sqrt{2} x^{\frac{1}{2}} dx = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \sqrt{2}\left(\left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^2 \right) =$$

ma $\sin^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2}$, per cui

$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d\left(2t\right) - \sqrt{2} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{2} = 4t - 2\sin 2t|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3} = \pi + 2 - \frac{8}{3} = \pi - \frac{2}{3}$$

l'area totale sarà quindi

$$A = 2\pi - \frac{4}{3}$$

Esercizio 49. Dopo aver determinato le parabole γ e γ' appartenenti al fascio $y = -x^2 + ax + c$ passanti per $A\left(0; 3\right)$ e tangenti alla retta $r : 4x + 4y - 21 = 0$, detti M e N i rispettivi punti di tangenza (M appartenente al primo quadrante), determinare la retta parallela a r che interseca gli archi $\widehat{AM}$ e $\widehat{AN}$ di γ e γ', nei punti R e T in modo che sia massima l'area del triangolo MTR; calcolare poi l'area del triangolo mistilineo AMN.

Soluzione. Le parabole passano per A e quindi $c = 3$ e l'equazione si riduce a $y = -x^2 + ax + 3$. Essendo tangenti alla retta r avremo

$$\begin{cases} y = -x^2 + ax + 3 \\ y = -x + \frac{21}{4} \end{cases} \qquad x^2 - x\left(a - 1\right) + \frac{9}{4} = 0 \quad a_1 = -4 \quad a_2 = 2$$

le parabole saranno $\gamma : -x^2 - 4x + 3$ e $\gamma_1 = -x^2 + 2x + 3$. Ora, ricordando il significato geometrico di derivata, possiamo trovare i due punti di tangenza:

$$-1 = -2x_N + a \quad a = -4 \quad N\left(-\tfrac{3}{2}; \tfrac{27}{4}\right)$$
$$-1 = -2x_M + a \quad a = 2 \quad M\left(\tfrac{3}{2}; \tfrac{15}{4}\right)$$

Calcoliamo ora le intersezioni T, R in funzione della distanza tra le due rette con R nel primo quadrante e T nel secondo $\left(3 \le q \le \frac{21}{4}\right)$

$$R \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -x + q \end{cases} \qquad 0 < x < \tfrac{3}{2}; \quad x^2 - 3x + q - 3 = 0 \quad R\left(\tfrac{3 - \sqrt{21 - 4q}}{2}; \tfrac{2q - 3 + \sqrt{21 - 4q}}{2}\right)$$

$$T \begin{cases} y = -x^2 - 4x + 3 \\ y = -x + q \end{cases} \qquad -\tfrac{3}{2} < x < 0 \quad x^2 - 3x + q - 3 = 0 \quad T\left(\tfrac{-3 + \sqrt{21 - 4q}}{2}; \tfrac{2q + 3 - \sqrt{21 - 4q}}{2}\right)$$

troviamo il segmento RT (poniamo per comodità di scrittura $\sqrt{21 - 4q} = t$

$$RT = \sqrt{\left(3 - t^2\right) + \left(t - 3\right)^2} = |t - 3|\sqrt{2} = \left(\sqrt{21 - 4q} - 3\right)\sqrt{2}$$

l'altezza del triangolo è la distanza tra le due rette parallele

$$h=\frac{\left|\frac{3}{2}+\frac{15}{4}-q\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\frac{21}{4}-q\right|}{\sqrt{2}}$$

l'area sarà quindi

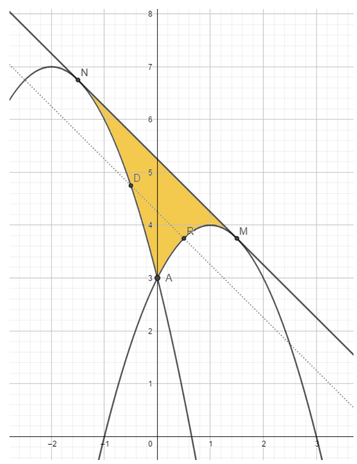
$$A=\left[\left(\sqrt{21-4q}-3\right)\sqrt{2}\right]\cdot\frac{\left|\frac{21}{4}-q\right|}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{21-4q}-3\right)\left(\frac{21}{4}-q\right)}{2}$$

troviamo la condizione di massimo

$$A'=\frac{\frac{-2}{\sqrt{21-4q}}\left(\frac{21-4q}{4}\right)-\left(\sqrt{21-4q}-3\right)}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{21-4q}=0$$

$$2=\sqrt{21-4q}\qquad q=\tfrac{17}{4}$$

la retta parallela sarà $4x+4y-17=0$.



