ESERCIZI SULLA TERMODINAMICA

Svolti dal prof. Gianluigi Trivia

11 novembre 2022

1 Termometria e Calorimetria

1.1 Scale di Temperatura

Esercizio 1. Calcolare per quale valore della temperatura espressa in gradi Celsius un termometro centigrado e uno con scala Fahrenheit forniscono lo stesso valore.

Soluzione: Ricordiamo che la scala Celsius è una scala centigrada, perché, assegnando il valore 0° alla temperatura del ghiaccio in fusione e 100° all'acqua in evaporazione, indica come 1 grado la centesima parte di parte intervallo; la scala Fahrenheit assegna invece a questi due punti fissi il valore di 32° e 212° ed è pertanto una scala centottantigrada, essendo 1° la centottantesima parte di tale intervallo.
Il rapporto tra le due scale è dato da

$$\frac{C}{100} = \frac{F - 32}{180}$$

Detto C il valore della scala Celsius e F quello della Fahrenheit, se $C = F$ si ha

$$\frac{C}{100} = \frac{C - 32}{180}$$

da cui

$$180C = 100C - 3200 \quad 80C = -3200 \quad C = -40$$

Esercizio 2. Determinare la temperatura alla quale i gradi Fahrenheit risultano doppi e metà di quelli Celsius.

Soluzione. La scala Fahrenheit è una scala centottantigrada, assegnando un valore di 32 al ghiaccio in fusione e di 212 all'acqua in ebollizione. La scala Celsius è invece una scala centigrada, assegnando il valore 0 al ghiaccio in fusione e 100 all'acqua in ebollizione. Il legame tra le due scale è espresso da

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32°$$

Se, quindi $T_F = 2T_C$, o $T_C = \frac{1}{2}T_F$, avremo

$$T_F = \frac{9}{10}T_F + 32°$$

cioè

$$\frac{10-9}{10}T_F = \frac{1}{10}T_F = 32$$

risolvendo

$$T_F = 320°$$

Se, invece, $T_F = \frac{1}{2}T_C$, o $T_C = 2T_F$, in modo analogo si ottiene

$$T_F - \frac{18}{5}T_F = 32$$

da cui

$$-\frac{13}{5}T_F = 32$$
$$T_F = -12.3°$$

Esercizio 3. Vi preoccupereste se il vostro medico vi dicesse che la vostra temperatura corporea è 310 gradi sopra lo zero assoluto?

Soluzione. Lo zero assoluto vale $-273.15\,°\mathrm{C}$ e quindi il corpo avrebbe una temperatura, espressa in Celsius, di

$$T = 310 + (-273.15) = 36.85\,°\mathrm{C}$$

una temperatura non certo preoccupante.

Esercizio 4. Nel 1964 la temperatura nel villaggio siberiano di Oymyakon ha raggiunto il valore di $-71\,°\mathrm{C}$. Trovare l'equivalente valore nella scala Fahrenheit. Inoltre, la temperatura più alta, ufficialmente registrata negli Stati Uniti è stata di $134\,°\mathrm{F}$ nella Death Valley. Trovare il corrispondente valore in Celsius.

Soluzione. La relazione che collega le due scale di misura è sempre

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32°$$

Nel primo caso $-71\,°C$ corrispondono a

$$T_F = 1.8 \times (-71) + 32 = -96\,°F$$

Nel secondo caso

$$134 = 1.8 \times T_C + 32$$

e risolvendo rispetto alla T_C, si ha

$$T_C = \frac{134 - 32}{1.8} = 56.7\,°C$$

Esercizio 5. A quale temperatura le seguenti coppie di scale presentano lo stesso valore: (a) Fahrenheit e Celsius, (b) Fahrenheit e Kelvin e (c) Celsius e Kelvin.

Soluzione. caso (a): se $T_F = T_C$ allora

$$T_F = 1.8T_F + 32$$

da cui

$$T_F = T_C = -40°$$

caso (b): la relazione che lega la scala Celsius alla Kelvin è $T_C = T_K - 273$; sostituendo nella relazione tra Celsius e Fahrenheit

$$T_F = 1.8\,(T_K - 273) + 32$$

se $T_K = T_F$, allora

$$T = 585°$$

caso (c) la relazione è $T_C = T_K + 273$, se $T_C = T_K$, allora non esiste alcun valore per cui la relazione è vera.

Esercizio 6. Un calorifero di casa si rompe in un giorno in cui la temperatura esterna è di $7\,°C$. di conseguenza la temperatura interna scende da $22\,°C$ a $18\,°C$ in un'ora. Il proprietario aggiusta poi l'impianto e aggiunge un rivestimento isolante alla casa. In seguito si accorge che, in una giornata simile, la casa impiega il doppio del tempo per una analoga riduzione della temperatura. Trovare il rapporto fra la costante A nella legge del raffreddamento di Newton dopo che è stato migliorato l'isolamento e il suo valore precedente.

Soluzione. La legge del raffreddamento di Newton è espressa dalla relazione

$$\frac{d\,(\Delta T)}{dt} = A\Delta T$$

dove $\frac{d}{dt}$ rappresenta una variazione che avviene in un intervallo di tempo dt molto prossimo a zero. Nel nostro caso, però, l'intervallo di tempo considerato è, la prima volta di $1\,h$ e la seconda di $0.5\,h$, mentre ΔT è sempre pari a $4\,°C$. Il valore di A è ottenibile da

$$\frac{d\,(\Delta T)}{dt}\frac{1}{\Delta T} = A$$

calcolando nei due casi, si ha

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{d(\Delta T)}{dt_1}\frac{1}{\Delta T}}{\frac{d(\Delta T)}{dt_2}\frac{1}{\Delta T}} = \frac{dt_2}{dt_1} = \frac{0.5\,h}{1\,h} = \frac{1}{2}$$

1.2 Dilatazione termica dei solidi

Esercizio 7. Una sbarra di alluminio, alla temperatura di $0°\,C$, è lunga $5\,cm$. Calcolare la nuova lunghezza della sbarra se la temperatura sale a $40°\,C$.

Soluzione. La dilatazione esprime il fenomeno dell'aumentata agitazione molecolare e del conseguente aumento della distanza media tra le molecole oscillanti che compongono il solido. Se prendiamo in esame la dilatazione lungo una sola direzione (dilatazione lineare), essa viene descritta dalla relazione $l - l_0 = \lambda l_0 \bigtriangleup T \Longrightarrow l = l_0\,(1 - \lambda T)$, dove l_0 è la lunghezza iniziale, $\bigtriangleup T$ la variazione di temperatura che ha prodotto la dilatazione e λ il coefficiente di dilatazione lineare dipendente dal tipo di materiale considerato (il coefficiente di proporzionalità).
Nel nostro caso $\lambda_{Al} = 24 \cdot 10^{-6}\,C^{-1}$ e quindi, applicando la relazione si ha

$$l = 5\,cm\left(1 + 24 \cdot 10^{-6}\,C^{-1} \cdot 40°\,C\right) = 5{,}0048\,cm$$

la sbarra si allungherà quindi di $48\,\mu m$.

Esercizio 8. Calcolare il coefficiente di dilatazione lineare dell'alluminio sapendo che una sbarra di alluminio lunga $20\,m$ si allunga di $24\,cm$ se riscaldata da $20°\,C$ a $520°\,C$.

Soluzione. L'esercizio è simile al precedente, tranne che in questo caso la grandezza incognita è λ e che è quindi necessario applicare la formula inversa

$$\alpha = \frac{l - l_0}{l_0 \triangle T} = \frac{0,24\,m}{20\,m \cdot 500°\,C} = 2,4 \cdot 10^{-5}\,C^{-1}$$

Esercizio 9. Una sbarra di ferro, lunga l_0 alla temperatura di $0°\,C$, viene posta in un ambiente alla temperatura $T\,°C$. Sapendo che la lunghezza della sbarra diventa $1,0005\,l_0$, calcolare la temperatura dell'ambiente.

Soluzione. Soluzione: La tipologia del problema è la stessa degli esercizi precedenti; in questo caso l'incognita è T, e quindi useremo sempre la formula inversa, sapendo che $\lambda_{Fe} = 12 \cdot 10^{-6}\,C^{-1}$ e che $T_0 = 0°$

$$T - 0° = \frac{l - l_0}{\alpha l_0} = \frac{1,0005 l_0 - l_0}{12 \cdot 10^{-6}\,C^{-1} \cdot l_0} = \frac{0,0005}{12 \cdot 10^{-6}\,C^{-1}} = 41,7\,°C$$

Esercizio 10. Alla temperatura di $0°C$ la lunghezza del filo di un pendolo semplice è di $5\,m$. Portato in un luogo dove la temperatura è di $30°C$, il pendolo oscilla con un periodo pari a $4,48\,s$. Sapendo che il coefficiente di dilatazione lineare del filo è $2 \cdot 10^{-5}\,°C^{-1}$, calcolare l'accelerazione di gravità del luogo.

Soluzione. in questo caso l'impostazione di questo problema richiede la conoscenza della relazione tra il periodo di oscillazione di un pendolo semplice, la lunghezza del filo e l'accelerazione di gravità del luogo. Essa si esprime come $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, dove l è la lunghezza del filo e g l'accelerazione di gravità. L'esercizio chiede di valutare l'effetto della temperatura sulla misurazione di un pendolo.

- Calcoliamo prima la dilatazione del filo all'innalzamento della temperatura

$$l = 5\,m\left(1 + 2 \cdot 10^{-5}\,C^{-1} \cdot 30°C\right) = 5,003\,m$$

- risolviamo la relazione che descrive l'oscillazione di un pendolo rispetto a g, inserendo il valore trovato di l:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{t^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 5,003\,m}{(4,48\,s)^2} = 9,831\,\frac{m}{s^2}$$

Esercizio 11. Determinare il coefficiente di dilatazione del filo di un pendolo semplice, sapendo che a $0°C$ il periodo è di $2\,s$, mentre a $30°C$ diventa $2,0004\,s$.

Soluzione. il legame tra la lunghezza del filo e il periodo di oscillazione è espresso da $l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$; applichiamo questa formula nei due casi a diverse temperature

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{(2\,s)^2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}}{4\pi^2} = 0,99396\,m \\ l_1 &= \frac{(2,0004\,s)^2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}}{4\pi^2} = 0,99436\,m \end{aligned}$$

si ha quindi $\triangle l = 0,99436 - 0,99396 = 3,98 \cdot 10^{-4}\,m$ e sostituendo nella relazione che esprime la dilatazione, si ha

$$\alpha = \frac{\triangle l}{l_0 \triangle T} = \frac{3,98 \cdot 10^{-4}\,m}{0,99396\,m \cdot 30°C} = 1,33 \cdot 10^{-5}\,°C^{-1}$$

Esercizio 12. La lunghezza delle rotaie di una linea ferroviaria è circa $l_0 = 155\,km$. Sapendo che per l'acciaio è $\lambda = 10.5 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1}$ e supponendo che le rotaie siano saldate con continuità, calcolare di quanto varierebbe la lunghezza complessiva se la massima variazione stagionale di temperatura è di 40°.

Soluzione. Dalla relazione $\triangle l = l_0 \alpha \triangle T$, sostituendo si ha

$$\triangle l = 155\,km \cdot 10.5 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1} \cdot 40°C = 0,0651\,km = 65,1\,m$$

Esercizio 13. Una sostanza allo stato liquido occupa a $0°C$ un volume pari a $30\,cm^3$. Sapendo che alla temperatura di $50°C$ il suo volume aumenta di $0,27\,cm^3$, determinare in base al coefficiente di dilatazione cubica la natura della sostanza.

Soluzione. in questo caso consideriamo il corpo come solido e quindi tale per cui le lunghezze delle tre dimensioni hanno valori confrontabili, a differenza della dilatazione lineare dove due dimensioni sono trascurabili rispetto alla terza. La relazione è del tutto analoga a quella della dilatazione lineare, se non per l'introduzione di un nuovo coefficiente di dilatazione volumica $\beta = 3\alpha$. Tale coefficiente non è altro che il triplo del coefficiente lineare, in quanto la dilatazione avviene lungo le tre dimensioni. Esso rappresenta l'aumento del volume unitario di un solido per riscaldamento di un grado.

$$V = V_0\,(1 + \beta \triangle T)$$

sostituendo i valori si ha

$$30,27\,cm^3 = 30\,cm^3\,(1 + \beta \cdot 50°C)$$

da cui, risolvendo rispetto ad α

$$\beta = \frac{0,27\,cm^3}{1500\,cm^3 °C} = 1,8 \cdot 10^{-4}\,°C^{-1}$$

dalle tabelle che riproducono i valori dei coefficienti di dilatazione volumica si nota che tale valore corrisponde al Hg.

Esercizio 14. Un blocco di metallo di massa $m = 510\,g$, la cui densità è a $0\,°C$ pari a $8,5\,\frac{g}{cm^3}$, viene immerso in un recipiente contenente acqua a $40\,°C$. Sapendo che il coefficiente di dilatazione cubica del metallo è $5 \cdot 10^{-5}\,°C^{-1}$, calcolare la spinta archimedea agente sul blocco, considerando uguale a $1\,\frac{g}{cm^3}$ la densità dell'acqua.

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto il volume iniziale del metallo, a $T = 0\,°C$:

$$V_0 = \frac{M}{d} = \frac{510\,g}{8,5\,\frac{g}{cm^3}} = 60\,cm^3$$

Calcoliamo ora il volume del metallo dopo la dilatazione subita immergendolo in acqua più calda, a $T = 40\,°C$:

$$V_1 = V_0\,(1+\beta T) = 60\,cm^3\left(1 + 5 \cdot 10^{-5}\,°C^{-1} \cdot 40\,°C\right) = 60,12\,cm^3$$

la densità, rimanendo invariata la massa, diverrà

$$d_1 = \frac{510\,g}{60,12\,cm^3} = 8,483\,\frac{g}{cm^3}$$

la spinta archimedea è la forza esercitata dal fluido nel quale il metallo è immerso, diretta verso l'alto, che è pari al peso del volume del liquido spostato. Tale forza si misura in Newton, $kg\,\frac{m}{s^2}$, per cui il volume andrà espresso in m^3, cioè $V_1 = 60,12 \cdot 10^{-6}\,m^3$

$$F = peso\,specifico_{H_2O} \cdot V_{H_2O} = 1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9,81\,\frac{m}{s^2} \cdot 60,12 \cdot 10^{-6}\,m^3 = 0,59\,N$$

Esercizio 15. Un tubo di vetro pirex contiene, completamente pieno, $60\,cm^3$ di Hg alla temperatura di $15°C$. Se viene riscaldato a $40°C$ qual è la quantità di mercurio che fuoriesce dal tub0? (Coefficiente di dilatazione lineare del vetro pirex: $\alpha = 3 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1}$; coefficiente di dilatazione cubica del mercurio: $\beta = 1,8 \cdot 10^{-4}\,°C^{-1}$)

Soluzione. Calcoliamo la dilatazione subita dal mercurio, sapendo che il volume iniziale è di $60\,cm^3$:

$$V_{Hg} = 60\,cm^3\left(1 + 1,8 \cdot 10^{-4}\,°C^{-1} \cdot 25\,°C\right) = 60,27\,cm^3$$

il tubetto di vetro ha una capacità iniziale uguale al volume del mercurio. Pertanto la capacità del tubetto iniziale di $60\,cm^3$ diviene

$$V_{pirex} = 60\,cm^3\left(1 + 9 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1} \cdot 25\,°C\right) = 60,014\,cm^3$$

da cui

$$V_{Hg} - V_{pirex} = 60,27\,cm^3 - 60,014\,cm^3 = 0,256\,cm^3$$

Esercizio 16. In tutto l'intervallo termico da $0°C$ a $100°C$ il coefficiente di dilatazione cubica del mercurio è sensibilmente uguale a $1,8 \cdot 10^{-4°}C^{-1}$. Sapendo che la densità del mercurio a $20°C$ è $13,59\,g/cm^3$, calcolare la sua densità a $80°C$.

Soluzione. calcoliamo la variazione del volume prodotta dall'innalzamento della temperatura, ricordando che la densità è $d = \frac{M}{V}$, e quindi $v = \frac{M}{d}$

$$\Delta V = V_0 \beta T = \frac{M}{13,59\,\frac{g}{cm^3}} \cdot 1,8 \cdot 10^{-4} {}^{\circ}C^{-1} \cdot 60^{\circ}C$$

ne segue che

$$V_1 - V_0 = 5,30 \cdot 10^{-5} M$$

la densità nella nuova condizione è data da

$$d_1 = \frac{M}{V_0\,(1+\beta T)} = \frac{d_0}{1+\beta T} = \frac{13,59}{1+1,8 \cdot 10^{-4} \cdot 60} = 13,44\,\frac{g}{cm^3}$$

Esercizio 17. Una barretta di ferro ha lunghezza $20\,cm$ a $30\,{}^{\circ}C$. Trovare l'allungamento corrispondente a $T = 50\,{}^{\circ}C$.

Soluzione. La legge che descrive la dilatazione lineare di un corpo è

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

dove si osserva che l'allungamento è direttamente proporzionale alla variazione della temperatura. Nel nostro caso, si ha

$$\Delta l = 11 \cdot 10^{-6}\,{}^{\circ}C^{-1} \times 0.20\,m \times 20\,{}^{\circ}C = 4.4 \times 10^{-5}\,m$$

Esercizio 18. Un'asta di bandiera in alluminio è lunga $33\,m$. Trovare l'aumento in lunghezza se si incrementa la sua temperatura di $15{}^{\circ}C$.

Soluzione. Applichiamo sempre la relazione che esprime la dilatazione lineare di un corpo

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

sostituiamo i valori assegnati, dove $\alpha_{Al} = 23 \cdot 10^{-6}\,{}^{\circ}C^{-1}$

$$\Delta l = \alpha_{Al} = 23 \cdot 10^{-6}\,{}^{\circ}C^{-1} \times 33\,m \times 15\,{}^{\circ}C = 0.011\,m = 1.1\,cm$$

Esercizio 19. Lo specchio di vetro Pyrex nel telescopio dell'Osservatorio al Monte Palomar ha un diametro di $508\,cm$. La temperatura sul Monte Palomar ha una escursione da -10 a $50\,{}^{\circ}C$. Indicare la massima variazione di diametro dello specchio.

Soluzione. Possiamo anche qui considerare la sola dilatazione lineare, espressa da

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

dove $\alpha_{Pyrex} = 3.2 \cdot 10^{-6}\,{}^{\circ}C^{-1}$; sostituendo i valori, si ha

$$\Delta l = 3.2 \cdot 10^{-6}\,{}^{\circ}C^{-1} \times 5.08\,m \times 60\,{}^{\circ}C = 9.8 \cdot 10^{-4}\,m = 0.98\,mm$$

Esercizio 20. Un foro circolare in un piatto di alluminio ha il diametro di $2.725\,cm$ a $0.000\,°C$. Trovare il diametro quando la temperatura sale a $100\,°C$.

Soluzione. Usiamo la relazione per la dilatazione lineare

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

dove $\alpha_{Al} = 23 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1}$

$$\Delta l = 23 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1} \times 2.725\,cm \times 100\,°C = 6.27 \cdot 10^{-3}\,cm$$

per cui il diametro sarà

$$2.725 + 0.00627 = 2.731\,cm$$

Esercizio 21. Appena la Terra si formò, il calore prodotto dal decadimento degli elementi radioattivi elevò la temperatura media interna da 300 a $3000\,K$, valore che mantiene tuttora. Considerando un coefficiente medio di dilatazione volumica di $3.0 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$, calcolare l'aumento del raggio della Terra durante questo processo.

Soluzione. La dilatazione volumica è espressa da una relazione analoga a quella lineare supponendo che la dilatazione sia identica in tutte le direzioni. Siccome è qui richiesta la sola dilatazione del raggio, considereremo quindi ancora la sola dilatazione lineare, per cui se $\beta = 3.0 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$, allora $\alpha = 1.0 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$

$$R = R_0\left(1 + \alpha \Delta T\right)$$

dove R_0 è il raggio iniziale, incognito, mentre R è il raggio medio attuale di $6.37 \cdot 10^3\,km$. Allora

$$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha \Delta T} = \frac{6.37 \cdot 10^3\,km}{1 + 1.0 \cdot 10^{-5}\,K^{-1} \times 2700\,K} = 6200\,km$$

la variazione è quindi

$$6370 - 6200 = 170\,km$$

Esercizio 22. Una finestra di vetro ha le dimensioni di $20\,cm$ per $30\,cm$ a $10\,°C$. Trovare l'aumento della sua superficie quando viene riscaldata di $30\,°C$.

Soluzione. Trattiamo entrambe le dimensioni con la stessa relazione per la dilatazione lineare, dove $\alpha_{vetro} = 9 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\Delta l_{largh} &= l_0 \alpha \Delta T = 20\,cm \times 9 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1} \times 30\,°C = 0.0054\,cm \\
\Delta l_{lungh} &= l_0 \alpha \Delta T = 30\,cm \times 9 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1} \times 30\,°C = 0.00814\,cm
\end{aligned}$$

Le nuove dimensioni saranno

$$\begin{aligned}
lungh &= 20 + 0.0054 = 20.0054\,cm \\
largh &= 30 + 0.0081 = 30.0081\,cm
\end{aligned}$$

La nuova superficie sarà $600.32\,cm^2$ e l'incremento sarà di $0.32\,cm^2$.

Esercizio 23. Un cubo di ottone ha lo spigolo di $30\,cm$. Trovare l'incremento della sua superficie totale quando passa da $20\,°C$ a $75\,°C$.

Soluzione. Il volume iniziale del cubo è di $V = l_0^3 = 30^3 = 27000\,cm^3$. L'incremento del volume è di

$$\Delta V = 3V_0\alpha\Delta T$$

sostituendo

$$\Delta V = 3 \times 27000 \times 19 \cdot 10^{-6} \times 55 = 84.65\,cm^3$$

Il nuovo spigolo sarà pertanto $l = \sqrt[3]{27084.65} = 30.031\,cm$ e la variazione della superficie totale sarà

$$\Delta S_T = 6\left(l^2 - l_0^2\right) = 6\left(30.031^2 - 30^2\right) = 11.2\,cm^2$$

Esercizio 24. Trovare la variazione di volume di una sfera di alluminio di raggio $10\,cm$ quando viene riscaldata da 0 a $100\,°C$.

Soluzione. La variazione di volume, supposta isotropa, è data da $\Delta V = 3V_0\alpha\Delta T$ con $\alpha_{Al} = 23 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1}$. Ricordando che il volume di una sfera è dato da $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e sostituendo si ottiene

$$\Delta V = 3 \times \frac{4}{3}\pi \times 1000\,cm^3 \times 23 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1} \times 100\,°C = 29\,cm^3$$

Esercizio 25. Supponiamo che un bicchiere di alluminio con capacità di $100\,cm^3$venga riempito con glicerina a $22\,°C$. Stabilire se la glicerina deborderà dalla tazza se la temperatura del bicchiere e della glicerina vengono innalzate a $28\,°C$. ($\beta = 3\alpha_{glicerina} = 5.1 \cdot 10^{-4}\,°C^{-1}$).