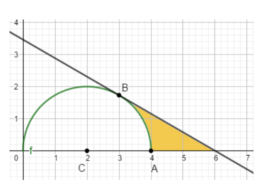
Calcoliamo l'area del triangolo mistilineo colorato in figura.

$$A=\left(\frac{27}{4}+\frac{15}{4}\right)\times\frac{3}{2}-\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left(-x^2-4x+3\right)dx-\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+2x+3\right)dx=$$

$$=\frac{63}{4}-\left|-\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right|_{-\frac{3}{2}}^{0}-\left|-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right|_{0}^{\frac{3}{2}}=\frac{63}{4}-\frac{63}{8}-\frac{45}{8}=\frac{9}{4}$$

Esercizio 50. Dati i punti $A\,(4;0)$ e $C\,(2;0)$, determinare l'equazione della semicirconferenza giacente nel semipiano $y\geq 0$, passante per A e con centro in C. Calcolare l'area della parte di piano limitata dall'asse x, dalla semicirconferenza e dalla retta a essa tangente nel suo punto di ascisse $x=3$.

Soluzione. La semicirconferenza ha centro in C e passa per A e, per simmetria, per $O\,(0,0)$ e quindi ha raggio $r=2$. L'equazione della circonferenza è: $x^2+y^2-4x=0$ e la semicirconferenza richiesta avrà equazione $y=\sqrt{4x-x^2}$. Il punto di tangenza avrà coordinate $B\left(3;\sqrt{3}\right)$



Calcoliamo l'area colorata in figura

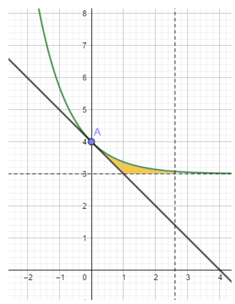
$$A = \frac{3 \times \sqrt{3}}{2}\left(A_{triangolo}\right) - \int_3^4 \sqrt{4x - x^2}dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_3^4 \sqrt{4x - x^2}dx =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_3^4 \sqrt{4x - x^2 - 4 + 4}dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_3^4 \sqrt{4 - (x-2)^2}dx =$$

se poniamo $x - 2 = t$, con $dx = dt$ e $x = 3$, allora $t = 1$, $x = 4$, $t = 2$, avremo

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \left|\frac{t}{2}\sqrt{4 - t^2} + 2\arcsin\frac{t}{2}\right|_1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

Esercizio 51. Tracciare la curva γ di equazione $y = 3 + e^{-x}$ e, scritta l'equazione della tangente t a γ nel suo punto di intersezione con l'asse y, determinare l'area $A(k)$ della regione piana limitata dalla retta t, dall'asintoto orizzontale della curva, dalla retta $x = k$ $(k > 1)$ e dalla curva. Calcolare inoltre $A = \lim_{k \to \infty} A(k)$.



Soluzione. Il grafico della curva è facilmente rappresentabile essendo la curva esponenziale e^{-x} traslata mediante il vettore $\overrightarrow{v}(0;3)$ e l'asintoto sarà allora $y = 3$. La curva interseca l'asse y nel punto $A(0;4)$. Determiniamo la tangente alla curva in questo punto, calcolando la derivata prima per ottenere il coefficiente angolare della retta,

$$y' = -e^{-x} \quad y'(0) = -1$$

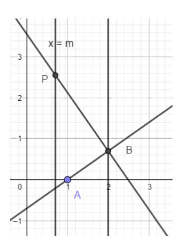
la retta avrà equazione $x + y - 4 = 0$. Calcoliamo ora l'area della regione di piano colorata in figura

$$A(k) = \int_0^k \left(3 + e^{-x}\right)dx - 3k - \frac{1}{2} = \left|3x - e^{-x}\right|_0^k - 3k - \frac{1}{2} = 3k - e^{-k} + 1 - 3k - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-k}$$

Calcoliamo il limite dell'area in funzione di k

$$A = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2} - e^{-k} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 52. Per un punto $A(1;0)$ si conduca la retta r di coefficiente angolare m; detto B il punto di intersezione con la retta $x = 2$, si conduca da esso la perpendicolare a r; sia P il suo punto di intersezione con la retta $x = m$. a) Determinare l'equazione del luogo γ descritto da P al variare di m. Tracciare la curva γ. b) Determinare infine l'area della regione piana limitata dalla tangente alla curva nel suo punto di ascissa 1, dalla retta $x = 2$ e dalla curva γ.



Soluzione. La retta passante per A ha equazione $y = m(x-1)$; l'intersezione con la retta $x = 2$ individua il punto $B(2; m)$. La retta perpendicolare per B alla retta r avrà $m_{per} = -\frac{1}{m}$ e $q_{per} = \frac{m^2+2}{m}$; l'equazione di tale retta sarà $x + my - m^2 - 2 = 0$. Il punto P avrà pertanto coordinate $P\left(m; \frac{m^2-m+2}{m}\right)$. Il luogo, considerando m come l'incognita, avrà quindi equazione

$$y = \frac{x^2 - x + 2}{x}$$

Studiamo questa funzione il cui dominio è $\mathbb{R}_0$. Il numeratore è sempre positivo e quindi non vi saranno intersezioni con gli assi. La funzione sarà positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Studiamo gli asintoti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x+2}{x} \sim x = \pm\infty \quad \lim_{x\to o^{\pm}} \frac{x^2-x+2}{x} \sim \frac{2}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

la funzione non ha quindi asintoti orizzontali ma presenta un asintoto verticale di equazione $x = 0$ (asse y). Verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 2 - x^2}{x} = -1$$

avremo quindi un asintoto obliquo di equazione $y = x - 1$.

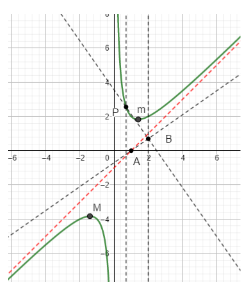
Studiamo la sua derivata

$$y' = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

il suo dominio sarà ancora $\mathbb{R}_0$. Il denominatore è sempre positivo nel dominio, mentre il numeratore lo è per $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$ e la funzione sarà crescente in questi due intervalli e decrescente in $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Avrà quindi un massimo relativo in $M\left(-\sqrt{2}; \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$ e un minimo relativo in $m\left(\sqrt{2}; \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)$. Calcoliamo la derivata seconda

$$y'' = \frac{2x^3 - 2x^3 + 4x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$$

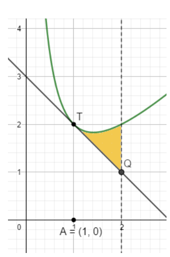
la funzione avrà concavità verso l'alto per $x > 0$ e verso il basso per $x < 0$ e non presenta flessi. Il grafico è mostrato sotto.



b) troviamo ora la tangente richiesta. Il punto di ascissa 1 appartenente alla curva γ avrà coordinate $T(1; 2)$. Troviamo il coefficiente angolare di tale retta, conoscendo già la derivata della funzione

$$y'(1) = -1$$

e la tangente avrà equazione $x + y - 3 = 0$. Tale tangente interseca la retta $x = 2$ in $Q(2; 1)$.



L'area sarà uguale alla differenza tra la parte di piano sottesa dalla funzione nell'intervallo $[1;2]$ e il trapezio rettangolo sotteso dalla tangente nello stesso intervallo. L'area del trapezio vale $\frac{3}{2}$, per cui

$$A = \int_1^2 \frac{x^2 - x + 2}{x} dx - \frac{3}{2} = \int_1^2 x dx - \int_1^2 dx + 2 \int_1^2 \frac{dx}{x} - \frac{3}{2} =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln x \right]_1^2 - \frac{3}{2} = \ln 4 - 1$$

Esercizio 53. Data la funzione

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{\left| x^2 - 1 \right|}{x - 1} \right)$$

a) determinare il dominio, eventuali punti singolari, di non derivabilità e le equazioni delle tangenti in questi punti; b) tracciare il grafico C della funzione; c) determinare l'area della regione piana limitata dalla curva C, dall'asse x e dalle rette $x = -\frac{3}{2}$ e $x = -1$.

Soluzione. La presenza del valore assoluto richiede di studiare la funzione sia caso in cui il suo argomento è positivo sia quando è negativo.

1. caso: $x \le -1 \ \vee \ x > 1$, la funzione è

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \right)$$

il dominio è dato da

$$\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad \frac{x^2+x-2}{x-1} > 0 \quad x < -2 \ \vee \ x > 1$$

per cui $D : -2 < x < -1 \ \ x > 1$.