Soluzione. L'innalzamento di temperatura provoca la dilatazione sia del bicchiere che della glicerina. Poiché il coefficiente di dilatazione volumica della glicerina è maggiore di quello dell'alluminio, la glicerina potrebbe fuoriuscire dal bicchiere. La dilatazione del bicchiere sarà

$$\Delta V = 3 \times 100\,cm^3 \times 23 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1} \times 6\,°C = 0.041\,cm^3$$

La dilatazione volumica della glicerina sarà di

$$\Delta V = 100\,cm^3 \times 5.1 \cdot 10^{-4}\,°C^{-1} \times 6\,°C = 0.306\,cm^3$$

La differenza sarà quindi di $0.306 - 0.04 = 0.265\,cm^3$

Esercizio 26. Una bacchetta della lunghezza precisa di $20.05\,cm$ è misurata con una riga di acciaio in una stanza alla temperatura di $20\,°C$. Sia la bacchetta sia la riga vengono poste in un forno a $270\,°C$; ora la bacchetta misura $20.11\,cm$, misurata con la stessa riga. Trovare il coefficiente di dilatazione termica del materiale di cui è composta la bacchetta.

Soluzione. La variazione in lunghezza del segmento di riga riscaldata è

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T = 20.05 \times 11 \cdot 10^{-6} \times 250 = 0.055\, cm$$

La variazione effettiva per la bacchetta sarà

$$\Delta l = (20.11 - 20.05) + .055 = 0.115\, cm$$

e il coefficiente di dilatazione della bacchetta sarà

$$\alpha = \frac{\Delta l}{\Delta T} = \frac{0.115\, cm}{250\,^{\circ}C} = 23 \cdot 10^{-6}$$

Esercizio 27. Un'asta di acciaio ha diametro di $3.000\, cm$ a $25\,^{\circ}C$. Un anello di ottone ha diametro interno di $2.992\, cm$ a $25\,^{\circ}C$. Trovare la temperatura comune per la quale l'asta si infilerà nell'anello.

Soluzione. Se l'asta di acciaio è in grado di entrare nell'anello di ottone, vuol dire che entrambi hanno almeno lo stesso diametro; ora anche la temperatura deve essere la stessa. Possiamo impostare un sistema risolutivo con incognite la temperatura e il diametro finale.

$$\begin{cases} l &= 2.992 \left[1 + 19 \cdot 10^{-6} (T - 25)\right] \\ l &= 3.000 \left[1 + 11 \cdot 10^{-6} (T - 25)\right] \end{cases}$$

risolviamo sottraendo la prima equazione dalla seconda (l'esercizio chiede di conoscere solo la T)

$$3.000 - 2.992 + 33 \cdot 10^{-6} (T - 25) - 2.992 \times 19 \cdot 10^{-6} (T - 25) = 0$$

sommiamo i termini simili

$$0.008 = 23.848 \cdot 10^{-6} (T - 25)$$

pertanto

$$T = 25 + \frac{0.008}{23.848 \cdot 10^{-6}} = 360°$$

Esercizio 28. L'area A di un piatto rettangolare è ab. Il suo coefficiente di dilatazione lineare è α. In seguito ad un incremento di temperatura ΔT, il lato a è più lungo di Δa e il lato b di una quantità Δb. Dimostrare che, se si trascura la piccola quantità $\Delta a \Delta b / ab$, allora $\Delta A = 2\alpha A \Delta T$.

Soluzione. Calcoliamo dapprima l'area finale del piatto rettangolare. Le sue nuove dimensioni saranno $a + \Delta a$ e $b + \Delta b$; l'area sarà data da $(a + \Delta a)(b + \Delta b) = ab + a\Delta b + b\Delta a + \Delta a \Delta b$; pertanto, essendo ab l'area iniziale

$$\Delta A = a\Delta b + b\Delta a + \Delta a \Delta b$$

ma $\Delta a = a\alpha\Delta T$ e $\Delta b = b\alpha\Delta T$ e quindi

$$\Delta A = a (b\alpha\Delta T) + b (a\alpha\Delta T) + ab\alpha^2 \Delta T^2$$

ma essendo α una grandezza dell'ordine di 10^{-6}, il suo quadrato sarà dell'ordine di $10^{-12} - 10^{-11}$, quindi trascurabile rispetto agli altri termini. Pertanto,

$$\Delta A = 2ab\alpha\Delta T = 2A\alpha\Delta T$$

Esercizio 29. La densità è definita come rapporto tra la massa e il volume. Se un volume V è dipendente dalla temperatura lo è anche la sua densità ρ. Dimostrare che una piccola variazione di densità $\Delta\rho$ susseguente a una variazione di temperatura ΔT è data da $\Delta\rho = -\beta\Delta T$. Spiegare il significato del segno negativo.

Soluzione. La variazione di densità si può esprimere come

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = \frac{M}{V} - \frac{M}{V_0} = \frac{M}{V_0\left(1+\beta\Delta T\right)} - \frac{M}{V_0}$$

raccogliendo a fattor comune si ha

$$\Delta\rho = \frac{M}{V_0}\left(\frac{1}{1+\beta\Delta T} - 1\right) = \frac{M}{V_0}\left(\frac{1-1-\beta\Delta T}{1+\beta\Delta T}\right) = -\rho_0\beta\Delta T$$

Il segno negativo indica che la densità diminuisce, poiché, rimanendo costante la massa e aumentando il volume, il rapporto tende a diminuire e quindi la densità e il volume sono inversamente proporzionali.

Esercizio 30. Quando la temperatura di un cilindro metallico viene innalzata da $0.0\,^{\circ}C$ a $100\,^{\circ}C$ la sua lunghezza aumenta dello 0.23%. Trovare la variazione percentuale della densità; individuare il tipo di metallo.

Soluzione. Se la dilatazione lineare è pari allo 0.23%, allora poiché $\beta = 3\alpha$, la dilatazione volumica sarà pari allo 0.69%. Quindi

$$\beta = \frac{0.0069}{100} = 69\cdot 10^{-6} \qquad \alpha = 23\cdot 10^{-6}$$

il cilindro è quindi di alluminio.

Esercizio 31. Un orologio a pendolo è progettato per segnare accuratamente il tempo a $20\,^{\circ}C$. Trovare l'errore, in secondi all'ora, quando l'orologio opera a $=\ ^{\circ}C$.

Soluzione. Il periodo di oscillazione di un pendolo è espresso dalla relazione

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove l è la lunghezza del filo e g l'accelerazione di gravità terrestre. Ora la variazione del periodo dipende dalla variazione della lunghezza del filo. Il periodo, quando il pendolo viene raffreddato, diviene

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l\left(1+\alpha\Delta T\right)}{g}}$$

calcoliamo la differenza tra i due

$$\Delta t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - 2\pi\sqrt{\frac{l\left(1+\alpha\Delta T\right)}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1-\sqrt{1+\alpha\Delta T}\right)$$

sostituendo i valori numerici

$$\Delta t = t\left(1-\sqrt{1+19\cdot 10^{-6}\times 20}\right)$$

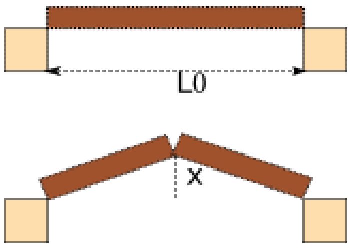
da cui

$$\frac{\Delta t}{t} = 0.000195$$

Il pendolo misura il tempo e ogni oscillazione corrisponde ad un secondo; un'ora è composta di $3600\,s$, pertanto l'errore sarà

$$3600\,\frac{s}{h} \times 0.000195 = 0.68\,\frac{s}{h}$$

Esercizio 32. In seguito ad un incremento di temperatura di $32\,°C$, una sbarra con frattura al centro si piega verso l'alto, come in figura. Se la distanza $L_0 = 3.77\,m$ e il coefficiente di dilatazione lineare è $25 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1}$, trovare la distanza x alla quale il centro della sbarra sale.



Soluzione. Il disegno mostra che la sbarra si frattura esattamente nel suo punto medio, pertanto, dal punto di vista geometrico, la struttura sbarra-sostegni, può essere assimilata ad un triangolo isoscele. Calcoliamo la lunghezza della sbarra dopo il riscaldamento

$$l = l_0\,(1 + \alpha\Delta T) = 3.77\,m\left(1 + 25 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1} \times 32\,°C\right) = 3.773\,m$$

siccome si rompe nel mezzo, la lunghezza di tale metà è $1.8865\,m$, mentre la metà della distanza tra i due sostegni è di $1.885\,m$. applichiamo ora il teorema di Pitagora per trovare il valore di x

$$x = \sqrt{1.8865^2 - 1.885^2} = 0.075\,m = 7.5\,cm$$

1.3 Calorimetria

Esercizio 33. Calcolare la quantità di calore necessaria per portare $1\,kg$ di acqua dalla temperatura di $0°C$ alla temperatura di $25°C$.

Soluzione. Esercizio di semplice applicazione della relazione

$$Q = mc_s \triangle T$$

dove m è la massa del corpo in kg, c il suo calore specifico in $J/kg\,K$, $\triangle T$ la variazione di temperatura in gradi Kelvin e Q la quantità di calore in $Joule$. (Nel calcolo è possibile sostituire direttamente la differenza in gradi Celsius in quanto $\triangle T(Kelvin) = \triangle T(Celsius)$. Infatti $1K = 1°C$, e cambia solamente l'origine delle due scale). Essa esprime la quantità di calore ceduta o assorbita da un corpo nel raffreddarsi o riscaldarsi.
Sostituendo direttamente i valori assegnati, verificando correttamente la rispondenza delle unità di misura si ha, ricordando che $c_{acqua} = 4180\,J/kg\,K$,

$$Q = 1\,kg \cdot 4180\,\frac{J}{kg\,K} \cdot 25\,K = 104500\,J$$

Usando come unità di misura il grammo e la caloria, il calore specifico dell'acqua vale $c_{acqua} = 1,01\,\frac{cal}{g\,K}$ si ha

$$Q = 1000\,g \cdot 1,01\,\frac{cal}{g\,K} \cdot 25 = 25250\,cal = 25,25\,kcal$$

Esercizio 34. Un corpo di massa $m = 1\,kg$ dopo aver assorbito una quantità di calore pari a $30\,cal$ varia la sua temperatura di $10\,{}^\circ C$. Calcolare il calore specifico e la capacità termica del corpo.

Soluzione. Anche questo è un esercizio di applicazione della relazione della calorimetria che collega l'energia ceduta o acquistata alla variazione di temperatura del corpo.

$$Q = mc_s \triangle T$$

da cui, sostituendo e risolvendo rispetto a c_s(ricordiamo che essendo la quantità di calore espressa in calorie, la massa deve essere espressa in grammi)

$$c_s = \frac{Q}{m \triangle T} = \frac{30\,cal}{1000\,g \cdot 10\,{}^\circ C} = 3 \cdot 10^{-3}\,\frac{cal}{g \cdot {}^\circ C}$$

la capacità è pertanto

$$C = mc_s = 3 \cdot 10^{-3}\,\frac{cal}{g \cdot {}^\circ C} \cdot 1000\,g = 3\,\frac{cal}{{}^\circ C}$$

Esercizio 35. Una certa sostanza ha una massa molare di $50\,g/mol$. Quando vengono forniti $314\,J$ di calore a $30.0\,g$ di un campione di questa sostanza, la sua temperatura sale da 25.0 a $45.0\,{}^\circ C$. Trovare il calore specifico della sostanza, il numero di moli di cui è composta e il calore specifico molare della sostanza.

Soluzione. La massa molare è la massa in grammi di una mole della sostanza, cioè un composto di elementi. L'assorbimento del calore segue la legge

$$Q = c_s m \Delta T$$

dove m è la massa della sostanza, c_s il suo calore specifico e ΔT la variazione in temperatura. Sostituiamo i valori:

$$314\,J = c_s\,\frac{J}{kg\,{}^\circ C} \cdot 0.030\,kg \times 20\,{}^\circ C$$

risolvendo rispetto a c_s si ha

$$c_s = \frac{314}{20 \times 0.030} = 523\,\frac{J}{kg\,{}^\circ C}$$

ricordando che la massa $m = nM$, cioè il prodotto del numero di moli per la massa di una mole, calcoliamo il numero di moli

$$n = \frac{m}{M} = \frac{30}{50} = 0.600\,moli$$

il calore specifico molare si misura in $\frac{J}{moli\,{}^\circ C}$, per cui sarà

$$c_s^{molare} = 523\frac{J}{kg\,{}^\circ C} \times 0.05\,\frac{kg}{mole} = 26.2\,\frac{J}{mole\,{}^\circ C}$$

Esercizio 36. Per far funzionare correttamente un motore è necessario raffreddarlo mediante circolazione di acqua. Sapendo che ogni ora vengono immessi, alla temperatura di $10\,°C$, $2000\,l$ di acqua, che poi escono alla temperatura di $30\,°C$, calcolare la quantità di calore che viene sottratta al motore per ogni ora di funzionamento. (ricordiamo che $1\,l_{H_2O} = 1000\,g$)

Soluzione. calcoliamo la quantità di calore necessaria per ora (la relazione per la quantità di calore è sempre $Q = mc_s \triangle T$)

$$\frac{\triangle Q}{h} = 2 \cdot 10^6\,\frac{g_{H_20}}{h} \cdot 1\,\frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (30 - 10)\,°C = 4 \cdot 10^4\,\frac{kcal}{h}$$

Esercizio 37. Gli iceberg nel Nord Atlantico costringono ad allungare le rotte di navigazione di circa il 30%. Supponiamo che si sia provato a fondere direttamente uniceberg con delle sorgenti di calore. Determinare la quantità di calore necessaria per fondere il 10% di un iceberg di $200000\,ton$.

Soluzione. Per determinare la quantità di calore necessaria bisogna tenere conto del calore latente, cioè della quantità di calore da cedere affinché tutta la massa indicata si sciolga.

$$Q = Lm = 3.33 \cdot 10^5\,\frac{J}{kg} \cdot 2.000 \cdot 10^7\,kg = 6.66 \cdot 10^{12}\,J$$

Esercizio 38. Determinare la quantità di acqua che rimane non congelata dopo che sono stati estratti $50.2\,kJ$ di calore da $260\,g$ di acqua liquida al suo punto di congelamento.

Soluzione. Il calore latente di fusione dell'acqua è pari a $333\,kJ/kg$. $50.2\,kJ$ di calore corrispondono al 15% del calore latente di fusione, per cui il $1000 \times 15\% = 150\,g$. Essendo la quantità totale di acqua pari a $260\,g$, allora ne rimarrà non congelata $260 - 150 = 110\,g$.

Esercizio 39. Calcolare la quantità minima di calore, in joule, necessaria per fondere completamente $130\,g$ di argento inizialmente a $15.0\,°C$.

Soluzione. Il calore specifico dell'argento è $236\,\frac{J}{kg\,K}$, per cui il calore necessario per portare l'argento a $1235\,K = 962\,°$C, punto di fusione, è

$$Q_1 = mc_s\Delta T = 0.130\,kg \times 236\,\frac{J}{kg\,°C} \times 962\,°C = 29514\,J$$

Il calore latente di fusione dell'argento è $105\,kJ/kg$, per cui

$$Q_2 = Lm = 105\,\frac{J}{g} \times 0.130\,g = 13650\,J$$

Il calore totale sarà quindi

$$Q = 29514 + 13650 = 43164\,J$$

Esercizio 40. Una stanza è illuminata da quattro lampadine a incandescenza da $100\,W$. Supponendo che il 90% dell'energia venga convertito in calore, trovare il calore che viene fornito direttamente alla stanza in $1.00\,h$.

Soluzione. La potenza di tutte le lampadine è pari a $400\,W = 400\,\frac{J}{s}$ e l'energia emessa in un'ora è $400\,\frac{J}{s} \cdot 3600\,s\cdot = 1.44 \cdot 10^6\,J$. Il 90% equivale a

$$Q = 1.44 \cdot 10^6\,kJ \times \frac{9}{10} = 1.30 \cdot 10^6\,J$$

Esercizio 41. Trovare la quantità di burro ($6000\,\frac{cal}{g}$) necessaria a fornire l'energia occorrente ad un uomo di $70\,kg$ per salire la cima del M.te Everest, alto $8800m$, dal livello del mare.

Soluzione. L'uomo deve superare un dislivello di $8800\,m$ e quindi la sua energia potenziale deve aumentare

$$\Delta U = mgh = 70\,kg \times 9.8\,\frac{m}{s^2} \times 8800\,m = 6.04 \cdot 10^6\,J$$

Il fattore di conversione è $1\,cal = 4.186\,J$ e la quantità di energia necessaria sarà

$$Q = \frac{6.04 \cdot 10^5\,J}{4.186\,\frac{cal}{J}} = 1.44 \cdot 10^6\,cal$$

La quantità di burro necessaria sarà quindi

$$m_{burro} = \frac{1.44 \cdot 10^6\,cal}{6000\,\frac{cal}{g}} = 240\,g$$

Esercizio 42. Un furgone la cui massa è $2200\,kg$ sta viaggiando a $100.0\,km/h$. Se tutta l'energia cinetica fosse utilizzata per evaporare l'acqua che si trova già a $100\,°C$, trovare la quantità di acqua che si potrebbe evaporare; calcolare il costo dell'energia se viene acquistata a 0.90 €/kWh.

Soluzione. L'energia cinetica del furgone è data da $K = \frac{1}{2}mv^2$; la velocità $v = \frac{100}{3.6} = 27.8\,\frac{m}{s}$, per cui

$$K = 0.5 \times 2200\,kg \times 27.8^2\,\frac{m^2}{s^2} = 8.50 \cdot 10^5\,J$$

Se tutta questa energia serve ad evaporare l'acqua che ha già raggiunto la temperatura di evaporazione, dobbiamo considerare il calore latente di evaporazione, cioè l'energia necessaria non più ad innalzare la temperatura, ma a far evaporare tutta l'acqua

$$8.50 \cdot 10^5\,J = 2256\,\frac{kJ}{kg}m$$

da cui

$$m = \frac{8.50 \cdot 10^5\,J}{2.256 \cdot 10^6\,\frac{J}{kg}} = 0.377\,kg$$

calcoliamo il costo dell'energia, trasformando prima i J in kWh

$$Q = \frac{8.50 \cdot 10^5}{3.60 \cdot 10^6} = 0.236\,kWh$$

e il costo sarà $C = 0.90 \times 0.236 = 0.21$ €.

Esercizio 43. Un vaso di rame di m150 g contiene $220\,g$ di acqua, entrambi a $20\,°C$. Un cilindro di rame di $300\,g$ molto caldo viene immerso nell'acqua, facendola bollire, e $5.00\,g$ di acqua vengono trasformati in vapore. La temperatura finale del sistema è $100\,°C$. Trovare il calore trasferito all'acqua e al vaso; trovare la temperatura iniziale del cilindro.

Soluzione. Il sistema iniziale è composto dal vaso di rame e dall'acqua presente, entrambi a $20\,°C$. L'immersione del cilindro di rame innalza la temperatura di tutti questi componenti e riduce la temperatura del cilindro, determinando una temperatura di equilibrio del sistema finale di $100\,°C$. A questo si aggiunga che una parte dell'acqua, non aumenta la propria temperatura, ma subisce un passaggio di stato, ed è quindi necessario tenere conto anche del calore latente necessario. Calcoliamo dapprima il calore assorbito dall'acqua per innalzare la temperatura dei $220\,g$ e per farne evaporare $5\,g$.

$$Q_{acqua} = mc_s\Delta T + m_1 L_{evap} = 0.220\,kg \times 4186\,\frac{J}{kg\cdot K} \times 80\,K + 0.005\,kg \times 2.256\cdot 10^6\,\frac{J}{kg} = 73674 + 11280 = 84954\,J$$

Il vaso di rame assorbe

$$Q_{rame} = mc_s\Delta T = 0.150\,kg \times 386\,\frac{J}{kg\cdot K} \times 80\,K = 4632\,J$$

Il calore totale ceduto dal cilindro di rame è $84954 + 4632 = 89586\,J$. Il cilindro di avrà ceduto al sistema iniziale la quantità di calore indicata e subirà una riduzione di temperatura

$$\Delta T = \frac{89586\,J}{0.300\,kg \times 386\,\frac{J}{kg\cdot K}} = 773\,°C$$

e quindi la temperatura iniziale sarà

$$773 + 100 = 873\,°C$$

Esercizio 44. Un contenitore metallico ha una massa di $3.6\,kg$ e contiene $14\,kg$ di acqua. Un pezzo di $1.8\,kg$ dello stesso metallo, inizialmente a una temperatura di $180\,°C$, viene immerso nell'acqua. Il contenitore e l'acqua inizialmente hanno una temperatura di $16.0\,°C$ e la temperatura finale di tutto il sistema è $18\,°C$. Trovare il calore specifico del metallo.

Soluzione. Il metallo introdotto è dello stesso tipo del contenitore. Il calore ceduto dal metallo introdotto viene assorbito dal contenitore e dall'acqua.

$$Q_{cont} + Q_{acqua} + Q_{metallo} = 0$$

Sostituendo i valori e tenendo conto che la differenza di temperatura per il pezzo di metallo è negativa, mentre per contenitore e acqua, la differenza è di $2\,°C$ si ha

$$3.6 \times c_s \times 2 + 14 \times 4186 \times 2 - 1.8 \times c_s \times 162 = 0$$

risolvendo rispetto a c_s

$$\begin{aligned} 284.4c_s &= 117208 \\ c_s &= 412\,\frac{J}{kg\,K} \end{aligned}$$

Esercizio 45. Un termometro di massa $0.0550\,kg$ e di calore specifico $0.837\,kJ/kg\,K$ indica $15\,^{\circ}C$. Esso viene quindi immerso completamente in $0.300\,kg$ di acqua e raggiunge la stessa temperatura finale dell'acqua. Se il termometro indica $44.4\,^{\circ}C$, determinare la temperatura dell'acqua prima che il termometro vi venisse immerso.

Soluzione. Il bilancio termico è

$$Q_{term} + Q_{acqua} = 0$$

da cui

$$0.0550 \times 837 \times 29.4 + 0.300 \times 4186 \times (44 - T) = 0$$

risolvendo rispetto a T

$$1256T = 55255 + 1353$$

da cui

$$T = 45.1\,^{\circ}C$$

Esercizio 46. Un'auto di $1500\,kg$ in marcia a $90\,km/h$ frena fino a fermarsi, con una decelerazione uniforme e senza slittare, per una distanza di $80\,m$. Trovare la potenza media alla quale viene prodotta l'energia termica nel sistema frenante.

Soluzione. L'energia necessaria per fermare l'automobile è definita anche come l'energia cinetica dell'auto. Pertanto, sapendo che $90\,\frac{km}{h} = 25\,\frac{m}{s}$

$$K = 0.5 \times 1500 \times 25^2 = 468750\,J$$

Troviamo il valore della decelerazione con le leggi della cinematica

$$v_f^2 = 0 = v_0^2 + 2as = 25^2 + 160a$$

da cui

$$a = \frac{625}{160} = -3.91\,\frac{m}{s^2}$$

per calcolare la potenza è necessario conoscere il tempo di frenata; da

$$v_f = v_0 + at$$

abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= 25 - 3.91t \\ t &= \frac{25}{3.91} = 6.40\,s \end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare la potenza dal rapporto tra l'energia e il tempo

$$P = \frac{K}{t} = \frac{468750}{6.40} = 73\,kW$$

Esercizio 47. In un riscaldatore solare ad acqua, l'energia proveniente dal sole viene captata da un collettore sul tetto, mediante la circolazione dell'acqua traverso i tubi del collettore stesso. La radiazione solare penetra nel collettore attraverso un vetro trasparente e riscalda l'acqua nei tubi; quest'acqua viene poi trasferita in un serbatoio di accumulo. Supponendo che il rendimento di tutto il sistema sia il 20%, trovare l'area del collettore per innalzare la temperatura di $200\,L$ di acqua da 20 a $40\,^{\circ}C$ in $1.0\,h$. L'intensità della luce solare incidente è di $700\,W/m^2$.

Soluzione. Se l'efficienza è del 20%, allora l'intensità luminosa utile sarà

$$I = 700 \times 0.20 = 140\,\frac{W}{m^2}$$

Per riscaldare la quantità di acqua indicata servono

$$Q = 200\,kg \times 4186\,\frac{J}{kg\,K} \times 20 = 1.67 \cdot 10^7\,J$$

È quindi necessaria una potenza di

$$P = \frac{1.67 \cdot 10^7\,J}{3600\,s} = 4651\,W$$

Se l'intensità utile è di $140\,W$, allora servirà una superficie di

$$A = \frac{4651\,W}{140\,\frac{W}{m^2}} = 33\,m^2$$

Esercizio 48. Un thermos isolato contiene $130\,cm^3$ di caffè caldo, a una temperatura di $80.0\,^{\circ}C$. Per raffreddare il caffè aggiungete nel thermos un cubetto di ghiaccio di $12.0\,g$ al suo punto di fusione. Trovare la diminuzione in gradi del caffè dopo la fusione del ghiaccio. Trattare il caffè come se fosse acqua pura.

Soluzione. Il caffè fornisce la quantità di calore necessaria a far sciogliere l'intero cubetto di ghiaccio e a portare la miscela caffè più acqua ad una temperatura di equilibrio uguale. Il calore specifico dell'acqua è $4186\,\frac{J}{kg\,K}$; il calore latente di fusione dell'acqua è $333\,\frac{kJ}{K}$. Sappiamo inoltre che $1\,dm^3 = 1L = 1kg$, nel caso dell'acqua (e quindi del caffè). Allora $130\,cm^3 = 0.130\,dm^3 = 0.130\,kg$

$$Q_{caff\acute{e}} + Q_{ghiaccio} = 0$$

cioè

$$m_c c\,(T_f - 80) + m_{gh} L + m_{acqua} c_{acqua}\,(T_f - 0)$$

$$0.130 \times 4186 \times (T_f - 80) + 3.33 \cdot 10^5 \times 0.012 + 0.012 \times 4186 \times (T_f - 0) = 0$$

Risolviamo rispetto a T_f

$$594 T_f = 43534 - 3996 = 39538$$

$$T_f = 66.6\,^{\circ}C$$

La diminuzione è pertanto pari a $80 - 66.6 = 13.4\,^{\circ}C$.

Esercizio 49. Due cubetti di ghiaccio di $50\,g$ ciascuno vengono immersi in un bicchiere con $200\,g$ di acqua. Se l'acqua inizialmente ha una temperatura di $25\,°C$, e se il ghiaccio proviene direttamente dal congelatore a $-15\,°C$, trovare la temperatura della bevanda quando il ghiaccio e l'acqua raggiungono la stessa temperatura.

Soluzione. Ghiaccio ed acqua avranno al termine una temperatura uguale, detta di equilibrio, T_{eql}. L'acqua cederà calore ai cubetti di ghiaccio, raffreddandosi. $c_{ghiaccio} = 2200\,\frac{J}{kg\,K}$, $c_{acqua} = 4186\,\frac{J}{kg\,K}$. Bisogna analizzare i seguenti casi:
1° caso: equilibrio sotto il punto di fusione; la temperatura l'acqua diminuisce da $25\,°C$ a una T_{eql}, mentre il ghiaccio passa da $-15\,°C$ a T_{eql}. Il calore ceduto, contato come negativo, dall'acqua è $mc_s\Delta T = -0.200 \times 4186\,(T_f - 25)$; il calore acquisito dal ghiaccio è $mc_s\Delta T = 0.1 \times 2220\,(T_f + 15)$. Eguagliando, si ha

$$0.1 \times 2220\,(T_f + 15) = -0.200 \times 4186\,(T_f - 25)$$

e risolvendo rispetto a T_f

$$1059T_f = 20930 - 3330$$

da cui

$$T_f = \frac{17600}{1059} = 16.6\,°C$$

tale temperatura contraddice però la condizione che l'equilibrio viene raggiunto al di sotto della temperatura di fusione.
2° caso: l'equilibrio si ottiene alla temperatura di fusione. L'acqua cede la quantità di calore $-0.2 \times 4186\,(0 - 25)$, il ghiaccio passa alla temperatura di fusione e una parte fonde completamente, per cui $0.1 \times 2200\,(0 + 15) + 3.33 \cdot 10^5 \times m$. Eguagliando si ha

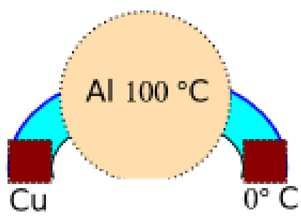
$$0.2 \times 2220\,(0 + 15) + 3.33 \cdot 10^5 \times m = 0.2 \times 4186 \times 25$$

risolvendo rispetto alla massa m, si ha

$$m = \frac{0.2 \times 4186 \times 25 - 0.2 \times 2220 \times 15}{333000} = 53\,g$$

poiché la massa totale del ghiaccio è pari a $100\,g$, la condizione può essere verificata.

Esercizio 50. Un anello di rame di $20.0\,g$ alla temperatura di $0.000\,°C$ ha un diametro di $1.00000\,cm$. Una sfera di alluminio alla temperatura di $100\,°C$ ha un diametro di $1.00200\,cm$. La sfera viene posta sull'anello (come in figura), e ai due oggetti si fa raggiungere l'equilibrio termico, senza alcuna perdita di calore verso l'esterno. Alla temperatura di equilibrio la sfera passa esattamente attraverso l'anello. Determinare la massa della sfera.



Soluzione. L'anello e la sfera hanno lo stesso diametro alla temperatura di equilibrio; ricordando quindi la legge della dilatazione lineare, si può scrivere

$$l_0^{Al}\left(1+\alpha_{Al}\left(T_f-T_i\right)^{Al}\right)=l_o^{Cu}\left(1+\alpha_{Cu}T_f\right)$$

risolviamo rispetto alla temperatura T_f,

$$T_f\left(l_0^{Al}\alpha_{Al}-l_0^{Cu}\alpha_{Cu}\right)=l_o^{Cu}-l_0^{Al}+l_0\alpha_{Al}T_i^{Al}$$

da cui sostituendo i valori numerici

$$T_f=\frac{1-1.002+1.002\times 23\cdot 10^{-6}\times 100}{1.002\times 23\cdot 10^{-6}-1\times 17\cdot 10^{-6}}=50.4\,^{\circ}C$$

La sfera di alluminio cede la quantità di calore

$$\mid Q\mid= m\,kg\times 900\,\frac{J}{kg\,K}\times 49.6\,K$$

e il rame assorbe la quantità di calore

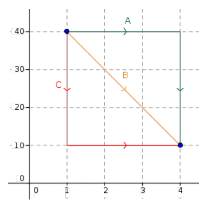
$$Q=0.020\,kg\times 386\,\frac{J}{kg\,K}\times 50.4\,^{\circ}C$$

eguagliando le due quantità si ottiene la massa della sfera

$$m=\frac{0.020\,kg\times 386\,\frac{J}{kg\,K}\times 50.4\,^{\circ}C}{900\,\frac{J}{kg\,K}\times 49.6\,K}=8.72\cdot 10^{-3}\,kg=8.72\,g$$

1.4 Prima legge della Termodinamica

Esercizio 51. Un campione di un gas si espande da 1.0 a $4.0\,m^3$ mentre la sua pressione diminuisce da 40 a $10\,Pa$. Trovare il lavoro compiuto dal gas se la sua pressione varia con il volume seguendo ciascuno dei tre percorsi nel grafico $p-V$ della figura.



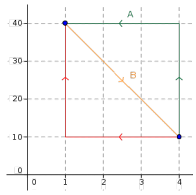
Soluzione. Percorso A: Il primo tratto indica una trasformazione a pressione costante con una espansione del volume: il lavoro compiuto è quindi $W=p\Delta V=40\,pa\times 3\,m^3=120\,J$; nel secondo tratto diminuisce la pressione ma a volume costante e quindi il gas non compie alcun lavoro. Il lavoro totale è quindi $120\,J$

Percorso B: mentre il volume si espande, la pressione diminuisce: il lavoro è uguale all'area sottesa dal segmento delimitata dall'asse V e dalle rette $V=1$ e $V=3$, cioè l'area del trapezio rettangolo

$$W=\frac{(40+10)\times 3}{2}=75\,J$$

Percorso C: il primo tratto mostra una trasformazione a volume costante, senza nessuna espansione e quindi con lavoro nullo; nel secondo tratta si ha una espansione a parità di pressione e il lavoro è $W=10\,pa\times 3\,m^3=30\,J$

Esercizio 52. Un campione di gas si espande da 1.0 a $4.0\,m^3$ lungo il percorso B del diagramma $p-V$ in figura. Esso viene quindi compresso di nuovo a $1.0\,m^3$ lungo il percorso A o il percorso C. Calcolare il lavoro totale compiuto dal gas durante il ciclo completo in ciascun caso.



Soluzione. Percorso B: Il lavoro compiuto dal gas è pari all'area sottesa dal segmento B (un trapezio), cioè

$$W = \frac{(40+10)\times 3}{2} = 75\,J$$

Percorso A: La pressione del gas aumenta a parità di volume e, non essendoci variazione del volume, il lavoro è nullo; nel tratto orizzontale il volume diminuisce a parità di pressione, per cui

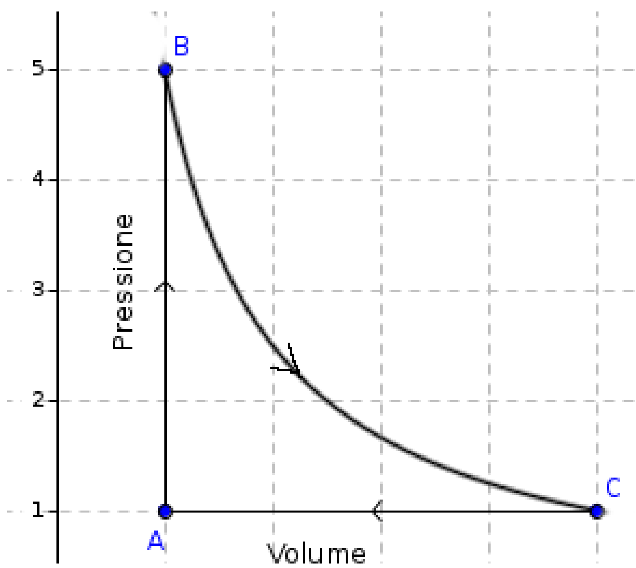
$$W = -p\Delta V = -40\times 3 = -120\,J$$

Percorso C: il tratto orizzontale descrive una compressione del volume a parità di pressione con un lavoro

$$W = -10\times 3 = -30\,J$$

nel tratto verticale non c'è lavoro. Nel ciclo BA, il lavoro totale è $W_{BA} = 75-120 = -45\,J$; nel ciclo BC, il lavoro totale è $W_{BC} = 75-35 = 45\,J$.

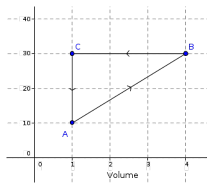
Esercizio 53. Un gas all'interno di una camera percorre il ciclo mostrato in figura. Determinare il calore totale fornito al sistema durante la trasformazione CA se il calore Q_{AB} fornito durante la trasformazione AB è $20.0\,J$, se durante la trasformazione BC non si ha alcun trasferimento di calore, e se il lavoro totale compiuto durante il ciclo è di $15.0\,J$.



Soluzione. La trasformazione AB mostra un aumento di pressione senza variazione di volume, quindi con lavoro nullo, e in questo caso al sistema viene fornito una $Q_{AB} = 20.0\,J$; la trasformazione BC descrive una espansione del gas con diminuzione di pressione senza alcun trasferimento di calore; la trasformazione CA è una compressione a pressione costante, quindi con un lavoro compiuto sul sistema. Il lavoro totale è pari a $W_{tot} = 15.0\,J$. Essendo la trasformazione ciclica, la variazione dell'energia interna è nulla e quindi il calore scambiato è pari al lavoro totale.

- Trasformazione AB: $Q_{AB} = 20.0\,J$ e $W = 0$
- Trasformazione BC: $Q_{BC} = 0$
- Trasformazione CA: Q_{CA} da determinare
  Se $W_{tot} = 15.0\,J$, allora $Q_{tot} = 15.0\,J$ e quindi $Q_{CA} = -5\,J$

Esercizio 54. Un gas all'interno di una camera compie il processo mostrato in figura. Calcolare il calore totale fornito al sistema durante un ciclo completo.

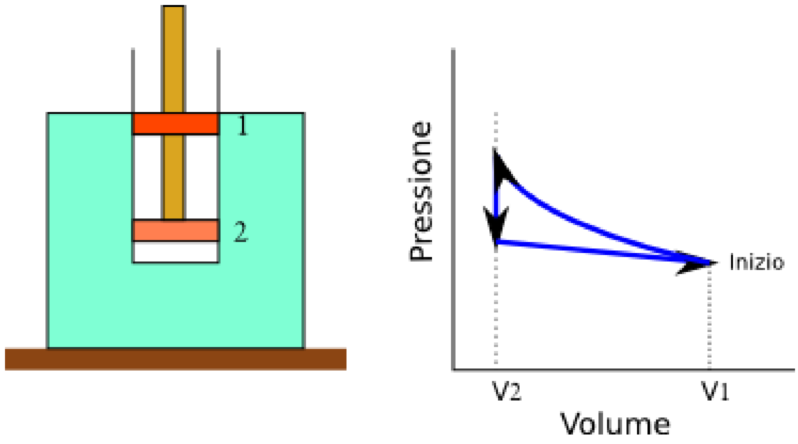


Soluzione. Il lavoro totale è pari all'area del triangolo ABC, cioè $W_{tot} = \frac{20\times3}{2} = 30\,J$. La trasformazione è ciclica per cui, non variando l'energia interna, anche il calore totale scambiato sarà pari a $30\,J$.

- Trasformazione AB: espansione con aumento di pressione e assorbimento di calore
- Trasformazione BC: compressione a pressione costante: $W_{BC} = 90\,J$, cessione di calore
- Trasformazione CA: diminuzione di pressione a volume costante: lavoro nullo, cessione di calore

Il lavoro nel tratto AB sarà $90 - W_{AB} = 30$, da cui $W_{AB} = -60$. Nelle trasformazioni cicliche $Q = W$, per cui $Q_{fornito} = -60 + 30 = -30\,J$.

Esercizio 55. La figura mostra un cilindro contenente un gas chiuso da un pistone mobile. Il cilindro viene mantenuto immerso in una miscela di ghiaccio e acqua. Il pistone viene velocemente spinto verso il basso dalla posizione 1 alla 2 e viene mantenuto in tale posizione finché il gas è di nuovo alla temperatura della miscela di ghiaccio e acqua. Viene quindi lentamente alzato di nuovo alla posizione 1. Il diagramma $p - V$ illustra il processo. Determinare il lavoro compiuto dal gas se durante il ciclo si fondono $100\,g$ di ghiaccio.



Soluzione. L'energia necessaria alla fusione di 100 g di ghiaccio è data da

$$Q = mL = 0.100\,kg \times 333000\,\frac{J}{kg} = 33300\,J$$

Il lavoro viene compiuto sul gas solo nella prima fase di compressione e sarà quindi pari a 33300 J

1.5 Trasmissione del calore

Esercizio 56. Il flusso di calore per unità di tempo attraverso la superficie della Terra nelle aree continentali è mediamente $54.0\,mW/m^2$, e la conducibilità termica media delle rocce vicino alla superficie è $2.50\,W/(m \cdot K)$. supponendo che la temperatura superficiale sia $10.0\,°C$, quale sarebbe la temperatura a una profondità di $35.0\,km$? Trascurare il calore generato dalla presenza degli elementi radioattivi.

Soluzione. Il flusso di calore nell'unità di tempo p espresso da

$$H = \frac{Q}{t} = kA\frac{T_1 - T_2}{L}$$

dove k è la conducibilità termica, A la superficie e L lo spessore del materiale attraverso cui si propaga il calore. Risolvendo rispetto a T_2, si ha

$$T_1 - T_2 = \frac{HL}{kA}$$

Sostituendo i valori assegnati si ha

$$T_1 - T_2 = \frac{54.0 \cdot 10^{-3}\,\frac{W}{m^2} \times 3.5 \cdot 10^4\,m}{2.50\,\frac{W}{m \cdot K}} = 756$$

la temperatura sarà quindi di 766 °C.

Esercizio 57. Una barra cilindrica di rame lunga $1.2\,m$ e di area trasversale $4.8\,cm^2$ è isolata per impedire perdite di calore attraverso la sua superficie. Le estremità vengono mantenute a una differenza di temperatura di $100\,°C$ ponendo un'estremità in una miscela di acqua e ghiaccio e l'altra in acqua bollente e vapore. Trovare la quantità di calore che viene trasmesso nell'unità di tempo lungo la barra e la quantità di ghiaccio che si fonde nell'unità di tempo all'estremità fredda.

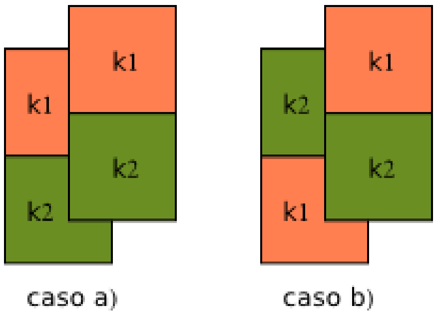
Soluzione. La quantità di calore nell'unità di tempo è ($k_{Cu} = 401\,\frac{W}{m\cdot K}$)

$$H = \frac{Q}{t} = kA\frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{401 \times 4.8 \cdot 10^{-4} \times 100}{1.2} = 16\,\frac{J}{s}$$

se la quantità di calore che giunge all'estremità fredda è pari a $16\,J$ ogni secondo, allora la massa di ghiaccio che fonde è

$$m = \frac{Q}{L} = \frac{16}{333000} = 4.8 \cdot 10^{-5}\,kg = 4.8 \cdot 10^{-2}\,g = 0.048\,g$$

Esercizio 58. Quattro pezzi quadrati di isolante di due materiali diversi, tutti dello stesso spessore ed area A, sono disponibili per coprire un'apertura di area $2A$. Si possono sovrapporre nei due modi in figura. Individuare la disposizione che dà il minor flusso di calore se $k_2 \neq k_1$.



Soluzione. Nel caso a) i quattro quadrati sono sovrapposti a due a due a formare una mattonella di spessore doppio con due isolanti diversi; consideriamo il processo come stazionario, cioè il flusso di calore nell'unità di tempo attraverso i due materiali è lo stesso; se la differenza di temperatura $T_1 - T_2$ è sempre la stessa, ciò che cambia è la temperatura alla superficie di contatto tra i due isolanti sovrapposti. Il flusso di calore in questo caso è

$$\frac{Q}{t} = A\frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

ma, essendo anche gli spessori uguali, si ha

$$\frac{Q}{t} = A\frac{T_1 - T_2}{\frac{L(k_1+k_2)}{k_1 k_2}} = Ak_1k_2\frac{T_1 - T_2}{L\,(k_1 + k_2)}$$

Nel caso a) possiamo considerare gli isolanti aventi spessore doppio e quindi

$$\frac{Q}{t} = Ak_1\frac{T_1 - T_2}{2L} + Ak_2\frac{T_1 - T_2}{2L} = A\frac{T_1 - T_2}{2L}\,(k_1 + k_2)$$

nel caso b) dobbiamo considerarli come sovrapposti e quindi

$$\frac{Q}{t} = Ak_1k_2\frac{T_1 - T_2}{L\,(k_1 + k_2)}$$

Se calcoliamo il rapporto, otteniamo

$$\frac{A\frac{T_1 - T_2}{2L}\,(k_1 + k_2)}{Ak_1k_2\frac{T_1 - T_2}{L(k_1 + k_2)}} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{2k_1k_2}$$

e tale rapporto è sempre > 1; infatti

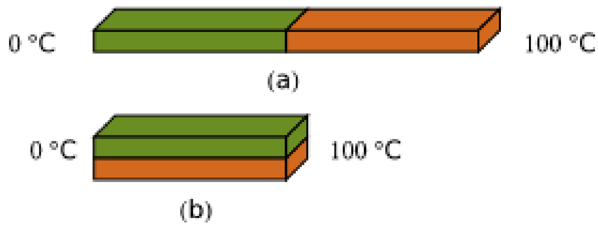
$$\frac{(k_1+k_2)^2}{2k_1k_2} > 1$$

da cui

$$\frac{k_1^2+k_2^2}{2k_1k_2} > 0$$

per ogni valore di k_1e k_2. Essendo il numeratore maggiore del denominatore, il caso più favorevole sarà il b).

Esercizio 59. Due parallelepipedi di metallo identici sono saldati come in figura (a). Attraverso di essi fluisce in $2.0\,min$ un'energia termica di $10\,J$ (in condizioni stazionarie). Determinare il tempo impiegato dalla medesima quantità di calore per essere trasmessa da un'estremità all'altra nel caso in cui i due pezzi fossero saldati come nella figura (b).