2. caso $-1 \le x < 1$

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{-x^2 + 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\frac{-x^2 + x}{x - 1} \right)$$

il dominio è dato da

$$\begin{cases} \frac{-x^2+x}{x-1} > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad \frac{-x^2+x}{x-1} > 0 \quad 0 < x < 1$$

per cui $D : -1 < x < 0$.

Il dominio della funzione sarà quindi $D : (-2;0) \ \ (1;+\infty)$, dove i punti singolari sono in corrispondenza di $x = -2, 1$. All'interno del dominio la funzione è sempre continua.

Calcoliamo la derivata della funzione

1. caso

$$f'(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{(2x+1)\cancel{(x-1)} - (x+2)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{(x-1)^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{x+2}$$

2. caso:

$$f'(x) = \frac{\cancel{x-1}}{-x\cancel{(x-1)}} \cdot \frac{(1-2x)\cancel{(x-1)} + x\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x}$$

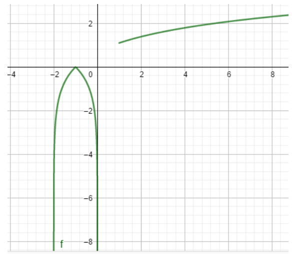
Il punto $x = -1$ appartiene ai due intervalli; verifichiamo se la derivata dx e sx della funzione in questo punto coincidono oppure no, cioè se la funzione oltre a essere continua in $x = -1$ è anche derivabile.

$$f'(-1^-) = 1 \qquad f'(-1^+) = -1$$

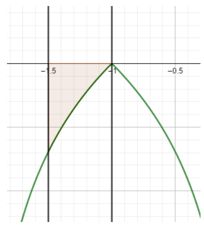
la funzione avrà quindi un punto angoloso in corrispondenza di $x = -1$. Tale valore caratterizza un punto del grafico di coordinate $P(-1;0)$ e le tangenti in questo punto saranno

$$t_1 : y = x + 1 \qquad t_2 : y - x - 1$$

b) Completando lo studio si ottiene il seguente grafico



c) l'area da determinare è quella colorata nella figura sotto



$$A = -\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \ln\left(\frac{x^2+x-2}{x-1}\right) dx = -\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \ln(x+2)\, d(x+2) =$$

integriamo con il metodo per parti ponendo $d(x+2) = v'$ e $\ln(x+2) = u$, per cui

$$-\left[(x+2)\ln(x+2)\right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} d(x+2) = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$$

Lunghezza di un arco di curva

La lunghezza di un arco di curva di equazione $y = f(x)$ compresa tra due punti di ascissa $x = a$ e $x = b$ è uguale a

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$$

Esercizio 54. Calcolare la lunghezza dell'arco della parabola semicubica $y^2 = x^3$ compreso tra l'origine delle coordinate e il punto dalle coordinate $(4;8)$.

Soluzione. la funzione può essere scritta come, essendo l'intervallo nel primo quadrante, $y = x^{\frac{3}{2}}$ e quindi $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$l = \int_0^4 \sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{(4+9x)}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (4+9x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

se poniamo $4+9x = t$, avremo $dx = \frac{1}{9}dt$; se $x = 0$, $t = 4$ e se $x = 4$, $t = 40$

$$l = \frac{1}{18}\int_0^4 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{40} = \frac{1}{27}\cdot\left(40\sqrt{40}-8\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

Esercizio 55. Calcolare la lunghezza dell'arco della parabola $y = 2\sqrt{x}$ compreso tra i punti di ascisse $x = 0$ e $x = 1$.

Soluzione. la parabola ha come asse di simmetria l'asse x. calcoliamo la derivata $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)}dx =$$

poniamo $x+1 = \frac{1}{\cos^2 t}$, per cui $x = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \tan^2 t$ e $dx = \frac{2\tan t}{\cos^2 t}dt$; se $x=0$, $t=0$; se $x=1$, $t=\frac{\pi}{4}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\tan^2 t}\right)} \cdot \frac{2\tan t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin t} \cdot \frac{2\sin t}{\cos^3 t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^3 t}dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}dt =$$

calcoliamo il primo integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$ per parti, riscrivendolo come $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \frac{\sin t}{\cos^3 t}dt$, ponendo $u = \frac{\sin t}{\cos^3 t}$ e $v' = \sin t dt$; avremo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \frac{\sin t}{\cos^3 t}dt = \left(-\cos t \frac{\sin t}{\cos^3 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$$

cioè, sommando i termini "simili"

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

pertanto

$$l = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\ln\left(\tan t + \sec t + 1\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Se la curva è data da una equazione parametrica, la lunghezza dell'arco di curva è data da

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'^2 + y'^2\right)dt}$$

Esercizio 56. Calcolare la lunghezza dell'arco dell'evolvente di cerchio

$$\begin{cases} x = a\left(\cos t + t\sin t\right) \\ y = a\left(\sin t - t\cos t\right) \end{cases}$$

per $0 < t < T$.