Soluzione. Nel caso (a) il calore fluisce attraverso un'area A lungo uno spessore $2L$, mentre nel caso (b) la stessa quantità di calore fluisce attraverso un'area $2A$ lungo uno spessore L. I metalli sono identici per cui la quantità k è lo stesso. Allora:

- caso (a): $\frac{Q}{t} = k\frac{A\Delta T}{2L}$ e sostituendo, $\dfrac{10}{120} = \dfrac{kA}{2L} \times 100$
- caso (b): $\frac{Q}{t} = k\frac{2A\Delta T}{L}$ e sostituendo, $\dfrac{10}{t} = \dfrac{k2A}{L} \times 100$

ricavando ora dal caso (a) la quantità $\dfrac{kA}{L} = \dfrac{1}{600}$ e sostituendo nel caso (b), si ottiene

$$\frac{10}{t} = \frac{2}{600} \times 100$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{30}$$

e

$$t = 30\,s$$

Esercizio 60. Calcolare la potenza termica trasmessa attraverso due porte, entrambe di altezza $2.0\,m$ e di larghezza $0.75\,m$ quando la prima porta è fatta con un pannello di alluminio spesso $1.5\,mm$ e un vetro di spessore pari a $3.0\,mm$ che occupa i $\frac{3}{4}$ della superficie della porta (si trascuri la cornice) e la seconda è realizzata interamente con tavole di pino bianco spesse $2.5\,cm$. Si assuma una differenza di temperatura tra le due facce di ciascuna pari a $33\,^\circ C$ ($k_{Al} = 235\,\frac{W}{m\cdot K}$; $k_{vetro} = 1.0\,\frac{W}{m\cdot K}$; $k_{pino} = 0.11\,\frac{W}{m\cdot K}$).

Soluzione. Nel caso della prima porta abbiamo la parziale sovrapposizione di due materiali diversi. L'area totale della porta è $A_{porta} = 2.0 \times 0.75 = 1.5\,m^2$. Il vetro occuperà solo $1.5\,m^2 \times \frac{3}{4} = 1.12\,m^2$ e mentre l'alluminio occuperà $0.38\,m^2$ da solo e $1.12\,m^2$ sovrapposto al vetro. Calcoliamo la potenza termica complessiva trasmessa attraverso la prima porta.

$$H = \frac{Q}{t} = k_{Al}A_{Al}\frac{\Delta T}{L_{Al}} + A_{comune}\frac{\Delta T}{\frac{L_{vetro}}{k_{vetro}} + \frac{L_{Al}}{k_{Al}}} = 235 \times 0.38 \times \frac{33}{1.5 \cdot 10^{-3}} + 1.12 \times \frac{33}{\frac{1.5 \cdot 10^{-3}}{235} + \frac{3.0 \cdot 10^{-3}}{1}} = 2.0 \cdot 10^6\,W$$

Nel caso della seconda porta

$$H = \frac{Q}{t} = kA\frac{\Delta T}{L} = 0.11 \times 1.5 \times \frac{33}{2.5 \cdot 10^{-2}} = 218\,W$$

Esercizio 61. Una sfera di raggio $0.500m$, temperatura $27.0\,^{\circ}C$ ed emittenza 0.850 è collocata in un ambiente a temperatura $77.0\,^{\circ}C$. Trovare la potenza radiante che la sfera (a) emette, (b) assorbe e (c) la potenza netta scambiata.

Soluzione. La potenza P_T emessa da un corpo per irraggiamento dipende dalla sua superficie emissiva A, dalla sua temperatura T e dall'emittanza ε della superficie stessa (per un corpo nero $\varepsilon = 1$) ed è espressa da $P_r = \sigma\varepsilon AT^4$ con σ, costante di Stefan-Boltzmann. La potenza P_a assorbita dall'ambiente è $P_a = \sigma\varepsilon AT^4_{amb}$. La potenza netta scambiata è $P_n = P_a - P_r$. Applichiamo queste relazioni al nostro caso. La superficie di una sfera è $4\pi r^2 = 3.14\,m^2$. La potenza emessa è

$$P_r = 5.6703 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,K^4} \times 0.850 \times 3.14\,m^2 \times 300^4\,K^4 = 1226\,W$$

la potenza assorbita è

$$P_a = 5.6703 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,K^4} \times 0.850 \times 3.14\,m^2 \times 350\,K = 2271\,W$$

la potenza netta scambiata è

$$P_n = P_a - P_r = 2271 - 1226 = 1045\,W$$

Esercizio 62. In un serbatoio contenente dell'acqua installato all'esterno in un clima freddo si è formata una lastra di ghiaccio in superficie dello spessore di $5.0\,cm$. L'aria al di sopra del ghiaccio è a $-10\,^{\circ}C$. Calcolare quanto ghiaccio si forma (in centimetri all'ora) sulla faccia inferiore della lastra di ghiaccio. Considerare una conducibilità termica e una densità del ghiaccio pari a $0.0040\,cal/\left(s \cdot cm \cdot {}^{\circ}C\right)$ e $0.92\,g/cm^3$. Supporre che il calore venga trasferito attraverso le pareti o il fondo del serbatoio.

Soluzione. Trasformiamo prima la conducibilità nelle unità di misura del SI: $k = 0.0040 \times \frac{4.186\,\frac{J}{cal}}{10^{-2}\,\frac{m}{cm}} = 1.674\,\frac{W}{m\,K}$. La densità è data da $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{A \times L}$. Il flusso di calore, per conduzione, attraverso la lastra di ghiaccio è dato da

$$\frac{Q}{t} = kA\frac{\Delta T}{L}$$

Il calore latente affinché ghiacci una quantità di acqua è dato da

$$Q = L_F m$$

questa quantità varia nel tempo, per cui

$$\frac{Q}{t} = L_M \frac{\Delta m}{\Delta t} = L_M \rho A \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

eguagliando le due espressioni

$$kA\frac{\Delta T}{L} = L_M \rho A \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

da cui

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{k\Delta T}{L L_M \rho} = \frac{1.674 \times 10}{5.0 \cdot 10^{-2} \times 3.33 \cdot 10^5 \times 920} = 1.1 \cdot 10^{-6}\,\frac{m}{s} = 0.40\,\frac{cm}{h}$$

1.6 Calorimetria (vari)

Esercizio 63. In un recipiente termicamente isolato vengono mescolati $0,2\,l$ di acqua alla temperatura di $70\,°C$ con $100\,g$ di acqua alla temperatura di $40\,°C$. Determinare la temperatura finale di equilibrio, supponendo che la quantità di calore ceduta dall'acqua più calda sia interamente assorbita dall'acqua più fredda.

Soluzione. In questo caso la sorgente di calore è l'acqua alla temperatura maggiore, che trasferisce energia all'acqua a temperatura minore. Il passaggio di calore si manterrà finché le due masse d'acqua non avranno raggiunto la stessa temperatura, detta temperatura di equilibrio. Per distinguere i due flussi di energia, li indichiamo con due segni opposti, positivo il calore ceduto e negativo quello acquistato.
Se indichiamo con Q_1 il calore ceduto si avrà

$$Q_1 = 200\,g \cdot 1\,\frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (70 - T_{eql})$$

se Q_2è il calore acquistato dall'acqua a temperatura minore, si avrà

$$Q_2 = 100\,g \cdot 1\,\frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (T_{eql} - 40)$$

supponendo che le due quantità siano uguali, cioè che non vi siano dispersioni di calore verso i recipienti o l'esterno, si avrà

$$200\,g \cdot 1\,\frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (70 - T_{eql}) = 100\,g \cdot 1\,\frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (T_{eql} - 40)$$

e risolvendo rispetto all'incognita T_{eql}, si ottiene

$$14000\,cal - 200T_{eql}\,cal = 100T_{eql}\,cal - 4000\,cal$$

da cui

$$300T_{eql}\,cal = 18000\,cal$$

cioè

$$T_{eql} = 60\,°C$$

Esercizio 64. Un pezzo di rame di massa $200\,g$, portato alla temperatura di $50\,°C$, viene immerso in un thermos che contiene una massa d'acqua di $400\,g$ alla temperatura di $0\,°C$. Calcolare la temperatura di equilibrio.

[Il passaggio del calore da un corpo caldo ad uno più freddo cessa quando essi raggiungono la stessa temperatura, che viene detta *temperatura di equilibrio*]

Soluzione. per descrivere questa situazione, si suppone che tutta l'energia che viene ceduta dal rame venga trasferita completamente all'acqua, senza alcuna dispersione. Pertanto, se consideriamo come positiva l'energia ceduta, quella assorbita sarà rappresentata come negativa.
L'energia ceduta dal rame si può esprimere

$$\triangle E_{ceduta} = m_{Cu} c_s^{Cu} \left(T_{in} - T_{eql}\right) = 200\, g \cdot 0,092\, \frac{cal}{g\, {}^\circ C} \cdot \left(50 - T_{eql}\right) {}^\circ C$$

l'energia acquisita dall'acqua, sempre con le stesse unità di misura, è

$$\triangle E_{acquisita} = -m_{H_2O} c_s^{H_2O} \left(T_{in} - T_{eql}\right) = 400\, g \cdot 1,01\, \frac{cal}{g\, {}^\circ C} \cdot \left(T_{eql} - 0\right) {}^\circ C$$

uguagliando le due quantità si ottiene una equazione nella quale l'incognita è rappresentata dalla T_{eql}

$$200\, g \cdot 0,092\, \frac{cal}{g\, {}^\circ C} \cdot \left(50 - T_{eql}\right) {}^\circ C = 400\, g \cdot 1,01\, \frac{cal}{g\, {}^\circ C} \cdot \left(T_{eql} - 0\right) {}^\circ C$$

risolvendo la quale, si ha

$$920 - 18,4 T_{eql} = 404 T_{eql}$$

cioè

$$T_{eql} = 2,18\, {}^\circ C$$

Esercizio 65. Un pezzo di metallo di massa $m_1 = 500\, g$, inizialmente alla temperatura di $100\, {}^\circ C$, viene posto in un recipiente, fatto dello stesso metallo, di massa $m_2 = 200\, g$, che contiene $300\, g$ di acqua a $20\, {}^\circ C$. Determinare il calore specifico del metallo nell'ipotesi che ogni scambio di calore avvenga solo tra i corpi considerati e che la temperatura finale di equilibrio sia di $30\, {}^\circ C$.

Soluzione. Utilizzando anche qui la relazione fondamentale della calorimetria, si ha

$$500 \cdot c_s \cdot (100 - 30)\, {}^\circ C = 200 \cdot c_s \cdot (30^\circ - 20^\circ) + 300 \cdot 1 \cdot (30^\circ - 20^\circ)$$

il calore specifico dell'acqua vale 1, mentre il calore specifico del metallo e del contenitore è lo stesso avendo questi la medesima composizione. Il calore ceduto si distribuirà tra il contenitore e l'acqua, supposti in condizione di equilibrio termico

$$33000 c_s = 3000 \qquad c_s = 0,091\, \frac{g}{cal\, {}^\circ C}$$

Esercizio 66. Un soggetto in stato febbrile beve $0,2\, l$ di acqua alla temperatura di $10\, {}^\circ C$. Sapendo che per raggiungere uno stato di equilibrio termico con il corpo umano l'acqua assorbe una quantità di calore pari a $5,7\, kcal$, calcolare la temperatura dello stato febbrile.

Soluzione. La quantità di calore assorbita dai $0,2\, l$ di acqua che vanno a ridurre la temperatura e mitigare lo stato febbrile, può essere valutata tramite

$$Q = m_{acqua} \cdot c_s^{acqua} \left(T_{eql} - T_{iniziale}\right)$$

conoscendo l'energia assorbita dall'acqua, la grandezza incognita è la T_{eql} cioè la temperatura dello stato febbrile;

$$5700\,cal = 200\,g \cdot 1\,\frac{cal}{g\,°C}\,(T_{eql} - 10\,°C)$$

da cui

$$T_{eql} = \frac{5700 - 2000}{200} = 38,5\,°C$$

Esercizio 67. L'energia fisiologica minima necessaria per mantenere le sole funzioni vitali di un organismo vivente è di circa $1860\,kcal$ nelle 24 ore. Calcolare quanto zucchero dovrebbe ingerire un uomo per sopperire a tale fabbisogno, sapendo che l'energia sviluppata nella combustione completa di $1\,kg$ di zucchero (potere calorico) è pari a $3900\,kcal/kg$.

Soluzione. tenuto conto del potere calorico e del fabbisogno giornaliero, si ha

$$m_{zucchero} = \frac{1860\,Kcal}{3900\,\frac{Kcal}{kg}} = 0,431\,kg$$

Esercizio 68. La corrente del Golfo trasporta in media $10^8\,m^3$ di acqua al secondo verso l'Europa. Se la temperatura invernale della corrente è superiore di $10\,°C$ di quella delle acque circostanti, calcolare:

1. la quantità di calore che viene trasportata ogni secondo
2. il numero di centrali termiche da $100\,MW$ necessarie per fornire la stessa potenza.

Soluzione.

1. la quantità di calore fornita è descritta dalla legge della termologia. Nell'ipotesi che tutto il calore venga ceduto alla sola acqua circostante e che i calori specifici dei due liquidi siano uguali, si ha

$$P\left[\frac{kcal}{s}\right] = m_{H_2O} \cdot c_s^{H_20} \cdot \triangle T = 10^{14}\frac{g}{s} \cdot 0,940\,\frac{cal}{g\,°C} \cdot 10\,°C = 9,4 \cdot 10^{11}\,\frac{kcal}{s}$$

oppure

$$P\left[\frac{J}{s}\right] = m_{H_2O} \cdot c_s^{H_20} \cdot \triangle T = 10^{11}\frac{kg}{s} \cdot 4186\,\frac{J}{kg\,°C} \cdot 10\,°C = 4,2 \cdot 10^{15}\,\frac{J}{s}$$

2. ogni centrale ha una potenza di $1000\,MW$, cioè pari a $10^9\,\frac{J}{s}$, per cui

$$n°\,centrali = \frac{4,2 \cdot 10^{15}\,\frac{J}{s}}{10^9\,\frac{J}{s}} = 4,2 \cdot 10^6$$

cioè oltre 4 milioni di centrali

Esercizio 69. Per fare il bagno in una vasca l'acqua deve essere ad una temperatura di $36\,°C$. Se nella vasca vi sono $50\,l$ di acqua a $15\,°C$, quanti litri di acqua calda, dallo scaldabagno a $60\,°C$, sono necessari per portare l'acqua alla temperatura voluta?

Soluzione. se trascuriamo ogni dispersione termica, la quantità di calore ceduta dall'acqua dello scaldabagno andrà a riscaldare esclusivamente l'acqua presente nella vasca; questo è quindi un esercizio nel quale la temperatura di equilibrio corrisponde ai $36\,°C$. Essendo le due masse costituite dalla stessa sostanza, i due calori specifici si possono considerare uguali, e quindi

$$m_{H_2O} \cdot 1\,\frac{cal}{g\,°C} \cdot (60-36) = 50000\,g \cdot 1\,\frac{cal}{g\,°C} \cdot (60-15)$$

risolvendo rispetto alla massa incognita

$$m = 43750\,g = 43,75\,kg$$

Esercizio 70. Un pezzo di metallo di massa $m_1 = 200\,g$, immerso in $275\,g$ di acqua, fa innalzare la temperatura dell'acqua da $10\,°C$ a $12\,°C$. Un secondo pezzo dello stesso metallo di massa $m_2 = 250\,g$ alla stessa temperatura del primo, immerso in $168\,g$ di acqua, fa innalzare la temperatura da $10\,°C$ a $14\,°C$. Calcolare la temperatura dei due pezzi di metallo e il calore specifico.

Soluzione. In questo caso le incognite sono due; sarà pertanto necessario costruire un sistema di due equazioni in due incognite. Le relazioni necessarie sono ricavabili dai due diversi tipi di riscaldamento, supponendo che il metallo rimanga nei due casi invariato e che la sua temperatura iniziale, come specificato, sia la stessa

$$\begin{cases} 200\,g \cdot c_s \cdot (T-12)\,°C &= 275\,g \cdot 1\,\frac{cal}{g\,°C} \cdot (12-10)\,°C \\ 250\,g \cdot c_s \cdot (T-14)\,°C &= 168\,g \cdot 1\,\frac{cal}{g\,°C} \cdot (14-10)\,°C \end{cases}$$

eseguendo il calcolo si ottiene (omettendo le unità di misura):

$$\begin{cases} 200c_s\,(T-12) &= 550 \\ 250c_s\,(T-14) &= 672 \end{cases}$$

ricaviamo c_s da entrambe le equazioni

$$\begin{cases} c_s &= \frac{550}{200(T-12)} \\ c_s &= \frac{672}{250(T-14)} \end{cases}$$

uguagliamo i due secondi membri, applicando la proprietà transitiva, e semplifichiamo i valori numerici

$$\frac{11}{4\,(T-12)} = \frac{336}{125\,(T-14)}$$

moltiplichiamo per il mcm

$$1375T - 19250 = 1344T - 16128$$

risolviamo rispetto a T

$$T = \frac{3032}{31} = 97,8\,°C$$

e

$$c_s = \frac{11}{4\,(97,8-12)} = 0,032\,\frac{cal}{g\,°C}$$

Esercizio 71. Una persona di $80\,kg$ vuole diminuire di $10\,kg$ passando da una dieta giornaliera di $3500\,kcal$ a una di $2500\,kcal$ senza variare la sua attività fisica. Sapendo che l'ossidazione di $100\,g$ di grasso animale fornisce $880\,kcal$, quanti giorni occorrono per bruciare le sue riserve di grasso per arrivare alla massa corporea voluta?

Soluzione. la riduzione di $10\,kg$ di grasso corrispondono a $10000\,g : 100\,\frac{ossidazione}{g} = 100\,ossidazioni$. Le 100 ossidazioni equivalgono al consumo di $880\,kcal \cdot 100 = 88000\,kcal$. Consumando $100\,kcal$ in meno al giorno, serviranno

$$\frac{88000\,kcal}{1000\,\frac{kcal}{giorno}} = 88\,giorni$$

Esercizio 72. Una persona addetta a lavori pesanti ingerisce $600\,g$ di glucidi $(4\,kcal/g)$, $400\,g$ di protidi $(4\,kcal/g)$ e $200\,g$ di lipidi $(9\,kcal/g)$. Calcolare il corrispondente valore energetico.

Soluzione. basta moltiplicare il corrispettivo valore energetico per grammo per il numero dei grammi assunti e sommare i singoli contributi

$$4\frac{kcal}{g} \cdot 600\,g + 4\frac{kcal}{g} \cdot 400\,g + 9\frac{kcal}{g} \cdot 200\,g = 5800\,kcal$$

Esercizio 73. Una piscina coperta contenente $150\,m^3$ di acqua si raffredda di $2\,°C$ ogni giorno. Calcolare:

1. Quanti kWh sono necessari ogni giorno per mantenere costante la temperatura dell'acqua;

2. quanti m^3 di acqua dovrebbero cadere dall'altezza di $30\,m$ per poter produrre l'energia necessaria per riscaldare ogni giorno la piscina di $2\,°C$.

3. ricordiamo che $1\,kWh = 3,6 \cdot 10^6\,J$; calcoliamo quindi l'energia necessaria in Joule.

$$Q = 1,50 \cdot 10^5\,kg \cdot 4186\,\frac{J}{kg\,K} \cdot 2\,K = 1,26 \cdot 10^9\,J$$

   applicando il fattore di trasformazione, si ha

$$Q = \frac{1,26 \cdot 10^9\,J}{3,6 \cdot 10^6\,\frac{J}{kWh}} = 348\,kWh$$

4. Se sono necessari $1,26 \cdot 10^9\,J$ al giorno, ricordando che il lavoro compito da una massa in caduta libera è pari alla sua energia potenziale, in condizioni ideali, si ha

$$1,26 \cdot 10^9\,J = massa \cdot 9,81\,\frac{m}{s^2} \cdot 30\,m$$

   risolvendo rispetto ad m, si ottiene

$$massa[kg] = \frac{1,26 \cdot 10^9\,J}{294,3\,\frac{m^2}{s^2}} = 4281346\,kg = 4281\,m^3$$

Esercizio 74. Un piatto di ferro di raggio $r = 10\,cm$ e di spessore $s = 2\,cm$ ha una faccia a contatto con vapore acqueo a $100\,°C$, mentre l'altra faccia si trova a temperatura ambiente pari a $20\,°C$. Sapendo che il coefficiente di conducibilità termica del ferro è $50\,kcal/h\,m\,°C$, calcolare la quantità di calore che passa da una faccia all'altra ogni minuto.

Soluzione. Questo è un esercizio sulla propagazione del calore; trattandosi di corpi solidi il calore si propaga prevalentemente per conduzione. Utilizzeremo pertanto la relazione di Fourier che descrive questo fenomeno:

$$Q = -kA\frac{T_1 - T_2}{d}t$$

dove k è il coefficiente di conducibilità termica interna della sostanza, A è un elemento di superficie della parete, T_1, T_2 le temperature alle quali si trovano le due facce, d lo spessore e t il tempo di propagazione. Applicando tale relazione, si ha

$$Q = -50\frac{kcal}{h\,m\,°C} \cdot 0,1^2\pi\,m^2 \cdot \frac{-80\,°C}{0,02\,m} \cdot \frac{1}{60}h = 105\,kcal$$

Esercizio 75. Un locale isolato, le cui pareti sono di spessore costante e di superficie interna pari a $50\,m^2$, è a contatto con l'esterno. Se, per effetto di una differenza di temperatura interno-esterno di $15\,°C$, lo scambio termico che avviene solo attraverso le pareti sia caratterizzato da una quantità di calore uguale a $125 \cdot 10^4\,cal/h$, calcolare lo spessore della parete.

Soluzione. Anche questo esercizio sfrutta la relazione di Fourier per la conduzione, con lo spessore come grandezza incognita; ciò richiede che l'equazione di Fourier sia risolta rispetto a questa grandezza, mediante la cosiddetta formula inversa

$$1250\,\frac{kcal}{h} = -0,5\,\frac{kcal}{h\,m\,°C} \cdot \frac{50\,m^2 \cdot (-15\,°C)}{d}$$

da cui

$$d = \frac{375\,\frac{kcal\,m}{h}}{1250\,\frac{kcal}{h}} = 0,3\,m$$

Esercizio 76. Misurando la radiazione solare che giunge sulla Terra è possibile valutare la temperatura superficiale del Sole e la potenza irradiata dall'unità di superficie. Supponendo che il Sole si comporti come un corpo nero, calcolare la potenza irradiata dall'unità di superficie, assumendo una temperatura superficiale del Sole di $6000\,K$.