Soluzione. Calcoliamo prima le derivate di x e y rispetto a t

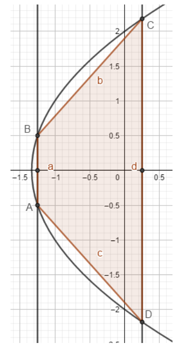
$$\begin{gathered} x' = a\left(-\sin t + \sin t + t\cos t\right) = at\cos t \\ y' = a\left(\cos t - \cos t + t\sin t\right) = at\sin t \end{gathered}$$

avremo

$$l = \int_0^T \sqrt{at^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}dt = \int_0^T \sqrt{at^2}dt = \frac{aT^2}{2}$$

Esercizio 57. Data la parabola di equazione $y^2 = 3x+4$ e le due corde AB e CD perpendicolari all'asse x nei punti $\left(-\frac{5}{4};0\right)$ e $\left(\frac{1}{4};0\right)$, dimostrare che tra l'area del trapezio convesso $ABCD$ e l'area A del segmento parabolico limitato dalle due corde sussiste la relazione

$$\frac{38}{27}A\left(ABCD\right) = A + \frac{10}{9}$$



Soluzione. Troviamo le intersezioni della parabola con le due rette perpendicolari: retta $x=-\frac{5}{4}$, $A\left(-\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right)$; pertanto il segmento $\overline{AB}=1$; retta $x=\frac{1}{4}$, $C\left(\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{19}}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{19}}{2}\right)$ e il segmento $CD=\sqrt{19}$. L'altezza del trapezio è la distanza tra le due rette parallele, cioè $h=\left|\frac{1}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)\right|=\frac{3}{2}$. L'area del trapezio è

$$A\left(ABCD\right)=\frac{\left(1+\sqrt{19}\right)\times\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}\left(1+\sqrt{19}\right)$$

Calcoliamo l'area del segmento di parabola mediante il calcolo dell'integrale (si ricorda anche la possibilità con fornita dalla formula di Archimede)

$$A=2\int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}}\sqrt{3x+4}dx=\frac{2}{3}\int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}}\left(3x+4\right)^{\frac{1}{2}}d\left(3x+4\right)=\frac{2}{3}\left|\left(3x+4\right)^{\frac{3}{2}}\times\frac{2}{3}\right|_{-\frac{5}{4}}^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{4}{9}\left(\frac{19}{8}\sqrt{19}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{18}\left(19\sqrt{19}-1\right)$$

Pertanto

$$\frac{38}{27}\left(\frac{3}{4}\left(1+\sqrt{19}\right)\right)=\frac{1}{18}\left(19\sqrt{19}-1\right)+\frac{10}{9}$$

$$\frac{19}{18}+\cancel{\frac{19}{18}\sqrt{19}}=\cancel{\frac{19}{18}\sqrt{19}}-\frac{1}{8}+\frac{10}{9}$$

da cui

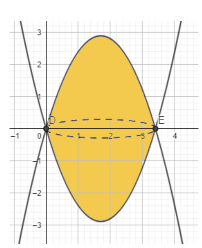
$$\frac{19}{18}=\frac{19}{18}$$

Calcolo dei volumi

Volume dei solidi di rotazione. Il volume del corpo generato dalla rotazione di un trapezoide mistilineo, limitato dalla curva $y=f\left(x\right)$, dall'asse delle x e dalle rette $x=a$ e $x=b$, intorno all'asse x o intorno all'asse y si esprime con le formule

$$V_x=\pi\int_a^b f^2\left(x\right)dx\qquad V_y=2\pi\int_a^b xf\left(x\right)dx$$

Esercizio 58. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della curva limitata dall'asse x e dalla parabola $y=ax-x^2$.



Soluzione. Il volume è dato da

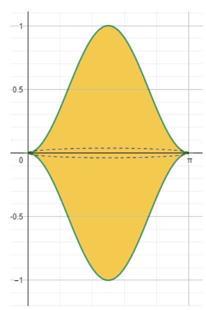
$$V_x = \pi \int_0^a \left(ax - x^2\right)^2 dx = \pi \int_0^a \left(a^2x^2 - 2ax^3 + x^4\right) dx = \pi \left. a^2\frac{x^3}{3} - a\frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right|_0^a = \frac{a^5}{30}\pi$$

Esercizio 59. Calcolare il volume dell'ellissoide generato dalla rotazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ attorno all'asse x.