Soluzione. In questo caso, come ben risulta dal testo, la propagazione del calore avviene mediante irraggiamento e supponendo che il Sole si comporti come un corpo nero, vale la relazione

$$E = \sigma T^4$$

dove σ è la costante di Stefan che vale $5,68 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,K^4}$. Sostituendo i valori assegnati, si ha

$$E = 5,68 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,K^4} \cdot 6000^4 = 7,36 \cdot 10^7\,\frac{W}{m^2}$$

Esercizio 77. Il muro esterno di una stanza fatto di mattoni è largo $5\,m$, alto $3\,m$ e spesso $40\,cm$. Calcolare la quantità di energia (in Joule) che attraversa il muro in un'ora sapendo che la temperatura esterna è di $30\,°C$, quella interna di $18\,°C$ e che il coefficiente di conducibilità termica è $0,5\,kcal/h\,m\,°C$.

Soluzione. la superficie del muro è di $15\,m^2$; dovendo calcolare l'energia in Joule, trasformiamo il coefficiente di conducibilità nelle opportune unità di misura:

$$h = \frac{0,5 \cdot 10^3 \, \frac{cal}{h\,m\,°C} \cdot 4,186\,\frac{J}{cal}}{3600\,\frac{s}{h}} = 0,58\,\frac{J}{s\,m\,°C}$$

si ha quindi

$$Q = 0,58\,\frac{J}{s\,m\,°C} \cdot 15\,m^2 \cdot \frac{12\,°C}{0,40\,m} \cdot 3600\,s = 9,4 \cdot 10^5\,J$$

Esercizio 78. Con una stufa si vuole mantenere a $20\,°C$ la temperatura di una stanza di forma cubica con un volume di $27\,m^3$. Le pareti di spessore costante pari a $20\,cm$ sono caratterizzate da un coefficiente di conducibilità termica $2,5\,kcal/h\,m\,°C$. Sapendo che la temperatura esterna è di $-2\,°C$, calcolare la quantità di calore che la stufa deve fornire rimanendo accesa per $5\,h$.

Soluzione. La quantità di calore che la stufa deve fornire è pari a quella che viene dispersa attraverso le 6 pareti della stanza, che si suppone si comportino tutte allo stesso modo. Essendo il volume di un cubo $V = l^3$, il lato della stanza cubica è $l = 3\,m$ e quindi la superficie della parete di $9\,m^2$. Utilizziamo la relazione di Fourier per calcolare il calore disperso da una parete:

$$Q = 2,5\,\frac{kcal}{h\,m\,°C} \cdot 9\,m^2 \cdot \frac{22\,°C}{0,2\,m} \cdot 5\,h = 1,24 \cdot 10^4\,kcal$$

quindi

$$Q_{tot} = 6 \cdot 1,24 \cdot 10^4\,kcal = 7,4 \cdot 10^4\,kcal$$

Esercizio 79. Un radiatore di superficie $S = 200\,cm^2$a temperatura costante $T_2 = 70\,°C$ si trova immerso in un fluido pure a temperatura costante $T_1 = 20\,°C$. Supponendo che valga la relazione $Q = \lambda_e\,(T_2 - T_1)\,St$, calcolare il coefficiente di conduttività termica esterna, λ_e, nell'ipotesi che il radiatore riesca a disperdere nel fluido in $12\,h$ una quantità di calore pari a $1040 \cdot 10^3\,kcal$.

Soluzione. si tratta solamente di applicare la relazione assegnata

$$1040 \cdot 10^3\,kcal = \lambda_e\,\frac{kcal}{h\,m\,°C} \cdot 50\,°C \cdot 200 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 12\,h$$

risolvendo rispetto a λ, quindi applicando la formula inversa, si ha

$$\lambda_e = \frac{1040 \cdot 10^3\,kcal}{12\,h\,m\,°C} = 86667,7\,\frac{kcal}{h\,m\,°C}$$

Esercizio 80. Un corpo sferico di raggio $5\,cm$ si trova alla temperatura di $1000\,°C$. Nell'ipotesi che si comporti come un corpo nero, calcolare con che ritmo (energia per unità di tempo, potenza) l'energia viene irradiata dal corpo.

Soluzione. è evidente che il meccanismo di propagazione considerato è l'irraggiamento e nell'ipotesi del corpo nero possiamo utilizzare la legge di Stefan, che esprime la radianza (energia per unità di tempo e superficie) alla quarta potenza della temperatura.

$$Radianza\left[\frac{W}{m^2}\right] = \sigma T^4 = 5,68 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,°C^4} \cdot 10^{12}\,°C^4 = 56800\,\frac{W}{m^2}$$

il corpo è sferico e la sua superficie è espressa da $S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 = 0,03\,m^2$. Quindi la potenza vale:

$$P = 56800\,\frac{W}{m^2} \cdot 0,03\,m^2 = 1784\,W$$

2 Equazione di Stato dei Gas Perfetti

La mole

Esercizio 81. Sapendo che una mole di idrogeno ha una massa di $1,008\,g$, calcolare la massa di un atomo di idrogeno.

Soluzione. una mole ha una massa pari al peso atomico dell'elemento, se il gas è monoatomico, e contiene un numero di atomi pari al Numero di Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ atomi. Quindi la massa totale è data dalla massa di un atomo di idrogeno per il N° di Avogadro

$$m_{H_2O} = \frac{1,008\,g}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,66 \cdot 10^{-24}\,g = 1,66 \cdot 10^{-27}\,kg$$

Esercizio 82. Un gas, alla temperatura iniziale di $0\,°C$, viene riscaldato a pressione costante in modo che il suo volume diventi il triplo. Calcolare la temperatura a cui è stato riscaldato il gas.

Soluzione. ricordando la legge di Boyle, per la quale il prodotto $pV = cost$, si ha

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

nel nostro caso $p_1 = p_2$, per cui

$$T_2(K) = \frac{T_1 V_2}{V_1} = \frac{273\,K \cdot 3V_1}{V_1} = 819\,K$$

Esercizio 83. Un cilindro, con un pistone scorrevole a perfetta tenuta, contiene un volume $V_1 = 3\,l$ di un gas perfetto alla pressione atmosferica e alla temperatura di $300\,K$. Mantenendo costante la pressione, il gas nel cilindro viene portato alla temperatura di $400\,K$. Calcolare il volume occupato dal gas.

Soluzione. applicando sempre la legge di Boyle, a pressione costante, cioè $p_1 = p_2$, si ha

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

da cui

$$V_2 = \frac{3\,l}{300\,K} \cdot 400\,K = 4\,l$$

Esercizio 84. Una bombola di volume $V_0 = 10^2\,cm^3$ contiene un gas perfetto alla pressione $p_0 = 10^7\,N/m^2$. Nell'ipotesi che durante il processo la temperatura rimanga costante, calcolare quanti palloncini si possono riempire, considerando che ogni palloncino deve avere un volume $V = 15\,cm^3$ e una pressione $p = 1,8 \cdot 10^5\,N/m^2$.

Soluzione. utilizziamo sempre la legge di Boyle, questa volta a temperatura costante, cioè $T_1 = T_2$:

$$V_1 = \frac{p_0}{p_1} \cdot V_0 = \frac{10^7\,\frac{N}{m^2}}{1,8 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}} \cdot 10^{-4}m^3 = 5,56 \cdot 10^{-3}m^3$$

calcoliamo il numero dei palloncini

$$n_{palloncini} = \frac{5560\,cm^3}{15\,cm^3} = 370$$

Esercizio 85. Determinare la natura chimica di un gas perfetto sapendo che, alla temperatura di $27\,°C$, una quantità pari a $56g$ occupa un volume di $16,42\,l$ ed esercita una pressione pari a $2280\,mmHg$.

Soluzione. utilizziamo l'equazione di stato dei gas perfetti, $pV = nRT$, dove n è il numero di moli che compongono il gas, $n = \frac{N}{N_A}$, dove N_A è il numero di Avogadro e N il numero di molecole che può essere dedotto dal rapporto tra la massa e la massa molecolare del gas, $N = \frac{m}{m_{mol}}$. Trasformiamo il valore della pressione in pascal: $2280\,mmHg = 3p_{atm} = 3,039 \cdot 10^5 Pa$ e ricordando che $R = 8,31\,\frac{J}{kg\,mole}$

$$3,039 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2} \cdot 16,42 \cdot 10^{-3}\,m^3 = n \cdot 8,31\,\frac{J}{K\,mole} \cdot 300\,K$$

da cui

$$n = \frac{4990}{2493} = 2\,moli$$

le 2 moli devono corrispondere ad una massa $m = 56g$ e quindi $1\,mole = 28g$; questo valore identifica la molecola del gas biatomico di azoto N_2.

Esercizio 86. Calcolare il volume occupato da $50\,g$ di elio ($M = 4$), allorché alla temperatura di $-73\,°C$ esercita una pressione pari a $5 \cdot 10^5\,N/m^2$.

Soluzione. possiamo fare riferimento alla legge dei gas perfetti, supponendo tale il nostro gas, $PV = nRT$ e determiniamo il numero di moli che compongono tale gas

$$n = \frac{50\,g}{4\,\frac{g}{mole}} = 12,5\,moli$$

calcoliamo ora il volume, risolvendo la legge di stato rispetto a V:

$$V = \frac{12,5\,moli \cdot 8,31\frac{J}{°C\,mole} \cdot 200\,°C}{5 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}} = 0,0415\,m^3 = 41,5\,l$$

Esercizio 87. Quanti grammi pesa $1\,m^3$ di aria secca in condizioni normali il cui peso molecolare sia assunto pari a 29?

Soluzione. basta ricordare che ogni mole ha un volume di $22,4\,l$ e poiché $1\,m^3 = 1000\,l$ si ha

$$n_{moli} = \frac{1000\,l}{22,4\,l} = 44,64$$

la massa del gas è data da

$$m = n_{moli} \cdot peso\,molecolare = 44,64 \cdot 29 = 1295\,g$$

Esercizio 88. Calcolare la densità dell'ossigeno ($M = 32$) a $27\,°C$ e alla pressione di $10^6\,dine/cm^2$

Soluzione. la pressione è espressa in unità di misura $c.g.s$ e va trasformata in unità del SI, cioè $10^6\,\frac{dine}{cm^2} = 10^5\,\frac{N}{m^2}$, essendo $1\,N = 10^5\,dine$; dalla equazione di stato dei gas, si ha

$$\frac{V}{n} = \frac{RT}{p} = \frac{8,31\,\frac{J}{K\,mole} \cdot 300\,K}{10^5\,\frac{N}{m^2}} = 0,02493\,\frac{m^3}{mole}$$

ora la densità è data dal rapporto tra la massa e il volume da essa occupata; la massa può essere ottenuta dal prodotto tra il numero di moli e la massa di una mole

$$d = \frac{M}{V} = \frac{n \cdot 32\,g}{V} = \frac{32 \cdot 10^{-3}\,\frac{kg}{mole}}{0,02493\,\frac{m^3}{mole}} = 1,284\,\frac{kg}{m^3}$$

Esercizio 89. Un recipiente di volume $V = 20\,l$ contiene una massa m di ossigeno ($M = 32\,g/mole$) alla pressione $p = 5\,atm$ e alla temperatura $t = 27\,°C$. Calcolare la massa dell'ossigeno.

Soluzione. ricordiamo che $1\,atm = 1,013 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}$, applichiamo l'equazione di stato $pV = nRT$, dalla quale si ricava

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{5 \cdot 1,013 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2} \cdot 20 \cdot 10^{-3}\,m^3}{8,31\,\frac{J}{K\,mole} \cdot 300\,K} = 4,06\,moli$$

la massa sarà pertanto

$$m = 4,06 \cdot 32 = 130\,g$$

Esercizio 90. Una bombola di volume $V = 24,93\,l$ pesa vuota $15\,kg$. Riempita di gas avente peso molecolare 44 pesa $16,76\,kg$. Calcolare la pressione del gas entro la bombola, nell'ipotesi che l'operazione avvenga alla temperatura di $27\,°C$.

Soluzione. calcoliamo la massa del gas togliendo la tara della bombola, $m_{gas} = 16,76 - 15 = 1,76\,kg$. Calcoliamo il numero di moli

$$n = \frac{1760\,g}{44\,\frac{g}{mole}} = 40\,moli$$

la pressione è ora

$$p = \frac{40\,moli \cdot 8,31\,\frac{J}{K\,mole} \cdot 300\,K}{24,93 \cdot 10^{-3}\,m^3} = 4 \cdot 10^6\,Pa$$

Esercizio 91. Calcolare il numero di molecole che si trovano in un tubo a raggi X di volume pari a $82,8\,cm^3$ mantenuto alla temperatura di $27\,°C$, sapendo che la pressione esercitata dal gas residuo che si trova all'interno del tubo è pari a $7,6 \cdot 10^{-7}\,mmHg$.

Soluzione. possiamo applicare l'equazione di stato, risolvendo rispetto a n

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{1,01 \cdot 10^{-4}\,\frac{N}{m^2} \cdot 8,28 \cdot 10^{-6}\,m^3}{8,31\,\frac{J}{K\,mole} \cdot 300\,K} = 3,35 \cdot 10^{-12}\,moli$$

da cui

$$N = n \cdot N_{avogadro} = 3,35 \cdot 10^{-12} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 2,02 \cdot 10^{12}\,molecole$$

Esercizio 92. Un recipiente metallico, considerato perfetto conduttore, contiene un gas perfetto alla temperatura di $27\,°C$. Il recipiente è dotato di un manometro che indica una pressione di $1,5\,atm$. Se il recipiente viene immerso in azoto liquido a $-200\,°C$, quale sarà la pressione segnata dal manometro, rimanendo il volume costante?

Soluzione. possiamo usare la legge di Boyle per la quale $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$; risolvendo rispetto a p_2, si ha (con $V_1 = V_2$)

$$p_2 = p_1\frac{T_2}{T_1} = 1,5\,atm \cdot \frac{73\,K}{300\,K} = 0,36\,atm$$

Esercizio 93. Se la dilatazione lineare della colonna di mercurio contenuta in un termometro è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta, calcolare la lunghezza della colonna a $27\,°C$ sapendo che a $-3\,°C$ l'altezza della colonna è pari a $2\,cm$.

Soluzione. è un esercizio di applicazione del significato di proporzionalità diretta che viene assunta descrivere la dilatazione del mercurio nella colonna di vetro. Dopo aver trasformato le temperature nella scala Kelvin, si ha

$$300\,K : x\,cm = 270\,K : 2\,cm$$

risolviamo, applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni, per la quali il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi

$$x = \frac{300\,K \cdot 2\,cm}{270\,K} = 2,2\,cm$$

Esercizio 94. Una data quantità di gas perfetto contenuta in un cilindro munito di un pistone mobile presenta alla temperatura di $27\,°C$ una densità pari a $5 \cdot 10^{-3}\,g/cm^3$. Calcolare la variazione della densità se, a pressione costante, la temperatura del gas viene portata a $900\,K$.

Soluzione. sempre la legge di Boyle, tenendo conto che $p_1 = p_2$, $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$; risolvendo rispetto a V_2, si ha

$$V_2 = \frac{V_1 T_2}{T_1}$$

essendo nota la densità, $d = \frac{M}{V}$, sostituiamo $V = \frac{M}{d}$, tendendo conto che la massa è sempre la stessa

$$\frac{M}{d_1 T_1} = \frac{M}{d_2 T_2}$$

il rapporto tra le due densità, che esprime la variazione, è uguale al rapporto inverso tra le temperature

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{300\,K}{900\,K} = \frac{1}{3}$$

per cui la densità d_2 sarà un terzo di quella iniziale d_1.

Esercizio 95. 10 moli di gas perfetto, alla pressione iniziale $p = 5\,atm$, contenute in un cilindro di volume $V = 16,42\,l$, si espandono fino a triplicare il volume occupato dal gas. Calcolare la temperatura finale del gas, nell'ipotesi che l'espansione avvenga a pressione costante.

Soluzione. Utilizziamo l'equazione di stato di un gas, dopo aver trasformato l'unità della pressione in quella del SI, $p = 5\,atm = 5 \cdot \left(1,013 \cdot 10^5\right) \frac{N}{m^2}$

$$5 \cdot \left(1,013 \cdot 10^5\right) \frac{N}{m^2} \cdot 3 \cdot \left(16,42 \cdot 10^{-3}\right) m^3 = 10 \cdot 8,31 \frac{N}{K\,m} \cdot T$$

risolvendo rispetto a T, si ha

$$T = \frac{24950\,Nm}{10 \cdot 8,31 \frac{J}{K\,mole}} = 300\,K$$

Esercizio 96. Due litri di gas perfetto mantenuti alla temperatura di $17\,°C$ e alla pressione di $700\,mmHg$ hanno una massa di $3,5\,g$. Calcolare il peso molecolare del gas.

Soluzione. applichiamo l'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT$ e risolviamo rispetto a n ($1\,atm = 760\,mmHg = 1,013 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}[Pascal]$,pertanto $700\,mmHg = 1,013 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2} \cdot \frac{700}{760} = 9,3 \cdot 10^4\,\frac{N}{m^2}$

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{9,3 \cdot 10^4\,\frac{N}{m^2} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,m^3}{8,31\,\frac{J}{K\,mole} \cdot 290\,K} = 0,077\,moli$$

il peso molecolare del gas è dato dal rapporto tra la massa del gas stesso e il numero di moli che lo compongono

$$peso\,molecolare = \frac{3,5\,g}{0,077\,moli} = 45\,\frac{g}{mole}$$

Esercizio 97. Utilizzando il peso molecolare del metano, pari a $16\,g/mole$, nonché il volume occupato da una mole in condizioni normali, pari a $22,4\,l$, calcolare la massa del metano contenuto in un serbatoio di $500\,l$.

Soluzione. i valori assegnati nel testo sono quelli che si trovano nella definizione di mole e nell'introduzione del significato del numero di Avogadro. Calcoliamo il numero di moli che compongono il gas attraverso il rapporto tra il volume del gas e quello occupato da una mole

$$n^\circ\,moli = \frac{500\,l}{22,4\,l} = 22,32$$

la massa è data dal prodotto del numero di moli per il peso molecolare di una mole

$$m = 22,32\,moli \cdot 16\,\frac{g}{mole} = 357\,g$$

Esercizio 98. Un paziente deve respirare $1\,l$ di ossigeno al minuto alla pressione di $1\,atm$ da una bombola che contiene $20\,l$ di ossigeno alla temperatura di $25\,^\circ C$ e alla pressione di $20\,atm$. Poiché la bombola possiede un riduttore di pressione che mantenendo la temperatura a $25\,^\circ C$ riduce la pressione a $1\,atm$, per quanto tempo il paziente potrà utilizzare la bombola?

Soluzione. Applichiamo la legge di Boyle a temperatura costante, $p_1V_1 = p_2V_2$ per calcolare il volume dell'ossigeno dopo la riduzione di pressione attraverso il riduttore

$$V_2 = \frac{p_1}{p_2}V_1 = \frac{20\,atm}{1\,atm} \cdot 20\,l = 400\,l$$

poiché il paziente respira $1\,l$ al minuto, la bombola avrà una durata di

$$t = \frac{400\,l}{1\,\frac{l}{min}} = 400\,min \simeq 10\,h$$

Esercizio 99. Una quantità m_1 di O_2 occupa, alla temperatura $T_1 = 7\,^\circ C$, un volume $V_1 = 20\,dm^3$, alla pressione di $2 \cdot 10^5\,N/m^2$. Una quantità m_2 di H_2 occupa alla temperatura $T_2 = 27\,^\circ C$, un volume $V_2 = 50\,dm^3$ alla pressione di $1\,atm$. Calcolare la pressione che eserciterebbe il miscuglio dei due gas posti in un recipiente di volume $V = 70\,l$ alla temperatura $0\,^\circ C$.

Soluzione. prima di mescolare idealmente i due gas dobbiamo «portarli alla stessa pressione», applicando la legge di Boyle, $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$. Calcoliamo prima la pressione che avrebbe il gas di O_2 alla temperatura di $0\,^\circ C$

$$\frac{2 \cdot 10^5\,N/m^2 \cdot 20\,dm^3}{280\,K} = p \cdot \frac{20\,dm^3}{273\,K}$$

risolvendo rispetto a p, si ottiene

$$p_{O_2} = \frac{2 \cdot 10^5\,N/m^2 \cdot 20\,dm^3 \cdot 273\,K}{280\,K \cdot 20\,dm^3} = 1,95 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}$$

calcoliamo la pressione di H_2

$$p_{H_2} = \frac{1,013 \cdot 10^5\,N/m^2 \cdot 50\,dm^3 \cdot 273\,K}{300\,K \cdot 50\,dm^3} = 9,22 \cdot 10^4\,\frac{N}{m^2}$$

sommiamo le due pressioni

$$p = p_{O_2} + p_{H_2} = 1,95 \cdot 10^5 \, \frac{N}{m^2} + 9,22 \cdot 10^4 \, \frac{N}{m^2} = 1,21 \cdot 10^5 \, \frac{N}{m^2}$$

il volume totale di $70 \, dm^3$ è la somma dei due volumi.

Esercizio 100. Nota la pressione $p = 1,3 \cdot 10^9 \, atm$ esistente nel centro del Sole, valutare l'ordine di grandezza della temperatura all'interno nell'ipotesi che il Sole sia costituito da una sfera gassosa di densità costante formata da atomi di idrogeno, ognuno di massa $1,67 \cdot 10^{-27} \, kg$.

Soluzione. per risolvere questo esercizio dobbiamo utilizzare le grandezze relative al Sole, in particolare $r_{Sole} = 6,975 \cdot 10^8 \, m$, da cui si ottiene il suo volume $V_{Sole} = \frac{4}{3}\pi \left(6,975 \cdot 10^8\right)^3 m^3 = 1,42 \cdot 10^{27} \, m^3$; la massa del Sole $m_{sole} = 1,991 \cdot 10^{30} \, kg$. Per poter applicare l'equazione di stato dei gas, è necessario calcolare il numero di moli attraverso il numero di molecole che compongono il Sole supposto che sia formato di solo idrogeno.

$$N = \frac{m_{sole}}{m_H} = \frac{1,991 \cdot 10^{30} \, kg}{1,67 \cdot 10^{-27} \, kg} = 1,19 \cdot 10^{57}$$

da qui

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{1,19 \cdot 10^{57}}{6,02 \cdot 10^{23} \, \frac{n^\circ}{mole}} = 1,98 \cdot 10^{33} \, moli$$

applichiamo ora l'equazione di stato, risolvendola rispetto alla temperatura

$$T = \frac{\left(1,3 \cdot 10^9 \cdot 1,013 \cdot 10^5\right) \frac{N}{m^2} \cdot 1,42 \cdot 10^{27} \, m^3}{1,98 \cdot 10^{33} \, moli \cdot 8,31 \, \frac{J}{K \, mole}} = 1,1 \cdot 10^7 \, K$$

3 Teoria Cinetica dei Gas

Esercizio 101. L'oro ha una massa molare di $197\,g/mol$. Si consideri un campione di $2.50\,g$ di oro puro e si determini il numero di moli di oro presenti e il numero di atomi presenti nel campione.