Soluzione. Il volume si ottiene moltiplicando per due il volume del solido di rotazione che si ha ruotando di 360∘ intorno all'asse x il sottografico di $y = b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$, per cui

$$V = 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 \left. a^2\frac{x^3}{3} - a\frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right|_0^a = \frac{4}{3}ab^2\pi$$

Esercizio 60. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della curva $y = \sin^2 x$ compresa tra i punti $x = 0$ e $x = \pi$.



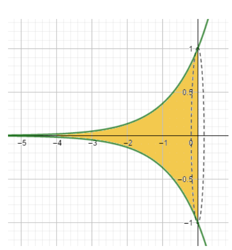
Soluzione. risolviamo l'integrale utilizzando le formule goniometriche e considerando $\sin^4 x = \sin^2 x \cdot \sin^2 x$

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \pi \left(\int_0^\pi \sin^2 x dx - \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx \right) =$$

$$= \pi \left(\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos^2 2x dx \right) = \pi \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi \cos 4x dx \right) =$$

$$\pi \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x \right|_0^\pi = \frac{3}{8}\pi^2$$

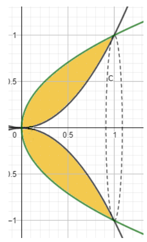
Esercizio 61. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della figura limitata dalla curva $y = e^x$ e dalle rette $x = 0$ e $y = 0$.



Soluzione. Calcoliamo l'integrale

$$V=\pi\int\limits_{-\infty}^{0}e^{2x}dx=\left|\frac{\pi}{2}e^{2x}\right|_{-\infty}^{0}=\frac{\pi}{2}$$

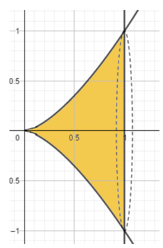
Esercizio 62. Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse x della figura compresa tra le curve delle funzioni $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$.



Soluzione. L'area delimitata da due figure è calcolata come $A=\int\limits_a^b\left(y_2^2-y_1^2\right)dx$, per cui

$$V=\pi\int\limits_{0}^{1}\left(x-x^4\right)dx=\pi\left|\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}\pi$$

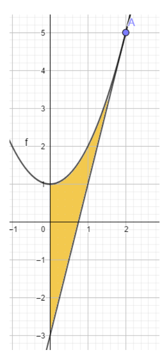
Esercizio 63. Calcolare il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x della figura limitata dalla curva $y^2=x^3$, dall'asse x e dalla retta $x=1$.



Soluzione. Calcoliamo l'integrale

$$V=\pi\int\limits_{0}^{1}x^3dx=\pi\left|\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}\pi$$

Esercizio 64. Determinare l'area della regione T di piano delimitata dall'asse y, dalla parabole $y=x^2+1$ e dalla tangente a detta parabola nel punto $x_0=2$. Calcolare, inoltre, il volume V del solido ottenuto dalla rotazione completa di T attorno all'asse y.e x e dalla retta $x=1$.



Soluzione. Il punto di tangenza ha coordinate $A\left(2;5\right)$. Determiniamo la tangente: $y'=2x$, e $y'\left(2\right)=4$; essa avrà coefficiente angolare $m=4$ e applicando la relazione che descrive un fascio proprio di rette, avremo

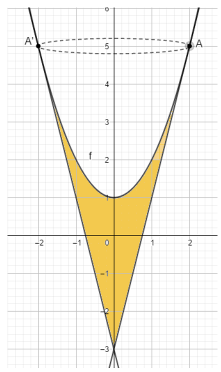
$$y-5=4\left(x-2\right)\qquad y=4x-3$$

tale retta interseca l'asse x nel punto $\left(\frac{3}{4};0\right)$. Troviamo prima l'area della parte colorata in figura.

$$A=\int_0^2\left(x^2+1\right)dx-\left(\frac{5}{8}\times 5\right)+\left(\frac{3}{8}\times 3\right)=\left|\frac{x^3}{3}+x\right|_0^2-2=\frac{8}{3}$$

in modo analogo

$$A=\int_0^2\left(x^2+1\right)dx-\int_{\frac{3}{4}}^{2}\left(4x-3\right)dx-\int_0^{\frac{3}{4}}\left(4x-3\right)dx=\frac{8}{3}$$