Soluzione. Ogni mole di oro ha una massa di $197\,g$, per cui

$$n_{moli} = \frac{2.50\,g}{197\,\frac{g}{mol}} = 0.013\,mol$$

il numero di atomi si può calcolare tenendo conto che ogni mole contiene un numero di atomi pari al numero di Avogadro $= 6.02 \cdot 10^{23}$atomi:

$$n_{atomi} = 0.013 \times 6.02 \cdot 10^{23} = 7.64 \cdot 10^{21}$$

Esercizio 102. Trovare la massa in chilogrammi di $7.50 \cdot 10^{24}$ atomi di arsenico, che ha una massa molare di $74.9\,g/mol$.

Soluzione. La massa è data dal prodotto del numero di moli per la massa molare. Ogni mole di arsenico contiene un numero di atomi pari al numero di Avogadro, per cui

$$n_{moli} = \frac{7.50 \cdot 10^{24}}{6.02 \cdot 10^{23}} = 12.5\,moli$$

e quindi

$$m = 12.5\,mol \times 74.9\,\frac{g}{mol} = 933\,g = 0.993\,kg$$

Esercizio 103. Trovare il volume occupato da $1.00\,mol$ di un gas ideale in condizioni standard, cioè a una pressione di $1.01 \cdot 10^5\,Pa$ e a una temperatura di $0\,°C$. Mostrare poi che il numero di molecole al centimetro cubo in condizioni standard è $2.69 \cdot 10^{19}$.

Soluzione 104. Un gas ideale segue un comportamento descritto dalla legge dei gas $pV = nRT$; pertanto con n, numero di moli, sarà

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{1.00\,mol \times 8.31\,\frac{J}{mol \cdot K} \times 273\,K}{1.01 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}} = 2.25 \cdot 10^{-2}\,m^3 = 22.5\,L$$

considerando una mole di gas, sappiamo che il numero di molecole complessivo è pari al numero di Avogadro, $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$. Il volume del gas, espresso in cm^3, è $V = 2.25 \cdot 10^4\,cm^3$ e quindi

$$N\,\frac{n°}{cm^3} = \frac{N_A}{V} = \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{2.25 \cdot 10^4\,cm^3} = 2.68 \cdot 10^{19}$$

Esercizio 105. Calcolare il lavoro svolto da un agente esterno durante una compressione isoterma di $1.00\,mol$ di ossigeno da un volume di $22.4\,L$ a $0\,^\circ$ C e alla pressione di $1.00\,bar$, a $16.8\,L$.

Soluzione. La legge dei gas ideali è espressa da $pV = nRT$; se la compressione è isoterma, allora la temperatura non cambia. Il lavoro è uguale a $nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$ e nel nostro caso

$$W = 1.00\,mol \times 8.31\,\frac{J}{mol\,K} \times 273\,K \times \ln \frac{16.8 \cdot 10^{-3}}{22.4 \cdot 10^{-3}} = -653\,J$$

Esercizio 106. L'aria che occupa $0.14\,m^3$ a una pressione stimata di $1.03 \cdot 10^5\,Pa$ viene espansa isotermicamente alla pressione atmosferica e poi raffreddata a pressione costante finché raggiunge il suo volume iniziale. Calcolare il lavoro svolto dall'aria (come gas).

Soluzione. La pressione atmosferica è uguale a $1.013 \cdot 10^5\,Pa$. Qui abbiamo due trasformazioni: una espansione a temperatura costante e un raffreddamento a pressione costante. Il lavoro dell'aria per l'espansione è

$$W_{isoterma} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

ma dalla legge dei gas $nRT = p_i V_i$, per cui il lavoro diviene

$$W_{isoterma} = p_i V_i \ln \frac{p_f}{p_i}$$

Poiché la pressione stimata è quella assegnata, allora la P_i viene ottenuta sommandola alla pressione atmosferica, cioè

$$p_i = 1.013 \cdot 10^5 + 1.03 \cdot 10^5 = 2.04 \cdot 10^5\,Pa$$

Il lavoro sarà

$$W_{isoterma} = 2.04 \cdot 10^5 \times 0.14 \times \ln \frac{2.04 \cdot 10^5}{1.013 \cdot 10^5} = 2.00 \cdot 10^4\,J$$

Nella trasformazione isobara la pressione è quella atmosferica ed il volume ritorna al valore iniziale e il lavoro è dato da $W_{isobara} = p\Delta V = p_f \left(V_i - V_f\right)$, ma, $V_f = \frac{p_i V_i}{p_f}$ e sostituendo, $W = p_f \left(V_i - \frac{p_i V_i}{p_f}\right) = V_i \left(p_f - p_i\right)$; il lavoro sarà

$$W_{isobara} = V_i \left(p_f - p_i\right) = 0.14 \times \left(1.013 \cdot 10^5 - 2.04 \cdot 10^5\right) = -1.44 \cdot 10^5$$

Il lavoro totale sarà pertanto di

$$W_{tot} = 2.00 \cdot 10^4 - 1.44 \cdot 10^4 = 5660\,J$$

Esercizio 107. Un contenitore racchiude due gas ideali. Sono presenti 2 moli del primo gas, con una massa molare M_1. Il secondo gas ha una massa molare $M_2 = 3M_1$ e ne sono presenti 0.5 moli. Determinare la frazione della pressione totale sulla parete esercitata sulla parete del contenitore dal secondo gas.

Soluzione. la pressione totale è uguale alla somma delle pressioni che i due gas eserciterebbero separatamente, se ciascuno di essi occupasse l'intero volume. Tale pressione è espressa dalla relazione

$$p = \frac{nMv_{qm}^2}{3V}$$

Ora nelle condizioni descritte i due gas si troveranno alla stessa temperatura, ma avendo masse molari diversi avranno una velocità quadratica media diversa. In particolare

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2M_1 v_{qm_1}^2}{3V} \\ p_2 &= \frac{0.5 \times 3M_1 v_{qm_2}^2}{3V} \end{aligned}$$

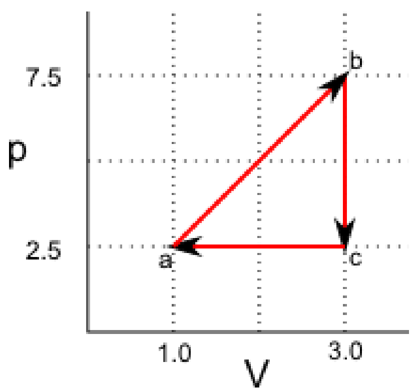
ma, essendo $v_{qm}^2 = \frac{3RT}{M}$, il legame tra le rispettive velocità quadratiche medie è dato da

$$v_{qm_2}^2 = \frac{v_{qm_1}^2}{3}$$

da cui, calcolando la frazione della pressione del secondo gas rispetto a quella totale, si ha

$$\frac{p_2}{p_{tot}} = \frac{\frac{0.5M_1 v_{qm_1}^2}{3V}}{\frac{2.5M_1 v_{qm_2}^2}{3V}} = \frac{0.5}{2.5} = \frac{1}{5}$$

Esercizio 108. Un campione di un gas ideale compie tutto il processo ciclico illustrato in figura. La temperatura del gas nel punto $T_a = 200\,K$. Trovare il numero di moli del gas, la temperatura nei punti b e c e il calore netto fornito al gas nell'intero ciclo.



Soluzione. Condizioni deducibili dal grafico: $p_a = 2.5\,kN/m^2$, $V_a = 1.0\,m^3$; $p_b = 7.5\,kN/m^2$, $V_b = 3.0\,m^3$; $p_c = 2.5\,kN/m^2$, $V_c = 3.0\,m^3$. La trasformazione $a \rightarrow b$ è una espansione con aumento della pressione; la trasformazione $b \rightarrow c$ è isocora; la trasformazione $c \rightarrow a$ è una compressione isobara. Le condizioni termodinamiche relative al punto a sono tutte note, per cui da $pV = nRT$ si ottiene

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{2500\,\frac{N}{m^2} \times 1.0\,m^3}{8.31\,\frac{J}{mol\,K} \times 200\,K} = 1.5\,moli$$

noto il numero di moli (costante) è possibile ricavare le temperature nei punti indicati

$$T_b = \frac{pV}{nR} = \frac{7500\,\frac{N}{m^2} \times 3.0\,m^3}{1.5\,mol \times 8.31\,\frac{J}{mol\,K}} = 1805\,K$$

$$T_c = \frac{2500\,\frac{N}{m^2} \times 3.0\,m^3}{1.5\,mol \times 8.31\,\frac{J}{mol\,K}} = 602\,K$$

In una trasformazione ciclica l'energia interna del gas non varia e quindi $Q = L$; il lavoro totale è pari all'area compresa dalle curve, cioè del triangolo, per cui

$$Q = \frac{2.0 \times 5.0}{2} = 5.0\,J$$

Esercizio 109. Un gas ideale inizialmente a $300\,K$ è compresso a una pressione costante di $25\,N/m^2$ da un volume di $3.0\,m^3$ a un volume di $1.8\,m^3$. Nel processo il gas cede $75\,J$ di calore. Trovare la variazione di energia interna e la temperatura finale del gas.

Soluzione. La trasformazione considerata è isobara. La variazione di energia interna è data da $\Delta E_{int} = Q - L$; il lavoro compiuto è espresso da $L = p\Delta V = 25\,\frac{N}{m^2} \times (1.8 - 3.0)\,m^3 = -30\,J$. La variazione dell'energia interna sarà pertanto

$$\Delta E_{int} = -75 + 30 = -45\,J$$

la temperatura finale del gas si può ottenere dalla legge dei gas ideali, per i quali $\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}$, ma essendo $p_f = p_i$, si riduce a

$$T_f = \frac{V_f}{V_i} T_i = \frac{1.8\,m^3 \times 300\,K}{3.0\,m^3} = 180\,K$$

Esercizio 110. Un pallone meteorologico è gonfiato in modo blando con elio a una pressione di $1.0\,bar\,(= 76\,cmHg)$ e a una temperatura di $20°C$. Il volume del gas è di $2.2\,m^3$. A un'altezza di $7000\,m$, la pressione atmosfera è scesa a $38\,cmHg$ e l'elio si è espanso, non essendo in alcun modo limitato dal contenitore. A questa altezza la temperatura del gas è di $-48°C$. Trovare il volume del gas.

Soluzione. Utilizziamo la legge dei gas ideali: $pV = nRT$. n: numero di moli e R sono costanti, pertanto per lo stesso gas in due condizioni diverse si avrà

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}$$

da cui

$$V_f = \frac{T_f p_i V_i}{T_i p_f} = \frac{225\,K \times 76\,cmHg \times 2.2\,m^3}{293\,K \times 38\,cmHg} = 3.38\,m^3$$

Esercizio 111. Una bolla d'aria con un volume di $20\,cm^3$ si trova sul fondo di un lago profondo $40\,m$ dove la temperatura è $4.0\,°C$. La bolla sale in superficie dove la temperatura è di $20\,°C$. Supponendo che la temperatura della bolla sia la stesa dell'acqua circostante, trovare il suo volume appena prima che giunga in superficie.

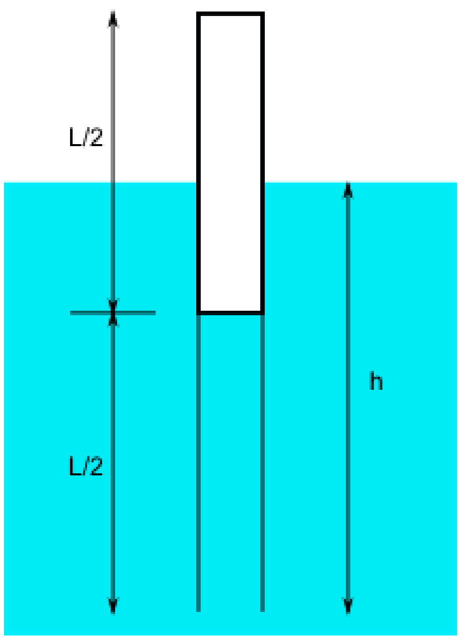
Soluzione. Nelle ipotesi assegnate possiamo considerare valida la relazione $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$. Alla superficie dell'acqua la pressione è quella dell'aria, cioè $p_1 = 1.013 \cdot 10^5\,Pa$. In fondo al lago, la pressione è $p_2 = p_1 + \rho gh$. Confrontando, si ha

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{(p_1+\rho gh)\,V_2}{T_2}$$

da cui, sostituendo i valori numerici

$$V_1 = \frac{(p_1+\rho gh)\,V_2T_1}{T_2p_1} = \frac{\left(1.013 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2} + 1.00 \cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3} \times 9.81\,\frac{m}{s^2} \times 40\,m\right) \times 20 \cdot 10^{-6}\,m^3 \times 293\,K}{1.013 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2} \times 277\,K} = 100\,cm^3$$

Esercizio 112. Un tubo lungo $L = 25.0\,m$, aperto a un'estremità, contiene aria a pressione atmosferica. Esso viene sistemato verticalmente in un lago di acqua dolce finché l'acqua arriva a metà del tubo. Trovare la profondità h della parte immersa del tubo, supponendo che la temperatura sia la stessa ovunque e che non cambi.



Soluzione. L'acqua sale nel tubo indicando la condizione nella quale la pressione dell'aria soprastante e del tratto di acqua equilibrano la pressione dentro il tubo. A parità di temperatura si avrà quindi, all'interno del tubo, prima e dopo l'immersione $p_1V_1 = p_2V_2$; ma il tubo rimane riempito solo fino a metà di acqua per cui il volume finale di aria sarà $V_2 = \frac{1}{2}V_1$. di conseguenza,

$$p_2 = 2p_2$$

sostituendo i valori numerici, si ha

$$\left(1.013 \cdot 10^5 + \rho gl\right)\,Pa = 2 \times 1.013 \cdot 10^5\,Pa$$

da cui

$$\rho gl = 1.013 \cdot 10^5$$

e

$$l = \frac{1.013 \cdot 10^5}{9800} = 10.3\,m$$

se a questi aggiungiamo la metà del tubo immersa e riempita di acqua si ha

$$h = l + \frac{L}{2} = 10.3 + 12.5 = 22.8\,m$$

3.1 Velocità quadratica media

Esercizio 113. Calcolare la velocità quadratica media delle molecole di anidride carbonica alla temperatura di $27\,°C$ sapendo che il peso molecolare è pari a $44\,g/mole$.

Soluzione. La formula di Joule-Clausius, $p = \frac{Nm}{3V}\overline{v^2}$, dove N è il numero di molecole del gas m la massa, e $\overline{v^2}$ è il valore medio dei quadrati delle velocità molecolari; se si pone

$$\sqrt{\overline{v^2}} = v_{qm}$$

dove v_{qm} è la velocità quadratica media nella distribuzione delle velocità delle singole molecole che compongono il gas, e applicando al gas l'equazione di stato, si perviene alla relazione

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{M}}$$

dove $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$ è detta costante di Boltzmann. La soluzione dell'esercizio richiede quindi solo l'applicazione di tale formula, dopo aver calcolato la massa della molecola. Se $1\,mole$ ha una massa di $44\,g$ e se in una mole vi sono N_A molecole, allora la massa di una molecola è

$$M = \frac{0.044\,g}{6.02 \cdot 10^{23}} = 7.31 \cdot 10^{-26}\,g$$

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 300\,K}{7.31 \cdot 10^{-26}\,kg}} = 412\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 114. La temperatura più bassa possibile nello spazio al di fuori dell'atmosfera è $2.7\,K$. Trovare la velocità quadratica media delle molecole di idrogeno a questa temperatura (massa molare della molecola di idrogeno uguale a $2.02\,g/mol$)

Soluzione. Calcoliamo prima la massa della molecola di idrogeno

$$M = \frac{0.00202\,g}{6.02 \cdot 10^{23}} = 3.36 \cdot 10^{-27}\,kg$$

Applichiamo la

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 2.7\,K}{3.36 \cdot 10^{-27}\,kg}} = 182\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 115. Il Sole è un'enorme palla di gas ideali caldi. La temperatura e la pressione nell'atmosfera solare sono $2.00 \cdot 10^6\,K$ e $0.300\,Pa$. Calcolare la velocità quadratica media degli elettroni liberi ($m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\,kg$).

Soluzione. Applichiamo la relazione che esprime la v_{qm}

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 2.00 \cdot 10^6\,K}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg}} = 9.53 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 116. Calcolare la velocità quadratica media di una molecola di azoto a $20\,^\circ C$. Determinare poi a quale temperatura la velocità quadratica media è la metà e il doppio di quella ottenuta.

Soluzione. Sempre applicando la relazione che esprime la velocità quadratica media, si ha

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 293\,K}{28 \times 1.602 \cdot 10^{-27}\,kg}} = 520\,\frac{m}{s}$$

La v_{qm} varia con la radice quadrata di T, per cui assumerà un valore pari alla metà per $T = \frac{293}{4} = 73\,K = -200\,^\circ C$ e una velocità doppia per $T = 293 \times 4 = 1172\,K = 899\,^\circ C$.

Esercizio 117. Trovare la temperatura alla quale gli atomi di elio hanno la stessa velocità quadratica media delle molecole di idrogeno a $20.0\,^\circ C$.

Soluzione. Confrontando le due relazioni che esprimono la condizione di parità della velocità quadratica media, si ha

$$\frac{3kT_{He}}{m_{He}} = \frac{3kT_H}{m_H}$$

ma $m_{H2} = m_H$, per cui

$$T_{He} = 2T_H = 2 \times 293\,K = 586\,K = 313\,^\circ C$$

Esercizio 118. A $273\,K$ e $1.00 \cdot 10^{-2}\,bar$, la densità di un gas è $1.24 \cdot 10^{-5}\,g/cm^3$. Trovare v_{qm} per le molecole del gas e identificarlo, dopo averne trovato la massa molare.

Soluzione. Partiamo dalla relazione che esprime la velocità quadratica media, $v_{qm}^2 = \frac{3pV}{nM}$, ma essendo $n = \frac{m}{M}$, dato dal rapporto tra la massa e la massa molare, e sostituendo si ha

$$v_{qm}^2 = \frac{3pV}{m}$$

e poiché la densità $\rho = \frac{m}{V}$, si ottiene

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.00 \cdot 10^3\,Pa}{1.24 \cdot 10^{-2}\,\frac{kg}{m^3}}} = 492\,\frac{m}{s}$$

la massa molare è quindi

$$M = \frac{3RT}{v_{qm}^2} = \frac{3 \times 8.31 \times 273}{492^2} = 0.028\,\frac{g}{mol}$$

Il gas è quindi l'azoto.

Esercizio 119. Calcolare a quale temperatura le molecole di idrogeno hanno una velocità quadratica media pari a $3 \cdot 10^3\, m/s$.

Soluzione. Possiamo sempre fare riferimento alla relazione dell'esercizio precedente, risolvendola però rispetto a T

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \qquad T = \frac{v_{qm}^2 m}{3k}$$

$$T = \frac{\left(3 \cdot 10^3\right)^2 \frac{m^2}{s^2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}\, kg}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}\, \frac{J}{K}} = 726\, K$$

Esercizio 120. Sapendo che le molecole di un gas, mantenuto in condizioni normali, hanno una velocità quadratica media pari a $460\, m/s$, calcolare la massa molecolare del gas.

Soluzione. dovendo calcolare la massa molecolare del gas, è preferibile riferirsi alla relazione nella quale compare tale grandezza; per ottenere ciò basta sostituire alla costante di Boltzmann, la costante di Rydberg $R = kN_A$ e invece della massa di una singola molecola, appunto la massa molecolare $M_0 = mN_A$:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M_0}}$$

da cui

$$M_0 = \frac{3RT}{v_{qm}^2} = \frac{3 \cdot 8,31\, \frac{J}{K\, mole} \cdot 273\, K}{(460)^2\, \frac{m^2}{s^2}} = 0.032\, \frac{kg}{mole} = 32\, \frac{g}{mole}$$

Esercizio 121. A quale temperatura la velocità quadratica media delle molecole di azoto è uguale a quella posseduta dalle molecole di idrogeno a $27\,°C$?

Soluzione. ci basiamo sulla relazione che collega l'energia cinetica media delle molecole (microscopiche) con la temperatura (grandezza che descrive una proprietà macroscopica),

$$\frac{1}{2} m v_{qm}^2 = \frac{3}{2} kT$$

la v_{qm} dell'idrogeno è data da

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT_H}{m_H}}$$

tale valore deve essere uguale a quello della molecola di azoto, cioè

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT_N}{m_N}}$$

quindi

$$\sqrt{\frac{3kT_H}{m_H}} = \sqrt{\frac{3kT_N}{m_N}}$$

Elevando al quadrato e semplificando si ha

$$T_N = T_H \cdot \frac{m_N}{m_H} = 300\, K \cdot 14 = 4200\, K$$

Esercizio 122. Una mole di idrogeno alla pressione di $1\,atm$ occupa il volume di $22,414\cdot 10^{-3}\,m^3$. Calcolare la velocità quadratica media delle molecole.

Soluzione. dobbiamo prima applicare l'equazione di stato dei gas perfetti, supponendo tale l'idrogeno, per poter ricavare la sua temperatura, da $PV = nRT$ si ha

$$T = \frac{1,013\cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}\cdot 22,414\cdot 10^{-3}\,m^3}{1\,mole\cdot 8,31\,\frac{J}{mole\,K}} = 273,2\,K$$

ora possiamo calcolare la v_{qm}

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}\cdot 273,2\,K}{2\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\,kg}} = 1840\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 123. Calcolare l'energia cinetica media per molecola, espressa in eV, di un gas mantenuto alla temperatura di $0\,°C$.

Soluzione. ricordando che $E_c = \frac{3}{2}kT$ si ha

$$E_c = \frac{3}{2}\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}\cdot 273,2\,K = \frac{5,65\cdot 10^{-21}\,J}{1,609\cdot 10^{-19}\,\frac{J}{eV}} = 3,5\cdot 10^{-2}\,eV$$

Esercizio 124. Calcolare la variazione di energia cinetica che si verifica in $28\,g$ di azoto quando la temperatura iniziale varia di $100\,°C$.

Soluzione. conoscendo la massa del gas e quindi anche la massa di una mole, possiamo utilizzare la relazione che esprime l'energia cinetica in funzione di queste due grandezze oltre che della temperatura

$$\triangle E = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R\,(T_f - T_i) = \frac{3\cdot 28\,g\cdot 8,31\,\frac{J}{mol\,K}}{2\cdot 28\,\frac{g}{mol}}\cdot 100\,K = 1246,5\,J$$

Esercizio 125. Sapendo che la velocità quadratica media delle molecole dell'aria considerata a $0\,°C$ è uguale a $484\,m/s$, calcolare la velocità quadratica media a $37\,°C$.

Soluzione. Un esercizio analogo al precedente

$$\frac{1}{2}m\left(\overline{v}_f^{qm} - \overline{v}_i^{qm}\right) = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R\,(T_f - T_i)$$

da cui, risolvendo rispetto a $\overline{v}_f^{qm}$

$$\overline{v}_f^{qm} = 484\,\frac{m}{s} + 3\cdot\frac{8,31\,\frac{J}{mol\,K}}{28\,\frac{g}{mol}}\cdot 37\,K = 517\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 126. L'acqua che si trova all'aperto a $32.0\,^{\circ}C$ evapora perché alcune delle molecole in superficie fuggono. Il calore di evaporazione ($539\,cal/g$) è circa uguale a εn, dove ε è l'energia media delle molecole che sfuggono e n è il numero delle molecole per ogni grammo. Trovare ε, il rapporto tra ε e l'energia cinetica media delle molecole di H_2O, supponendo che l'energia cinetica sia correlata alla temperatura allo stesso modo in cui lo è il gas.

Soluzione. Trasformiamo il calore di evaporazione in J/kg: $539 \times \frac{4.186\,J}{10^{-3}\,kg} = 2.26 \cdot 10^{6}\,\frac{J}{kg}$. Nel caso dell'acqua, $1\,mole$ di acqua vale $18\,g$, per cui $1\,g$ conterrà $\frac{6.02 \cdot 10^{23}}{18} = 3.34 \cdot 10^{22}$ molecole. Troviamo allora ε

$$\varepsilon = \frac{539\,\frac{cal}{g}}{3.34 \cdot 10^{22}\,g^{-1}} = 1.61 \cdot 10^{-20}\,cal = 6.74 \cdot 10^{-20}\,J$$

Esercizio 127. Il libero cammino medio delle molecole di azoto a $0.0\,^{\circ}C$ e $1.0\,bar$ è $0.80 \cdot 10^{-5}\,cm$. A questa temperatura e pressione ci sono $2.7 \cdot 10^{19}\,molecole/cm^3$. Trovare il diametro molecolare.

Soluzione. Applichiamo la relazione che esprime il libero cammino medio, risolvendo rispetto ad r, cioè il raggio molecolare:

$$2r = 2\sqrt{\frac{1}{4\sqrt{2}\pi\lambda n}} = 2\sqrt{\frac{1}{4\sqrt{2}\pi \times 0.80 \cdot 10^{-5}\,cm \times 2.7 \cdot 10^{19}\,\frac{molec}{cm^3}}} = 3.2 \cdot 10^{-8}\,cm$$

Esercizio 128. In un certo acceleratore di particelle i protoni si muovono lungo un percorso circolare del diametro di $23.0\,m$ in una camera a $1.00 \cdot 10^{-6}\,mmHg$ di pressione e $295\,K$ di temperatura. Calcolare il numero di molecole di gas al centimetro cubo a questa pressione. Trovare il libero cammino medio delle molecole nel gas in queste condizioni se il diametro molecolare è $2.00 \cdot 10^{-8}\,cm$.

Soluzione. Esprimiamo la pressione in Pascal, noto che $1\,mmHg = 133.3\,Pa$; si ha $1.00 \cdot 10^{-6}\,mmHg = 1.33 \cdot 10^{-4}\,Pa$. Nella legge dei gas ideali, $pV = nRT$, è necessario sostituire n, numero di moli, con $n = \frac{N}{N_A}$, numero di molecole diviso il numero di Avogadro: $pV = \frac{N}{N_A}RT$; ma $\frac{R}{N_A} = k$, costante di Boltzmann, per cui

$$\frac{N}{V} = \frac{p}{kT} = \frac{1.33 \cdot 10^{-4}\,\frac{N}{m^2}}{1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \times 295\,K} = 3.27 \cdot 10^{16}\,\frac{n^{\circ}}{m^3} = 3.27 \cdot 10^{10}\,\frac{n^{\circ}}{cm^3}$$

calcoliamo ora il libero cammino medio

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 \frac{N}{V}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi \times \left(2.00 \cdot 10^{-10}\right)^2\,m^2 \times 3.27 \cdot 10^{16}\,\frac{n^{\circ}}{m^3}} = 135\,m$$

Esercizio 129. Calcolare il cammino libero medio delle molecole dell'aria, nell'ipotesi puramente teorica che esso corrisponda a quello di un gas perfetto, per esempio una mole di idrogeno mantenuto in condizioni normali come le molecole di aria. Assumere come diametro molecolare tipico il valore $d = 2,74 \cdot 10^{-10}\,m$.

Soluzione. il libero cammino medio, cioè la distanza percorsa da una molecola tra due urti successivi, è espresso da

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n}$$

dove $4\pi r^2$ è la sezione efficace (superficie del cerchio massimo della molecola supposta sferica) e n il numero di molecole per unità di volume. Possiamo calcolare il valore di n attraverso l'equazione di stato dei gas perfetti, supposta tale l'aria: da $pV = NkT$ (per una mole) $n = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT}$ con k costante di Boltzmann

$$n = \frac{1,013 \cdot 10^5 \, \frac{N}{m^2}}{1,38 \cdot 10^{-23} \, \frac{J}{K} \cdot 293 \, K} = 2,51 \cdot 10^{25} \, \frac{molecole}{m^3}$$

sostituendo tale valore nella relazione che esprime il cammino libero medio, si ha

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi \cdot \left(2,74 \cdot 10^{-10} \, m\right)^2 \cdot 2,51 \cdot 10^{25} \, \frac{molecole}{m^3}} = 2,99 \cdot 10^{-8} \, m$$

Esercizio 130. Il libero cammino medio λ delle molecole di un gas può essere determinato da certe misure (per esempio, dalla misura della viscosità del gas). A $20\,{}^\circ C$ e $75\,cmHg$ di pressione tali misure danno i seguenti valori di $\lambda_{Ar} = 9.9 \cdot 10^{-6}\,cm$ e $\lambda_{N_2} = 27.5 \cdot 10^{-6}\,cm$. Trovare il rapporto tra il diametro effettivo dell'argo e quello dell'azoto; calcolare il valore del libero cammino medio dell'argo a $20\,{}^\circ C$ e $15\,cmHg$.

Soluzione. La relazione che lega il diametro effettivo al libero cammino medio è

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n}$$

da cui

$$r = \lambda = \sqrt{\frac{1}{4\sqrt{2}\pi \lambda n}}$$

Il rapporto sarà quindi, a parità di temperatura e pressione, espresso da

$$\frac{r_{Ar}}{r_{N_2}} = \sqrt{\frac{\lambda_{N_2}}{\lambda_{Ar}}} = 1.7$$

Utilizzando la legge dei gas perfetti, $pV = nRT$, si ha $\frac{n}{V} = \frac{p}{RT}$, da cui

$$\frac{N}{V} = \frac{N_A n}{V} = \frac{N_A p}{RT}$$

e confrontando per i due diversi valori di pressione e temperatura, si ha

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{9.9 \cdot 10^{-6}\,cm} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{75 \times 293}{15 \times 293} = 5.0 \cdot 10^{-5}\,cm$$

3.2 Distribuzione delle velocità molecolari

Esercizio 131. Dato il seguente gruppo di particelle in cui N_i è il numero di particelle che hanno la velocità v_i. Calcolare la velocità media; la velocità quadratica media; individuare tra quelle assegnate la velocità più probabile.

N_i	2	4	6	8	2
$v_i\,(cm/s)$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0

Soluzione. la velocità media è data da

$$\overline{v} = \frac{1.0 \times 2 + 2.0 \times 4 + 3.0 \times 6 + 4.0 \times 8 + 5.0 \times 2}{22} = 3.2\,\frac{m}{s}$$

calcoliamo la velocità quadratica media

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{1.0 \times 2 + 4.0 \times 4 + 9.0 \times 6 + 16.0 \times 8 + 25.0 \times 2}{22}} = 3.4\,\frac{m}{s}$$

la velocità più probabile è quella che riguarda il maggior numero di particelle nella distribuzione, cioè $4.0\,\frac{m}{s}$.

Esercizio 132. Dieci particelle si muovono con le seguenti velocità: quattro a $200\,m/s$, due a $500\,m/s$, e quattro a $600\,m/s$. Calcolare la velocità media e la velocità quadratica media. Si ha $v_{qm} > \overline{v}$? In quale condizione $v_{qm} = \overline{v}$

Soluzione. la velocità media è data da

$$\overline{v} = \frac{200 \times 4 + 500 \times 2 + 600 \times 4}{10} = 420\,\frac{m}{s}$$

la velocità quadratica media è

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{40000 \times 4 + 250000 \times 2 + 360000 \times 4}{10}} = 458\,\frac{m}{s}$$

si osserva che $v_{qm} > \overline{v}$. Le due velocità sono uguali se tutte le particelle hanno la stessa velocità (si può verificare anche con il calcolo).

3.3 Espansione adiabatica di un gas ideale

Esercizio 133. Una certa massa di gas occupa un volume di $4.3\,L$ a un pressione di $1.2\,bar$ e a una temperatura di $310\,K$. Essa viene compressa adiabaticamente fino a un volume di $0.76\,L$. Trovare la pressione e la temperatura finale, supponendo che si tratti di un gas ideale per il quale $\gamma = 1.4$.

Soluzione. In una trasformazione adiabatica si ha

$$p_i V_i^{\gamma} = p_f V_f^{\gamma}$$

dove γ è il rapporto tra i calori specifici molari a pressione e volume costante.

$$1.2 \times 4.3^{1.4} = p_f \times 0.76^{1.4}$$

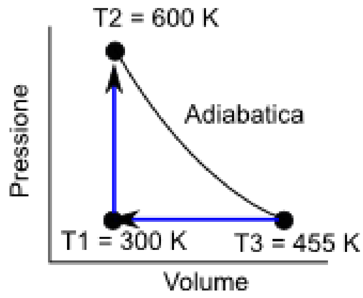
da cui

$$p_f = 1.2 \times \left(\frac{4.3}{0.76}\right)^{1.4} = 13.6\,bar$$

e per trovare la temperatura è possibile riscrivere la relazione iniziale mediante la legge dei gas perfetti come

$$T_f = \frac{T_i V^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} = \frac{300 \times 4.3^{0.4}}{0.76^{0.4}} = 600\,K$$

Esercizio 134. Una macchina termica trasforma $1.00\,mol$ di un gas monoatomico ideale lungo il ciclo illustrato in figura. Il processo $1 \to 2$ si svolge a volume costante, il processo $2 \to 3$ è adiabatico e il processo $3 \to 1$ si svolge a pressione costante. Calcolare il calore Q, la variazione di energia interna ΔE_{int} e il lavoro svolto per ciascuno dei tre processi e per il ciclo completo.



Soluzione. La trasformazione $1 \to 2$, a volume costante, è una trasformazione isocora e quindi, da $\Delta E_{int} = Q - L$, si osserva che in assenza di espansione $L = 0$ e quindi $\Delta E_{int} = Q$. Il calore specifico molare a volume costante è pari a $c_V = \frac{3}{2}R$ e il calore sarà

$$\Delta E_{int} = Q = nc_V \Delta T = 1.00 \times 1.5 \times 8.31 \times 300 = 3740\,J$$

La trasformazione $2 \to 3$ è adiabatica per cui non vi è scambio di calore e quindi $Q = 0$; si avrà allora $\Delta E_{int} = -L = -nC_V \Delta T$, relazione valida per ogni tipo di trasformazione di un gas ideale che ha prodotto la variazione di temperatura data; pertanto,

$$\Delta E_{int} = -1\,mol \times 12.5\,\frac{J}{mol\,K} \times 145\,K = -1812\,J$$

La trasformazione $1 \to 3$ è isobara (a pressione costante) con compressione e

$$L = -nR\Delta T = 1.00\,mol \times 8.31\,\frac{J}{mol\,K} \times 155\,K = -1288\,J$$

il calore scambiato è

$$Q = -nC_P \Delta T = 1.00 \times \frac{5}{2}R \times 155 = -3220\,J$$

la variazione di energia interna

$$\Delta E_{int} = Q - L = 3220 - 1288 = -1932\,J$$

3.4 Variazioni di Entropia

Esercizio 135. Un gas ideale compie un'espansione isoterma reversibile a $132\,^{\circ}C$. L'entropia del gas aumenta a $46.0\,J/K$. Trovare la quantità di calore assorbita.

Soluzione. In una trasformazione isoterma la variazione di entropia è espressa da

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

pertanto

$$Q = \Delta S \cdot T = 46.0\,\frac{J}{K} \times 405\,K = 18680\,J$$

Esercizio 136. 2.5 moli di un gas ideale si espandono reversibilmente e isotermicamente a $360\,K$ fino a un volume doppio rispetto a quello iniziale. Trovare l'aumento di entropia del gas.

Soluzione. Nella trasformazione isoterma, dalla prima legge della termodinamica, $Q = L$. Calcoliamo il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione

$$L = nRT\ln 2 = 2.5\,mol \times 8.31\,\frac{J}{mol\,K} \times 360\,K \times \ln 2 = 5184\,J$$

Pertanto

$$\Delta S = \frac{5184\,J}{360\,K} = 14.4\,\frac{J}{K}$$

Esercizio 137. Un gas ideale compie un'espansione isoterma reversibile a $77.0\,°C$, aumentando il suo volume da $1.30\,l$ a $3.40\,l$. La variazione di entropia del gas è $22.0\,J/K$. Determinare il numero di moli del gas.

Soluzione. nella trasformazione isoterma vale $Q = L$. Il lavoro compiuto dal gas in espansione è

$$L = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$$

Se l'aumento di entropia è pari al valore indicato, allora

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

da cui

$$Q = \Delta S \cdot T = 22.0\,\frac{J}{K} \times 350\,K = 7700\,J$$

e quindi

$$n = \frac{L}{RT\ln\frac{V_f}{V_i}} = \frac{7700\,J}{8.31\,\frac{J}{mol\,K} \times 350\,K \times \ln\frac{3.40}{1.30}} = 2.75\,mol$$

Esercizio 138. Quattro moli di un gas ideale vengono espanse dal volume V_1 al volume $V_2 = 2V_1$. Se l'espansione è isoterma a una temperatura $T = 400\,K$, trovare il lavoro compiuto dal gas che si espande e la variazione di entropia. Determinare la variazione di entropia nel caso in cui la trasformazione sia adiabatica.

Soluzione. Nella trasformazione isoterma, dalla prima legge della termodinamica, $Q = L$. Calcoliamo il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione

$$L = nRT\ln 2 = 4\,mol \times 8.31\,\frac{J}{mol\,K} \times 400\,K \times \ln 2 = 9216\,J$$

Pertanto

$$\Delta S = \frac{9216\,J}{400\,K} = 23.1\,\frac{J}{K}$$

Nella trasformazione adiabatica $Q = 0$ e la variazione di entropia è pertanto nulla.

Esercizio 139. Trovare il calore assorbito e la variazione di entropia di un blocco di rame di $2.00\,kg$ la cui temperatura viene aumentata reversibilmente da $25\,°C$ a $100\,°C$. (Il calore specifico del rame è $386\,J/\,(kg\,K)$.

Soluzione. Il calore assorbito può essere determinato mediante la legge della termologia

$$Q = mc_s\Delta T = 2.00\,kg \times 386\,\frac{J}{kg\,K} \times 75\,K = 57900\,J$$

la variazione di entropia, variando la temperatura, deve essere calcolata come

$$\Delta S = mc_s \ln\frac{T_f}{T_i} = 2.00 \times 386 \times \ln\frac{373}{298} = 173\,\frac{J}{K}$$

Esercizio 140. La temperatura di $1.00\,mol$ di un gas monoatomico viene innalzata reversibilmente da $300\,K$ a $400\,K$ a volume costante. Trovare la variazione dell'entropia del gas.

Soluzione. Questa trasformazione è isocora e quindi $L = 0$ e l'energia interna sarà

$$E_{int} = \frac{3}{2}nRT$$

La variazione di tale energia rappresenterà quindi il calore assorbito

$$\Delta E_{int} = \frac{3}{2}nR\Delta T = 1.5 \times 1.00\,mol \times 8.31\,\frac{J}{kg\,K} \times 100\,K = 1247\,J$$

La variazione di entropia sarà

$$\Delta S = \frac{3}{2}nR\ln\frac{T_f}{T_i} = 1.5 \times 1.00\,mol \times 8.31\,\frac{J}{kg\,K} \times \ln\frac{400}{300} = 3.59\,\frac{J}{K}$$

Esercizio 141. Supponiamo che una stessa quantità di calore di $260\,J$ venga trasferita per conduzione da una sorgente di calore a temperatura di $400\,K$ a un'altra sorgente di temperatura $100\,K$. Calcolare la variazione di entropia.

Soluzione. La variazione è data da

$$\Delta S = \frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_i}{T_i} = \frac{260}{100}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1.95\,J$$

Esercizio 142. Una barra di ottone è a contatto termico con una sorgente di calore a $130\,°C$ a un'estremità e con una sorgente a $24.0\,°C$ all'altra estremità. Calcolare la variazione totale di entropia prodotta dalla conduzione di $5030\,J$ di calore attraverso la barra.

Soluzione. consideriamo le due seguenti trasformazioni reversibili: la variazione di entropia della prima sorgente di calore è

$$\Delta S_1 = -\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{5030}{403} = -12.48\,\frac{J}{K}$$

la variazione di entropia della seconda sorgente è

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{5030}{297} = 16.94\,\frac{J}{K}$$

per cui la variazione totale è

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -12.48 + 16.94 = 4.46\,\frac{J}{K}$$

Esercizio 143. A bassissima temperatura il calore specifico molare C_V di molti solidi è approssimativamente pari a AT^3, dove A è una costante caratteristica della sostanza. Per l'alluminio si ha $A = 3.15 \cdot 10^{-5}\,\frac{J}{mol \cdot K^4}$. Trovare il salto entropico relativo a 4.00 moli di alluminio quando la loro temperatura cresce da $5.00\,K$ a $10.00\,K$.

Soluzione. Applicando il primo principio della termodinamica si ha $dQ - dL = dE_{int}$ considerando processi reversibili nei quali il gas mantenga, per piccoli passi, la sua condizione di equilibrio. Nel nostro caso non si ha variazione di volume per cui, dividendo tutto per T, si ha

$$\frac{dQ}{T} = nC_V\frac{dT}{T}$$

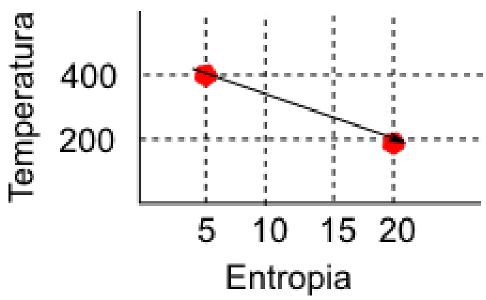
poiché C_V è variabile, è necessario eseguire l'integrazione di tale relazione

$$\int \frac{dQ}{T} = n\int AT^3\frac{dT}{T} = n\int AT^2 dT$$

l'integrale va calcolato nell'intervallo $5.00 - 10.00\,K$, per cui

$$\Delta S = \left(nA\frac{T^3}{3}\right)_{5.00}^{10.00} = 4.00 \times 3.15 \cdot 10^{-5} \times \left(\frac{1000}{3} - \frac{125}{3}\right) = 3.68 \cdot 10^{-2}\,\frac{J}{K}$$

Esercizio 144. Un campione di $2.00\,g$ di un gas monoatomico ideale percorre il processo reversibile mostrato nel grafico $S - T$ in figura. Trovare il calore assorbito dal gas; la variazione di energia interna e il lavoro compiuto dal gas.



Soluzione. Il calore assorbito può essere direttamente ottenuto dall'area sottesa dal tratto di retta che descrive la variazione della temperatura in funzione dell'entropia, per cui

$$Q = \frac{(400+200)\times 15}{2} = 4500\,J$$

per un gas ideale sottoposto ad una trasformazione qualunque, si può scrivere

$$\Delta E_{int} = nC_V\Delta T = n\frac{3}{2}R\Delta T = 2.00\times 1.5\times 8.31\times(200-400) = -4986\,J$$

dalla prima legge della termodinamica, $\Delta E_{int} = Q - L$, possiamo calcolare il lavoro compiuto

$$L = Q - \Delta E_{int} = 4500 + 4986 = 9486\,J$$

Esercizio 145. È possibile estrarre calore dall'acqua a 0.0°C e a pressione atmosferica senza farla congelare, se si agita un poco l'acqua. Supponete che $1.00\,g$ di acqua vengano raffreddati in questo modo finché la sua temperatura sia quella dell'aria circostante, che è a $-5.00\,°C$. La goccia a questo punto si congela bruscamente e trasferisce del calore all'aria finché non torna a $-5.00\,°C$. Trovare la variazione di entropia.

Soluzione. Possiamo dividere il processo nei tre seguenti stati reversibili: la goccia d'acqua si trova allo stato 1 con $T_1 = 268\,K$, passa allo stato 2 quando si liquefa a $T_2 = 273\,K$ e infine congela allo stato 3 con $T_3 = T_2$, e poi nello stato 4 ripassa allo stato solido con $T_4 = T_1$. La variazione di entropia ad ogni passaggio è la seguente:

$$\begin{aligned}
\Delta S_1 &= mc_{acqua}\ln\left(\tfrac{T_2}{T_1}\right)\\
\Delta S_2 &= \tfrac{-mL}{T_2}\\
\Delta S_3 &= mc_{ghiaccio}\ln\left(\tfrac{T_4}{T_3}\right) = -mc_{ghiaccio}\ln\left(\tfrac{T_2}{T_1}\right)
\end{aligned}$$

la variazione totale sarà quindi

$$\Delta S = mc_{acqua}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{mL}{T_2} - mc_{ghiaccio}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

sostituendo i valori numerici assegnati si ottiene

$$\Delta S = 1.00\cdot 10^{-3}\left[4186\times\ln\left(\frac{273}{268}\right) - \frac{333}{273} - 2220\times\ln\left(\frac{273}{268}\right)\right] = -1.18\,\frac{J}{K}$$

Esercizio 146. In un esperimento sui calori specifici, $200\,g$ di alluminio ($c_s = 900\,J/kg\cdot K$) a $100\,°C$ vengono mischiati con $50.0\,g$ di acqua a $20\,°C$. Calcolare la temperatura di equilibrio e trovare la variazione di entropia dell'alluminio e dell'acqua. Calcolare, infine, la variazione di entropia del sistema.