Soluzione. Calcoliamo ora il volume ottenuto ruotando la superficie attorno all'asse y.

$$V=\pi\left(\int_{-3}^{5}\left(\frac{y}{4}+\frac{3}{4}\right)dy-\int_1^5\left(y-1\right)^{\frac{1}{2}}dy\right)=\pi\left(\left|\frac{y^2}{8}+\frac{3}{4}y\right|_{-3}^{5}-\left|\left(y-1\right)^{\frac{3}{2}}\right|_1^5\right)=\frac{8}{3}\pi$$

Esercizio 65. Data la curva di equazione

$$y=\frac{2x-1}{x-2}$$

determinare il volume generato dalla regione piana limitata dalla curva, dalle rette $x=4$ e $x=6$ e dall'asintoto orizzontale della funzione in una rotazione completa attorno a tale asintoto.

Soluzione. La funzione data è una funzione omografica, cioè un'iperbole traslata. In questo caso è possibile determinare il volume richiesto dopo aver opportunamente traslato la curva in modo che il suo asintoto orizzontale coincida con l'asse x e quello verticale con l'asse y. Se una funzione omografica generica è espressa da $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ allora il vettore di traslazione sarà dato da

$$\overrightarrow{v}\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)\qquad\overrightarrow{v}\left(2;2\right)\ le$$

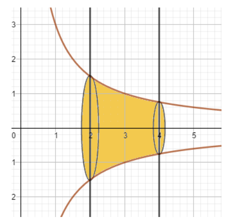
equazioni di traslazione sono

$$\begin{cases}x'=x-2\\y'=y-2\end{cases}\qquad\begin{cases}x=x'+2\\y=y'+2\end{cases}$$

avremo

$$y'=\frac{2x'+4-1}{x'+2-2}-2=\frac{3}{x'}$$

Anche le due rette dovranno essere traslate verso sinistra di due unità.



Il volume sarà

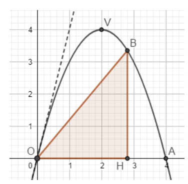
$$V=\pi\int_2^4 \frac{9}{x^2}=9\pi\left|-\frac{1}{x}\right|_2^4=\frac{9}{4}\pi$$

Esercizio 66. Dopo aver determinato nel piano xOy l'equazione della parabola γ, tangente in O alla retta $y=4x$ e passante per $A\,(4;0)$, detto V il vertice, rispondere ai seguenti quesiti:

(1) sull'arco di γ contenuto nel semipiano $y\geq 0$ determinare, per via elementare, il punto B per il quale sia massima l'area del triangolo OBH, essendo H la proiezione di B sull'asse x
(2) determinare il luogo φ del punto medio del segmento OB al variare di B sull'arco $\widehat{OVA}$ di γ
(3) calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse x la regione finita di piano delimitata da γ, da φ e dall'asse x.

Soluzione. Troviamo l'equazione della parabola. La retta data ha $m=4$ e, ricordando il significato geometrico di derivata, se $y=ax^2+bx$ è l'equazione generale di questa parabola passante per l'origine ($c=0$), avremo $y'=2ax+b$ e $y'(0)=b=4$. Inoltre la parabola passa per il punto A e quindi $0=16a+16$, da cui $a=-1$ e l'equazione sarà

$$\gamma: y=-x^2+4x$$



1) le coordinate del punto $B\left(x;-x^2+4x\right)$ con $0<x<4$ e l'area del triangolo rettangolo è

$$A=\frac{-x^3+4x^2}{2}$$

troviamo la condizione di massimo

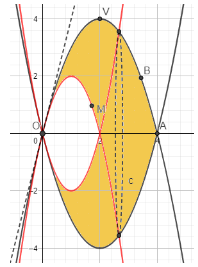
$$A'=\frac{-3x^2+8x}{2}=0$$

da cui

$$x=\tfrac{8}{3}\quad A=\tfrac{128}{27}$$

2) il punto medio del segmento OB con B variabile, ha coordinate $M\left(\frac{t}{2};\frac{-t^2+4t}{2}\right)$ per cui avremo

$$\begin{cases} x=\frac{t}{2}\\ y=\frac{-t^2+4t}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases} t=2x\\ y=\frac{-4x^2+8x}{2}=-2x^2+4x\end{cases}$$



3) Calcoliamo il volume cercato

$$V = \pi \int_0^4 \left(-x^2+4x\right)^2 dx - \pi \int_0^2 \left(-2x^2+4x\right)^2 dx =$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16}{3}x^3\right]_0^4 - \pi \left[\frac{4x^5}{5} - 4x^4 + \frac{16}{3}x^3\right]_0^2 =$$

$$V = \pi \left(\frac{1024}{5} - 512 + \frac{1024}{3} - \frac{128}{5} + 64 - \frac{128}{3}\right) = \frac{448}{15}\pi$$

Applicazioni alla fisica

Esercizio 67. Un punto materiale si muove su una linea retta con un'accelerazione che all'istante t è data da $a(t) = (2t-6)\ \frac{m}{s^2}$. Sapendo che la velocità all'istante $t=0$ è $v_0 = 8\ \frac{m}{s}$, determinare 1) gli istanti t in cui il punto si ferma nelle posizioni A e B; 2) la distanza tra A e B.

Soluzione. Calcoliamo come varia la velocità nel tempo

$$v(t) = \int (2t-6)\, dt = t^2 - 6t + C$$

allora $v(0) = 8 = C$ e la legge delle velocità sarà $v(t) = t^2 - 6t + 8$. Se il punto si ferma, allora $v=0$, per cui

$$t^2 - 6t + 8 = 0 \quad t_1 = 2 \quad t_2 = 4$$

calcoliamo la distanza tra i due punti

$$AB = s(4) - s(2) = \int_2^4 \left|t^2 - 6t + 8\right| dt = \left[\left|\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t\right|\right]_2^4 = \frac{4}{3}\, m$$

Esercizio 68. L'accelerazione di un corpo mobile su una retta, in funzione del tempo, è data dalla legge $a(t) = a_0 e^{-kt}$ con $a_0 = -2\frac{m}{s^2}$ e $k = 6,12\, s^{-1}$. Sapendo che $v_0 = v(0) = 0,5\ \frac{m}{s}$, $s(0) = 0$, determinare a) la legge con cui varia la velocità in funzione del tempo; b) l'equazione oraria del moto e lo spazio percorso in $0,3\, s$.

Soluzione. a) Sapendo che $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, possiamo ottenere

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 e^{-kt} dt = v_0 + \left[-\frac{a_0}{k} e^{-kt}\right]_0^t = v_0 + \left(-\frac{a_0}{k} e^{-kt} + \frac{a_0}{k}\right)$$

per cui

$$v(t) = v_0 + \frac{a_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) = \frac{1}{2} + 0,33\left(1 - e^{-6,12t}\right)$$

b) ancora, poiché $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, si può scrivere

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \left[v_0 + \frac{a_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\right] dt = \left(v_0 + \frac{a_0}{k}\right) t + \frac{a_0}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right)$$

la distanza percorsa in $0,3\, s$ sarà

$$s = (0,5 - 0,33)\, 0,3 - 0,33\left(e^{-6,12\times 0,3} - 1\right) = 9,6\, cm$$

Esercizio 69. Un conduttore è attraversato da una corrente di intensità $i(t) = k \sin \omega t$, essendo $k = 10\, A$ e $\omega = 2\ \frac{rad}{s}$. Calcolare la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore tra l'istante $t_1 = 0$ e l'istante $t_2 = 0,5\, s$.

Soluzione. Sapendo che l'intensità di carica per definizione è data da $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, dove q è la quantità di carica che fluisce nel tempo, avremo

$$q(t) = \int_0^{0,5} k \sin \omega t dt = \left[-\frac{k}{\omega} \cos \omega t\right]_0^{0,5} = [-5 \cos 2t]_0^{\frac{1}{2}} = -5(\cos 1_{rad} - 1) = 2,3\, C$$

Area di una superficie di rotazione

L'area della superficie generata dalla rotazione intorno all'asse x dell'arco di curva $y = f(x)$, compreso tra i punti di ascissa $x = a$ e $x = b$, si esprime con la formula

$$A_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx$$

Esercizio 70. Determinare l'area della superficie generata dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento di retto $y = \sqrt{3}x + 2$ per $x \in [1; 4]$.

Soluzione. L'area è ottenibile calcolando l'integrale

$$A = 2\pi \int_1^4 2\left(\sqrt{3}x + 2\right) dx = 4\pi \left|\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2x\right|_1^4 = 4\pi\left(8\sqrt{3} + 8 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right) = 1$$

$$= 4\pi\left(\frac{15}{2}\sqrt{3} + 6\right) = 6\pi\left(5\sqrt{3} + 4\right)$$