Soluzione. La legge della calorimetria indica che il calore necessario a riscaldare un corpo è dato da $Q = mc_s\Delta T$; supponiamo che tutto il calore ceduto dall'alluminio venga assorbito dall'acqua. In questo caso

$$m_{Al}c_s^{Al}\Delta T + m_{acqua}c_s^{acqua}\Delta T = 0$$

per cui
$$0.200\,kg \times 900\,\frac{J}{kg \cdot K} \times (100 - T_{eql}) = 0.050\,kg \times 4186\,\frac{J}{kg \cdot K} \times (T_{eql} - 20)$$
risolvendo rispetto a T_{eql} si ottiene:
$$(209.3 + 180)\,T_{eql} = 18000 + 4186$$
$$T_{eql} = \frac{22186}{389.3} = 57.0\,^{\circ}C$$
La variazione di entropia dell'alluminio è
$$\Delta S_1 = mc_{Al} \ln\left(\frac{330}{373}\right) = -22.1\,\frac{J}{K}$$
la variazione di entropia dell'acqua è
$$\Delta S_2 = mc_{acqua} \ln\left(\frac{330}{293}\right) = 24.9\,\frac{J}{K}$$
la variazione di entropia del sistema è
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -22.1 + 24.9 = 2.8\,\frac{J}{K}$$

Esercizio 147. Un blocco di rame di $50.0\,g$ a una temperatura di $400\,K$ viene posto in un contenitore isolante con un blocco di piombo di $100\,g$ a una temperatura di $200\,K$. Trovare la temperatura di equilibrio di questo sistema di due blocchi; la variazione di energia interna del sistema quando passa dalla condizione iniziale a quella di equilibrio; la variazione di entropia del sistema.

Soluzione. La condizione di equilibrio si ottiene quando tutta la somma dell'energia ceduta da un blocco e di quella assorbita dall'altro blocco è nulla.
$$m_{Cu}c_s^{Cu}\Delta T + m_{Pb}c_s^{Pb}\Delta T = 0$$
pertanto
$$0.050\,kg \times 386\,\frac{J}{kg \cdot K} \times (400 - T_{eql}) = 0.100\,kg \times 128\,\frac{J}{kg \cdot K} \times (T_{eql} - 200)$$
risolvendo rispetto a T_f si ha
$$7920 - 19.3T_{eql} = 12.8T_{eql} - 2560$$
da cui
$$T_{eql} = \frac{10480}{32.1} = 326\,K$$
Nella trasformazione non vi è scambio di calore né lavoro compiuto per cui la variazione di energia interna è nulla. La variazione di entropia del rame è
$$\Delta S_1 = mc_{Cu} \ln\left(\frac{326}{400}\right) = -3.95\,\frac{J}{K}$$
la variazione di entropia del piombo è
$$\Delta S_2 = mc_{Pb} \ln\left(\frac{326}{200}\right) = 6.25\,\frac{J}{K}$$
la variazione di entropia del sistema sarà
$$\Delta S = -3.95 + 6.25 = 2.30\,\frac{J}{K}$$

Problema 148. Un cubetto di ghiaccio di $10\,g$ a $-10\,°C$ viene immerso in un lago la cui temperatura è di $15\,°C$. Calcolare la variazione di entropia del sistema quando il cubetto di ghiaccio raggiunge l'equilibrio termico con il lago. Il calore specifico del ghiaccio è $2220\,J/\left(kg \cdot K\right)$.

Soluzione. Possiamo supporre che la temperatura del lago non subisca una diminuzione vista la enorme sproporzione nelle masse dei due componenti il sistema cubetto-acqua del lago. Pertanto la temperatura di equilibrio si può considerare pari a quella dell'acqua del lago. La variazione di entropia del cubetto, dovrà essere calcolata considerando tutti i passaggi di fase, 1) ghiaccio a $-10\,°C$ alla temperatura di fusione di $0\,°C$, 2) scioglimento di tutto il ghiaccio e 3) raggiungimento della temperatura di equilibrio, cioè

$$\Delta S_1 = mc_{ghiaccio} \ln\left(\frac{273}{263}\right) = 0.83\,\frac{J}{K}$$

il calore necessario a fondere tutto il ghiaccio è

$$Q = Lm = 333000\,\frac{J}{kg} \times 0.01\,kg = 3330\,J$$

la variazione di entropia è pertanto

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T} = \frac{3330}{273} = 12.2\,\frac{J}{K}$$

infine

$$\Delta S_3 = mc\ln\left(\frac{288}{273}\right) = 2.24\,\frac{J}{K}$$

La variazione di entropia del ghiaccio sarà

$$\Delta S_{ghiaccio} = 0.83 + 12.2 + 2.24 = 15.27\,\frac{J}{K}$$

Negli stessi tre passaggi il lago cede le quantità di calore:

$$Q_1 = -mc\left(T_f - T_1\right) = -0.010\,kg \times 2220\,\frac{J}{kg\,K} \times 10\,K = -222\,J$$

$$Q_2 = -Lm = -333000\,\frac{J}{kg} \times 0.01\,kg = -3330\,J$$

$$Q_3 = -mc\left(T_f - T_1\right) = -0.010\,kg \times 4186\,\frac{J}{kg\,K} \times 15\,K = -628\,J$$

La quantità totale di calore ceduta è

$$Q = -\left(222 + 3330 + 628\right) = -4180\,J$$

e la variazione di entropia è (il lago manterrà nel complesso la stessa temperatura, vista l'enorme differenza tra le due masse d'acqua)

$$\Delta S_{lago} = -\frac{4180\,J}{288} = -14.5$$

La variazione totale del sistema sarà

$$\Delta S = 15.27 - 14.5 = 0.77\,\frac{J}{K}$$

Esercizio 149. Un cubetto di ghiaccio di $8.0\,g$ a $-10°C$ viene immerso in un thermos contenente $100\,cm^3$ di acqua a $20°C$. Trovare la variazione di entropia del sistema quando viene raggiunto uno stato finale di equilibrio. Il calore specifico del ghiaccio è $2220\,\frac{J}{kg\,K}$.

Soluzione. Il calcolo della variazione di entropia si divide anche in questo caso in tre passi

$$\Delta S_1 = 0.008 \times 2220 \times \ln\left(\frac{273}{263}\right) = 0.663\,\frac{J}{K}$$

la variazione di entropia nella fusione totale del ghiaccio è

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T} = \frac{333000 \times 0.008}{273} = 9.76\,\frac{J}{K}$$

infine la variazione per il raggiungimento della temperatura di equilibrio (pari a $292\,K$)

$$\Delta S_3 = 0.008 \times 4190 \times \ln\left(\frac{292}{273}\right) = 2.26\,\frac{J}{K}$$

La variazione di entropia del ghiaccio sarà

$$\Delta S_{ghiaccio} = 0.663 + 9.76 + 2.26 = 12.69\,\frac{J}{K}$$

Negli stessi tre passaggi l'acqua cede le quantità di calore:

$$Q_1 = -mc\,(T_f - T_1) = -0.008\,kg \times 2220\,\frac{J}{kg\,K} \times 10\,K = -177.6\,J$$

$$Q_2 = -Lm = -333000\,\frac{J}{kg} \times 0.008\,kg = -2664\,J$$

$$Q_3 = -mc\,(T_f - T_1) = -0.008\,kg \times 4190\,\frac{J}{kg\,K} \times 20\,K = -670.4\,J$$

La quantità totale di calore ceduta è

$$Q = -3512\,J$$

e la variazione di entropia è (il lago manterrà nel complesso la stessa temperatura, vista l'enorme differenza tra le due masse d'acqua)

$$\Delta S_{lago} = -\frac{3512\,J}{292} = -12.03$$

La variazione totale del sistema sarà

$$\Delta S = 12.69 - 12.03 = 0.66\,\frac{J}{K}$$

Esercizio 150. Una miscela di $1773\,g$ di acqua e $227\,g$ di ghiaccio a $0.00\,°C$ viene portata, durante un processo reversibile, a uno stato di equilibrio finale dove il rapporto delle masse acqua-ghiaccio è $1:1$ a $0.00\,°C$. Calcolare la variazione di entropia del sistema durante questo processo (Il calore di fusione dell'acqua è $333\,KJ/kg$). Il sistema viene quindi riportato al primo stato di equilibrio, ma in modo irreversibile (con un becco Bunsen, ad esempio). Calcolare la variazione di entropia del sistema durante questo processo.

Soluzione. La massa totale è pari a $2000\,g$; affinché vi sia un rapporto finale di $1:1$ l'acqua deve solidificare in modo da avere $1000\,g$ di acqua e $1000\,g$ di ghiaccio. Ciò comporta che $773\,g$ di acqua passino allo stato solido. La temperatura iniziale e finale sono le stesse per cui il processo è isotermo. La quantità di calore è quindi

$$Q = -mL_m = -0.773\,kg \times 333000\,\frac{J}{kg} = -257409\,J$$

la variazione di entropia sarà

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{-257409\,J}{273\,K} = -943\,\frac{J}{K}$$

Riscaldando la miscela con una fiamma, si ritorna nella condizione iniziale, cioè con $1773\,g$ di acqua e $227\,g$ di ghiaccio. La variazione di entropia, ritornando alle stesse condizioni iniziali, sarà $\Delta S = +943\,\frac{J}{K}$.

Esercizio 151. Una mole di un gas monoatomico ideale, a una pressione iniziale di $5.00\,kPa$ e a una temperatura iniziale di $600\,K$, si espande da un volume iniziale $V_i = 1.00\,m^3$ a un volume finale $V_f = 2.00\,m^3$. Durante l'espansione, la pressione p e il volume V del gas sono legati dalla relazione

$$p = 5.00e^{\frac{(V_i - V)}{a}}$$

dove p è in kPa, V_i e V sono in m^3, e $a = 1.00\,m^3$. Trovare la pressione finale e la temperatura finale del gas; trovare il lavoro compiuto dal gas durante l'espansione; trovare variazione di entropia del gas durante l'espansione.

Soluzione. Calcoliamo la pressione finale tramite i dati assegnati, utilizzando la relazione che lega la pressione del gas al suo volume

$$p_f = 5.00e^{\frac{-1}{1}} = 1.840\,kPa$$

otteniamo ora la temperatura finale dalla legge dei gas

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}$$

da cui

$$T_f = \frac{p_f V_f}{p_i V_i} T_i = \frac{1.840\,kPa \times 2.00\,m^3}{5.00\,kPa \times 1.00\,m^3} \times 600\,K = 441\,K$$

il lavoro può essere calcolato solo integrando

$$W = \int_1^2 pdV = \int_1^2 5.00e^{\frac{(V_i - V)}{a}} dV = 5.00e^{\frac{V_i}{a}} \int_1^2 e^{\frac{-V}{a}} dV = 5.00\,kPae^{-1} \times \left(-ae^{\frac{-V}{a}}\right)_1^2 = 1840 \times \left[-1 \times \left(e^{-2} - e^{-1}\right)\right]$$

la variazione di entropia può essere calcolata utilizzando due semplici processi reversibili. Si ha pertanto

$$\Delta S = nR\ln\frac{V_f}{V_i} + n\frac{3}{2}R\ln\frac{T_f}{T_i} = 8.31\left(\ln\frac{2}{1} + 1.5 \times \ln\frac{441}{600}\right) = 1.92\,\frac{J}{K}$$

3.5 Macchine termiche

Esercizio 152. Una macchina termica ideale assorbe $52\,kJ$ di calore e ne scarica $36\,kJ$ ogni ciclo. Calcolare il rendimento e il lavoro compiuto in kJ per ogni ciclo.

Soluzione. Il rendimento può essere calcolato da

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{52-36}{52} = 0.31$$

e il lavoro compiuto per ogni ciclo è quindi, dalla relazione sopra

$$W = Q_1\eta = 52 \times 0.31 = 16\,kJ$$

Esercizio 153. Calcolare il rendimento di un impianto di potenza a combustibile fossile che ogni ora consuma $380\,ton$ di carbone per produrre lavoro utile alla potenza di $750\,MW$. Il calore di combustione di $1.0\,kg$ di carbone è $28\,MJ$.

Soluzione. Se $1.0\,kg$ di carbone produce $28\,MJ$, la quantità totale di calore consumata ogni ora sarà di

$$Q = 2.8 \cdot 10^7\,\frac{J}{kg} \times 3.80 \cdot 10^5\,kg = 1.06 \cdot 10^{13}\,J$$

La potenza è data dal rapporto tra il lavoro e il tempo; ciò consente di ottenere il lavoro utile, pari a

$$W = P\Delta t = 7.50 \cdot 10^8\,\frac{J}{s} \times 3600\,s = 2.7 \cdot 10^{12}\,J$$

Il rendimento è pertanto

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{2.7 \cdot 10^{12}\,J}{1.06 \cdot 10^{13}\,J} = 0.25 = 25\%$$

Esercizio 154. Un inventore afferma di avere ideato quattro macchine termiche, ognuna delle quali funziona tra sorgenti di calore a 400 e a $300\,K$. I dati di ogni macchina termica, per ogni ciclo di funzionamento, sono i seguenti: macchina $a)$: $Q_1 = 200\,J$, $Q_2 = -175\,J$, $W = 40\,J$; macchina $b)$: $Q_1 = 500\,J$, $Q_2 = -200\,J$, $W = 400\,J$; macchina $c)$: $Q_1 = 600\,J$, $Q_2 = -200\,J$, $W = 400\,J$; macchina $d)$: $Q_1 = 100\,J$, $Q_2 = -90\,J$, $W = 10\,J$. Stabilire quale di queste macchine viola la prima o la seconda legge della termodinamica.

Soluzione. Un motore ideale funzionante tra le due sorgenti di calore indicate ha un rendimento pari a

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300\,K}{400\,K} = 0.25$$

- caso a) Il rendimento di tale motore è $\eta = 1 - \frac{175}{200} = \frac{1}{8} = 0.125$, compatibile con il rendimento ideale; per ogni ciclo si ha una cessione di calore netta pari a $25\,J$ a fronte di un lavoro di $40\,J$. Si viola pertanto il primo principio.
- caso b) il rendimento è $\eta = 1 - \frac{200}{500} = 0.6$ incompatibile con il rendimento ideale; per ogni ciclo si ha una cessione di calore netta pari a $300\,J$ a fronte di un lavoro di $400\,J$. Si violano, pertanto, entrambi i principi.
- caso c) Il rendimento di tale motore è $\eta = 1 - \frac{200}{600} = 0.667$, incompatibile con il rendimento ideale; per ogni ciclo si ha una cessione di calore netta pari a $400\,J$ a fronte di un lavoro di $400\,J$. Si viola pertanto il secondo principio.

- caso d) Il rendimento di tale motore è $\eta = 1 - \frac{90}{100} = 0.10$, compatibile con il rendimento ideale; per ogni ciclo si ha una cessione di calore netta pari a $10\,J$ a fronte di un lavoro di $10\,J$. Non è violato alcun principio.

Esercizio 155. Un motore di un'automobile libera $8.2\,kJ$ di lavoro a ogni ciclo. Prima di una messa a punto, il rendimento è del 25%. Calcolare, per ogni ciclo, il calore assorbito dalla combustione del carburante e il calore scaricato nell'atmosfera. Dopo una messa a punto, il rendimento è del 31%. Trovare i nuovi valori delle quantità calcolate in precedenza a parità di lavoro svolto.

Soluzione. Il calore assorbito dalla combustione, ricavabile dalle relazione $\eta = \frac{W}{Q}$, è dato da

$$Q_{ass} = \frac{W}{\eta} = \frac{8.2}{0.25} = 33\,kJ$$

pertanto il calore scaricato nell'aria è

$$Q_{emesso} = 33\,kJ - 8.2\,kJ = 25\,kJ$$

se aumenta il rendimento, a parità di lavoro, avremo allo stesso modo

$$Q_{ass} = \frac{W}{\eta} = \frac{8.2}{0.31} = 26\,kJ$$

e il calore emesso sarà

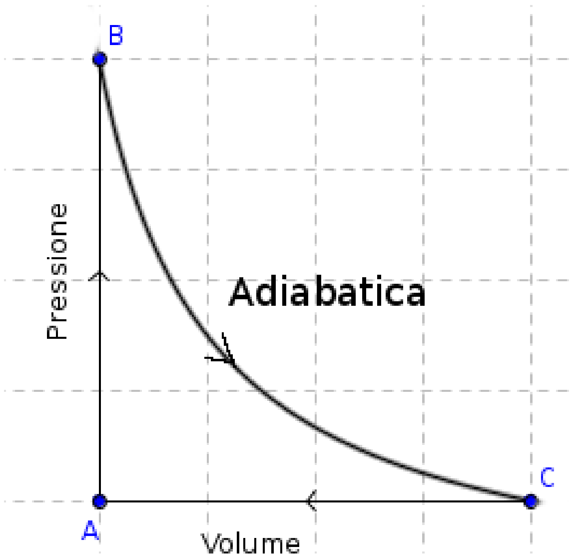
$$Q_{emesso} = 26\,kJ - 8.2\,kJ = 18\,kJ$$

Esercizio 156. In un ipotetico reattore a fusione nucleare, il combustibile è un gas deuterio a una temperatura di circa $7 \cdot 10^8\,K$. Se questo gas potesse essere usato per far funzionare una macchina termica ideale con $T_2 = 100\,°C$, trovare il suo rendimento.

Soluzione. il rendimento sarebbe

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{373\,K}{7 \cdot 10^8\,K} = 99.99995\,\%$$

Esercizio 157. A una mole di un gas monoatomico viene fatto percorrere il ciclo in figura. Il processo bc è un'espansione adiabatica; $p_B = 10.0\,bar$, $V_B = 1.00 \cdot 10^{-3}\,m^3$, $V_C = 8.00\,V_B$. Calcolare il calore fornito al gas, il calore restituito dal gas, il lavoro totale compiuto dal gas e il rendimento per ogni ciclo.



Soluzione. L'energia è ceduta sotto forma di calore durante il processo ab, che vede un aumento di pressione a parità di volume (trasformazione isocora: $W = 0$, $\Delta E_{int} = Q$); il calore è pertanto

$$Q = nC_V\Delta T = 1 \times \frac{3}{2}R\Delta T$$

ma per la legge dei gas ideali

$$\Delta T = \frac{p_B V_B - p_A V_A}{nR} = \frac{p_B - p_A}{nR}V_B$$

e si avrà

$$Q = \frac{3\left(p_B - p_A\right)}{2}V_B$$

per ricavare p_A, osserviamo che $p_A = p_C$; ora il processo bc è adiabatico ($Q = 0$, $\Delta_{int} = -L$) e

$$p_A = p_C = \frac{p_B V_B^\gamma}{V_C^\gamma} = 1.0 \cdot 10^6\, Pa \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}} = 3.167 \cdot 10^4\, Pa$$

il calore fornito è quindi

$$Q = \frac{3\left(p_B - p_A\right)}{2}V_B = \frac{3}{2}\left(1.0 \cdot 10^6 - 3.167 \cdot 10^4\right) 1.00 \cdot 10^{-3} = 1.47 \cdot 10^3\, J$$

L'energia è ceduta al gas sotto forma di calore durante il processo ca. Questo è una trasformazione a pressione costante, (trasformazione isobara $W = p\Delta V$). Il calore ceduto è

$$Q = nC_p\Delta T = \frac{5}{2}p_A\left(V_A - V_C\right) = \frac{5}{2} \times 3.167 \cdot 10^4 \times \left(-7.00 \cdot 10^{-3}\right) = -5.54 \cdot 10^2\, J$$

In un ciclo completo la variazione di energia interna è nulla ($\Delta E_{int}^{ciclo} = 0$), e

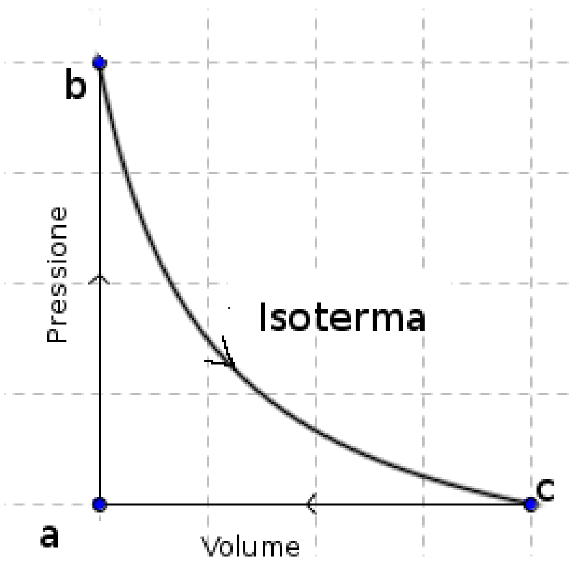
$$W = Q = 1.47 \cdot 10^3 - 5.54 \cdot 10^2 = 9.18 \cdot 10^2\, J$$

Infine l'efficienza è data da

$$\eta = \frac{W}{Q_{int}} = \frac{9.18 \cdot 10^2}{1.47 \cdot 10^3} = 0.624 = 62.4\,\%$$

Esercizio 158. Una mole di un gas ideale monoatomico inizialmente a un volume di $10\,l$ e a una temperatura di $300\,K$, viene riscaldata a volume costante fino a una temperatura di $600\,K$; viene fatta espandere isotermicamente fino alla sua pressione iniziale e alla fine viene compressa isobaricamente (cioè a pressione costante) fino al volume, alla pressione e alla temperatura iniziali. Trovare il calore fornito al sistema durante un ciclo; il lavoro totale compiuto dal gas durante un ciclo e il rendimento di questo ciclo.

Il ciclo può essere così schematicamente rappresentato (non disegnando l'isoterma relativa a $T = 300\,K$)



Soluzione. In a) abbiamo $V = 10^{-2}\,m^3$, $T = 300\,K$ e quindi $p = \frac{nRT}{V} = \frac{8.31\times300}{10^{-2}} = 2.49\cdot10^5\,Pa$. Durante questa trasformazione viene ceduto calore dall'esterno

$$Q_V = nC_V\Delta T = \frac{3}{2}R\Delta T = 1.5\times8.31\times300 = 3740\,J$$

Poiché il calore trasferito durante la fase isoterma è positivo, possiamo considerare anche che vi sia calore entrante. In una trasformazione isoterma Q è uguale al lavoro poiché $\Delta E = 0$. Avremo

$$W = nRT\ln\frac{V_f}{V_i} = nRT\ln2 = 3456\,J$$

pertanto, $Q_{is} = Q_V + W = 7200\,J$.
(b) Consideriamo ora la somma dei lavori durante i processi (nella trasformazione a volume costante il lavoro è nullo). Si ha

$$W = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + p_i\left(V_i - V_f\right)$$

ed essendo $\frac{V_{max}}{V_{min}} = 2$, si ha

$$W = nRT\ln2 + p_iV_i\left(1-\frac{V_f}{V_i}\right) = 1\,mol\times8.31\,\frac{J}{mol\,K}\left((600\,K\ln2) - 300\,K\right) = 960\,J$$

(c) calcoliamo ora il rendimento

$$\varepsilon = \frac{W}{Q} = \frac{960}{7200} = 13\%$$